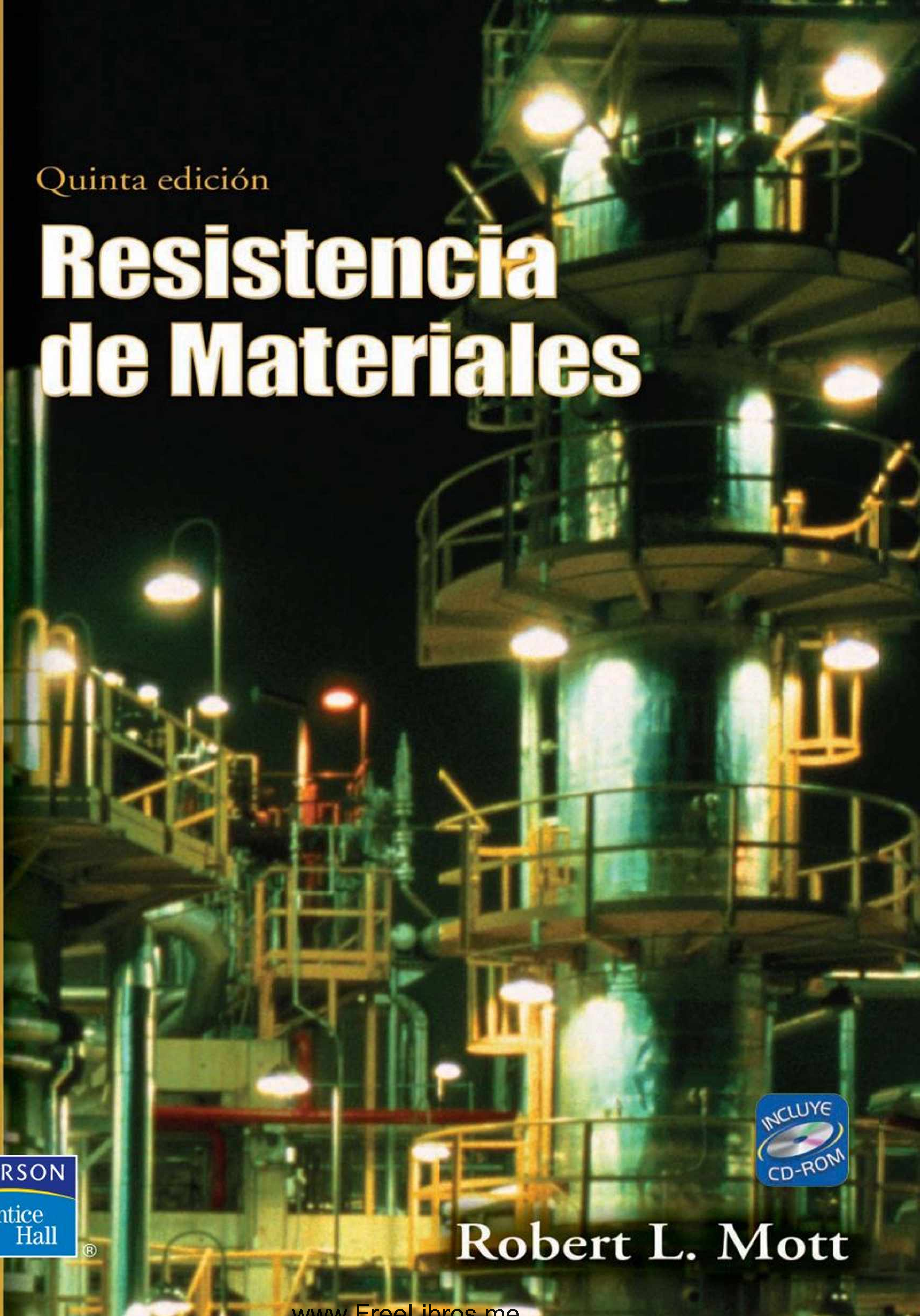
Quinta edición

Resistencia de Materiales



INCLUYE CD-ROM

PEARSON Prentice Hall®

Robert L. Mott

RESISTENCIA DE MATERIALES

RESISTENCIA DE MATERIALES

Quinta edición

ROBERT L. MOTT

University of Dayton

TRADUCCIÓN

Rodolfo Navarro Salas
Ingeniero mecánico
Universidad Nacional Autónoma de México

REVISIÓN TÉCNICA

Mario Antonio Ramírez Flores
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Unidad Azcapotzalco-Instituto Politécnico Nacional
México

Emilio Brito Martínez
Unidad Profesional Interdisciplinaria de
Ingeniería y Tecnología Avanzadas
Instituto Politécnico Nacional
México

PEARSON Educación®

México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

MOTT, ROBERT L.

Resistencia de materiales

Quinta edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2009

ISBN: 978-607-442-047-0

Área: Ingeniería

Formato: 20 × 25.5 cm Páginas: 792

ISBN 9780132368490

Edición en español
Editor: Luis Miguel Cruz Castillo
e-mail: luis.cruz@pearsoned.com
Editor de desarrollo: Bernardino Gutiérrez Hernández
Supervisor de producción: Juan José García Guzmán

QUINTA EDICIÓN, 2009

Edición en inglés
Editor in Chief: Vernon R. Anthony
Editor: Erik Krassow
Editorial: Nancy Kesterson
Project Manager: Kevin Happell
Desing Coordinator: Diane Ernsberger
Cover Designer: Jeff Vanik
Cover art: Getty Images
Production Manager: Deidra Schwartz
Director of Marketing: David Gesell
Executive Marketing Manager: Derril Trakalo
Marketing Assistant: Les Roberts

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. número 1031.

ISBN: 978-607-442-047-0

PEARSON Educación®

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 11 10 09 08

Contenido

Prefacio xi

1 **Conceptos básicos de resistencia de materiales** 1

La imagen completa 2
1–1 Objetivo de este libro: garantizar la seguridad 5
1–2 Objetivos de este capítulo 14
1–3 Procedimiento de solución de problemas 14
1–4 Sistemas de unidades básicas 15
1–5 Relación entre masa, fuerza y peso 16
1–6 Concepto de esfuerzo 18
1–7 Esfuerzo normal directo 20
1–8 Elementos de esfuerzo para esfuerzos normales directos 23
1–9 Concepto de deformación 24
1–10 Esfuerzo cortante directo 24
1–11 Elementos de esfuerzo en esfuerzos cortantes 30
1–12 Tamaños preferidos y perfiles estándar 30
1–13 Análisis experimental y computacional de esfuerzos 38

2 **Propiedades de diseño de materiales** 53

La imagen completa 54
2–1 Objetivos de este capítulo 55
2–2 Propiedades de diseño de materiales 55
2–3 Acero 71
2–4 Hierro fundido 77
2–5 Aluminio 78
2–6 Cobre, latón y bronce 80
2–7 Zinc, magnesio, titanio y aleaciones de níquel 80
2–8 No metales en ingeniería de diseño 82
2–9 Madera 82
2–10 Concreto 83

2–11 Plásticos 86
2–12 Compuestos 88
2–13 Selección de materiales 103

3 **Esfuerzo directo, deformación y diseño 111**

La imagen completa 112
3–1 Objetivos de este capítulo 114
3–2 Diseño de miembros sometidos a tensión o compresión directa 115
3–3 Esfuerzos normales de diseño 115
3–4 Factor de diseño 116
3–5 Métodos de diseño y guías para seleccionar factores de diseño 118
3–6 Métodos de calcular esfuerzo de diseño 122
3–7 Deformación elástica en miembros sometidos a tensión y compresión 127
3–8 Deformación provocada por cambios de temperatura 133
3–9 Esfuerzo térmico 137
3–10 Miembros hechos de más de un material 140
3–11 Factores de concentración de esfuerzo con esfuerzos axiales directos 143
3–12 Esfuerzo de apoyo 147
3–13 Esfuerzo de apoyo de diseño 151
3–14 Esfuerzo cortante de diseño 157

4 **Esfuerzo cortante torsional y deformación torsional 185**

La imagen completa y actividad 186
4–1 Objetivos de este capítulo 190
4–2 Par de torsión, potencia y velocidad de rotación 191
4–3 Esfuerzo cortante torsional en miembros con secciones transversales circulares 194
4–4 Derivación de la fórmula del esfuerzo cortante torsional 197
4–5 Momento polar de inercia de barras circulares sólidas 198
4–6 Esfuerzo cortante torsional y momento polar de inercia de barras circulares huecas 199
4–7 Diseño de miembros circulares sometidos a torsión 201
4–8 Comparación de miembros circulares sólidos y miembros circulares huecos 205
4–9 Concentraciones de esfuerzo en miembros sometidos a torsión 208
4–10 Torsión–deformación torsional elástica 215
4–11 Torsión en secciones no circulares 226

5 **Fuerzas cortantes y momentos flexionantes en vigas 239**

La imagen completa y actividad 240
5–1 Objetivos de este capítulo 245

5–2 Cargas en vigas, apoyos y tipos de vigas 246
5–3 Reacciones en los apoyos 254
5–4 Fuerzas cortantes y momentos flexionantes en el caso de cargas concentradas 258
5–5 Indicaciones para trazar diagramas de vigas con cargas concentradas 263
5–6 Fuerzas cortantes y momentos flexionantes en el caso de cargas distribuidas 270
5–7 Formas generales encontradas en diagramas de momento flexionante 276
5–8 Fuerzas cortantes y momentos flexionantes en vigas en voladizo 277
5–9 Vigas con cargas distribuidas linealmente variables 279
5–10 Diagramas de cuerpo libre de componentes de estructuras 281
5–11 Análisis matemático de diagramas de vigas 285
5–12 Vigas continuas: Teorema de los tres momentos 296

6 Centroides y momentos de inercia de áreas 314

La imagen completa y actividad 315
6–1 Objetivos de este capítulo 317
6–2 Concepto de centroide: perfiles simples 317
6–3 Centroide de formas complejas 318
6–4 Concepto de momento de inercia de un área 322
6–5 Momento de inercia de perfiles compuestos cuyas partes tienen el mismo eje centroidal 325
6–6 Momento de inercia de perfiles compuestos. Caso general: uso del teorema del eje paralelo 327
6–7 Definición matemática del momento de inercia 330
6–8 Secciones compuestas hechas de perfiles comercialmente disponibles 331
6–9 Momento de inercia de perfiles con todas las partes rectangulares 335
6–10 Radio de giro 336
6–11 Módulo de sección 340

7 Esfuerzo debido a flexión 352

La imagen completa y actividad 353
7–1 Objetivos de este capítulo 355
7–2 Fórmula de flexión 356
7–3 Condiciones para el uso de la fórmula de flexión 359
7–4 Distribución del esfuerzo en la sección transversal de una viga 361
7–5 Derivación de la fórmula de flexión 362
7–6 Aplicaciones: análisis de vigas 364
7–7 Aplicaciones: diseño de vigas y esfuerzos de diseño 367
7–8 Módulo de sección y procedimientos de diseño 369
7–9 Concentraciones de esfuerzo 376
7–10 Centro de flexión o centro de cortante 382
7–11 Perfiles preferidos para secciones transversales de vigas 385

7–12 Diseño de vigas hechas de materiales compuestos 389

8 Esfuerzos cortantes en vigas 413

La imagen completa y actividad 414
8–1 Objetivos de este capítulo 415
8–2 Importancia de los esfuerzos cortantes en vigas 417
8–3 Fórmula general de cortante 418
8–4 Distribución del esfuerzo cortante en vigas 424
8–5 Desarrollo de la fórmula general de cortante 431
8–6 Fórmulas especiales de cortante 433
8–7 Esfuerzo cortante de diseño 437
8–8 Flujo de cortante 439

9 Flexiones de vigas 452

La imagen completa y actividad 453
9–1 Objetivos de este capítulo 458
9–2 La necesidad de considerar flexiones de vigas 458
9–3 Principios generales y definiciones de términos 460
9–4 Flexiones de vigas con el método de la fórmula 463
9–5 Comparación de los tipos de apoyo de vigas 469
9–6 Superposición mediante fórmulas de flexión 475
9–7 Método de integración sucesiva 484
9–8 Método del área-momento 495

10 Esfuerzos combinados 525

La imagen completa y actividad 526
10–1 Objetivos de este capítulo 528
10–2 Elemento sometido a esfuerzo 529
10–3 Distribución de esfuerzos creada por esfuerzos básicos 530
10–4 Creación del elemento sometido a un esfuerzo inicial 536
10–5 Esfuerzos normales combinados 538
10–6 Esfuerzos normales y cortantes combinados 546
10–7 Ecuaciones para determinar esfuerzos en cualquier dirección 551
10–8 Esfuerzos máximos 554
10–9 Círculo de Mohr para determinar esfuerzo 557
10–10 Condición de esfuerzo en planos seleccionados 572
10–11 Caso especial en el que los dos esfuerzos principales tienen el mismo signo 575
10–12 Uso de las rosetas de medición de deformación para determinar esfuerzos principales 579

11 Columnas 600

La imagen completa y actividad 601
11–1 Objetivos de este capítulo 604
11–2 Relación de esbeltez 604
11–3 Relación de esbeltez de transición 609
11–4 Fórmula de Euler para columnas largas 611
11–5 Fórmula de J. B. Johnson para columnas cortas 611
11–6 Resumen - Fórmulas de pandeo 611
11–7 Factores de diseño para columnas y carga permisible 614
11–8 Resumen - Método de análisis de columnas 614
11–9 Hoja de cálculo para analizar columnas 618
11–10 Perfiles eficientes para secciones transversales de columnas 620
11–11 Especificaciones del AISC 621
11–12 Especificaciones de la Aluminum Association 623
11–13 Columnas con cargas no centradas 624

12 Recipientes a presión 637

La imagen completa y actividad 638
12–1 Objetivos de este capítulo 640
12–2 Distinción entre recipientes a presión de pared delgada y pared gruesa
12–3 Esferas de pared delgada 642
12–4 Cilindros de pared delgada 644
12–5 Cilindros y esferas de pared gruesa 647
12–6 Procedimientos de análisis y diseño de recipientes a presión 649
12–7 Hoja de cálculo para analizar esferas y cilindros de pared gruesa 655
12–8 Esfuerzos cortantes en cilindros y esferas 656
12–9 Otras consideraciones de diseño para recipientes a presión 659
12–10 Recipientes a presión compuestos 662

13 Conexiones 667

La imagen completa y actividad 668
13–1 Objetivos de este capítulo 669
13–2 Modos de falla de juntas atornilladas 671
13–3 Diseño de conexiones atornilladas 672
13–4 Juntas remachadas 675
13–5 Juntas remachadas y atornilladas excéntricamente cargadas 677
13–6 Juntas soldadas con cargas concéntricas 680

Apéndice 689
Respuestas a problemas seleccionados 755
Índice 771

Prefacio

Objetivos del libro

La quinta edición de *Resistencia de materiales* cubre totalmente los temas importantes de resistencia de materiales, haciendo énfasis en aplicaciones, solución de problemas y diseño de miembros estructurales, dispositivos mecánicos y sistemas. El libro fue escrito para estudiantes que llevan un curso de Resistencia de materiales, Mecánica de materiales o Mecánica de sólidos en un programa tecnológico o de ingeniería a nivel licenciatura, o en un programa de ingeniería aplicada.

Entre las virtudes de este libro se puede contar la amenidad en el estilo, una cobertura apropiada de los principios de resistencia de materiales para los profesores que imparten la materia, y una útil manera de abordar la solución de problemas y el diseño para el diseñador o ingeniero practicante. Quienes imparten programas en los campos mecánico, civil, de la construcción, arquitectónicos, industriales y de manufactura encontrarán que el libro es adecuado para un curso introductorio de resistencia de materiales.

Estilo

Esta obra prioriza las *aplicaciones* de los principios de resistencia de materiales en problemas de mecánica, de manufactura, estructurales y de construcción al tiempo que proporciona sólidas explicaciones de dichos principios. Al mismo tiempo hace hincapié en las *limitaciones* del uso de técnicas de análisis para garantizar su aplicación correcta. El libro utiliza tanto enfoques de análisis como de diseño.

Utilizamos una mezcla de unidades métricas SI y unidades de uso común en Estados Unidos, debido al uso dual evidente en la industria y la construcción.

Requisitos previos

Los estudiantes deberán ser capaces de aplicar los principios de estática antes de utilizar este libro. A manera de revisión, en el apéndice se proporciona un resumen de las técnicas principales de análisis de fuerzas y cantidad de movimiento. Asimismo, se incluyen varios problemas de ejemplo similares a la estática requerida para resolver problemas prácticos en el libro.

Si bien no es esencial, se recomienda que los estudiantes completen antes un curso de introducción al cálculo pues, como lo exigen las agencias de acreditación, se utiliza éste para desarrollar los principios y fórmulas clave. La aplicación de las fórmulas y la mayoría de las técnicas de diseño y solución de problemas pueden ser llevadas a cabo sin el uso del cálculo.

Características sobresalientes de este libro

La imagen completa. Los estudiantes deberán conocer la pertinencia del material que están estudiando y ser capaces de visualizar en qué parte los dispositivos y sistemas que les son conocidos están basados en los principios de resistencia de materiales. Por esta razón, cada capítulo inicia con una sección llamada *La imagen completa*; en ella se identifican los conceptos básicos desarrollados en el capítulo y se pide a los estudiantes pensar en ejemplos, derivados de su experiencia, en los que se utilicen estos conceptos. En ocasiones se les pide explorar aspectos nuevos por su cuenta para que descubran cómo funciona un producto o cómo puede fallar. Se les guía para que observen el comportamiento de dispositivos mecánicos, vehículos, maquinaria industrial, productos de consumo y estructuras. La filosofía educativa señala que los estudiantes aprenden mejor y retienen más cuando se emplean dichos métodos.

Aprendizaje basado en actividad. Las actividades de aprendizaje basado en actividad se integran a la sección *La imagen completa*, lo que ha sido una sobresaliente y exitosa característica en las ediciones previas. La actividad puede ser utilizada independientemente por los estudiantes, por el instructor como demostración en el salón de clases o como una combinación de estos métodos. Estas actividades permiten que el instructor y los estudiantes amplíen el diálogo de la imagen completa a experiencias prácticas, con el fin de tener una mejor apreciación y una mayor percepción física de los fenómenos implicados. Las actividades permiten que los estudiantes de diferentes disciplinas trabajen en equipo y aprendan unos de otros. Las actividades en general son simples y pueden ser completadas en un corto tiempo con materiales baratos y montajes rápidos. Se hace énfasis en la apreciación cualitativa de los fenómenos físicos con una modesta cantidad de medición involucrada. La investigación educativa ha demostrado que los estudiantes aprenden mejor cuando desarrollan actividades personalmente en contraste con sólo asistir a conferencias. Además, este enfoque mejora la retención de las habilidades junto con una mayor habilidad de transferir el aprendizaje a nuevas y diferentes aplicaciones.

Técnicas de solución de problemas. Los estudiantes deberán ser capaces de resolver problemas reales, completar los cálculos necesarios, manipular unidades en ecuaciones, buscar datos apropiados y tomar buenas decisiones de diseño. Los problemas de ejemplo incluidos en este libro están diseñados para que dominen estos procesos. Además, deben aprender a comunicar los resultados de su trabajo a otros en el campo: un importante medio de comunicación es la presentación de las soluciones a problemas de una manera ordenada y bien documentada mediante el uso de métodos establecidos. Los problemas de ejemplo aparecen con un tipo de letra y diseño gráfico distintivos y se motiva a los estudiantes en el proceso de formular un método de solución que incluye:

a. Enunciado del objetivo del problema
b. Resumen de la información dada
c. Definición de la técnica de análisis a utilizar
d. Desarrollo detallado de los resultados con todas las ecuaciones utilizadas y manipulación de unidades
e. En ocasiones, comentarios sobre la solución para recordarle al lector los conceptos importantes implicados y juzgar si la solución es la apropiada
f. En ocasiones, los comentarios presentan métodos alternativos o mejoras al elemento máquina o miembro estructural que se esté analizando o diseñando.

El proceso de raciocinio del lector se lleva más allá de la respuesta solicitada, hasta una revisión crítica del resultado. Con este proceso, los diseñadores adquieren buenos hábitos de organización para solucionar sus propios problemas.

Métodos de diseño. El texto proporciona información más extensa sobre pautas a seguir para el diseño de dispositivos mecánicos y miembros estructurales que la que proporciona la mayoría de los libros sobre este tema. Los métodos de diseño están basados en otro de mis libros, *Diseño de elementos de máquinas*, cuarta edición, también publicado por Pearson Educación. El aprendizaje sobre diseño, además del análisis, incrementa el aprovechamiento del libro por parte de estudiantes y usuarios profesionales. Habrá algunos de ellos que no tomen el curso siguiente que hace hincapié en el diseño: deberán iniciarse en los principios de diseño en el curso introductorio de resistencia de materiales. Para aquellos que prosigan con un curso de diseño, llegarán a él con un mayor nivel de capacidad.

Propiedades del diseño de materiales. El capítulo 2 incluye información y análisis extensos sobre la aplicación apropiada de materiales de ingeniería de muchos tipos, tanto metálicos como no metálicos. Presenta una extensa introducción a la naturaleza de materiales compuestos, junto con comentarios a lo largo de todo el libro sobre la aplicación de materiales compuestos en varias clases de miembros que soportan carga. Se da información sobre las ventajas de los materiales compuestos con respecto a los estructurales tradicionales tales como metales, madera, concreto y plásticos. Se motiva al lector para que amplíe sus conocimientos y experiencia con el fin de que aprenda las técnicas de diseño y análisis requeridas para la aplicación apropiada de materiales compuestos. Tales materiales, en realidad, se diseñan para una aplicación específica y están disponibles tablas generales de propiedades de materiales.

El capítulo 2 también incluye una sección sobre selección de materiales basada en la sobresaliente publicación *Materials Selection in Mechanical Design*, tercera edición, de Michael E. Ashby, publicada por Elsevier-Butterworth-Heinemann (2005).

Problemas al final del capítulo. Al final de cada capítulo aparece un extenso conjunto de problemas para que el estudiante practique. En general, están organizados en torno a los temas principales y son presentados por grado de dificultad: los más simples al principio, seguidos por los más complejos. Al final de la mayoría de los capítulos se ofrecen problemas adicionales para práctica, repaso y diseño.

Apéndice extenso. Para complementar el uso de métodos de diseño, el apéndice proporciona información adicional sobre propiedades de los materiales, geometría de áreas comunes y perfiles estructurales comercialmente disponibles, factores de concentración de esfuerzo, fórmulas para deflexión de vigas, factores de conversión y mucho más. Esto ofrece una amplia variedad de problemas en el libro y la creación de pruebas y proyectos. Imparte realismo al libro y permite que el estudiante encuentre la información necesaria para solucionar un problema o completar un diseño.

Esta edición incluye una cantidad significativa de datos adicionales en el apéndice, en unidades métricas SI. Todos los datos de perfiles estructurales comercialmente disponibles incluyen tablas de datos SI además de los datos en unidades de uso común en Estados Unidos (sistema inglés de unidades). Los datos SI se tomaron de las versiones más recientes de publicaciones del American Institute of Steel Construction (AISC). Las tablas de datos SI y datos en unidades de uso común en Estados Unidos están coordinadas de tal suerte que los estudiantes e instructores puedan comparar con rapidez las designaciones y datos específicos de los dos sistemas. Los problemas formulados con datos de un sistema de unidades (por ejemplo, métricos SI) deberán ser resueltos utilizando las propiedades de dicho sistema.

Se agregó una tabla enteramente nueva sobre datos de propiedades de tubería mecánica para complementar los datos de tubería estándar del AISC y con el fin de que los diseñadores de dispositivos mecánicos o aplicaciones de manufactura dispongan de una variedad más amplia de medidas de secciones circulares, en particular en lo que se refiere al espectro de medidas más pequeñas.

Los datos incluidos en el apéndice sobre plásticos, acero estructural y aleaciones de níquel se expandieron en gran medida en esta edición junto con la correspondiente al análisis de estos materiales en el capítulo 2.

Ayudas electrónicas para la solución de problemas y diseño

La mayoría de los capítulos incluye tareas que requieren el uso de la computadora para resolverlas, junto con sugerencias para el uso hojas de cálculo, programas de computadora, software de álgebra y calculadoras graficadoras en relación con la resistencia de materiales. Dichas ayudas electrónicas, cuando se les utiliza para complementar el entendimiento básico de los principios presentados en el libro, permiten apreciar más a fondo los principios y su aplicación a problemas simples y complejos. Los capítulos incluyen ejemplos de hojas de cálculo sobre análisis de columnas y recipientes de presión.

Al final de la mayoría de los capítulos se incluye una lista de sitios Web relacionados con los temas cubiertos. Los sitios dirigen a los usuarios a un sinnúmero de recursos adicionales que complementan el texto. Algunos son de proveedores de productos o materiales comercialmente disponibles, en tanto que otros proporcionan ejemplos de análisis adicionales realizados en el libro o análisis más a fondo de ciertos temas. Se alienta a los usuarios para que busquen y exploren otros apoyos para entender la resistencia de materiales.

El CD-ROM adjunto contiene software que ayuda a los estudiantes a entender varios principios importantes de resistencia de materiales. Un conjunto de doce ayudas de aprendizaje refuerza la presentación de temas clave del libro, con ilustraciones dinámicas, coloridas y ejemplos resueltos paso a paso. Notas al margen indican dónde estas ayudas de aprendizaje son pertinentes. Cabe mencionar que todo el material incluido en el CD-ROM se encuentra en inglés.

También encontrará un poderoso paquete de software de análisis de vigas, útil para los cinco capítulos del libro que se ocupan de la fuerza cortante y momentos de flexión en vigas, centroides y momentos de inercia, esfuerzos producidos por flexión, esfuerzos cortantes en vigas, vigas estáticamente indeterminadas y deflexiones de vigas (capítulos 5 a 9).

Se advierte a los instructores y estudiantes sobre el uso apropiado del software de análisis de vigas.

> ***Los usuarios de software de computadora deben contar con una sólida comprensión de los principios de análisis y diseño para asegurar que los resultados están basados en fundamentos de análisis confiables. Recomendamos que el software de análisis de vigas sea utilizado sólo hasta después de dominar los principios en los que el software está basado, utilizando el estudio y técnicas manuales cuidadosas.***

La ventaja de utilizar el software después de un estudio previo apropiado es que muchos problemas prácticos más complejos pueden ser resueltos en el tiempo asignado y para que los estudiantes entiendan mejor el comportamiento de vigas de varias geometrías, materiales, patrones de carga y condiciones de apoyo. Pueden continuar en busca de varios diseños alternativos y trabajar hacia la consecución de resultados más óptimos.

También está disponible en línea un manual para el instructor. Dicho manual (en inglés) se encuentra en www.pearsoneducacion.net/mott. Para poder acceder a él debe solicitar una clave de acceso de instructor. Diríjase a **www.pearsoneducacion.net/mott**, haga clic en el título correspondiente a este libro, posteriormente en el vínculo Instructor Resource Center y luego en Register Today para obtener el registro correspondiente. Dentro de un periodo de 48 horas después de registrarse recibirá un mensaje de confirmación con una *clave de acceso de instructor*; si enfrenta problemas contacte a su representante local de Pearson. Una vez que haya recibido su clave, vaya al sitio e inicie una sesión para obtener instrucciones completas sobre cómo descargar los materiales de apoyo.

Ajustes al formato de la edición previa

Los usuarios de ediciones previas de este libro encontrarán una cantidad significativa de reordenamiento de la cobertura de algunos temas. Guiados por una intensa retroalimentación provista por los usuarios, el arreglo revisado es más simple. Algunos puntos sobresalientes de estos cambios son:

- El capítulo 1, Conceptos básicos de resistencia de materiales, se redujo en tamaño para centrarse en el material de introducción más convincente. Varias secciones sobre propiedades de materiales, esfuerzo y deformación fueron reubicadas en los capítulos 2 y 3.
- La cobertura de deformación producida por esfuerzos axiales se integró al capítulo 3, sobre esfuerzos directos, en lugar de ubicarla en un capítulo aparte.
- Todos los temas sobre esfuerzos combinados se consolidaron en un solo capítulo (el 10).
- Los análisis de vigas continuas y el teorema de tres momentos se incluyeron junto con el capítulo sobre Fuerzas cortantes y momentos flexionantes en vigas (5). Otros temas relacionados con vigas estáticamente determinadas se integraron al capítulo 9, Deflexión de vigas.
- La introducción de la propiedad de área del módulo de sección se incluyó en el capítulo sobre Centroides y momentos de inercia de áreas (6). Este tema se amplió al capítulo 7, Esfuerzo debido a flexión.

Presentación visual mejorada. La adición de un segundo color hace que el libro sea más atractivo: las ilustraciones, gráficas y tablas son más fáciles de utilizar e interpretar. Muchas ilustraciones mejoraron con la adición de gráficas tridimensionales, un mayor realismo y un uso más efectivo del sombreado, así como con la introducción del segundo color.

Reconocimientos

Agradezco la retroalimentación provista tanto por estudiantes como por los instructores que han utilizado las ediciones anteriores de este libro. También agradezco a mis colegas de la University of Dayton. Me gustaría darle las gracias a los participantes de un grupo de discusión que proporcionó información para la revisión de este libro. Janice Chambers, Portland Community College; Janak Dave, University of Cincinnati; David Dvorak, University of Maine; Frank Gourley, West Virginia University Institute of Technology, y Jack Zecher, Indiana University-Purdue University en Indianapolis (IUPUI). También deseo darle las gracias a los revisores de esta edición: Joana Finegan, Central Michigan University; Robert Michael, Pennsylvania State University, en Erie; y Thomas Roberts, Milwaukee Area Tecnical College, por sus valiosas sugerencias para mejorar el texto. Espero que esta edición haya implementado dichas sugerencias de una manera consistente con el enfoque general del libro.

Un reconocimiento especial para el profesor Jack Zecher, Indiana University-Purdue University en Indianapolis (IUPUI), por su experto desarrollo del software provisto en el CD-ROM que acompaña este libro. Los doce módulos de aprendizaje interactivo y el software de análisis de vigas se combinan muy bien con el texto y ofrecen a estudiantes e instructores valiosos recursos complementarios.

Robert L. Mott
University of Dayton

1

Conceptos básicos de resistencia de materiales

La imagen completa y actividad

1–1 Objetivo de este libro: garantizar la seguridad

1–2 Objetivos de este capítulo

1–3 Procedimiento de solución de problemas

1–4 Sistemas de unidades básicas

1–5 Relación entre masa, fuerza y peso

1–6 Concepto de esfuerzo

1–7 Esfuerzo normal directo

1–8 Elementos de esfuerzo para esfuerzos normales directos

1–9 Concepto de deformación

1–10 Esfuerzo cortante directo

1–11 Elementos de esfuerzo en esfuerzos cortantes

1–12 Tamaños preferidos y perfiles estándar

1–13 Análisis experimental y computacional de esfuerzos

La imagen completa

Conceptos básicos de resistencia de materiales

Mapa de análisis

- Los productos, máquinas y estructuras deberán diseñarse para que sean seguros y funcionen satisfactoriamente durante su uso pretendido.
- La seguridad es primordial. Los componentes que soportan carga no deben romperse durante su uso.
- La deformación excesiva es otra forma de falla.
- El pandeo, que ocurre cuando el perfil de un elemento de carga se vuelve inestable, se debe evitar.
- Aprenderá sobre la naturaleza básica de los esfuerzos y deformaciones en este curso.
- Será capaz de reconocer varios tipos de esfuerzos y deformaciones creados por diferentes situaciones de carga y apoyo o soporte.
- Analizará situaciones en las que más de una clase de esfuerzo es experimentado por un elemento de carga al mismo tiempo.
- El diseño requiere que usted determine el perfil y tamaño de un elemento de carga y que especifique el material del cual se tiene que hacer.
- Aprenderá cómo diseñar componentes de carga seguros de máquinas y estructuras.

Descubra

Piense en productos, máquinas y estructuras que le sean familiares y que contengan componentes que deben soportar cargas con seguridad. Para cada dispositivo que se le ocurra, escriba la siguiente información:

La función básica o propósito del dispositivo.

La descripción y bosquejos de sus componentes principales, en particular aquellos que se verán sometidos a fuerzas significativas.

El material del cual está hecho cada componente, ¿es un metal o un plástico? ¿Qué clase de metal? ¿Qué clase de plástico? ¿Es algún otro material?

¿Cómo está soportado cada componente dentro del producto, máquina o estructura?

¿Cómo se aplican las fuerzas al componente?

¿Cuál sería la consecuencia si el componente se rompe?

¿Cuánta deformación haría que el componente sea incapaz de realizar su función deseada?

Considere productos en torno a su casa, partes de su bicicleta, carro o motocicleta; edificios; juguetes; juegos mecánicos de parque de diversión; aviones y vehículos espaciales; buques; máquina de manufactura; equipo de construcción; maquinaria agrícola y otros.

Discuta estos productos y sistemas con sus colegas y con el instructor o facilitador del curso.

He aquí algunos ejemplos de sistemas mecánicos y estructurales y de la forma como se relacionan con el material que se estudiará en este libro.

1. En su casa, los pisos deben ser resistentes y rígidos para soportar las cargas producidas por las personas, muebles y aparatos [figura 1–1(a)]. Un piso típico se compone de una serie de viguetas apoyadas en muros o vigas, un subpiso encima de las viguetas y el piso terminado. Estos elementos actúan juntos para proporcionar un sistema de apoyo rígido. Los techos de dos aguas emplean armaduras para soportar grandes distancias entre los muros de sustentación y proporcionar apoyo para el recubrimiento de techo con teja, al mismo tiempo que permanecen livianos y se utilizan los materiales con eficiencia. Las sillas y mesas deberán diseñarse para soportar personas y otros materiales con seguridad y estabilidad. Incluso en el refrigerador, los anaqueles deben ser diseñados para soportar los pesados recipientes de leche y jugo al mismo tiempo que son ligeros y permitir el libre movimiento del aire enfriado sobre los alimentos. En la cochera, podría tener una escalera de tijera, un bastidor para abrir la puerta de la cochera, una podadora de césped y palas, que soportan grandes fuerzas cuando se utilizan. ¿Cuántos ejemplos más puede encontrar en casa?



(*a*)



(*d*)



(*b*)



(*e*)



(*c*)

FIGURA 1–1 Ejemplos de sistemas mecánicos y estructurales. [Fuente (***a***) The Stock Connection; (***b***) Doping Kindersley Media Library; (***c***) Photo Researchers, Inc.; (***d***) The Stock Connection; (***e***) Doping Kindersley Media Library].

2. Su bicicleta tiene un cuadro donde van montadas la tijeras, palancas de pedales y ruedas. El asiento y manubrio también están conectados al cuadro. Los pedales absorben las fuerzas ejercidas por sus pies y producen un momento de torsión a la palanca, la que impulsa la cadena a través de las ruedas dentadas, que a su vez impulsan la rueda trasera. Los varillajes que accionan el cambio de velocidades y los frenos disponen de numerosas palancas, eslabones y pernos que transmiten las fuerzas ejercidas por sus manos para realizar tareas importantes. Las ruedas y sus ejes deben diseñarse a ser fuertes y rígidos, capaces de resistir repetidas aplicaciones de fuerzas.
3. Un automóvil contiene cientos de piezas mecánicas que soportan, traban y mueven sistemas críticos [figura 1–1(c)]. Al abrir la puerta, desengancha el mecanismo de cerrojo; cuando la cierra, el cerrojo se reengancha, lo que mantiene la puerta cerrada con seguridad. Cuando inserta la llave y gira el encendido, el motor de arranque hace girar el motor hasta que funciona por su cuenta. En el interior del motor, el cigüeñal, las bielas, pistones y mecanismos de válvula operan en sincronía para proporcionar potencia a la transmisión e impulsar, luego la flecha motriz proporciona potencia a las ruedas. A medida que el carro se desplaza por la carretera, sus elementos de suspensión, amortiguadores y frenos se encargan del movimiento del chasis, aíslan de molestas vibraciones al compartimiento de pasajeros. En el interior del carro puede activar los limpiaparabrisas, ajustar la posición de su asiento o abrir una ventanilla. Todos estos dispositivos deben ser diseñados para que sean seguros, resistentes, rígidos y fáciles de operar.
4. Eche un vistazo a un sitio en construcción [figura 1–1(d)]. Un *bulldozer* está nivelando el terreno y requiere que se transmitan grandes fuerzas a través de sus varillajes y actuadores hidráulicos. Las grúas izan vigas, columnas, armaduras de techo y otros materiales de construcción hasta pisos elevados. Observe el diseño de los elementos de construcción. Las retroexcavadoras y los cargadores frontales cavan zanjas y vierten la tierra en camiones de volteo. Observe sus mecanismos. El camión de volteo cuenta con un cilindro hidráulico para trabajo pesado con el proposito de alzar su caja y descargar el material de construcción.
5. La aeronave y el transbordador espacial [figura 1–1(e)] cuentan con estructuras eficientes conocidas como diseños de revestimientos esforzados o monocoque. Muchas de las cargas son soportadas por el revestimiento de la nave, a su vez soportado por marcos situados dentro de fuselaje y alas. El control de la nave depende de los alerones y timones, que son accionados por sistemas hidráulicos y varillajes. El tren de aterrizaje debe soportar una carga grande durante el despegue y el aterrizaje al mismo tiempo que es capaz de ser guardado suavemente en el interior del cuerpo de la nave. En el compartimiento de los pasajeros, los pisos, los asientos, los anclajes de los cinturones de seguridad, los mecanismos de las puertas, los compartimientos de equipaje y las charolas de servicio deben ser diseñados para que sean fuertes, seguros y ligeros.

Éstos son sólo algunos de los muchos ejemplos de situaciones en las que puede utilizar sus conocimientos de resistencia de materiales en su carrera.

Este libro está organizado para presentar primero el análisis de esfuerzos básico, considerando la tensión directa, la compresión directa y el cortante directo. Le siguen los esfuerzos cortantes torsionales y los esfuerzos en vigas. En cada caso, aprenderá los principios fundamentales que rigen esta clase de esfuerzos, como analizar miembros reales de carga en cuanto a su capacidad de soportar esfuerzo y diseñar los miembros. Se aborda la deformación bajo carga junto con el análisis de esfuerzo.

Luego aprenderá sobre esfuerzos combinados, vigas estáticamente indeterminadas, recipientes a presión y conexiones.

En cada capítulo se dan numerosos ejemplos de problemas, para demostrar el enfoque utilizado en la solución de problemas de análisis y diseño real. Deberá desarrollar un alto nivel de habilidad para plantear ese tipo de problemas y documentar su procedimiento de solución, de modo que otros puedan entender y evaluar su trabajo.

1–1 OBJETIVO DE ESTE LIBRO: GARANTIZAR LA SEGURIDAD

Es esencial que cualquier producto, máquina o estructura sea seguro y estable cuando se someta a cargas ejercidas en él, durante cualquier uso predecible. El análisis y diseño de semejantes dispositivos o estructuras para garantizar la seguridad es el objetivo primordial de este libro.

La falla de un componente de una estructura puede ocurrir de varias maneras:

1. El material del componente podría fracturarse por completo.
2. El material puede deformarse excesivamente bajo carga, de modo que el componente no es adecuado para ese propósito.
3. La estructura podría volverse inestable y pandearse, y por lo tanto sería incapaz de soportar las cargas pretendidas.

Ejemplos de estos modos de falla le ayudarán a entender la importancia del aprendizaje de los principios de resistencia de materiales aplicada tal como se presenta en este libro.

Prevención de fallas por fractura. La figura 1–2 muestra dos varillas que soportan una pesada pieza fundida. Imagine que usted es la persona responsable de diseñar las varillas. Sin duda desearía asegurarse de que las varillas fueran suficientemente fuertes de modo de que no se rompan y dejen caer la pieza fundida, lo que posiblemente podría provocar daños y lesiones a las personas. Como el diseñador de las varillas, ¿qué información requeriría? ¿Qué decisiones de diseño tiene que tomar? A continuación se da una lista de preguntas que deberá hacer.

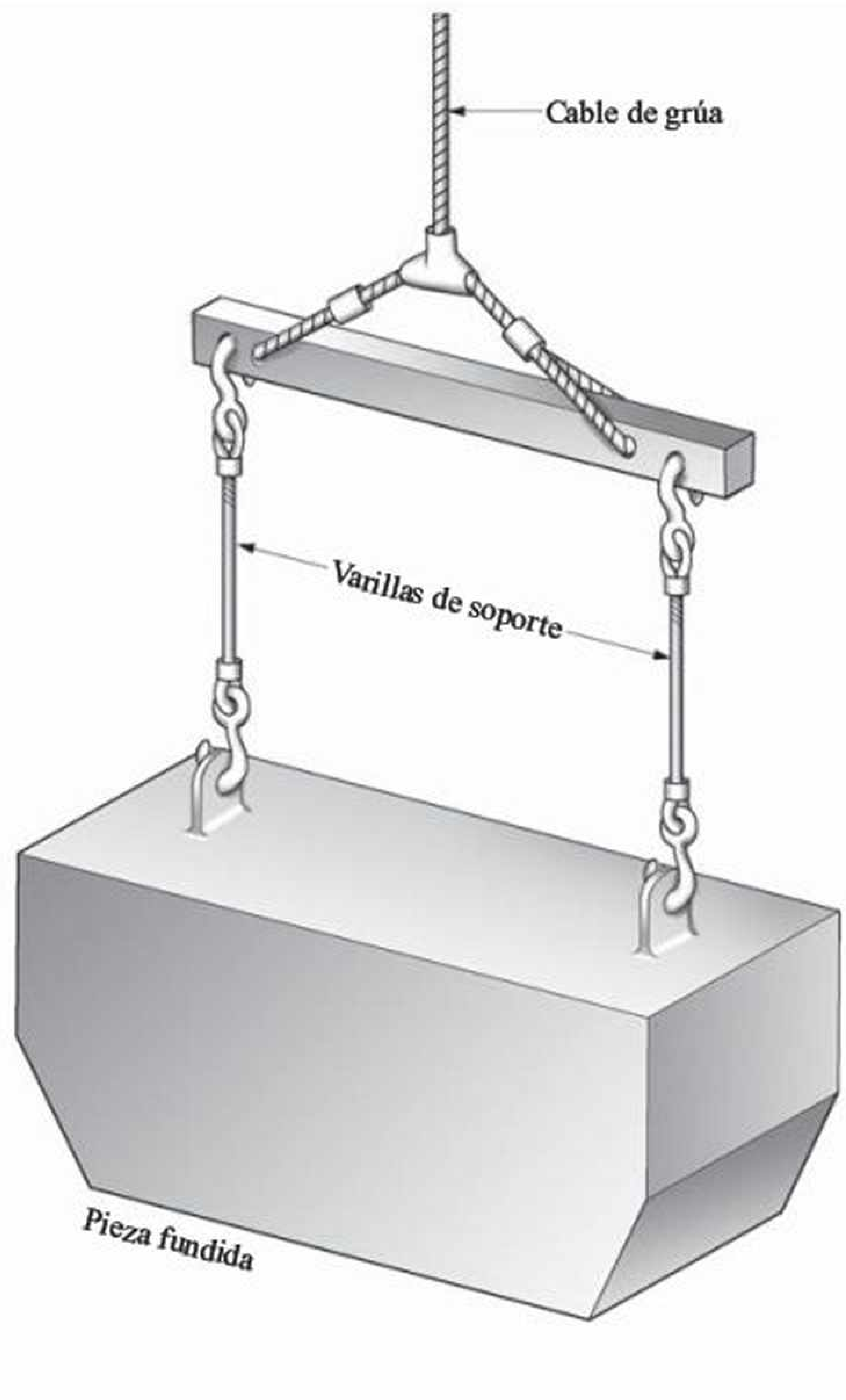


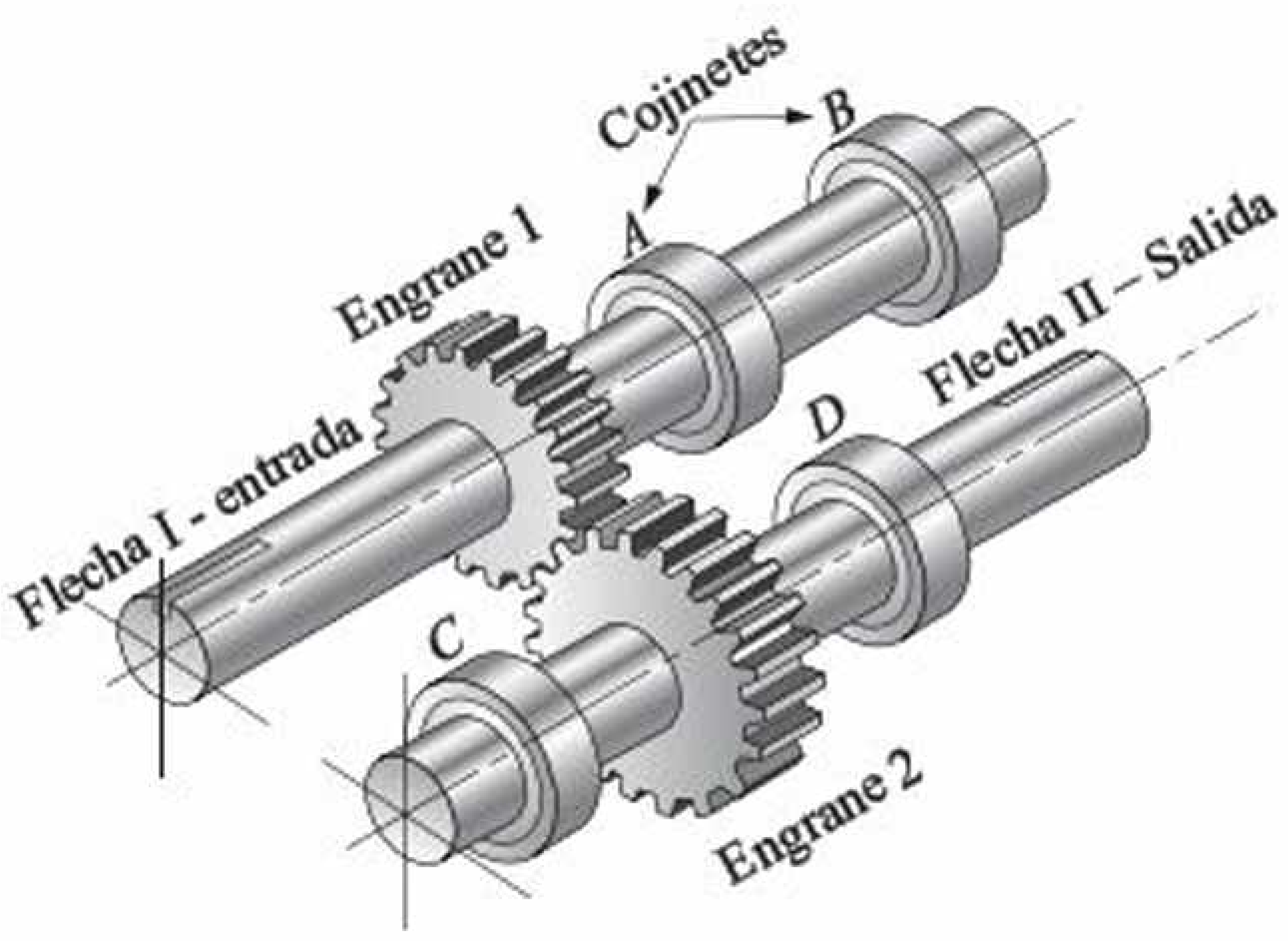
FIGURA 1–2 Dos varillas que soportan una pesada pieza fundida.

1. ¿Cuál es el peso y el tamaño físico de la pieza fundida?
2. ¿Dónde está su centro de gravedad? Esto es importante para decidir dónde colocar los puntos de sujeción de las varillas a la pieza fundida.
3. ¿Cómo se unirán las varillas a la pieza fundida y al sistema de soporte por la parte superior?
4. ¿De qué material se harán las varillas? ¿Cuál es su resistencia?
5. ¿Cuál será la forma y tamaño de la sección transversal de las varillas?
6. ¿Cómo se aplicará inicialmente la carga de la pieza fundida a las varillas: lentamente, con choque o impacto, o con un movimiento de tirón?
7. ¿Se utilizarán las varillas para muchos ciclos de carga durante su vida esperada?

Conociendo estos factores le permitirán que su diseño de varillas sea seguro, es decir, de modo que no se rompan bajo las condiciones de servicio previstas. Esto se discutirá con más detalle en los capítulos 1 y 3.

Prevención de deformación excesiva. Se utilizan engranes en dispositivos mecánicos para transmitir potencia en sistemas familiares como la transmisión de un camión, el sistema de conducción de una banda transportadora o el husillo de una máquina herramienta. Para una adecuada operación de los engranes, es esencial que estén apropiadamente alineados, de tal suerte que los dientes del engrane motriz queden perfectamente engranados con los del engrane conducido. La figura 1–3 muestra dos flechas con engranes perfectamente acoplados. Las flechas van soportadas sobre cojinetes rígidamente montados en la caja de la transmisión. Cuando los engranes transmiten potencia, se generan fuerzas que tienden a separarlos. Estas fuerzas son soportadas por las flechas, de modo que se cargan como se muestra en la figura 1–4. La acción de las fuerzas perpendiculares a las flechas tiende a combarlas, lo que provoca desalineación de los dientes de los engranes; por ello, las flechas se diseñan para mantener deflexiones en los engranes a un nivel mínimo, aceptable. Naturalmente, las flechas también se diseñan para que sean seguras en lo que respecta a las cargas aplicadas. En este tipo de carga, las flechas se consideran como *vigas*. En los capítulos 7 a 9 se analizan los principios del diseño de vigas para resistencia y deflexión.

FIGURA 1–3 Dos flechas con engranes acoplados.



Estabilidad y pandeo. Una estructura puede colapsarse si uno de sus elementos de soporte crítico es incapaz de mantener su forma bajo las cargas aplicadas, incluso si el material no falla por fractura. Un ejemplo es una columna o poste largo y esbelto sometido a una carga de compresión dirigida hacia abajo. Con una cierta carga crítica, la columna se *pandeará*. Es decir, repentinamente se doblará o combará y perderá su forma recta original. Cuando esto sucede, si la carga permanece aplicada, la columna se colapsa por completo. La figura 1–5 muestra una columna relativamente larga con una sección transversal delgada. Se Puede demostrar el pandeo de este tipo de columna con una regla sencilla o cinta métrica. Para prevenir pandeos se deberá especificar apropiadamente el material, forma y tamaño de la sección transversal de un elemento de una longitud dada, sometido a compresión con el fin de que permanezca recto bajo las cargas esperadas. El capítulo 11 presenta el análisis y diseño de columnas.

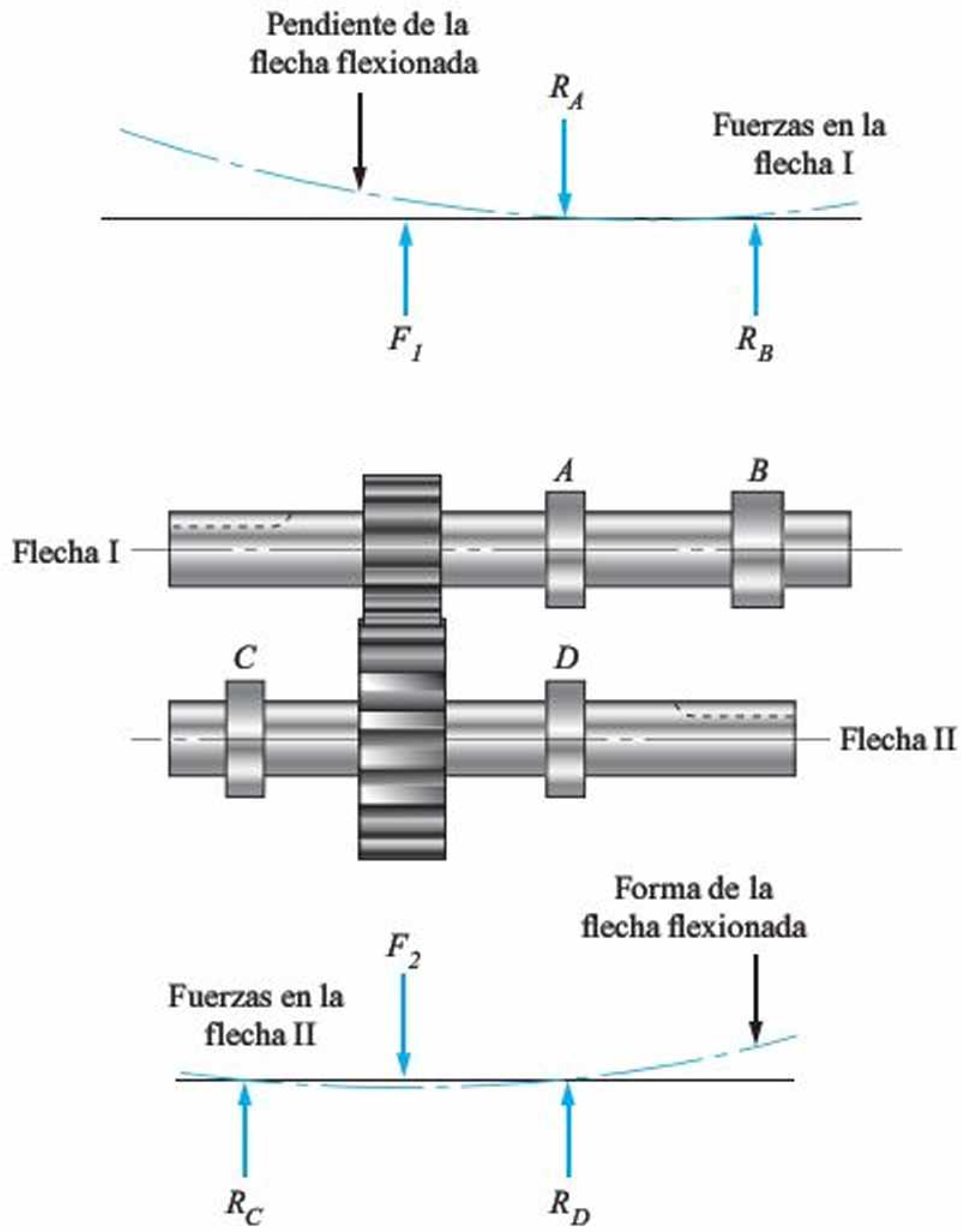


FIGURA 1–4 Fuerzas en las flechas I y II de la figura 1–3 con la deflexión resultante de las flechas.

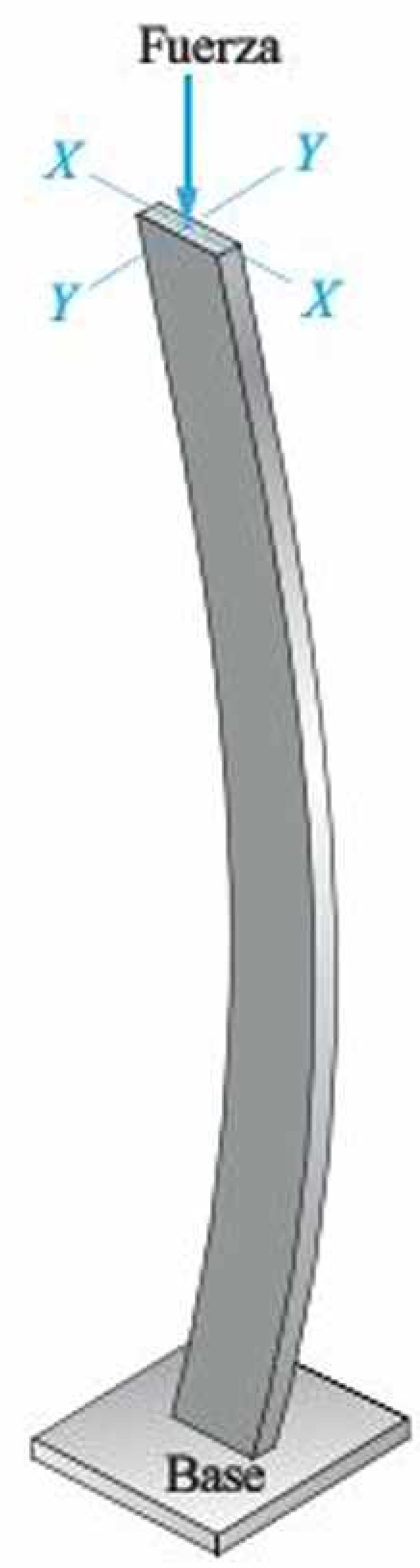


FIGURA 1–5 Una columna esbelta sometida a compresión que ilustra la inestabilidad elástica o pandeo.

En resumen, el diseño y análisis usando los principios de resistencia de materiales se requieren para asegurar que un componente es seguro respecto a *resistencia*, *rigidez* y *estabilidad*. Es objetivo de este libro ayudarle a adquirir la habilidad de diseñar y analizar componentes de estructuras y máquinas, para soportar carga, que sean seguros y adecuados para sus funciones planeadas.

Actividad Capítulo 1: Conceptos básicos de resistencia de materiales

¡Rompamos algo!

En la imagen completa exploró muchas situaciones en las cuales se aplican los principios de resistencia de materiales para crear estructuras y productos seguros que se desempeñen bien en sus aplicaciones pretendidas. Cuando se usan apropiadamente, los productos bien diseñados no se rompen.

No obstante, se puede aprender rompiendo algo intencionalmente. Esta destrucción puede aclararle muchas cosas, tales como:

1. Cómo se aplican las cargas.
2. Cómo están apoyados los miembros que soportan cargas.
3. Cómo la forma y tamaño de un objeto afectan su capacidad de soportar fuerzas.
4. Cómo se comportan los diferentes materiales bajo carga.
5. Dónde se inicia la falla de un objeto.

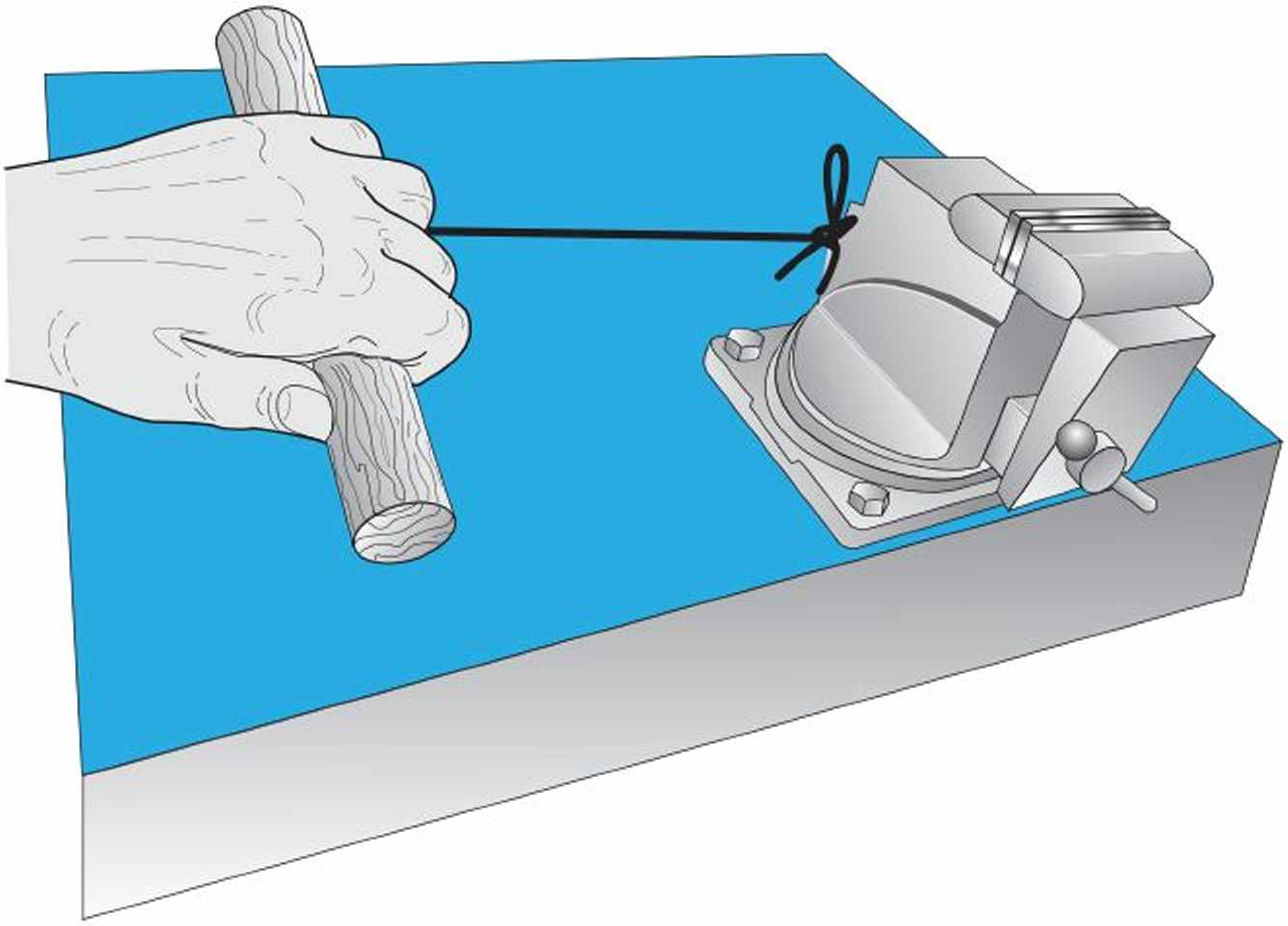
6. Cómo en general se deforman las cosas de una manera significativa antes de que en realidad se fracturen, a menos de que estén hechas de un material frágil.
7. Cómo juzgaría, en ocasiones, que un producto falló a causa de la deformación excesiva incluso cuando no se rompa.

He aquí algunos ejemplos de lo que puede hacer; se le insta a ser creativo y encontrar otros, pero sea cuidadoso:

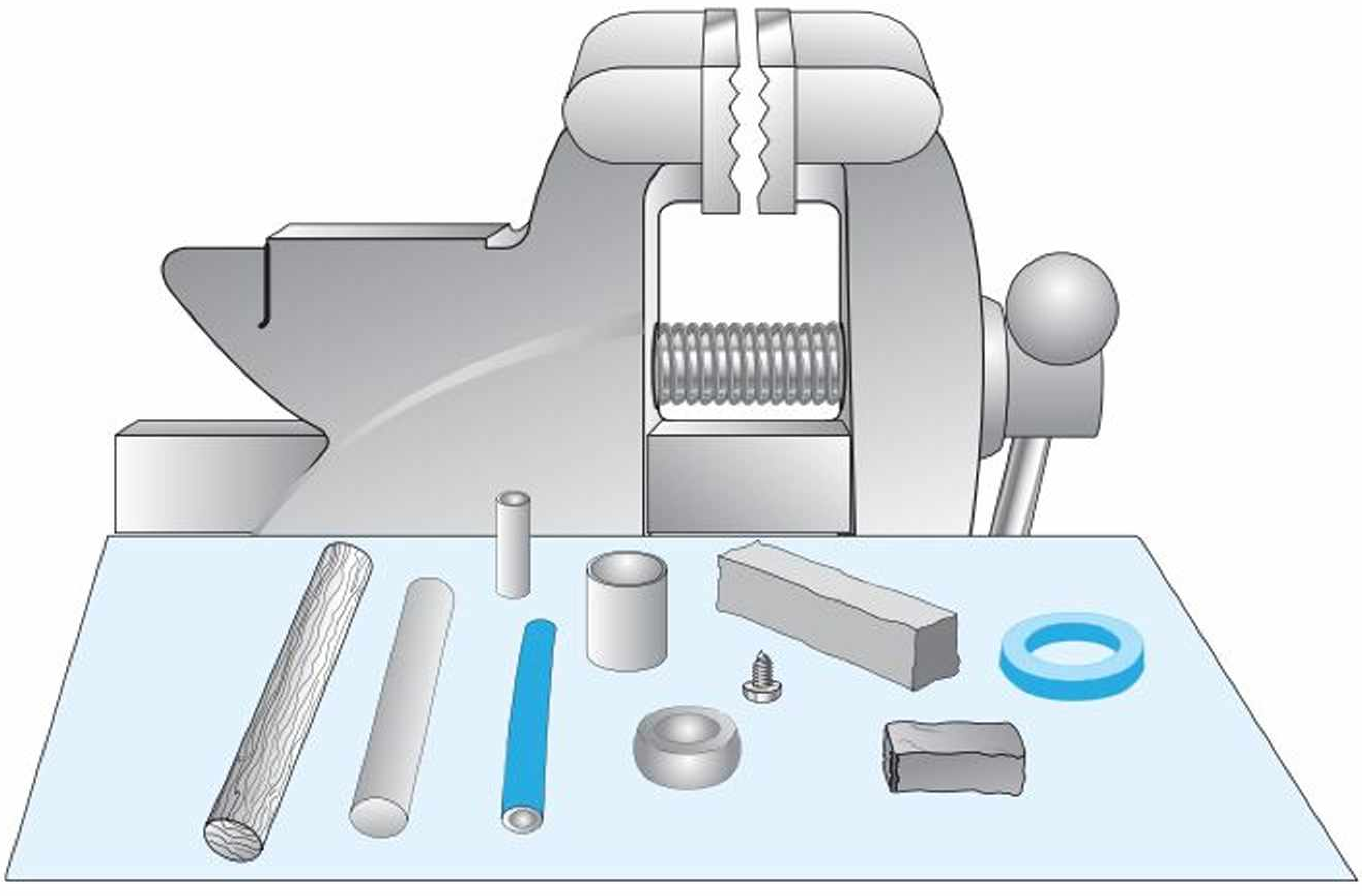
Asegúrese de utilizar el equipo de protección personal apropiado antes de que intente romper algo. Protéjase los ojos. Asegúrese de que las piezas rotas no salgan "volando" de modo que puedan herirlo a usted o a las personas que se encuentren cerca. Proceda con precaución cuando manipule cuchillos, destornilladores u otros objetos filosos. Proteja el mobiliario, ventanas, muros u otros objetos que pudieran sufrir daños.

a. **Falla a tensión directa** Ocurre cuando una fuerza axial de tensión sobrepasa la resistencia a la tensión del material en el cual se ejerce la fuerza.
   - Consiga un pedazo de cuerda como la que utilizaría para volar un cometa.
   - Ate un extremo a un lugar fijo resistente; por ejemplo, a un poste.
   - Busque una forma de sujetar la cuerda por el otro extremo de tal manera que le permita tirar de ella con una fuerza cada vez mayor hasta que se rompa. Quizás podría atar el extremo libre alrededor de un perno de madera más o menos grande, digamos de 20 mm (1.0 in) de diámetro y de más o menos 250 mm (10 in) de largo, de modo que pueda jalarla con ambas manos [figura 1–6(a)].
   - Pida a un colega observar la cuerda conforme aumente la fuerza (de nueva cuenta, ¡tenga cuidado!)
   - Haga que su colega describa cualquier evento que indique cuando la cuerda esté a punto de fallar; por ejemplo, el rompimiento de una pequeña hebra.
   - Intente observar el inicio de la falla usted mismo relajando la fuerza.
   - Si dispone de una cámara, tome una fotografía del área de falla.
   - En seguida reanude la aplicación de la fuerza, incrementándola lentamente hasta que se rompa la cuerda por completo. Observe el progreso de la falla.
   - Una vez que rompa la cuerda, colóquela sobre una mesa y observe con cuidado la naturaleza de los extremos rotos.
   - Documente su proceso y la apariencia de la falla.

b. **Falla a compresión directa** Ocurre cuando una fuerza de empuje axial directa hace que el material se comprima.
   - La pieza seleccionada para determinar la falla a compresión deberá ser bastante corta, con una amplia sección transversal, para que la falla a compresión directa ocurra con poca o nula deflexión o pandeo antes de la falla [figura 1–6(b)]. Observe que los perfiles largos y esbeltos sometidos a compresión, conocidos como *columnas*, fallan de una manera radicalmente diferente.
   - Pruebe un tramo corto, por ejemplo de 25 mm (1.0 in) o menor, de un perno cilíndrico de madera.
     - Una buena forma de aplicar la carga de compresión es con un tornillo de banco como los que se utilizan en un taller casero, un taller automotriz o un lugar de trabajo industrial.
     - Alinee el perno con cuidado de modo que la fuerza se aplique a lo largo del eje del cilindro.
     - Observe la falla, típicamente una cantidad significativa de aplastamiento, probablemente cerca de uno de los extremos. Las fibras de la madera tienden a evitar que el perno se resquebraje por completo.



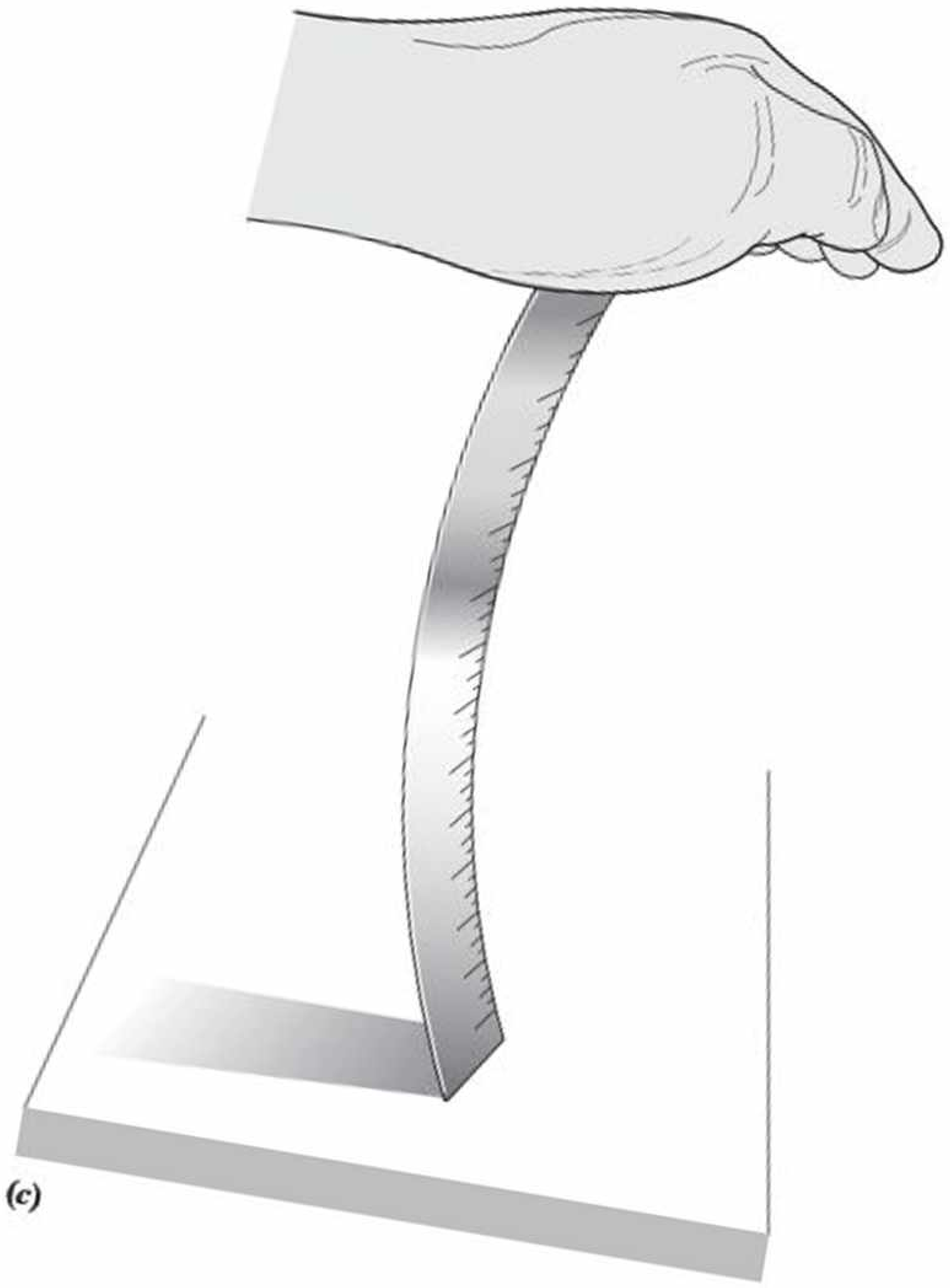
(*a*)



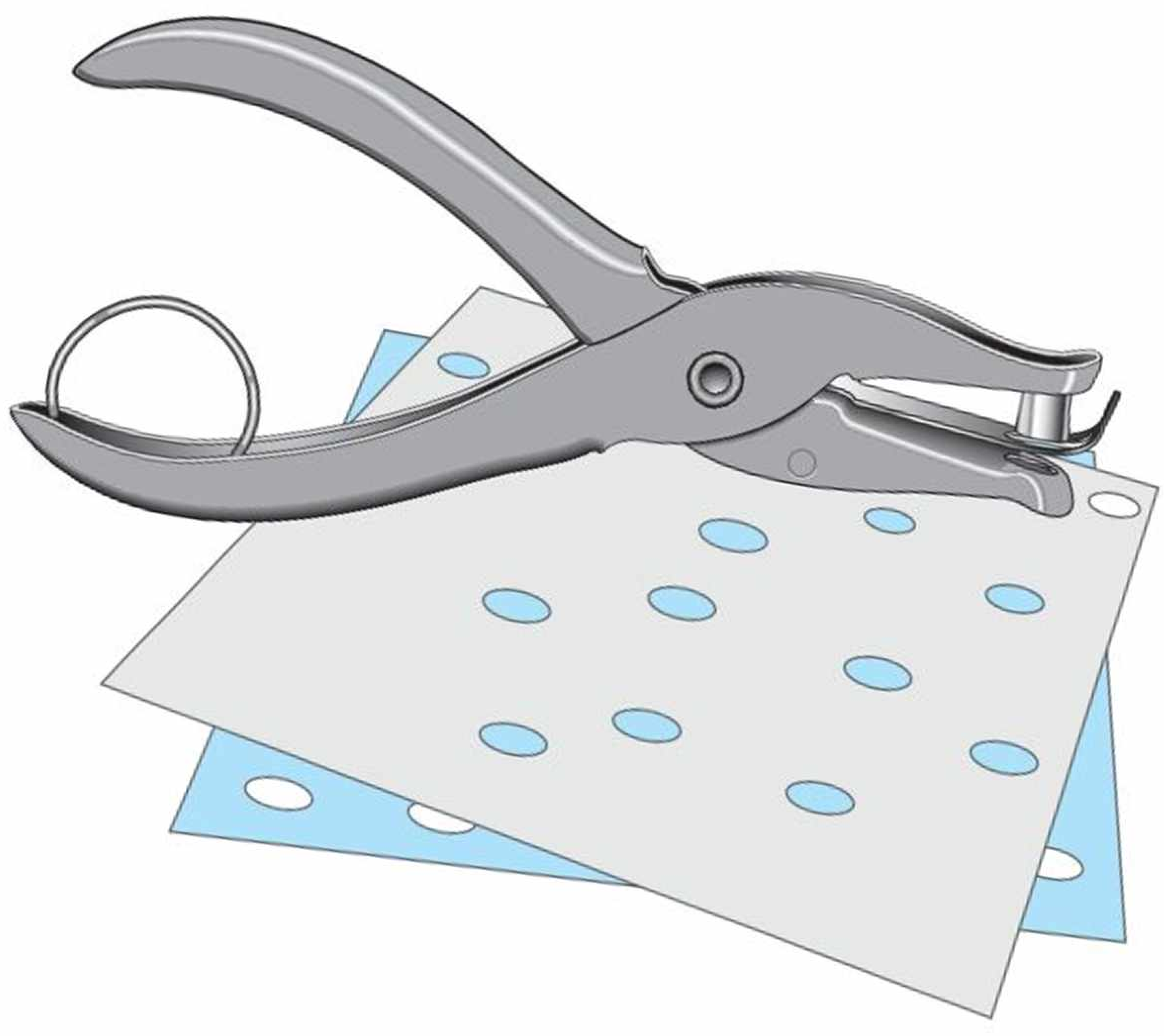
(*b*)

FIGURA 1–6 Ejemplos de montajes simples para demostrar varios miembros que soportan carga y clases de esfuerzos producidos por diferentes condiciones de carga y apoyo.

FIGURA 1–6
Continuación



(c)



(d)

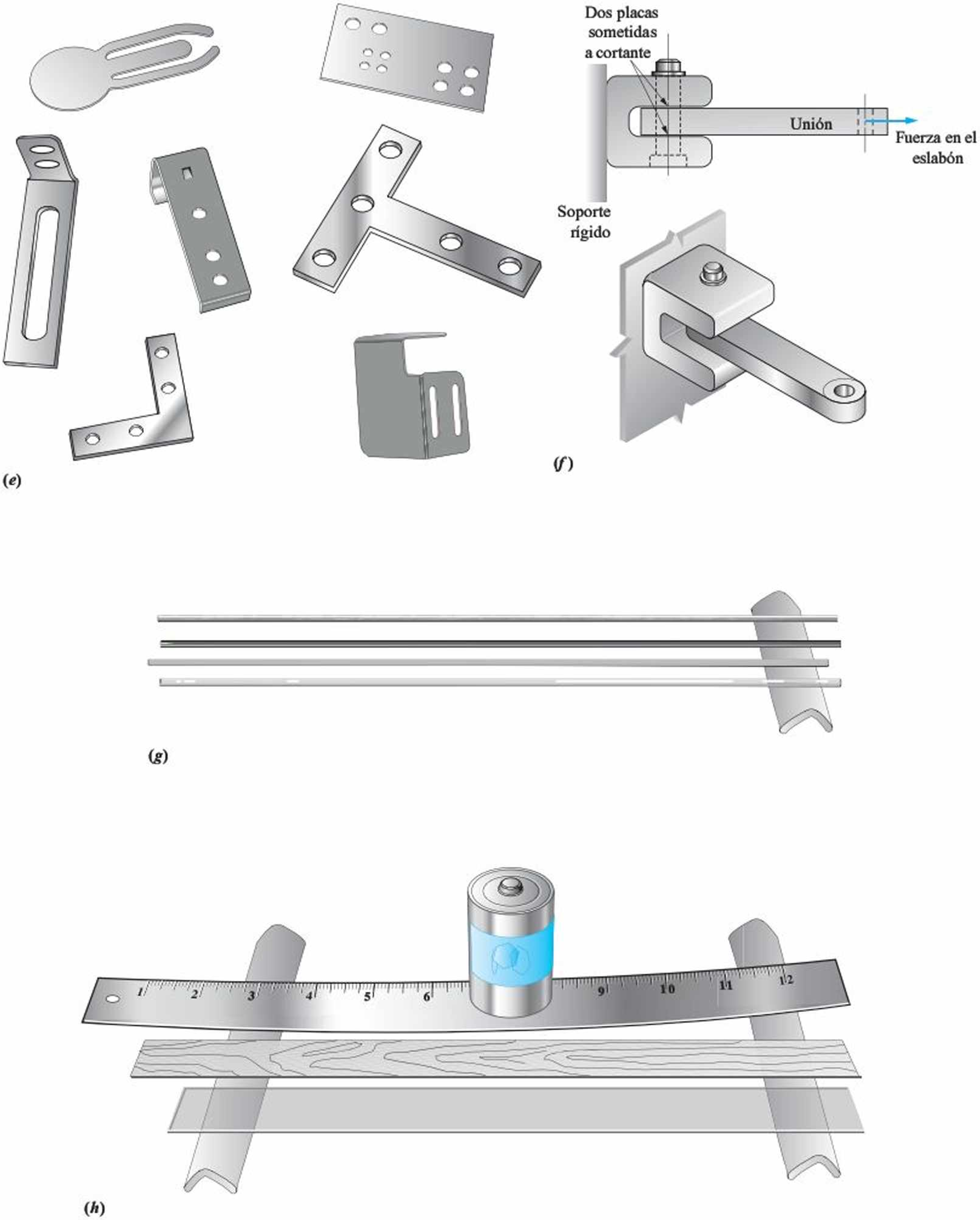


FIGURA 1–6 *Continuación*

- Ahora consiga un pedazo corto de tiza, por ejemplo de 25 mm de largo y 10 mm de diámetro.
  - Comprímalo en un tornillo de banco como se describió para el perno de madera.
  - Observe cómo se fractura la tiza por completo porque es bastante frágil.
- Un tubo de plástico corto, de pared delgada, falla de un modo interesante.
  - Use el tornillo de banco para aplicar la carga de compresión axial lentamente y observe cómo se deforma el tubo.
  - Observe cómo se dilatan las paredes hacia fuera, señal de inestabilidad local del material del tubo.

c. Pandeo de una columna Ocurre cuando un elemento largo, recto y esbelto se flexiona y pandea de forma significativa antes de que falle cualquiera de los materiales.

- Los términos *largo* y *esbelto* no son precisos y dependen en gran medida del material del que esté hecha la columna. He aquí algunos ejemplos de columnas largas esbeltas que podrá obtener.
  - Un perno de madera de aproximadamente 4.5 mm (3/16 in) de diámetro y de más de 300 mm (12.0 in) de largo.
  - Una regla delgada de madera (con sección transversal de aproximadamente 6 mm por 25 mm) o regla de medir en yardas (con sección transversal de más o menos 0.25 in por 1.0 in).
  - Una tira delgada de plástico, por ejemplo de 1 mm de espesor por 20 mm de ancho y de más de 50 mm de largo, incluso un cuchillo de plástico para días de campo podría funcionar.
- Trate de aplicar lentamente una fuerza de compresión axial a la columna, teniendo cuidado de que no se resbale. Observe lo que sucede [figura 1–6(c)].
  - Observará que la columna se flexiona notablemente sin que se fracture el material.
  - Cuando se deja de aplicar la fuerza, la columna regresa a su forma recta.
- Esta clase de falla se conoce como *inestabilidad elástica* o *pandeo* y podría conducir a una falla catastrófica si la carga se incrementa más allá de la que inicialmente provocó el pandeo.

d. Cortante directo Ocurre cuando se aplica una acción de corte, como cuando se utilizan tijeras comunes, tijeras de hojalatero o punzones.

- Un ejemplo simple es una perforación en una hoja de papel de oficina [figura 1–6(d)].
  - Cuando presiona una palanca, el punzón perfora el papel conforme éste pasa por un dado situado por debajo.
  - El papel es cizallado a lo largo de la circunferencia del agujero y el espesor del papel es traspasado.
- Puede ser más difícil demostrar este fenómeno en el caso de un material más grueso o más resistente que una simple hoja de papel.
- Trate de encontrar componentes con agujeros o perforaciones de otra forma para que visualice dónde se utiliza cortante directo en productos conocidos. Hay más ejemplos en la figura 1–6(e):
  - Algunos tipos de ménsulas, abrazaderas o flejes hechos de lámina.
  - Gabinetes metálicos, con agujeros redondos perforados, para sujetadores u otros elementos que permitan montar instrumentos u otros dispositivos.
  - Cajas de contactos eléctricos con "lugares donde puede botarse el metal" para insertar alambres en la caja.
  - "Hembras" de cerradura de puerta.
  - Lámina perforada utilizada a menudo para propósitos decorativos.

- Otro tipo de cortante directo ocurre en un tipo de bisagra llamada *horquilla* [figura 1–6(f)]. Un pasador cilíndrico atraviesa los extremos conectados a un componente, a través de un agujero en otro componente.
  - Conforme se aplica una fuerza a uno de los componentes en movimiento, el pasador se somete a un esfuerzo cortante directo que tiende a cizallarlo a través de su sección transversal.

e. Esfuerzo cortante torsional Ocurre cuando un miembro de carga se tuerce en torno a su eje largo debido a un momento de torsión aplicado en uno o más puntos a lo largo del miembro, resistido por un momento de torsión de reacción en uno o más puntos.

- Una de las aplicaciones más frecuentes en la que se presenta esfuerzo cortante torsional es en una flecha de transmisión de potencia. Por ejemplo, la flecha de mando de un vehículo o de una máquina industrial recibe potencia de un generador primario, tal como una máquina o un motor eléctrico. La potencia se transmite a lo largo de la flecha, la que generalmente tiene la forma de un cilindro largo, sólido o hueco, a un eje que impulsa el vehículo o a una pieza de una máquina rotatoria, tal como una banda transportadora, máquina herramienta, bomba, compresora, procesador de alimentos, molino de café o a cualquiera de numerosos tipos de dispositivos mecánicos. Vea la figura 1–3.
- Las flechas de los dispositivos mecánicos mencionados están diseñadas para transmitir con seguridad la potencia requerida y realizar la función deseada sin que se rompan o tuerzan en una cantidad notable. Por lo tanto, normalmente no podría aplicar un momento de torsión suficiente para romper la flecha o para observar una deformación torsional significativa (torcedura). Así que tratemos de encontrar algunas varillas o tubos más pequeños que puedan ser torcidos o rotos cuando se les aplique un momento de torsión con sus manos.
- Cuando se discutieron columnas, se sugirió utilizar un perno de madera de diámetro pequeño, de más o menos 4.5 mm (3/16 in). Con un perno de aproximadamente 500 mm (20 in) o más deberá ser capaz de sujetar firmemente un extremo, aplicar un momento de torsión al otro y observar un ángulo de torsión significativo entre los extremos, fijo y libre. Este es un ejemplo de cómo se produce esfuerzo cortante torsional. Trate de encontrar otros ejemplos similares de varilla, tubo de plástico o alambre de diámetro pequeño, tal como el de un gancho de ropa [figura 1–6(g)]. Los largos cilindros de espuma de poliuretano usados como flotadores infantiles también son adecuados.
- Puede utilizar otra vez el tornillo de banco para sujetar un extremo de una varilla de acero de aproximadamente 6 mm (0.25 in) de diámetro por aproximadamente 550 mm (22 in) de largo. Luego utilice una herramienta tal como unas pinzas de presión para sujetar el extremo opuesto y torcer la varilla. Observe cómo debe incrementarse el momento de torsión aplicado debido al material más rígido y de diámetro más grande.
- Observe que otros elementos, además de varillas o tubos cilíndricos, también podrían ser sometidos a torsión. Sin embargo, su comportamiento y los efectos resultantes son radicalmente diferentes, como se verá en el capítulo 4. Por ejemplo, busque cualquier pieza rectangular plana delgada tal como una regla o un agitador de pintura y tuérzala con sus manos. Si la pieza es bastante larga y delgada, deberá ser capaz de producirle una gran deformación sin romperla.

f. Esfuerzo de flexión Ocurre cuando un miembro soporta una carga perpendicular a lo largo de su eje, mientras está apoyada de una manera estable, lo cual "flexiona" el miembro, ahora llamado "viga".

- Un ejemplo simple es el palo de madera plano de una paleta. Colóquelo sobre un par de apoyos simples cerca de sus extremos y aplique presión cerca de su punto medio. Deberá ser capaz de deformarse (flexionar la viga) con facilidad. Observe la forma curva flexionada que adquiere la viga a medida que se carga. Con carga moderada, la viga recobrará su forma original después de que se deje de aplicar la carga, lo que indica que la deflexión es elástica.

- Otros perfiles que podría utilizar y son fáciles de obtener son una regla de un metro o una yarda, un agitador de pintura, una tira de cartón grueso, tiras de plástico delgadas o lámina delgada como la que se podría utilizar en una regla metálica. Aplique las cargas lentamente para asegurarse de que la viga no se rompa o deforme permanentemente, por si desea conservarla [figura 1–6(b)].
- Sin embargo, si dispone de una viga desechable, prosiga e incremente la carga y observe lo que sucede, lo cual depende principalmente de la clase de material.
- Un trozo de madera se flexionará significativamente y luego comenzará a vibrar o a rajarse. Tome nota de dónde se inicia la falla y de la apariencia de la madera una vez que se rompe.
- Una delgada viga metálica puede doblarse sin perder su capacidad de recobrar su forma original; más allá de ese punto, se deformará permanentemente pero sin romperse. Se dice que un material ha "cedido" cuando es sometido a un esfuerzo más allá de su resistencia elástica, como se describe en los capítulos 2 y 3.

1–2 OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

En este capítulo presentamos los conceptos básicos de resistencia de materiales que se ampliarán en capítulos posteriores. Al término de este capítulo, usted podrá:

1. Utilizar unidades correctas para las cantidades que se presentan en el estudio de resistencia de materiales, tanto en el sistema métrico de unidades SI, como en el sistema de unidades de uso común en Estados Unidos (sistema inglés).
2. Utilizar los términos *masa* y *peso* correctamente y ser capaz de calcular el valor de uno cuando se da el valor del otro.
3. Definir *esfuerzo*.
4. Definir el *esfuerzo normal directo*, tanto de tensión como de compresión.
5. Representar esfuerzos normales en elementos sometidos a esfuerzo.
6. Definir *deformación normal*.
7. Definir *esfuerzo cortante directo* y los términos *cortante simple* y *cortante doble*.
8. Representar esfuerzos cortantes en elementos sometidos a esfuerzo.
9. Reconocer perfiles estructurales estándar y roscas estándar de tornillos y utilizar datos para sus propiedades geométricas.
10. Describir varias formas de abordar el análisis de esfuerzo experimental y computacional.

1–3 PROCEDIMIENTO DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

El estudio de la resistencia de materiales y la práctica del análisis y el diseño del esfuerzo requiere inherentemente la solución de problemas. Es importante establecer buenos hábitos de organización en el método utilizado para la solución de problemas e informar sus resultados en forma clara y atractiva. Esto le ayudará a comunicar su solución a otros y a consultar un problema previamente resuelto.

Los problemas de ejemplo incluidos en este libro requieren el siguiente procedimiento:

a. El enunciado original del problema.
b. Replantear el objetivo primordial del problema.
c. Resumir la información y los datos pertinentes. Esto es útil porque le ayudará a decidir qué es lo conocido y qué es lo que debe encontrar. También sirve como un lugar conveniente para localizar datos cuando se requieran posteriormente en la solución del problema.

d. Escribir un enunciado general de la técnica de análisis que usara para resolver el problema; enuncie cualquier otra suposición.

e. Completar un desarrollo detallado de los resultados con todas las ecuaciones utilizadas, la inserción de los valores de datos pertinentes y la manipulación de unidades para los resultados. Puede que se requieran factores de conversión para obtener el resultado final en unidades apropiadas.

f. Calcular el valor de todos los resultados esperados. En este libro se reportarán los resultados con tres dígitos de precisión y en unidades apropiadas; se obtiene una mayor precisión a través del problema y al final se redondea. Consideramos que todos los datos dados son exactos.

g. Comentar la solución para aclarar los detalles y hacer una revisión critica del problema. ¿Es razonable el resultado? ¿Existen técnicas alternativas que pudieran haber sido utilizadas?

h. ¿Existen análisis adicionales que serían deseables para garantizar una solución más robusta? Si se trata de un problema de diseño, especificar un tamaño conveniente para las dimensiones clave, un perfil estándar para el miembro de carga o un material adecuado para la fabricación del miembro.

Importancia del conocimiento de la estática. Una aplicación precisa de los principios de resistencia de materiales requiere que las cargas que van a ser soportadas por el miembro que se está analizando o diseñando se conozcan con un alto grado de confianza. Las cargas pueden ser cualquier combinación de fuerzas de gravedad, fuerzas axiales directas, fuerzas cortantes, momentos directamente aplicados que tiendan a hacer girar un miembro o estructura, o momentos de torsión (pares motores) aplicados a una flecha para transmitir potencia. Se espera que cuente con buenos fundamentos de mecánica y sea capaz de aplicarlos gracias a un curso de estática. Deberá ser capaz de preparar diagramas de cuerpo libre completos de estructuras o elementos individuales, aplicar ecuaciones de equilibrio y resolver para reacciones y apoyos. Si es necesario, consulte en el apéndice A–27 lo necesario para un repaso de algunos principios fundamentales de estática y el ejemplo de un problema que muestra su aplicación.

1–4 SISTEMAS DE UNIDADES BÁSICAS

Los cálculos requeridos en la aplicación de resistencia de materiales implican la manipulación de varios conjuntos de unidades en ecuaciones. Para lograr precisión numérica, es muy importante asegurarse de utilizar unidades compatibles en las ecuaciones. A lo largo de este libro se emplean unidades junto con los números aplicables.

Debido a la presente transición en los Estados Unidos, de sus unidades de uso común (sistema inglés) hacia las unidades métricas, en este libro se utilizan ambas. Se espera que las personas que inicien o continúen con una carrera industrial dentro de los próximos años tengan que familiarizarse con ambos sistemas. Por un lado, muchos productos nuevos tales como automóviles y máquinas de negocios se están fabricando usando dimensiones métricas. Por tanto, los componentes y el equipo de manufactura se especificarán en dichas unidades. No obstante, la transición no está ocurriendo de manera uniforme en todas las áreas. Los diseñadores continuarán habiéndoselas con elementos tales como acero estructural, aluminio y madera cuyas dimensiones aparecen en unidades inglesas en referencias estándar. Además, los diseñadores, el personal de ventas y servicios, y aquellos que se desempeñan en ámbito de la manufactura deben trabajar con equipo que ya está instalado y que fue fabricado con sus dimensiones en el sistema inglés de unidades. Consecuentemente, parece lógico que las personas que ahora trabajan en la industria deban ser capaces de trabajar y pensar en ambos sistemas.

El nombre formal del sistema inglés de unidades es Sistema de unidades gravitacionales inglesas (EGU, *English Gravitacional Unit System*). El sistema métrico, el cual ha sido adoptado internacionalmente, ha sido llamado por los franceses Système Internacional d´Unités, Sistema internacional de unidades, abreviado SI en este libro. Vea la referencia 5.

TABLA 1–1 Cantidades básicas en el sistema métrico de unidades SI.

Cantidad	Unidad SI	Otras unidades métricas
Longitud	metro (m)	milímetro (mm)
Tiempo	segundo (s)	minuto (min), hora (h)
Fuerza	newton (N)	$kg \cdot m/s^2$
Masa	kilogramo (kg)	$N \cdot s^2/m$
Temperatura	kelvin (K)	grados Celsius (°C)
Ángulo	radián (rad)	grados (grad)

TABLA 1–2 Cantidades básicas en el sistema de unidades US usual.

Cantidad	Unidad US usual	Otras unidades US
Longitud	pie (ft)	pulgada (in)
Tiempo	segundo (s)	minuto (min), hora (h)
Fuerza	libra (lb)	kip*
Masa	slug	$lb \cdot s^2/ft$
Temperatura	grados Fahrenheit (°F)	
Ángulo	grados (grad)	radian (rad)

*1.0 kip = 1000 libras. El nombre se deriva del término *kilolibra*.

En muchos casos, los problemas en este libro se resuelven en el sistema inglés de unidades o en el sistema SI en lugar de combinar las unidades. En problemas cuyos datos se dan en ambos sistemas de unidades, es más conveniente cambiar todos los datos al mismo sistema antes de completar la solución del problema. El apéndice A–26 da factores para realizar conversiones.

Las cantidades básicas en cualquier sistema de unidades son longitud, tiempo, fuerza, masa, temperatura y ángulo. La tabla 1–1 enlista las unidades para estas cantidades en el sistema de unidades SI y la tabla 1–2, en el sistema inglés de unidades.

Prefijos para unidades SI. En el sistema SI, se deberán utilizar prefijos para indicar órdenes de magnitud, con lo que se eliminan los dígitos y son un sustituto conveniente para escribir potencias de 10, como generalmente se prefiere en los cálculos. Se recomiendan los prefijos que representan pasos de 1000. Los que en general se utilizan en resistencia de materiales se encuentran en la tabla 1–3. La tabla 1–4 muestra cómo se deberán convertir los resultados calculados al uso de prefijos estándar para unidades.

1–5 RELACIÓN ENTRE MASA, FUERZA Y PESO

La fuerza y la masa son cantidades distintas. El peso es una clase especial de fuerza.

Masa se refiere a la cantidad de sustancia en un cuerpo. Fuerza es un efecto de empuje o tirón ejercido en un cuerpo o por una fuerza externa o por la gravedad.
Peso es la fuerza de tirón gravitacional en un cuerpo.

La masa, fuerza y peso están relacionados por la segunda ley de Newton

$$\text{fuerza} = \text{masa} \times \text{aceleración}$$

A menudo utilizamos los símbolos F para fuerza, m para masa y a para aceleración. Entonces,

$$F = m \times a \qquad \text{o} \qquad m = F/a$$

TABLA 1–3 Prefijos para unidades SI.

Prefijo	Símbolo SI	Factor
giga	G	$10^9 = 1\ 000\ 000\ 000$
mega	M	$10^6 = 1\ 000\ 000$
kilo	k	$10^3 = 1\ 000$
mili	m	$10^{-3} = 0.001$
micro	μ	$10^{-6} = 0.000\ 001$

TABLA 1–4 Método apropiado de reportar cantidades calculadas.

Resultado calculado	Resultado reportado
0.005 48 m	5.48×10^{-3} m, o 5.48 mm
12 750 N	12.75×10^3 N, o 12.75 kN
34 500 kg	34.5×10^3 kg, o 34.5 Mg (megagramos)

Cuando la fuerza de gravedad interviene en el cálculo del peso de una masa, a toma el valor de g, la aceleración producida por la gravedad. Entonces, utilizando W para el peso,

Relación entre peso y masa

$$W = m \times g \qquad \text{o} \qquad m = W/g \tag{1.1}$$

Utilizaremos el siguiente valor para g:

Unidades SI = 9.81 m/s² Unidades US: g = 32.2 ft/s²

Unidades de masa, fuerza y peso. Las tablas 1–1 y 1–2 muestran las unidades preferidas y algunas otras convenientes de masa y fuerza, tanto en el sistema de unidades SI como en el sistema inglés. Las unidades de fuerza también se utilizan como unidades de peso.

El newton (N), en el sistema de unidades SI, se denominó en honor de sir Isaac Newton y representa la cantidad de fuerza requerida para imprimirle a una masa de 1.0 kg una aceleración de 1.0 m/s². Es posible derivar unidades equivalentes para el newton, como se describe a continuación, utilizando la segunda ley de Newton únicamente con unidades:

$$F = m \times a = \text{kg}\cdot\text{m/s}^2 = \text{newton}$$

En el sistema inglés de unidades, la unidad de fuerza se define como libra, en tanto que la unidad de masa (slug) se deriva con la segunda ley de Newton en la siguiente forma:

$$m = \frac{F}{a} = \frac{\text{lb}}{\text{ft/s}^2} = \frac{\text{lb}\cdot\text{s}^2}{\text{ft}} = \text{slug}$$

La conversión de peso y masa se ilustra en los siguientes problemas ejemplo.

Problema de ejemplo 1–1 (Sistema SI)

Un malacate iza (levanta) 425 kg de concreto. Calcule el peso del concreto que equivale a la fuerza ejercida en el malacate por el concreto.

Solución

Objetivo: Calcular el peso de una masa de concreto.

Dada: m = 425 kg

Análisis: $W = m \times g$; g = 9.81 m/s²

Resultados: W = 425 kg × 9.81 m/s² = 4170 kg·m/s² = 4170 N

Comentario: Por tanto, 425 kg de concreto pesan 4170 N.

Problema de ejemplo 1–2 (Sistema inglés)

Una tolva de carbón pesa 8500 lb. Determine su masa.

Solución

Objetivo: Calcular la masa de una tolva de carbón.

Dado: W = 8500 lb

Análisis: $m = W/g$, g = 32.2 ft/s²

Resultados: m = 8500 lb/32.2 ft/s² = 264 lb·s²/ft = 264 slugs

Comentario: Por tanto, 8500 lb de carbón tienen una masa de 264 slugs.

TABLA 1–5 Unidades de densidad y peso específico.

	US Usual	Métrica SI
Densidad	$slugs/ft^3$	kg/m^3
Peso específico	lb/ft^3	N/m^3

Densidad y peso específico. Para caracterizar la masa o peso de un material con respecto a su volumen, utilizamos los términos *densidad* y *peso específico*, definidos de la siguiente forma:

Densidad es la cantidad de masa por unidad de volumen de un material.
Peso específico es la cantidad de peso por unidad de volumen de un material.

Utilizaremos la letra griega ρ (ro) como símbolo de densidad. Para el peso específico utilizaremos γ (gama).

Las unidades de densidad y peso específico se resumen en la tabla 1–5. En ocasiones se utilizan otras convenciones, que con frecuencia producen confusión. Por ejemplo, en Estados Unidos, la densidad ocasionalmente se expresa en lb/ft^3 o lb/in^3. Esto se puede interpretar de dos maneras: una es que el término implica *densidad de peso* con el mismo sentido que el de peso específico. Otra es que se supone que *lb* es *libra masa* y en lugar de *libra peso* y los valores numéricos de ambas son iguales cuando *g* es el valor estándar.

1–6 CONCEPTO DE ESFUERZO

El estudio de la resistencia de materiales depende del entendimiento de los principios de *esfuerzo* y *deformación* producidos por cargas aplicadas en una estructura o máquina y los miembros que conforman tales sistemas. Estos principios se presentan aquí y aplican a tipos de carga relativamente simples con énfasis en su *análisis*. Es decir, en los problemas se dan las cargas y la geometría de los miembros y la deformación producida por el esfuerzo.

Aquí utilizamos *carga directa* para desarrollar el concepto de esfuerzo y, más adelante, el concepto de deformación. Por el término *esfuerzo directo* nos referimos a casos en los que la fuerza total aplicada es compartida por igual por todas las partes de la sección transversal del miembro que soporta la carga. Los tipos de carga considerados en este capítulo son:

- Cargas axiales directas
- Fuerzas cortantes directas
- Cargas de apoyo o sustentación

En capítulos posteriores se presentan otros tipos de carga tales como cargas de flexión en vigas y cargas torsionales en flechas en las que los esfuerzos no son uniformes a través de la sección transversal.

Se muestran aplicaciones de miembros reales como:

- Una varilla que soporta un carga pesada que tiende a desprenderla con una fuerza de tensión [figura 1–2]
- Bloques cortos que soportan cargas pesadas que tienden a aplastarlos con fuerzas de compresión [figura 1–7(b)]
- Un pasador que soporta una carga que actúa perpendicular a su eje y que tiende a cortarlo a través de una o más de sus secciones transversales (llamada *fuerza cortante*) [figura 1–6(f)]
- Un piso sobre el que la pata de una pesada máquina está apoyada, que tiende a provocar una muesca en él (llamada *carga de apoyo*) [figura 1–7(c)]

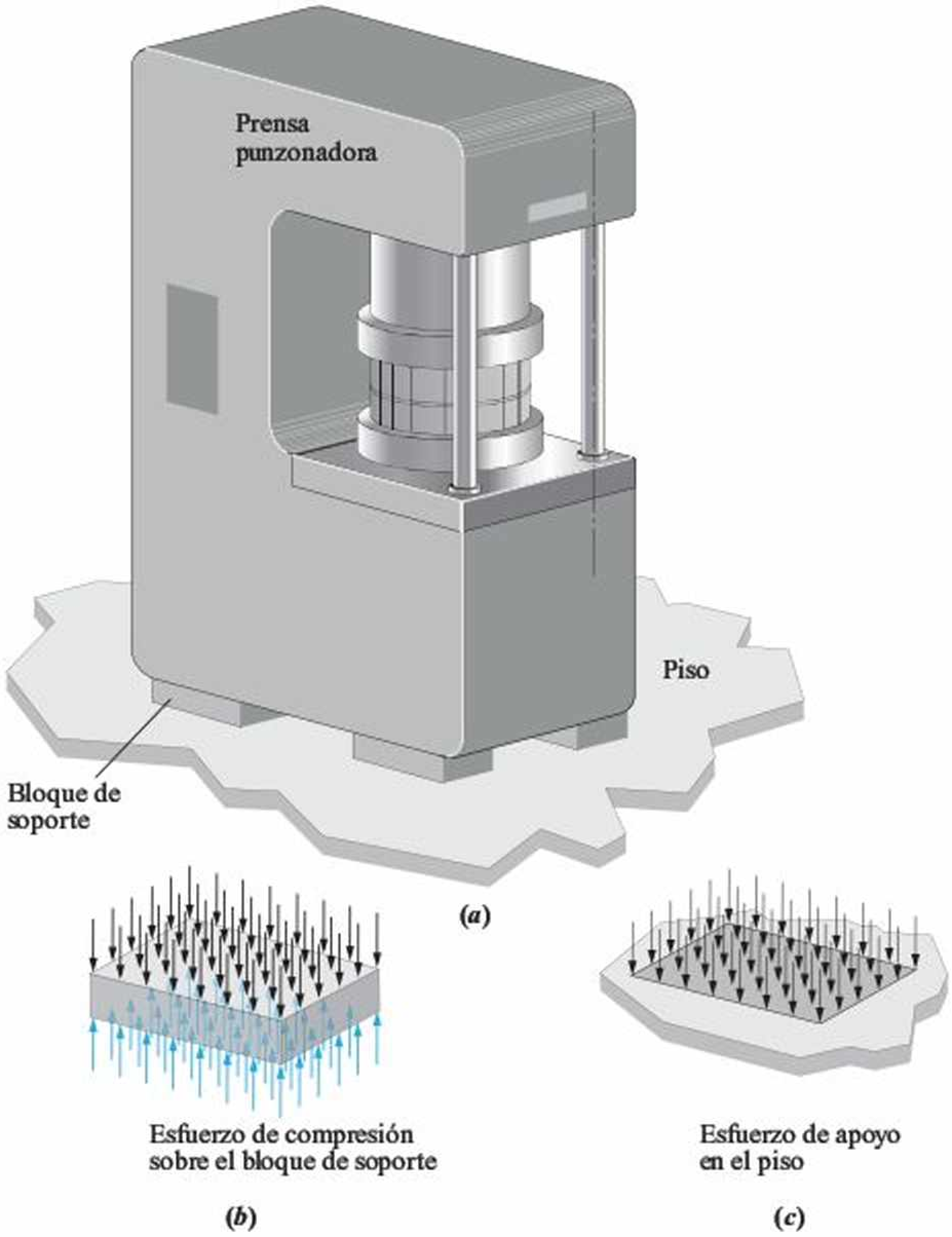


FIGURA 1–7 Ilustración de esfuerzo de compresión y esfuerzo de apoyo

En capítulos subsecuentes presentamos el concepto de *diseño*, cuyo objetivo es especificar el material del cual se tiene que hacer un miembro o sus dimensiones detalladas para asegurarse de que sea seguro y que realizará su función pretendida. Esto requiere entender la capacidad del material de soportar las cargas aplicadas sin falla (ruptura o deformación excesiva). Aquí es donde realmente entra en juego el término *resistencia de materiales*. El capítulo 2 discute las propiedades de diseño de materiales y la selección de éstos.

Entender el significado de *esfuerzo* en un miembro que soporta carga, como se da a continuación, es de primordial importancia al estudiar la resistencia de materiales.

Esfuerzo es la resistencia interna ofrecida por una unidad de área del material del cual está hecho un miembro a una carga externamente aplicada.

Nos interesa lo que sucede *en el interior* de un miembro que soporta carga. Debemos determinar la magnitud de la *fuerza* ejercida en cada *área unitaria* del material. El concepto de esfuerzo se expresa matemáticamente como

Relación entre peso y masa

$$\text{esfuerzo} = \frac{\text{fuerza}}{\text{área}} = \frac{F}{A} \tag{1.2}$$

En ciertos casos, como se describe en la siguiente sección que se ocupa del *esfuerzo normal directo*, la fuerza aplicada es compartida uniformemente por toda la sección transversal del miembro. En esos casos, el esfuerzo se calcula dividiendo simplemente la fuerza total entre

el área de la pieza que la resiste. En ese caso, el nivel de esfuerzo será el mismo en cualquier punto en cualquier sección transversal.

En otros casos, como en el caso de *esfuerzo producido por flexión* presentado en el capítulo 7, el esfuerzo variará en diferentes posiciones dentro de la sección transversal. Consecuentemente es esencial que considere el nivel de esfuerzo *en un punto*. De manera típica, su objetivo será determinar en qué punto ocurre el esfuerzo máximo y cuál es su magnitud.

En el sistema inglés, la unidad típica de fuerza es la libra y la de área más conveniente es la pulgada cuadrada. De este modo, el esfuerzo se indica en lb/in^2, abreviada psi (por su siglas en inglés). Los niveles de esfuerzos que normalmente se presentan en el diseño de máquinas y el análisis de estructuras es del orden de varios miles de psi. Por esa razón, a menudo se utiliza la unidad de kip/in^2, abreviada ksi. Por ejemplo, si un esfuerzo calculado resulta ser de 26 500 psi, podría reportarse como

$$\text{esfuerzo} = \frac{26\ 500\ \text{lb}}{\text{in}^2} \times \frac{1\ \text{kip}}{1000\ \text{lb}} = \frac{26.5\ \text{kip}}{\text{in}^2} = 26.5\ \text{ksi}$$

En el sistema de unidades SI, la unidad estándar de fuerza es el newton con el área en metros cuadrados. Así pues, la unidad estándar de esfuerzo es el N/m^2, que recibe el nombre de *pascal* y se abrevia Pa. Los niveles típicos de esfuerzo son de varios millones de pascales, por lo que la unidad más conveniente de esfuerzo es el megapascal o MPa. Ésta es conveniente por otra razón: al calcular el área de sección transversal de miembros de carga normalmente se utilizan mediciones de dimensiones en mm. En tal caso, el esfuerzo se daría en N/mm^2 y se puede demostrar que numéricamente es igual a la unidad de MPa. Por ejemplo, suponga que se ejerce una fuerza de 15 000 N sobre un área cuadrada de 50 mm por lado. El área resistente sería de 2500 mm^2 y el esfuerzo resultante sería

$$\text{esfuerzo} = \frac{\text{fuerza}}{\text{área}} = \frac{15\ 000\ \text{N}}{2500\ \text{mm}^2} = \frac{6.0\ \text{N}}{\text{mm}^2}$$

Convirtiendo a pascales se tendría

$$\text{esfuerzo} = \frac{6.0\ \text{N}}{\text{mm}^2} \times \frac{(1000)^2\ \text{mm}^2}{\text{m}^2} = 6.0 \times 10^6\ \text{N/m}^2 = 6.0\ \text{MPa}$$

En conclusión, ***la unidad de N/mm² idéntica al MPa***.

1–7 ESFUERZO NORMAL DIRECTO

Uno de los tipos fundamentales de esfuerzo es el *esfuerzo normal*, indicado por la letra griega minúscula σ (sigma), donde el esfuerzo actúa perpendicular o normal a la sección transversal del miembro de carga. Si el esfuerzo también es uniforme a través del área resistente, el esfuerzo se llama *esfuerzo normal directo*.

Los esfuerzos normales pueden ser de compresión o de tensión.

> ***Un esfuerzo de compresión es uno que tiende a aplastar el material del miembro de carga y a acortarlo.***
>
> ***Un esfuerzo de tensión es uno que tiende a alargar el miembro y a separar el material.***

La ecuación para esfuerzo normal directo se deriva de la definición básica de esfuerzo porque la fuerza aplicada es compartida por igual a través de toda la sección transversal del miembro que soporta la fuerza. Esto es,

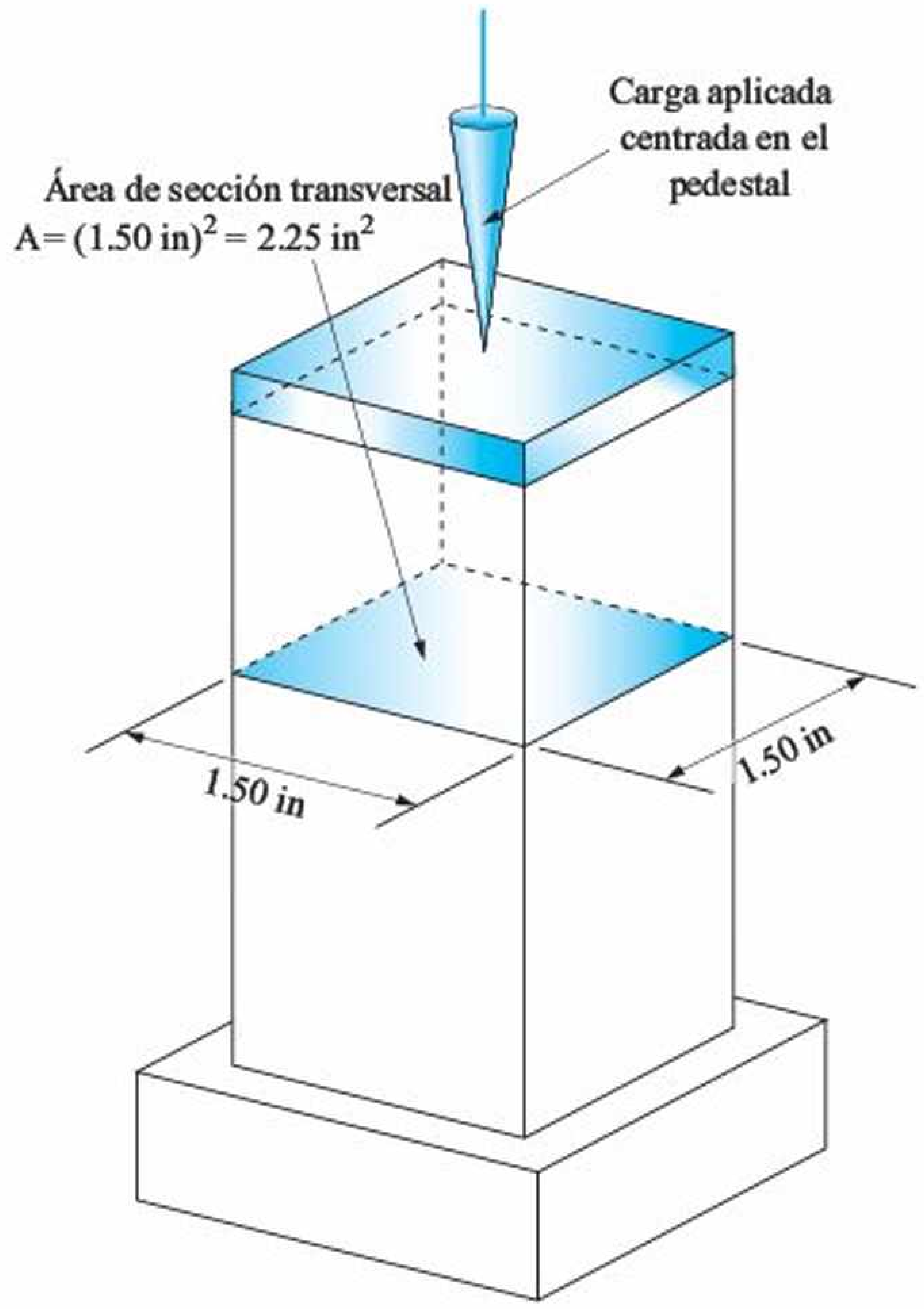


FIGURA 1–8
Ejemplo de esfuerzo de compresión directo.

Esfuerzo normal directo

$$\text{Esfuerzo normal directo} = \sigma = \frac{\text{Fuerza aplicada}}{\text{Área de sección transversal}} = \frac{F}{A} \tag{1.3}$$

El área de la sección transversal del miembro que soporta la carga se considera perpendicular a la línea de acción de la fuerza.

Un ejemplo de un miembro sometido a esfuerzo de compresión se muestra en la figura 1–8. El pedestal está diseñado para soportar equipo pesado durante su ensamble y el peso del equipo tiende a aplastar el perfil cuadrado del pedestal al someterlo a compresión.

Problema de ejemplo 1–3

La figura 1–8 muestra un pedestal diseñado para soportar cargas dirigidas hacia abajo. Calcule el esfuerzo en el perfil cuadrado en la parte superior del pedestal para una carga de 27 500 lb. La línea de acción de la carga aplicada está centrada en el eje del perfil y la carga se aplica por medio de una placa gruesa que distribuye la fuerza en toda la sección transversal del pedestal.

Solución

Objetivo Calcular el esfuerzo en la parte superior del pedestal.

Dada Carga $= F = 27\,500$ lb; la carga está centrada en el pedestal. La sección transversal es cuadrada; la dimensión de cada lado es de 1.50 in.

Análisis En cualquier sección del pedestal debe haber una fuerza interna resistente que actúa hacia arriba para equilibrar la fuerza aplicada dirigida hacia abajo. La fuerza interna está distribuida sobre el área de sección transversal, como se muestra en la figura 1–9. Cada área unitaria pequeña de la sección transversal soportaría la misma parte de la carga total. El esfuerzo producido en el perfil cuadrado tiende a aplastar el material y por consiguiente es un esfuerzo de compresión. Se puede utilizar la ecuación (1.3) para calcular la magnitud del esfuerzo.

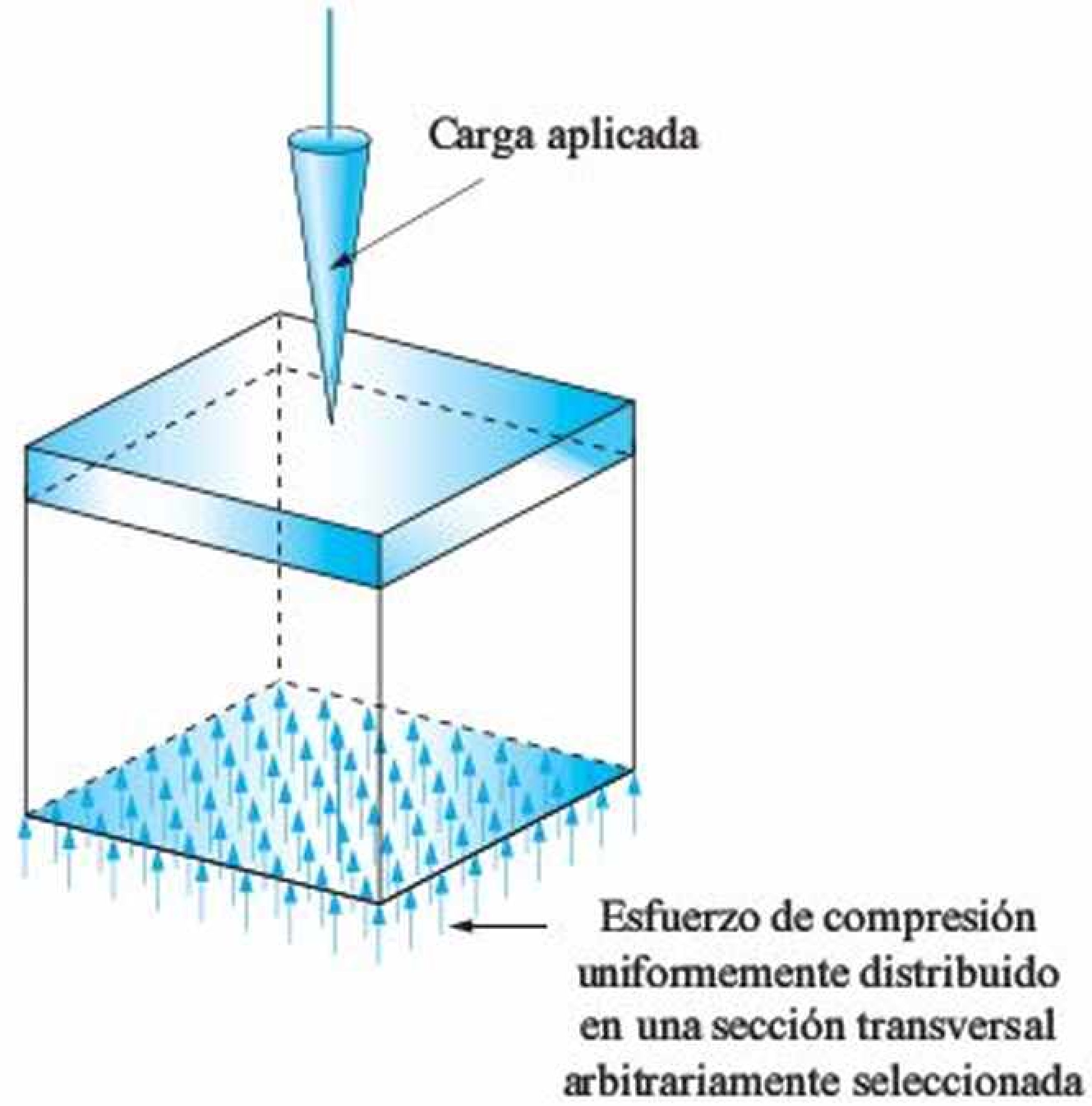


FIGURA 1–9
Esfuerzo de compresión en una sección transversal arbitraria de un fuste de pedestal de apoyo.

Resultados esfuerzo = σ = fuerza/área = F/A (compresivo)

$$A = (1.50 \text{ in})^2 = 2.25 \text{ in}^2$$

$$\sigma = F/A = 27\,500 \text{ lb}/2.25 \text{ in}^2 = 12\,222 \text{ lb/in}^2 = 12\,222 \text{ psi}$$

Comentario Este nivel de esfuerzo se presentaría en cualquier sección transversal del perfil cuadrado entre sus extremos.

En la figura 1–2 se muestra un ejemplo de un miembro sometido a una carga de tensión. De las dos varillas cuelga una pesada pieza fundida; ellas, a su vez, cuelgan del cable de una grúa y el peso de la pieza fundida tiende a alargar y romper las varillas.

Problema de ejemplo 1–4 La figura 1–2 muestra dos varillas circulares que soportan una pieza fundida que pesa 11.2 kN. El diámetro de cada varilla es de 12.0 mm y las dos varillas comparten la carga por igual; calcule el esfuerzo en ellas.

Solución

Objetivo Calcular el esfuerzo en la varillas de soporte.

Dado La pieza fundida pesa 11.2 kN. Cada varilla soporta la mitad de la carga. Diámetro de las varillas = D = 12.0 mm.

Análisis En cada varilla se produce esfuerzo de tensión directo. Use la ecuación (1.3).

Resultados $F = 11.2 \text{ kN}/2 = 5.60 \text{ kN}$ o 5600 N en cada varilla

$$\text{Área} = A = \pi D^2/4 = \pi\,(12.0 \text{ mm})^2/4 = 113 \text{ mm}^2$$

$$\sigma = F/Ak = 5600 \text{ N}/113 \text{ mm}^2 = 49.5 \text{ N/mm}^2 = 49.5 \text{ Mpa}$$

LECCIÓN 1

Comentario La figura 1–10 muestra un parte seleccionada arbitrariamente de la varilla, con la carga aplicada en parte inferior y el esfuerzo de tensión interno distribuido uniformemente sobre la sección cortada.

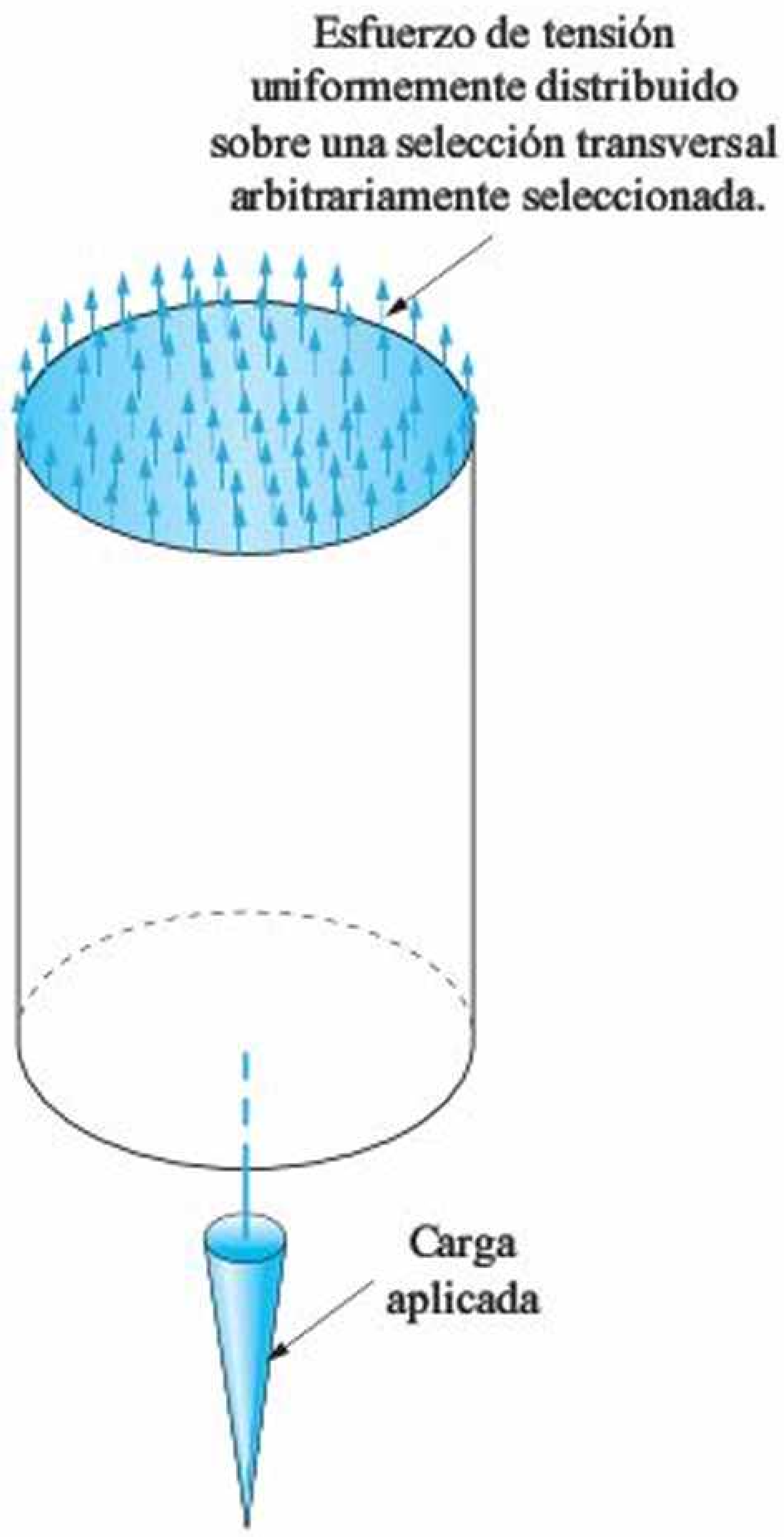


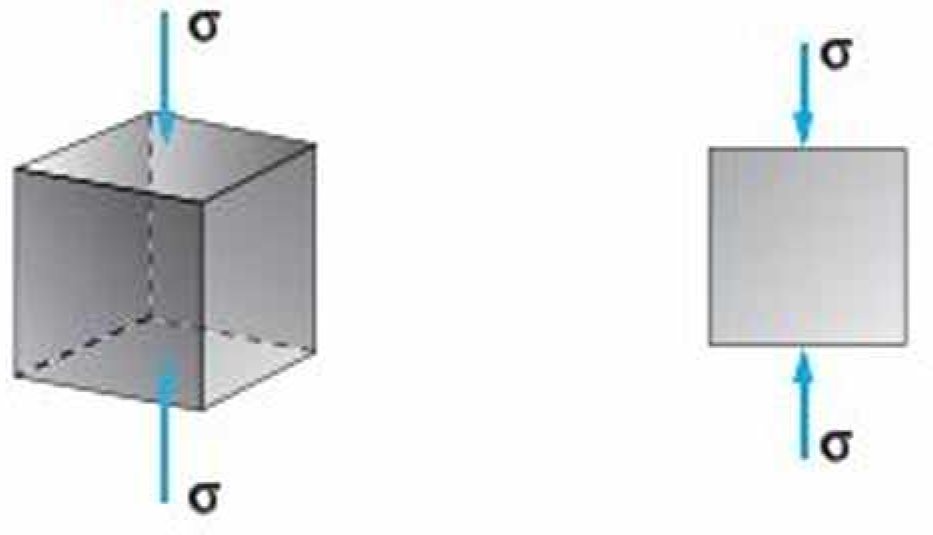
FIGURA 1–10 Esfuerzo de tensión en una sección transversal arbitraria de una varilla circular.

1–8 ELEMENTOS DE ESFUERZO PARA ESFUERZOS NORMALES DIRECTOS

Las ilustraciones de esfuerzos que aparecen en las figuras 1–9 y 1–10 son útiles para visualizar la naturaleza de la resistencia interna a la fuerza externamente aplicada, en particular en los casos en que los esfuerzos son uniformes a través de toda la sección transversal. En otros casos es más conveniente visualizar la condición de esfuerzo en un elemento pequeño (infinitesimal). Considere un pequeño cubo de material en cualquier parte en el interior del pedestal mostrado en la figura 1–8. Debe haber una fuerza de compresión neta que actúe en las caras superior e inferior del cubo, como se muestra en la figura 1–1 (a). Si se considera que las caras son de área unitaria, se puede estimar que estas fuerzas son los esfuerzos que actúan sobre las caras del cubo. Tal cubo es llamado *elemento de esfuerzo*.

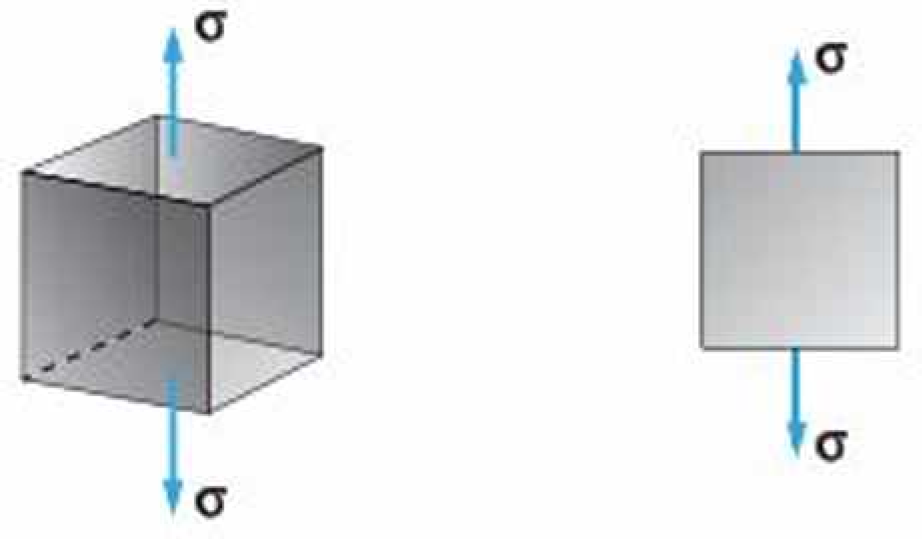
Como el elemento se toma de un cuerpo en equilibrio, éste también está en equilibrio y los esfuerzos en las caras superior e inferior son iguales. Un elemento de esfuerzo simple como éste, a menudo se muestra como un bloque cuadrado bidimensional en lugar del cubo tridimensional, como la figura 1–11(b) lo ilustra.

Asimismo, el esfuerzo de tensión en cualquier elemento de la varilla que aparece en la figura 1–2 puede mostrarse como en la figura 1–12, con el vector de esfuerzo actuando hacia



(*a*) elemento de esfuerzo tridimensional (*b*) elemento de esfuerzo bidimensional

FIGURA 1–11 Elemento de esfuerzo para esfuerzos de compresión.

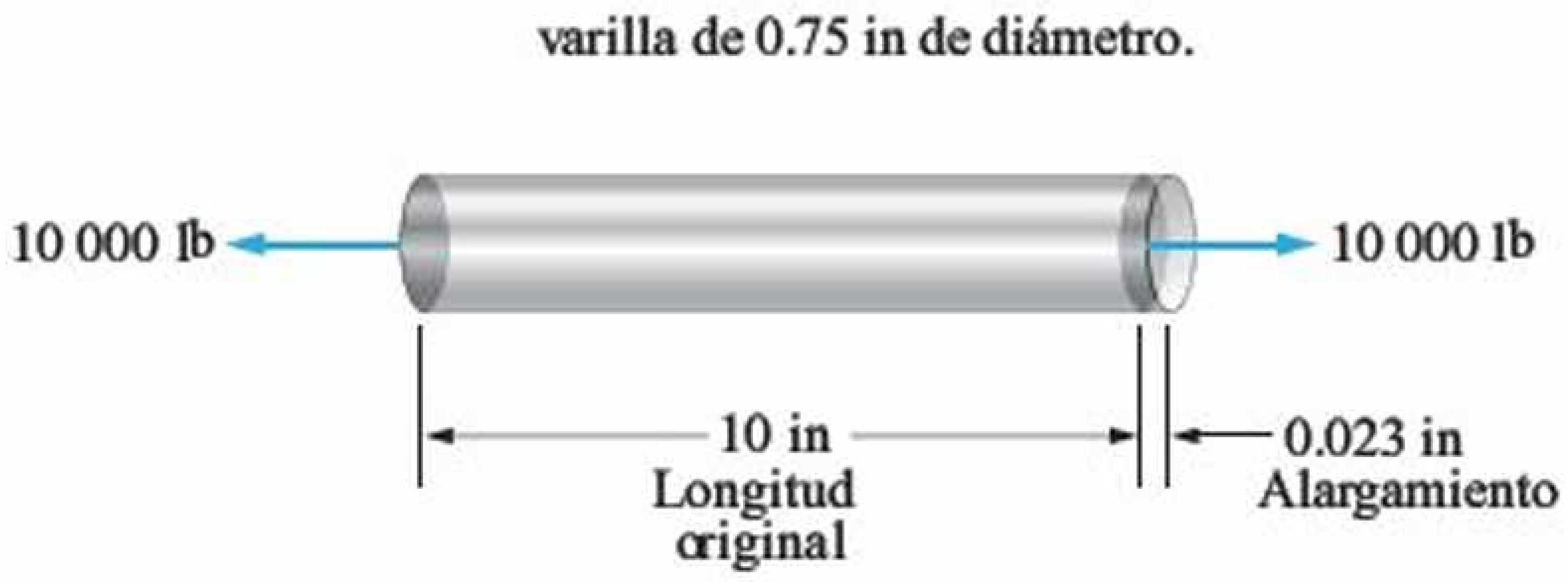


(*a*) elemento de esfuerzo tridimensional (*b*) elemento de esfuerzo bidimensional

FIGURA 1–12 Elemento de esfuerzo para esfuerzos de tensión.

fuera del elemento. Observe que los esfuerzos de compresión o tensión se muestran actuando perpendiculares (normales) a la superficie del elemento.

FIGURA 1–13
Alargamiento de una barra sometida a tensión.



1–9 CONCEPTO DE DEFORMACIÓN

Cualquier miembro que soporta carga se deforma por la influencia de la carga aplicada. El perfil cuadrado del pedestal mostrado en la figura 1–8 se acorta cuando se coloca el equipo pesado en el pedestal. Las varillas que soportan la pieza fundida en la figura 1–2 se alargan cuando la pieza se cuelga de ellas.

La deformación total de un miembro que soporta carga, desde luego, puede medirse. Más adelante se mostrará también cómo se puede calcular la deformación.

La figura 1–13 muestra una fuerza de tensión axial de 10 000 lb aplicada a una barra de aluminio de 0.75 in de diámetro. Antes de que se aplicara la carga, la longitud de la barra era de 10.000 in. Una vez que se aplica la carga, la longitud es de 10.023 in. Por lo tanto la deformación total es de 0.023 in.

La *deformación*, también llamada *deformación unitaria*, se encuentra dividiendo la deformación total entre la longitud original de la barra. Se utiliza la letra griega minúscula (ϵ) epsilon para denotar la deformación:

Definición de deformación

$$\text{deformación} = \epsilon = \frac{\text{deformación total}}{\text{longitud original}} \tag{1.4}$$

Para el caso mostrado en la figura 1–13,

$$\epsilon = \frac{0.023\ \text{in}}{10.000\ \text{in}} = 0.0023\ \text{in/in}$$

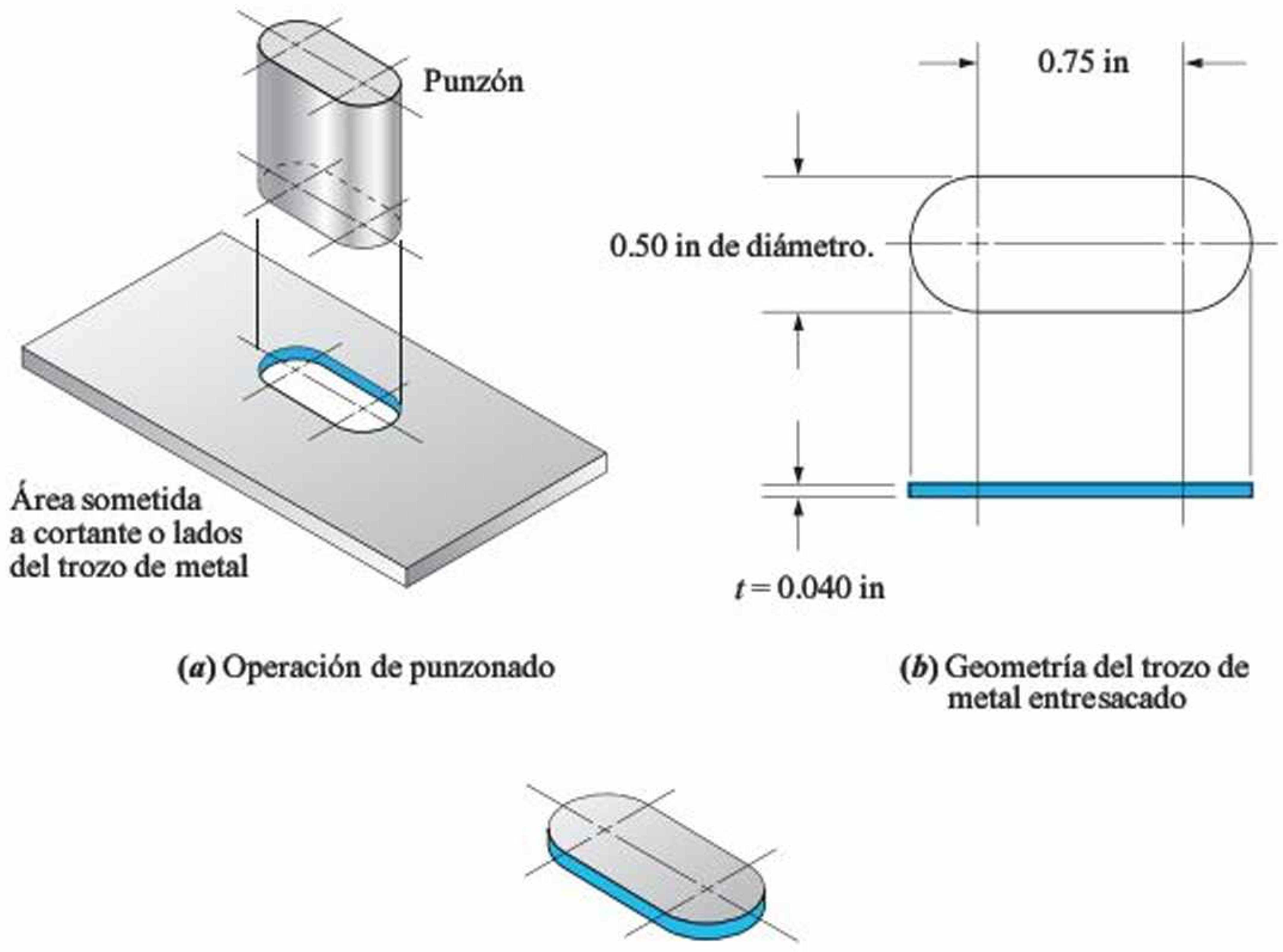
Se podría decir que la deformación unitaria no tiene dimensiones debido a que las unidades en el numerador y el denominador se anulan. No obstante, es mejor reportar las unidades como in/in o mm/mm para mantener la definición de deformación por unidad de longitud del miembro. Capítulos posteriores contienen más sobre deformación unitaria y deformación.

1–10 ESFUERZO CORTANTE DIRECTO

Cortante se refiere a una acción de corte. Cuando utiliza tijeras caseras comunes o una cizalla, hace que una hoja del par se deslice sobre la otra para cortar (cizallar) papel, tela u otro material. Un fabricante de lámina utiliza una acción de corte similar cuando corta metal para fabricar ductos. En estos ejemplos, la acción de corte avanza a todo lo largo de la línea que se va a cortar, de modo que sólo una pequeña parte del corte total se haga en cualquier momento. Y, por supuesto, el objetivo de la acción es cortar en realidad el material. Esto es, *desea* que el material falle.

Los ejemplos descritos en esta sección junto con sus figuras anexas ilustran varios casos en los que se produce *cortante directo*. Es decir, la fuerza cortante aplicada es resistida uniformemente por el área de la parte que se está cortando y se produce un nivel uniforme de fuerza cortante a través del área. El símbolo utilizado para esfuerzo cortante es τ, la letra griega

FIGURA 1–14
Ilustración de esfuerzo cortante directo en una operación de punzonado.



(*a*) Operación de punzonado

(*b*) Geometría del trozo de metal entresacado

(*c*) Trozo de metal entresacado (también conocido como viruta o *slug* en inglés)

minúscula *tau*. Por consiguiente el esfuerzo cortante directo se calcula de la manera descrita a continuación.

Esfuerzo cortante directo

$$\text{esfuerzo cortante directo} = \tau = \frac{\text{fuerza aplicada}}{\text{área sometida a corte}} = \frac{F}{A_s} \tag{1.5}$$

La figura 1–14 muestra una operación de punzonado donde el objetivo es cortar una parte del material de la otra. La acción de punzonado produce una ranura en la lámina de metal; la parte separada en la operación se conoce como viruta (o *slug* en inglés). Mediante punzonado es posible producir muchas formas tanto con las piezas como con las láminas perforadas. Normalmente, el punzonado se diseña de modo que la forma completa se entresaque al mismo tiempo. Por consiguiente, la acción de corte ocurre a lo largo de los *costados* de la pieza. El área sometida a cortante en este caso se calcula multiplicando la longitud el perímetro de la forma recortada por el espesor de la lámina. Es decir, para una operación de punzonado,

Área sometida a corte por punzonado

$$A_s = \text{perímetro} \times \text{espesor} = p \times t \tag{1.6}$$

Problema de ejemplo 1–5

Para la osperación de punzonado mostrada en la figura 1–14, calcule el esfuerzo cortante en el material si la fuerza de 1250 lb se aplica con el punzón. El espesor del material es de 0.040 in.

Solución

Objetivo: Calcule el esfuerzo cortante en el material.

Dada: $F = 1250$ lb; la forma que se va a entresacar se muestra en la figura 1–14; $t = 0.040$ in.

Análisis: Los lados de la viruta se someten a cortante directo y resisten la fuerza aplicada. Use las ecuaciones (1.4) y (1.5).

Resultados El perímetro, p, es

$$p = 2(0.75 \text{ in}) + \pi(0.50 \text{ in}) = 3.07 \text{ in}$$

El área sometida a cortante,

$$A_s = p \times t = (3.07 \text{ in})(0.040 \text{ in}) = 0.1228 \text{ in}^2$$

Por consiguiente, el esfuerzo cortante es

$$\tau = F/A_s = 1250 \text{ lb}/0.1228 \text{ in}^2 = 10\ 176 \text{ psi}$$

Comentario En este punto no sabemos si este nivel de esfuerzo hará que se entresaque la pieza; depende de la resistencia al cortante del material, la cual se analiza en los capítulos 2 y 3.

LECCIÓN 3

Cortante simple. A menudo se inserta un pasador o remache en un agujero cilíndrico a través de piezas para conectarlas, como se muestra en la figura 1–15. Cuando se aplican fuerzas perpendiculares al eje del pasador, existe la tendencia de seccionarlo a través de su sección transversal, produciéndose un esfuerzo cortante. Esta acción a menudo se conoce como *cortante simple*, porque una sola sección transversal del pasador resiste la fuerza cortante aplicada. En este caso, el pasador normalmente se diseña de modo que el esfuerzo cortante quede por debajo del nivel que haría que el pasador falle. El capítulo 3 contiene más sobre niveles de esfuerzo permisibles.

Cortante doble. Cuando una conexión por pasador se diseña como se muestra en a figura 1–16, dos secciones transversales resisten la fuerza aplicada. En este arreglo el pasador se ve sometido a *cortante doble*.

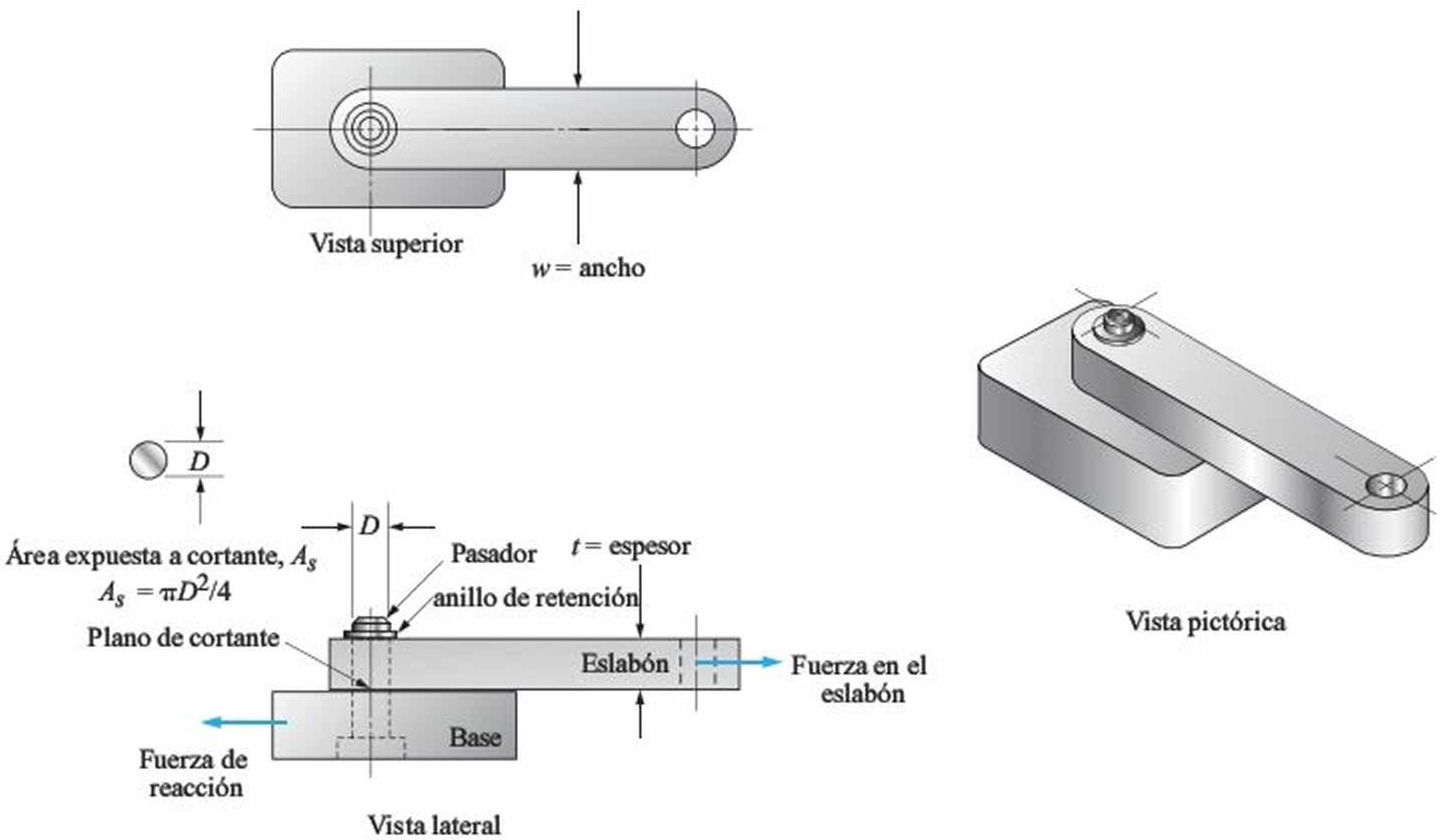
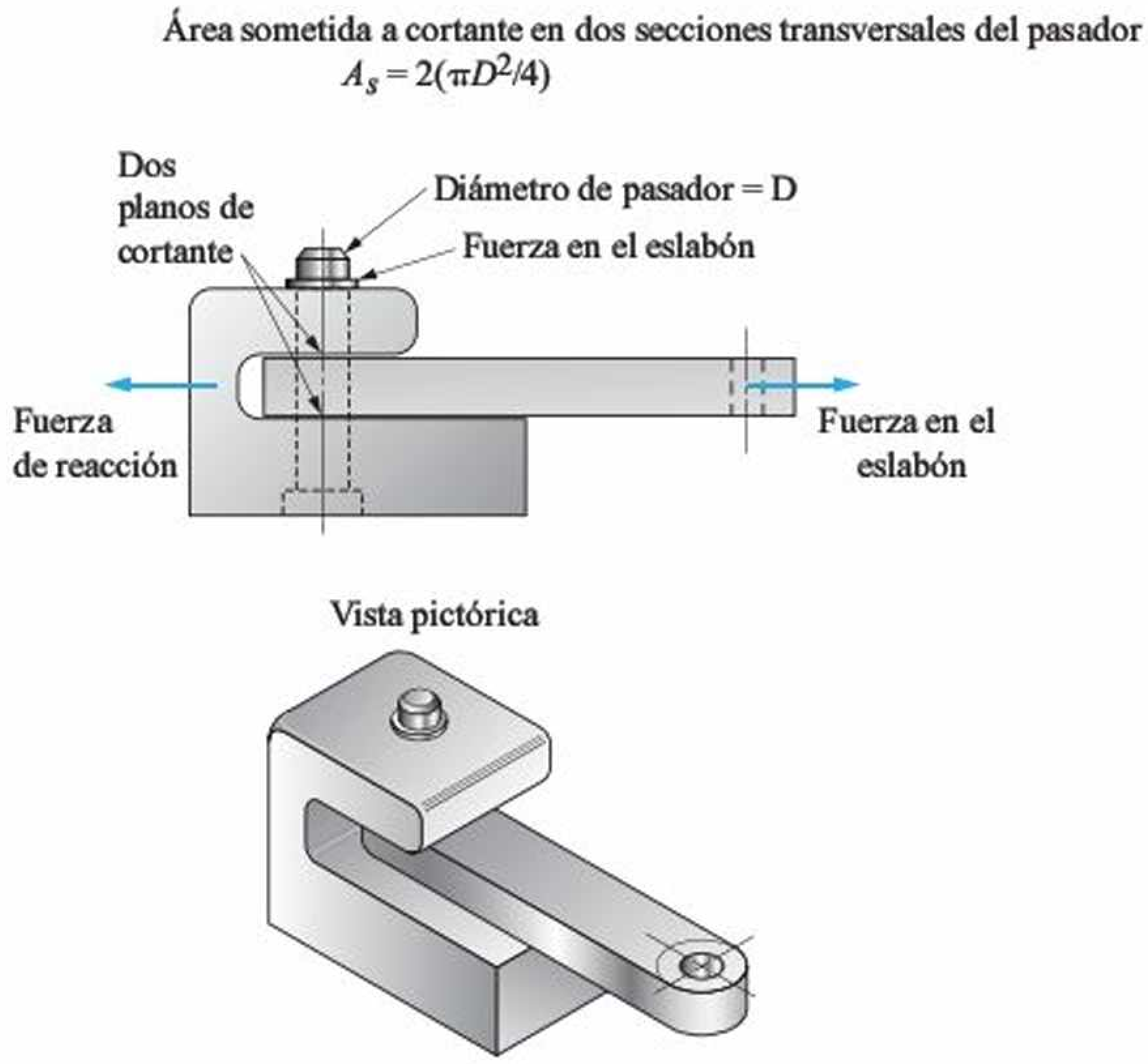


FIGURA 1–15 Conexión de pasador que ilustra el cortante simple.

FIGURA 1–16 Conexión de pasador que ilustra el cortante doble.



Problema de ejemplo 1–6 La fuerza en el eslabón en la junta de pasador simple, mostrada en la figura 1–15, es de 3550 N. El pasador tiene un diámetro de 10.0 mm; calcule el esfuerzo cortante en el pasador.

Solución

Objetivo Calcular el esfuerzo cortante en el pasador.

Dada $F = 3550$ N; $D = 10.0$ mm

Análisis El pasador se encuentra sometido a cortante directo y una de sus secciones transversales resiste toda la fuerza aplicada (cortante simple). Use la ecuación (1–4).

Resultados El área expuesta a cortante, A_s es

$$A_s = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi(10.0\ \text{mm})^2}{4} = 78.5\ \text{mm}^2$$

Luego el esfuerzo cortante es

$$\tau = \frac{F}{A_s} = \frac{3550\ \text{N}}{78.5\ \text{mm}^2} = 45.2\ \text{N/mm}^2 = 45.2\ \text{MPa}$$

Comentario Este esfuerzo se muestra en la figura 1–17 en una sección cortada del pasador.

Problema de ejemplo 1–7 La junta de pasador que se acaba de analizar fue diseñada como se muestra en la figura 1–16; calcule el esfuerzo cortante en el pasador.

Solución

Objetivo Calcular el esfuerzo cortante en el pasador.

Dada $F = 3550$ N; $D = 10.0$ mm (como en el problema del ejemplo 1–6)

Análisis El pasador se encuentra sometido a cortante directo y dos de sus secciones transversales resisten la fuerza aplicada (cortante doble). Use la ecuación (1.4).

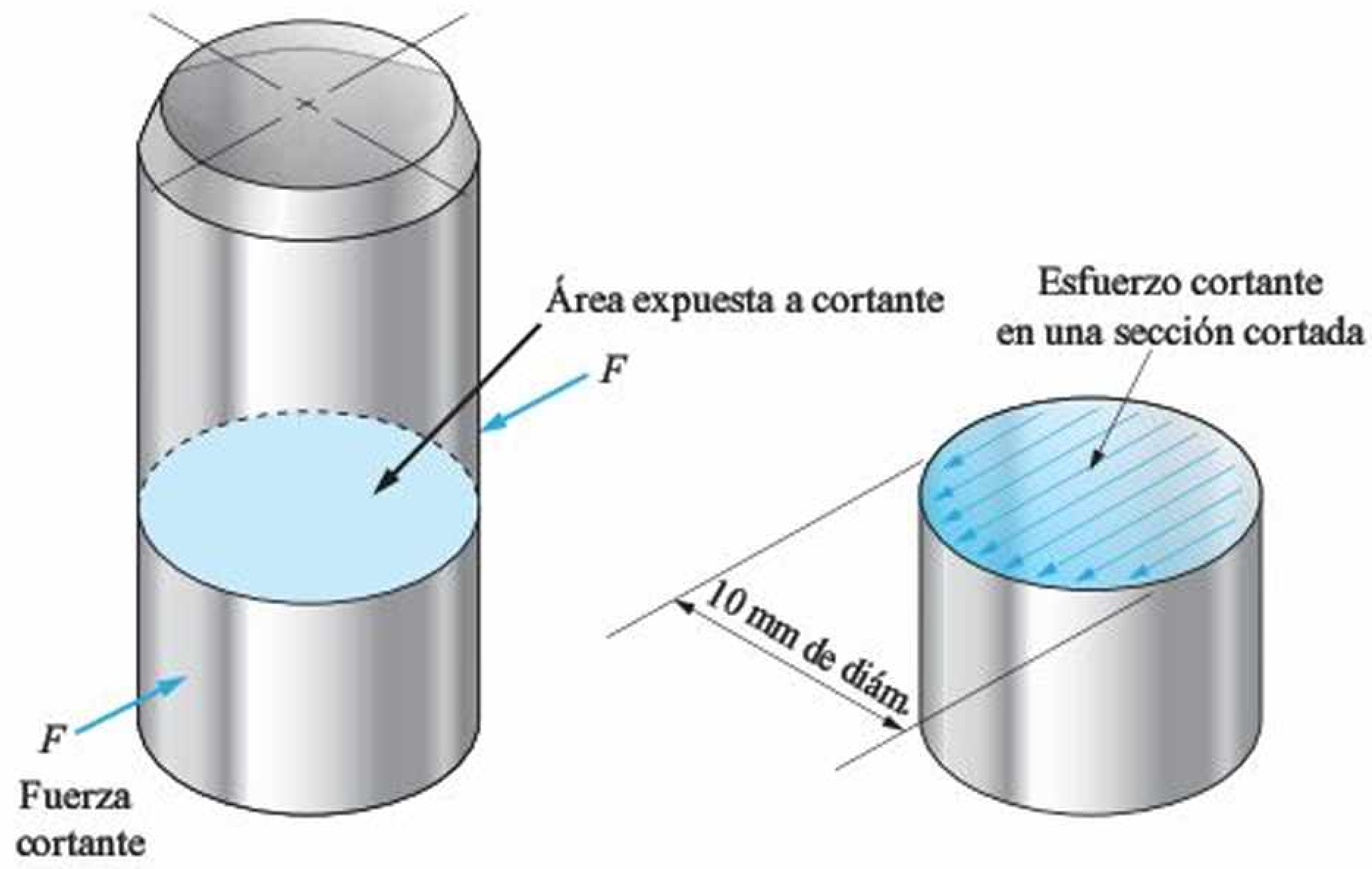


FIGURA 1–17
Esfuerzo cortante directo en un pasador.

Resultados El área expuesta a esfuerzo cortante, A_s, es

$$A_s = 2\left(\frac{\pi D^2}{4}\right) = 2\left[\frac{\pi(10.0\text{ mm})^2}{4}\right] = 157\text{ mm}^2$$

El esfuerzo cortante en el pasador es

$$\tau = \frac{F}{A_s} = \frac{3550\text{ N}}{157\text{ mm}^2} = 22.6\text{ N/mm}^2 = 22.6\text{ MPa}$$

LECCIÓN 2

Comentario El esfuerzo cortante resultante es $\frac{1}{2}$ del valor encontrado para cortante simple.

Cuñas. La figura 1–18 muestra una aplicación importante del cortante en transmisiones mecánicas. Cuando un elemento que transmite potencia, tal como un engrane, una rueda dentada propulsada por una cadena o una polea propulsada por una banda se monta en una flecha, a menudo se utiliza una cuña para conectarla y permitir la transmisión del momento de torsión de una a la otra.

El momento de torsión produce una fuerza tangencial en la cara de contacto entre la flecha y el interior de la maza del elemento de ensamble. El torque es resistido por el momento de la fuerza en la cuña por el radio de la flecha. Es decir, $T = F(D/2)$. Entonces la fuerza es $F = 2T/D$.

En la figura 1–18 se muestra la fuerza F_1 ejercida por la flecha en el lado izquierdo de la cuña. En el lado derecho, una fuerza igual F_2 es la reacción ejercida por la maza sobre la cuña. Este par de fuerzas tiende a cortar la cuña, por lo que se produce un esfuerzo cortante. Observe que el área expuesta a cortante, A_s, es un rectángulo con dimensiones $b \times L$. El siguiente problema de ejemplo ilustra el cálculo de esfuerzo cortante directo en una cuña.

Problema de ejemplo 1–8 La figura 1–18 muestra una cuña insertada entre una flecha y la maza de ensamble de un engrane. La flecha transmite un torque de 1500 lb·in a la maza; calcule el esfuerzo cortante en la cuña. Como dimensiones de la cuña, use $L = 0.75$ in, $h = b = 0.25$ in. El diámetro de la flecha es de 1.25 in.

Solución

Objetivo Calcular el esfuerzo cortante en la cuña.

Dado $T = 1500$ lb·in; $D = 1.25$ in; $L = 0.75$ in; $h = b = 0.25$ in.

Análisis La cuña se encuentra sometida a cortante directo. Use la ecuación (1.4).

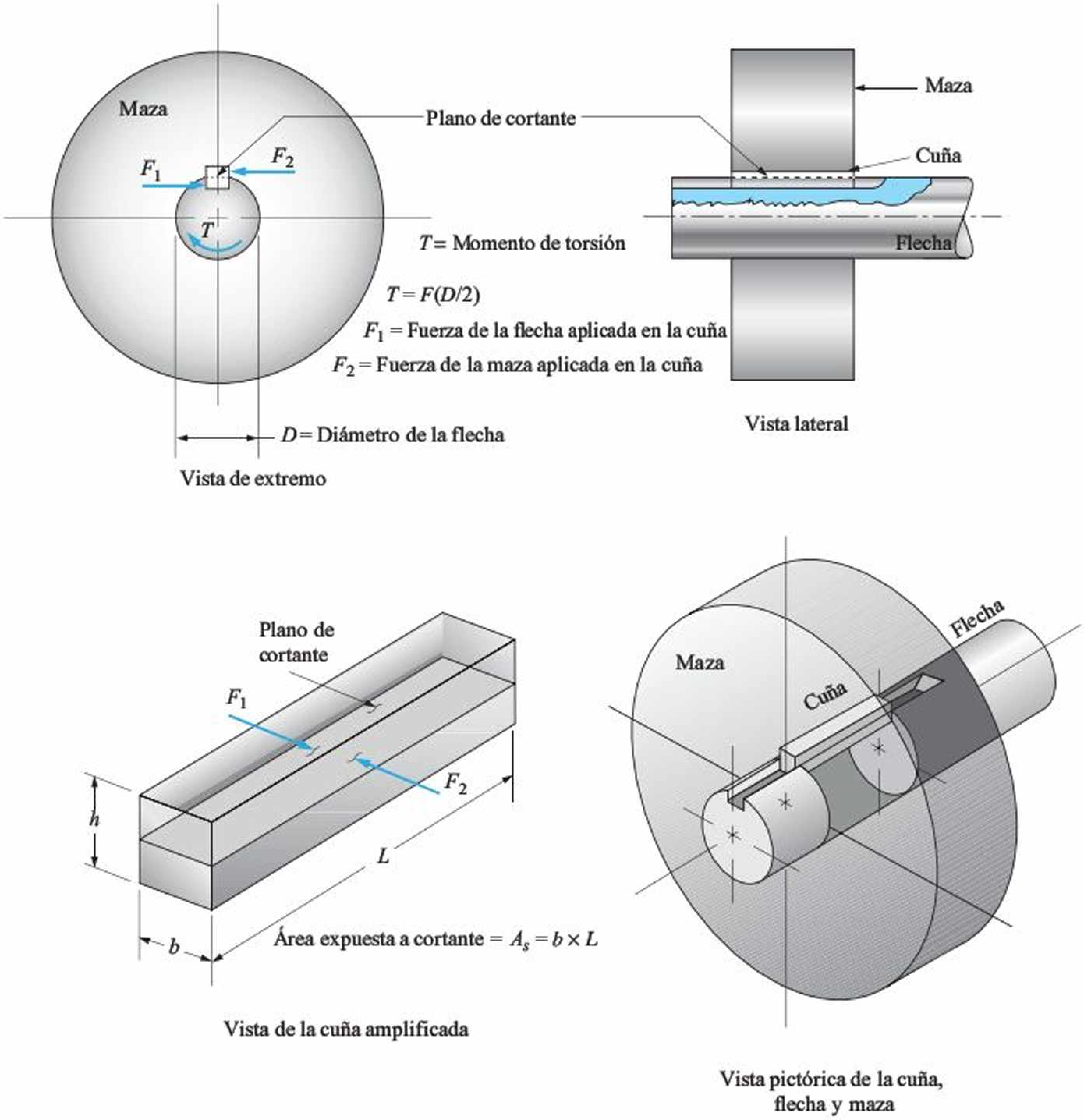


FIGURA 1–18 Acción de cortante directo en una cuña entre una flecha y la maza de un engrane, polea o rueda dentada en un sistema de transmisión mecánica.

Resultados Área expuesta a cortante: $A_s = b \times L = (0.25 \text{ in})(0.75 \text{ in}^2) = 0.1875 \text{ in}^2$. La acción del torque aplicado produce la fuerza sobre la cuña. El momento de torsión es resistido por el momento de la fuerza en la cuña por el radio de la flecha. Es decir, $T = F(D/2)$. Entonces la fuerza es

$$F = 2T/D = (2)(1500 \text{ lb} \cdot \text{in})/(1.25 \text{ in}) = 2400 \text{ lb}$$

Entonces el esfuerzo cortante es

$$\tau = F/A_s = 2400 \text{ lb}/0.1875 \text{ in}^2 = 12\,800 \text{ psi}$$

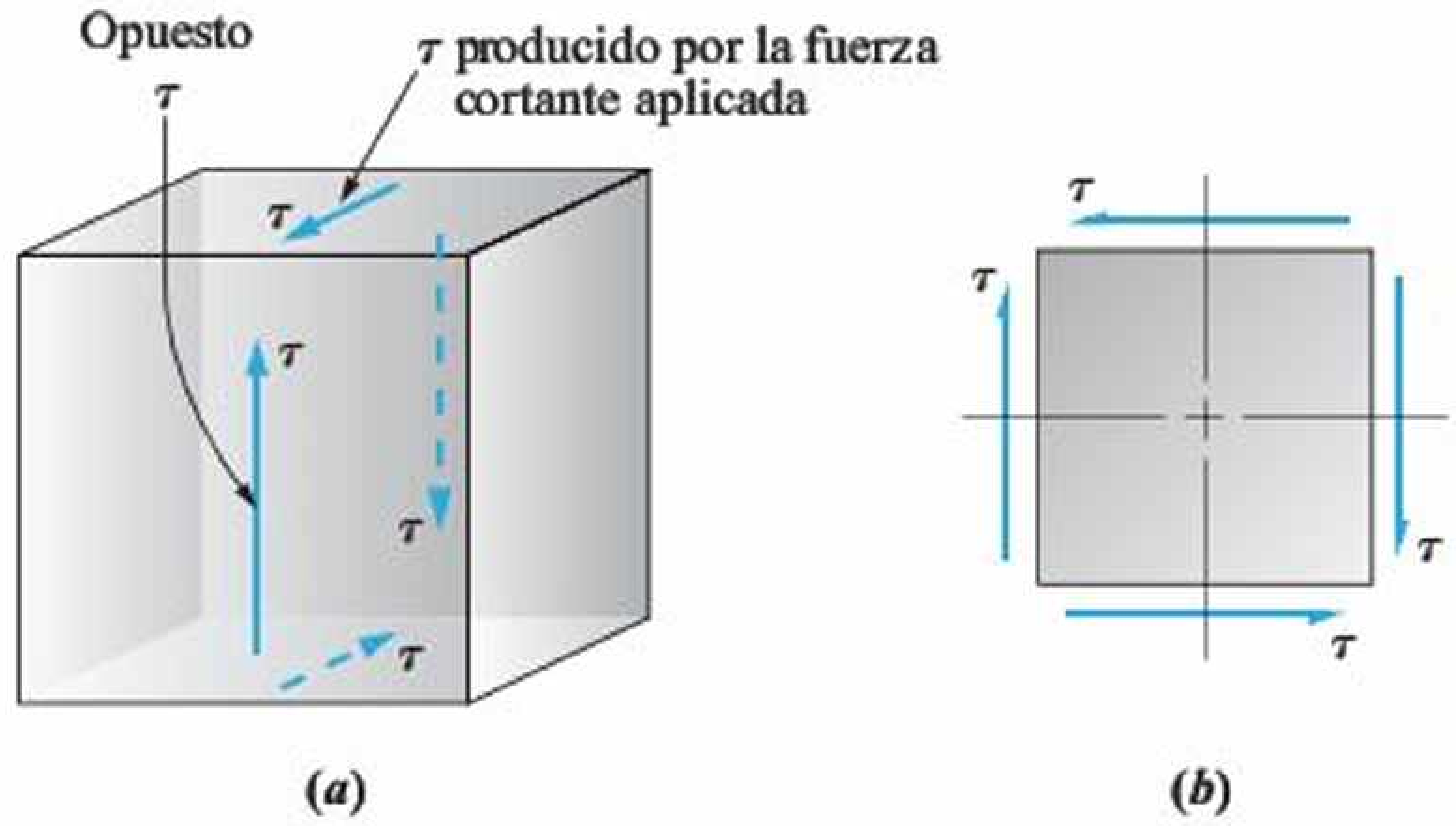


FIGURA 1–19
Elemento de esfuerzo que muestra esfuerzo cortante. (a) Elemento de esfuerzo tridimensional. (b) Elemento de esfuerzo bidimensional.

1–11 ELEMENTOS DE ESFUERZO EN ESFUERZOS CORTANTES

Un elemento cúbico infinitesimalmente pequeño del material del plano de cortante de cualquiera de los ejemplos mostrados en la sección 1–10 aparecería como se muestra en la figura 1–19, con los esfuerzos cortantes actuando paralelos a las superficies del cubo. Por ejemplo, un elemento tomado del plano de cortante de la cuña de la figura 1–18 tendría una esfuerzo cortante dirigido a la izquierda sobre su superficie superior. Para que el elemento esté en equilibrio con respecto a fuerzas horizontales, debe haber un esfuerzo igual dirigido a la derecha sobre la superficie inferior. Ésta es la acción de corte característica del cortante.

Pero los dos vectores de esfuerzo en las superficies superior e inferior no pueden existir solos porque el elemento tendería a girar por la influencia del par formado por las dos fuerzas cortantes que actúan en direcciones opuestas. Para equilibrar el par, se desarrolla un par de esfuerzos cortantes iguales en las caras verticales del elemento de esfuerzo, como se muestra en la figura 1–19(a).

El elemento de esfuerzo a menudo se traza en forma bidimensional mostrada en la figura 1–19(b). Observe los vectores de esfuerzo en caras adyacentes tienden a encontrarse en las esquinas. Tales elementos de esfuerzos son útiles para visualizar esfuerzos que actúan en un punto dentro de un material sometido a esfuerzo.

1–12 TAMAÑOS PREFERIDOS Y PERFILES ESTÁNDAR

Una de las responsabilidades de un diseñador es especificar las dimensiones finales de los miembros que soportan carga. Una vez que se completan los análisis en cuanto a esfuerzo y deformación (deformación unitaria), se obtienen valores mínimos aceptables para las dimensiones, que garantizarán que el miembro cumplirá con los requerimientos de diseño. Generalmente, el diseñador especifica entonces las dimensiones finales como estándar o valores convenientes que facilitarán la adquisición de materiales y la fabricación de las piezas. Esta sección presenta algunas guías que ayudan a tomar estas decisiones.

Tamaños básicos preferidos. Cuando el componente que se está diseñando se fabricará de conformidad con las especificaciones del diseñador, se recomienda que las dimensiones finales se especifiquen con arreglo a un conjunto de *tamaños básicos preferidos*. El apéndice A–2 contiene dimensiones en fracciones de pulgada, en décimas de pulgada y métricas.

Roscas de tornillo estándar americanas. Los sujetadores roscados y los elementos de máquina que tienen conexiones roscadas se fabrican de acuerdo con dimensiones estándar para garantizar la intercambiabilidad de las piezas y permitir una fabricación conveniente con máquinas y herramientas estándar. El apéndice A–3 da las dimensiones de roscas American Standard Unified. A los tamaños de menos de $\frac{1}{4}$ in se les asignan números de 0 a 12, en tanto que se especifican tamaños en fracciones de pulgada para tamaños de $\frac{1}{4}$ y más grandes. Se incluyen dos series: UNC es la designación de roscas gruesas y UNF designa roscas finas. Las designaciones estándar se ilustran como sigue con algunos ejemplos.

6–32 UNC (número de tamaño 6, 32 hilos por pulgada, cuerda gruesa)
12–28 UNF (número de tamaño 12, 28 hilos por pulgada, cuerda fina)
$\frac{1}{2}$–13 UNC (tamaño fraccionario $\frac{1}{2}$ in, 13 hilos por pulgada, cuerda gruesa)
$1\frac{1}{2}$ –12 UNF (tamaño fraccionario $1\frac{1}{2}$ in, 12 hilos por pulgada, cuerda fina)

En las tablas se da el diámetro mayor (D), el número de hilos por pulgada (n) y el área sometida a esfuerzo de tensión calculada de la siguiente manera

$$A_t = 0.7854\left(D - \frac{0.9743}{n}\right)^2 \tag{1.7}$$

Cuando un miembro roscado se somete a tensión directa, se utiliza el área sometida a tensión para calcular el esfuerzo de tensión promedio. Corresponde al área más pequeña que sería producida por un corte transversal a través de la barra roscada. Por conveniencia, algunos estándares utilizan el área de raíz o área gruesa y ajustan el valor al esfuerzo permisible.

Roscas de tornillo métricas. El apéndice A–3 proporciona dimensiones similares para roscas métricas. Las designaciones de roscas métricas estándar son de la forma

$$M10 \times 1.5$$

donde M significa métrica
10 es el diámetro mayor básico en mm
1.5 es el paso entre roscas adyacentes en mm

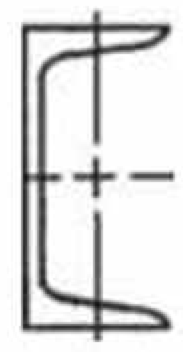
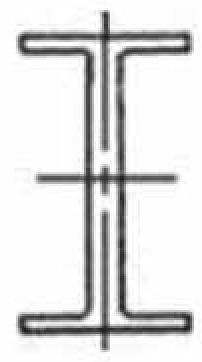
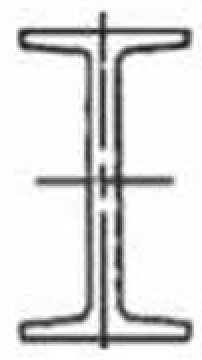
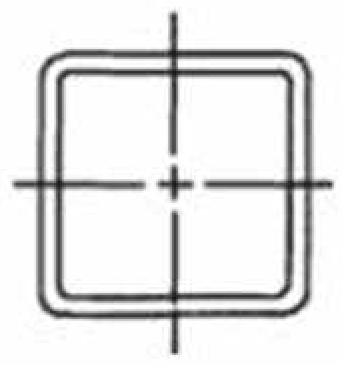
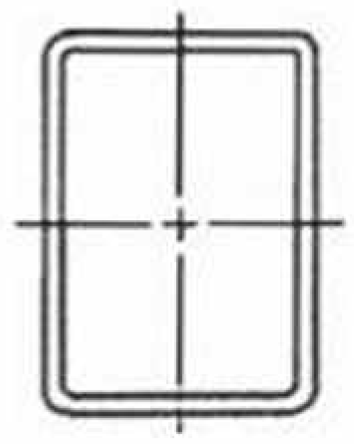
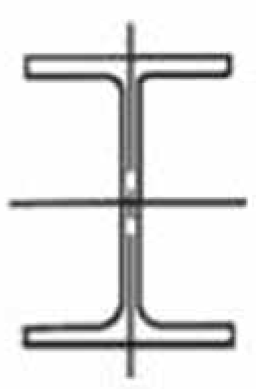
De este modo la designación mostrada denotaría una rosca métrica con un diámetro mayor básico de 10.0 mm y un paso de 1.5 mm. Note que el paso $= 1/n$.

Vigas de madera estándar. El apéndice A–4 da las dimensiones y propiedades de sección de muchos tamaños estándar de vigas de madera. Observe que el tamaño nominal es simplemente el "nombre" de la viga y se relaciona con el tamaño en bruto aproximado antes de su terminación. Las dimensiones reales terminadas son significativamente más pequeñas que los tamaños nominales. Por ejemplo, una tabla común de "2 × 4" en realidad es de 1.5 in de ancho y 3.5 in de altura. Observe también el bosquejo de la orientación de las vigas en cuanto a la designación estándar de los ejes X y Y. Cuando se utiliza como viga sometida a flexión, la dimensión larga deberá quedar en posición vertical para una máxima resistencia y rigidez.

Perfiles estructurales de acero. Los fabricantes de acero suministran una gran variedad de perfiles estructurales estándar que son eficientes en el uso de material y convenientes para especificación e instalación en estructuras de edificios o máquinas. En la tabla 1–6 se muestran ángulos estándar (perfiles en L), canales (perfiles en C) y perfiles de patín ancho (perfiles en W), vigas American Standard (perfiles en S), tubería estructural y tubos conocidos como *secciones estructurales huecas* (HSS, *hollow structural sections*). Observe que, en conversaciones coloquiales, a menudo se hace referencia a los perfiles en W y en S como "vigas I", porque el perfil de la sección transversal se parece a la letra mayúscula I.

Las tablas en los apéndices A–5 a A–9 dan propiedades geométricas de perfiles estructurales seleccionados que abarcan una gama bastante amplia de tamaños. Observe que están disponibles mucho más tamaños que los presentados en la referencia 2. Las tablas incluidas en los apéndices dan el área de la sección transversal (A), el peso por pie de longitud, la ubicación del centroide de la sección transversal, el momento de inercia (I), el módulo de sección (S) y el radio de giro (r). Algunas de estas propiedades pueden ser nuevas para usted en este momento y se definirán según se requiera más adelante en el libro. Los valores de I y S son importantes en el análisis y diseño de vigas. Para el análisis de columnas, se requieren tanto I como r.

TABLA 1–6 Designaciones de perfiles de acero y aluminio.

Nombre del perfil	Perfil	Símbolo	Designación ejemplo
Ángulo		L	L4×3×1/2 Apéndice A–5 Métrica: L102×76×12.7
Canal		C	C15×50 Apéndice A–6 Métrica: C380×74
Viga de patín ancho		W	W14×43 Apéndice A–7 Métrica: W360×64
Viga American Standard		S	S10×35 Apéndice A–8 Métrica: S250×52
Tubería estructural cuadrada			HSS4×4×1/4 Apéndice A–9 Métrica: HSS 102×102×6.4
Tubería estructural rectangular			HSS6×4×1/4 Apéndice A–9 Métrica: HSS 152×102×6.4
Tubo			PIPE 4 STD 4-inch Schedule 40 Apéndice A–12 Métrica: Pipe 102 STD
Canal Aluminum Association		C	C4×1.738 Apéndice A–10 Métrica: C102×2.586
Viga I Aluminum Association		I	I8×6.181 Apéndice A–11 Métrica: I203×9.197

Aplicación del sistema métrico a perfiles estructurales. El sistema métrico en construcción sigue avanzando aún cuando se espera que, en Estados Unidos, el uso de perfiles estructurales estándar que se han fabricado por muchos años con arreglo a dimensiones básicas expresadas en el sistema inglés de unidades (sistema de libra—pie—segundo) siga dominando en el futuro cercano. Es importante que esté enterado del uso cada vez más difundido de unidades métricas SI en el diseño y la fabricación de estructuras en tanto que mantiene su habilidad de utilizar el sistema inglés.

Las tablas en los apéndices A–5 a A–9 incluyen páginas distintas para unidades en el sistema inglés y unidades SI para perfiles en L, perfiles en W, perfiles en C y perfiles HSS. En cada tabla, la primera columna indica una letra de referencia por cada tamaño del perfil dado. Esto facilita la correlación de los datos para un perfil específico entre las unidades del sistema inglés y SI. Todas las tablas que incluyen datos SI son una *conversión suave* del sistema inglés. Esto significa que los perfiles estándar utilizados y fabricados de acuerdo con el sistema inglés de unidades no han cambiado. En las tablas SI, las designaciones y propiedades de las secciones transversales se convirtieron a su equivalente métrico con base en las definiciones dadas en el sección 1–4 de este capítulo y los factores de conversión que aparecen en el apéndice A–26. En la referencia 2 se incluye una tabla completa de equivalencias entre designaciones en el sistema inglés y el SI. La nomenclatura métrica para perfiles estructurales se incluye en la referencia 3. A continuación se analizan algunas observaciones.

1. Las dimensiones lineales dadas en pulgadas típicamente se convierten al milímetro más cercano. No obstante, las dimensiones pequeñas, tales como el espesor de las alas de un ángulo (perfil en L) se redondean a la décima de mm más cercana. El factor utilizado es 1.0 in = 25.4 mm.
2. Los tamaños nominales convertidos típicamente se redondean a los 10 mm más cercanos. Es importante utilizar en los cálculos dimensiones reales de características críticas de los perfiles. Los tamaños nominales son meramente los *nombres* de los perfiles que sugieren el tamaño aproximado.
3. El sistema inglés de unidades incluye el *peso por pie* (lb/ft) de cada perfil. Más precisamente, estos datos son *masa por pie*, donde las unidades son lb_m/ft leídas como *libras masa por pie*. Comúnmente no se incluye el subíndice *m*. En el caso de usos en o cerca de la superficie de la tierra, el valor numérico de masa en lb_m es el mismo que el valor de peso (la fuerza de la gravedad), a menudo expresada en lb_f o *libras fuerza*.
4. Para la conversión de la masa por unidad de longitud de lb_m/ft a unidades SI se aplica el factor

$$\frac{1.488\ \text{kg/m}}{\text{lb}_\text{m}/\text{ft}}$$

   Por ejemplo, un perfil de viga que aparece listado con un peso de 60 lb/ft se convierte a unidades SI como:

$$60\ \text{lb/ft}\ [\ (1.488\ \text{kg/m})/(1.0\ \text{lb/ft})\ ] = 89.28\ \text{kg/m}$$

   El resultado por lo general se redondea al valor entero de kg/m más cercano, excepto en el caso de números muy pequeños. Así, este valor se reporta como 89 kg/m en la tabla.

5. A menudo se desea el peso (fuerza) por unidad de longitud cuando se considera la fuerza aplicada por un miembro a otro. En ese caso de la masa por unidad de longitud se debe convertir a fuerza por unidad de longitud multiplicando por $g = 9.81\ \text{m/s}^2$, la aceleración de la gravedad. Esto se deriva de la relación $w = mg$ explicada en la sección 1–4. Por ejemplo, para la viga descrita en punto 4 anterior, el peso por unidad de longitud es:

$$89.28\ \text{kg/m}[9.81\ \text{m/s}^2] = (876\ \text{kg-m/s}^2)/\text{m} = 876\ \text{N/m}$$

   Los valores más grandes pueden aparecer en kN/m. Vea la tabla A–7(SI) en el apéndice.

Ángulos de acero (perfiles en L). El apéndice A–5 muestra ilustraciones de los perfiles típicos de ángulos de acero con alas de longitudes iguales y desiguales. Llamados perfiles en L por la apariencia de la sección transversal, los ángulos a menudo se utilizan como miembros de armaduras y torres sometidos a tensión, miembros de estructuras de máquinas, dinteles sobre ventanas y puertas, atiesadores de grandes placas utilizadas en bastidores y vigas, ménsulas y soportes escalonados para equipo. Algunos se refieren a estos perfiles como "hierro angular". La designación estándar adopta la forma mostrada a continuación,

$$L4 \times 3 \times 1/2$$

donde L se refiere al perfil en L, 4 es la longitud del ala más larga, 3 es la longitud del ala más corta y $\frac{1}{2}$ es el espesor de las alas. Las dimensiones están en pulgadas.

Los datos de propiedad de sección (I y S) se dan para el eje X y el eje Y como se muestra en el dibujo. Estos datos se utilizan en capítulos posteriores (5–11) y es esencial se utilicen los valores para el eje apropiado al analizar vigas y columnas que incorporan perfiles en L. La intersección de los ejes X y Y localizan el centroide del perfil y las dimensiones y y x se utilizan para definir la posición.

Se dan datos adicionales para el radio de giro, r, del perfil en L con respecto al eje Z, definido como el eje que tiene el valor más pequeño de r. Esto es importante para el análisis de cargas de columnas del perfil, como se describe en el capítulo 11. La columna tiende a pandearse en torno al eje Z que pasa por el centroide que tiene un ángulo de inclinación α con respecto al eje Y.

La designación SI correspondiente para el perfil L4×3×1/2 es,

$$L102 \times 76 \times 12.7$$

Esto indica la longitud del ala más larga de 102 mm, la longitud del ala más corta de 76 mm y un espesor de 12.7 mm. Vea el apéndice A–5(SI).

Canales American Standard (perfiles en C). Consulte el apéndice A–6 para conocer la apariencia de los canales y sus propiedades geométricas. Se utilizan canales en aplicaciones similares a las descritas para ángulos. El alma plana y los dos patines producen un perfil generalmente más rígido que los ángulos que resisten más la flexión y la torsión bajo carga.

El bosquejo en la parte superior de la tabla muestra que los canales tienen patines abocinados y almas de espesor constante. La pendiente de la inclinación de los patines es aproximadamente de 2 in en 12 in y esto dificulta la unión de otros miembros a los patines. Están disponibles arandelas o rondanas cónicas especiales para facilitar la sujeción. Observe la designación de los ejes X y Y en el dibujo, definidos con el alma del canal vertical, lo que le da la característica de perfil "C". Esto es de suma importancia cuando se utilizan canales como vigas o columnas. El eje X está localizado sobre el eje de simetría horizontal en tanto que la dimensión x, dada en la tabla, localiza el eje Y con respecto al dorso del alma. El centroide se encuentra en la intersección de los ejes X y Y.

La forma de la designación estándar de canales es

$$C15 \times 50$$

donde C indica que un perfil C estándar
15 es el peralte nominal (y real) en pulgadas con el alma vertical
50 es el peso por unidad de longitud en lb/ft

La designación SI correspondiente para este perfil es

$$C380 \times 74$$

Ésta indica el peralte nominal de 380 mm para el canal y una masa por unidad de longitud de 74 kg/m. En el apéndice A–6(SI) se ve que el peso por unidad de longitud es de 0.730 kN/m y el peralte real de 381 mm.

Perfiles de patín ancho (perfiles W). Consulte el apéndice A–7. Este es el perfil más común utilizado para vigas, como se verá en los capítulos 7–9. Los perfiles W tienen el alma relativamente delgada y patines planos con espesor constante, un tanto más gruesos. La mayor parte de la sección transversal se encuentra en los patines, lejos del eje centroidal (eje X), lo que hace que el momento de inercia sea muy alto para una cantidad dada de material (vea el capítulo 6).

Observe que las propiedades de momento de inercia y módulo de sección son mucho más altas con respecto al eje X de lo que son con respecto al eje Y. Por consiguiente, los perfiles W en general se utilizan en la orientación mostrada en el dibujo del apéndice A–7. Además, estos perfiles funcionan mejor cuando se utilizan a flexión pura sin torsión, dado que son bastante flexibles a torsión.

La designación estándar de los perfiles W porta mucha información. Considere el ejemplo

$$W14\times43$$

donde W indica que es un perfil W
14 es el peralte nominal en pulgadas
43 es el peso por unidad de longitud en lb/ft

El término *peralte* es la designación estándar para la altura vertical de la sección transversal cuando se coloca en la orientación mostrada en el apéndice A–7. Observe que de acuerdo con los datos que aparecen en la tabla, el peralte real a menudo es diferente del nominal. Para el W14×43, el peralte real es de 13.7 in.

La designación SI correspondiente para este perfil es

$$W360\times64$$

Ésta indica el peralte nominal de 360 mm para la viga W y una masa por unidad de longitud de 64 kg/m. En el apéndice A–7(SI) se ve que el peso por unidad de longitud es de 0.628 kN/m y que el peralte real es de 348 mm.

Vigas American Standard (perfiles S). El apéndice A–8 muestra las propiedades de perfiles S. Mucho de lo dicho para perfiles W también se aplica a los perfiles S. Observe que, de nueva cuenta, el peso por pie de longitud está incluido en la designación tal como el S10×35 que pesa 35 lb/ft. Para la mayoría, aunque no para todos, los perfiles S, el peralte real es el mismo que el peralte nominal. Los patines de los perfiles S son cónicos, a una pendiente de aproximadamente 2 in en 12 in, como los patines de los perfiles C. Los ejes X y Y están definidos como se muestra con el alma vertical.

Para el perfil S10×35 aquí analizado, la designación SI correspondiente es:

$$S250\times52$$

Ésta indica el peralte nominal de 250 mm para la viga S y una masa por unidad de longitud de 52 kg/m. En el apéndice A–8(SI) se ve que el peso por unidad de longitud es de 0.511 kN/m y el peralte real es de 254 mm.

A menudo se prefieren los perfiles de patín ancho (perfiles W) sobre los perfiles S a causa de sus patines relativamente anchos, el espesor constante de los patines y generalmente propiedades de sección generalmente más altas para un peso y peralte dados.

Tubería estructural (cuadrada y rectangular) Consulte en el apéndice A–9 la apariencia y las propiedades de tubería estructural de acero, también llamada *sección estructural hueca* (HSS, por sus siglas en inglés). Estos perfiles normalmente se forman con lámina plana y sueldan a todo lo largo de su longitud. Las propiedades de sección responden de los radios de esquina. Observe los bosquejos que muestran los ejes X y Y. La designación estándar adopta la forma

HSS6×4×1/4

donde HSS indica que es una sección estructural estándar
6 es el peralte del lado más largo en pulgadas
4 es el ancho del lado más corto en pulgadas
1/4 es el espesor de pared nominal en pulgadas

Las tuberías cuadrada y rectangular son muy útiles en estructuras de máquina porque sus propiedades de sección son buenas para miembros cargados, como vigas sometidas a flexión, y para carga torsional (torsión) debido a la sección transversal cerrada. Las caras planas a menudo facilitan la sujeción de miembros entre sí o la sujeción de equipo a los miembros estructurales. Algunos armazones se sueldan como una unidad integral que funciona como un armazón espacial rígido. La tubería cuadrada constituye una sección eficiente para columnas.

Observe que el espesor de pared de diseño es un poco más pequeño que el nominal. La pared nominal de $\frac{1}{4}$ in tiene un espesor de diseño de 0.233 in. Una pared nominal de $\frac{1}{2}$ in tiene un espesor de diseño de 0.465 in.

El apéndice A–9 incluye dos constantes torsionales, J y C, para los perfiles HSS cuadrados y rectangulares; éstas se describen en el capítulo 4, en la sección llamada *Torsión de secciones no circulares*. El término J es el momento polar de inercia relacionado con la rigidez de la sección para resistir la torsión. El término C se utiliza para calcular el esfuerzo cortante en el perfil cuando se somete a torsión. Como estos perfiles funcionan bien como columnas, el radio de giro se da para cada tamaño de miembro, porque tiene que ver con la tendencia de una columna de pandearse, como se describe en el capítulo 11.

Para el perfil HSS antes mencionado (HSS6×4×1/4), la designación SI correspondiente es:

HSS152×102×6.4

Ésta indica el peralte de 152 mm, el ancho de 102 mm y el espesor de pared nominal de 6.5 mm. En el apéndice A–9(SI) se ve que la masa por unidad de longitud es de 23.2 kg/m y que el peso por unidad de longitud es de 228 N/m. El espesor de pared de diseño es de 5.92 mm.

Tubos y tubería redonda. Las secciones circulares huecas, comúnmente llamadas *tubos*, son muy eficientes para usarse como vigas, miembros sometidos a torsión y columnas. La colocación del material uniformemente alejado del centro del tubo incrementa el momento de inercia para una cantidad de material dada e imparte al tubo propiedades uniformes con respecto a todos los ejes que pasan por el centro de la sección transversal. El perfil de sección transversal cerrada le confiere una alta resistencia y rigidez a torsión, así como también a flexión.

El apéndice A–12 da las propiedades de algunos tamaños de tubo representativos que pueden ser utilizados para aplicaciones estructurales en la construcción y el diseño mecánico. Se incluyen la nomenclatura de designación 1, las dimensiones reales, el área, el momento de inercia, el módulo de sección, el radio de giro y las constantes torsionales J y Z_p.

Existen varios tipos de miembros huecos redondos en cientos de tamaños disponibles de dónde escoger, como se detalla en las referencias 2, 6, 7 y 8. Visite también los sitios de Internet

1–11. Lo siguiente es un resumen de tipos comunes.

- Las aplicaciones de construcción se especifican en general con ***secciones estructurales huecas*** redondas (HSS, por sus siglas en inglés) con diámetro externo desde 1.660 in (42.2 mm) hasta 20.0 in (508 mm), como se detalla en la referencia 2. Se produce un total de 59 diámetros externos diferentes, cada uno con múltiples espesores de pared, lo que da un total de 139 tamaños específicos de secciones HSS redondas.
  - Una designación de ejemplo de este tipo de miembro es HSS4.000×0.250, que indica un diámetro externo real de 4.000 in y un espesor de pared de 0.250 in.
  - El equivalente SI de este miembro se designa como: HSS101.6×6.4, que indica un diámetro externo real de 101.6 mm y un espesor de pared de 6.4 mm.
- ***Tubo de acero utilizado para aplicación estructural*** está disponible en tres clases, *Peso estándar* (*Std*), *Extra fuerte* (*X–Strong* o *XS*) y *Doble extra fuerte* (*XX–Strong* o *XXS*). Cada serie tiene el mismo conjunto de diámetros externos con diferentes espesores de pared crecientes y diámetros internos decrecientes para los tamaños *XS* y *XXS*. Las designaciones están relacionadas con los *diámetros nominales* que van desde $\frac{1}{2}$ in hasta 12 in (13 mm hasta 310 mm). Los diámetros externos e internos son significativamente diferentes de los tamaños nominales, como se indica en el apéndice A–12 y deben ser utilizados para diseño y análisis.
  - Un ejemplo de designación para tubo de construcción es PIPE4STD, que indica un tamaño nominal de 4 in y peso estándar. Este tubo tiene un diámetro externo real de 4.500 in, un espesor de pared de 0.237 in y un diámetro interno de 4.026 in.
  - El tubo SI equivalente se llama PIPE102STD, que indica un tamaño nominal de 102 mm, un diámetro externo real de 114.3 mm, un espesor de pared de 6.02 mm y un diámetro interno de 102.3 mm.
  - Observe que el conjunto completo de tubos de construcción se incluye dentro del agrupamiento HSS redondo antes descrito. El tubo ejemplo, PIPE4STD también puede ser designado como HSS4.500×0.237 en unidades del sistema inglés o HSS114.3×6 en unidades SI.
- ***Los tubos de acero se producen principalmente para transportar fluidos*** y son comúnmente distribuidos en ferreterías; se designan por medio de diferentes *cédulas*, que van desde cédula 5 ligera hasta cédula 160 pesada. Las cédulas más comunes son 40, 80 y 160 y la mayoría de estos tamaños son idénticos a las clases STD XS y XXS descritas para usos de construcción. Consulte las referencias 6 y 7 para designaciones y tamaños específicos. El tubo de acero está disponible en tamaños nominales desde $\frac{1}{8}$ in hasta 42 in. En el apéndice A–12, todos los tamaños que aparecen son cédula 40. Aquellos desde $\frac{1}{2}$ in hasta 10 in también pueden ser designados con la notación PIPE antes descrita para aplicaciones de construcción.
  - El tubo llamado PIPE4STD también puede ser designado como tubo cédula 40 de 4 in y típicamente se utilizará esta forma en este libro
  - Las designaciones equivalentes SI de tubo para manejo de fluidos aún no se han definido.
- ***La tubería mecánica*** se utiliza en numerosas aplicaciones en diseño mecánico y sus rangos de tamaño y designaciones son significativamente diferentes de aquéllas para HSS redondo o tubo. También están disponibles en muchos materiales tales como acero al carbón, acero aleado, acero inoxidable, latón, cobre, titanio, tántalo y aluminio. Los apéndices A–13 y A–13(SI) dan algunos ejemplos de tubería mecánica designada por medio de diámetro externo y espesor de pared, con el espesor de pared correspondiente a un estándar llamado Calibre de pared Birmingham (BWG, *Birmingham Wall Gauge*). Están disponibles muchos más tamaños de calibres de pared, como se ve en el sitio de Internet 9. Consulte la referencia 7 y los sitios Internet 1–3 y 9–11 para conocer otros ejemplos de tubería de acero y cobre comercialmente disponibles.

- ***Tubos y tubería de plástico*** también están disponibles en muchos materiales y tamaños, y son útiles para diseño mecánico. Algunos tubos de plástico se fabrican con las mismas dimensiones que el tubo de acero cédula 40. La tubería está disponible en una amplia variedad de diámetros y espesores de pared. Consulte los sitios Internet 4–6 y 11.

Canales estándar Aluminum Association y vigas I. Los apéndices A–10 y A–11 dan las dimensiones y propiedades de sección de canales y vigas I desarrolladas por la Asociación del Aluminio (Aluminum Association) (referencia 1). Éstos son perfiles extruidos con almas de espesor uniforme y patines con radios generosos donde concurren. Las proporciones de estas secciones son un tanto diferentes de aquellas de las secciones de acero laminadas previamente descritas. La forma extruida ofrece ventajas en el uso eficiente de material y en la unión de miembros. Este libro utilizará las siguientes formas de designación de secciones de aluminio:

$$C4\times1.738 \quad \text{o} \quad 18\times6.181$$

donde C o I indican el perfil de sección básico
4 u 8 indican el peralte del perfil cuando se encuentra en la orientación mostrada
1.738 o 6.181 indican el peso por unidad de longitud en lb/ft

Las tablas A–10(SI) y A–11(SI) dan los tamaños convertidos de canales Aluminum Association y vigas I. El formato de la designación es similar a aquella en unidades del sistema inglés. El ejemplo para una canal C4×31.738, se vuelve

$$C102\times2.586$$

donde 102 es el peralte en mm
2.586 es la masa por unidad de longitud en kg/m
En la tabla A–10(SI) se ve que el peso por unidad de longitud es de 23.37 N/m

El ejemplo para una viga 18×6.181, se vuelve

$$1203\times9.197$$

donde 203 es el peralte en mm
9.197 es la masa por unidad de longitud en kg/m
En la tabla A–10(SI) se ve que el peso por unidad de longitud es de 90.22 N/m

1–13 ANÁLISIS EXPERIMENTAL Y COMPUTACIONAL DE ESFUERZOS

El objetivo principal de este libro es ayudarle a desarrollar habilidades que le permitan determinar analíticamente la magnitud del esfuerzo (aunque existen casos en los que es difícil o imposible). Algunos ejemplos incluyen:

- Componentes de forma compleja para los cuales el cálculo de áreas y otros factores geométricos requeridos para el análisis de esfuerzo es difícil.
- Los patrones de carga y la forma del apoyo pueden ser complejos, lo que conduce a la inhabilidad de calcular las cargas apropiadas en un punto de interés.
- Las combinaciones de formas complejas y cargas pueden hacer difícil determinar dónde ocurre el esfuerzo máximo.

En tales situaciones es posible utilizar técnicas de análisis experimental y computacional para determinar la magnitud y ubicación de los esfuerzos críticos. Están disponibles varias técnicas como se verá a continuación.

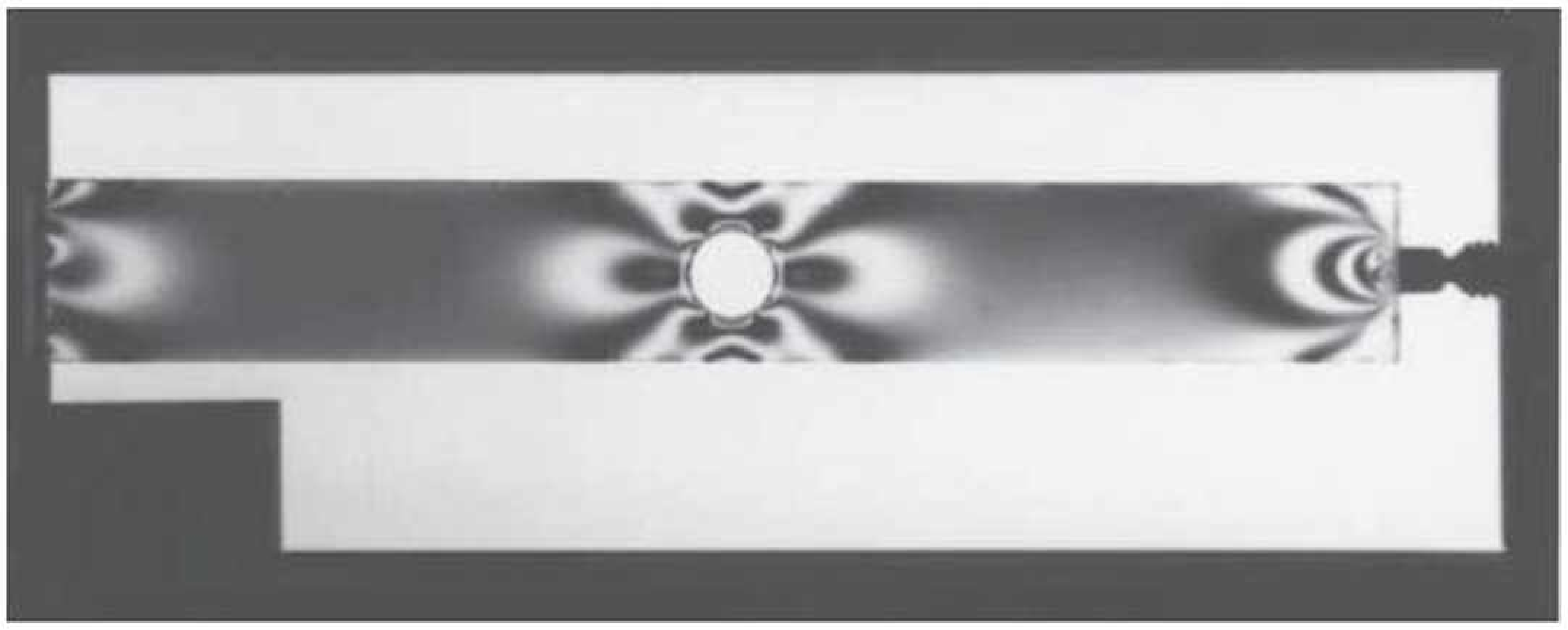


FIGURA 1–20 Modelo fotoelástico de una barra plana con una carga axial y un agujero central. (Fuente: Measurements Group, Inc., Raleigh, NC)

Análisis de esfuerzo fotoelástico. Cuando un componente es básicamente bidimensional con espesor constante, se puede producir un modelo de la forma utilizando un material especial que permite visualizar la distribución del esfuerzo dentro del componente. Generalmente, el material es un plástico transparente que se ilumina mientras se carga.

La figura 1–20 muestra un ejemplo donde una barra plana con un agujero en el centro se somete a una carga axial. Las variaciones en los esfuerzos dentro de la barra aparecen como líneas y áreas blancas y negras en el componente cargado. El esfuerzo en la parte principal de la barra lejos del agujero es casi uniforme y esa parte aparece como un campo negro. Pero cerca del agujero aparecen bandas claras y oscuras llamadas *bordes*, lo que indica que alrededor del agujero se presenta un gradiente en los niveles de esfuerzo.

En realidad, la presencia del agujero hace que aparezcan esfuerzos más altos no sólo debido al material que se quitó de la barra, sino también porque el cambio de forma de la sección transversal o de las dimensiones provoca *concentraciones de esfuerzo*. Cualquier caso en el que cambian las dimensiones o la forma de la sección transversal producirá concentraciones de esfuerzo. Si se conocen las características ópticas del material fotoelástico se podrá determinar el esfuerzo en cualquier punto.

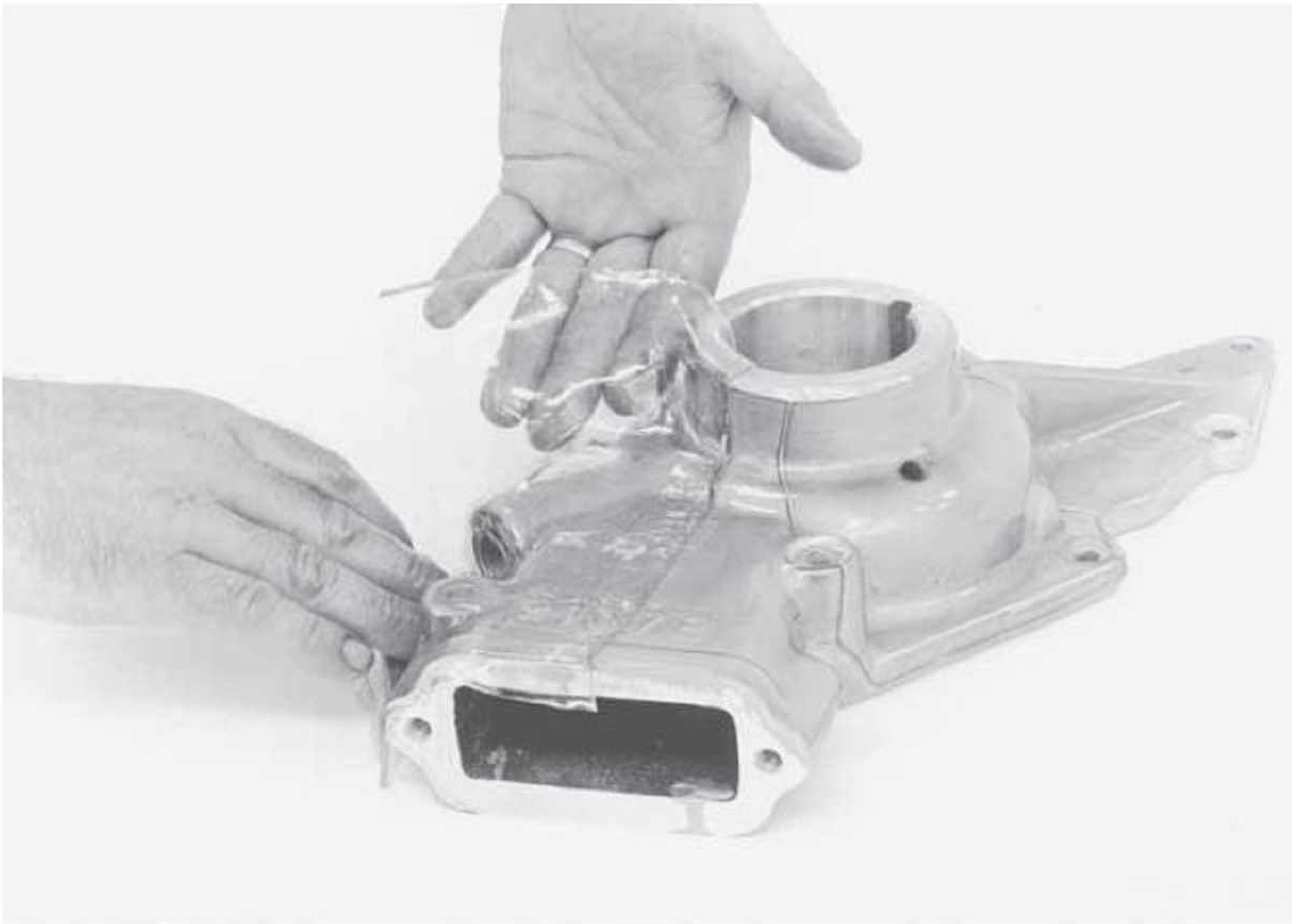
Los datos y técnicas analíticas para determinar el esfuerzo máximo cerca de concentraciones de esfuerzo se presentan en capítulos futuros. Allí se mostrarán más modelos fotoelásticos.

Recubrimientos fotoelásticos. Para formas tridimensionales más complejas es imposible modelar la geometría en el material fotoelástico rígido. Además, a menudo se desea medir la distribución de esfuerzo en componentes sólidos reales como en un bloque de motor, un cuerpo de válvulas o la estructura de una gran máquina. En esos casos se puede aplicar un material de recubrimiento fotoelástico especial a la superficie de la pieza. Se moldea de modo que siga los contornos y se adhiera a la superficie. Vea la figura 1–21(a).

Cuando se carga el componente, las deformaciones en la superficie se transfieren al material de recubrimiento. Se dirige entonces una luz polarizada al material y aparecen bordes que indican los gradientes en los esfuerzos en la parte real. Vea la figura 1–21(b). Con estas observaciones puede determinar las áreas donde ocurren los esfuerzos máximos y calcular sus valores aproximados. Por consiguiente, si se conoce la distribución general del esfuerzo y la ubicación de los niveles de esfuerzo más altos, se pueden realizar ensayos más precisos si se desea una mayor precisión. La medición de deformación, descrita a continuación, es la que generalmente se emplea en la actualidad.

Medición de la deformación. Uno de los dispositivos de análisis experimental de esfuerzos más frecuentemente utilizados es el medidor de deformación de resistencia eléctrica. Es una rejilla de lámina metálica muy delgada hecha de un material sensible a la deformación, como el constantan, con un sustrato aislante. En la figura 1–22(a) se muestra un estilo. El medidor se aplica cuidadosamente con un adhesivo especial a la superficie del componente donde es probable que ocurran esfuerzos críticos. La figura 1–22(b) muestra una instalación típica.

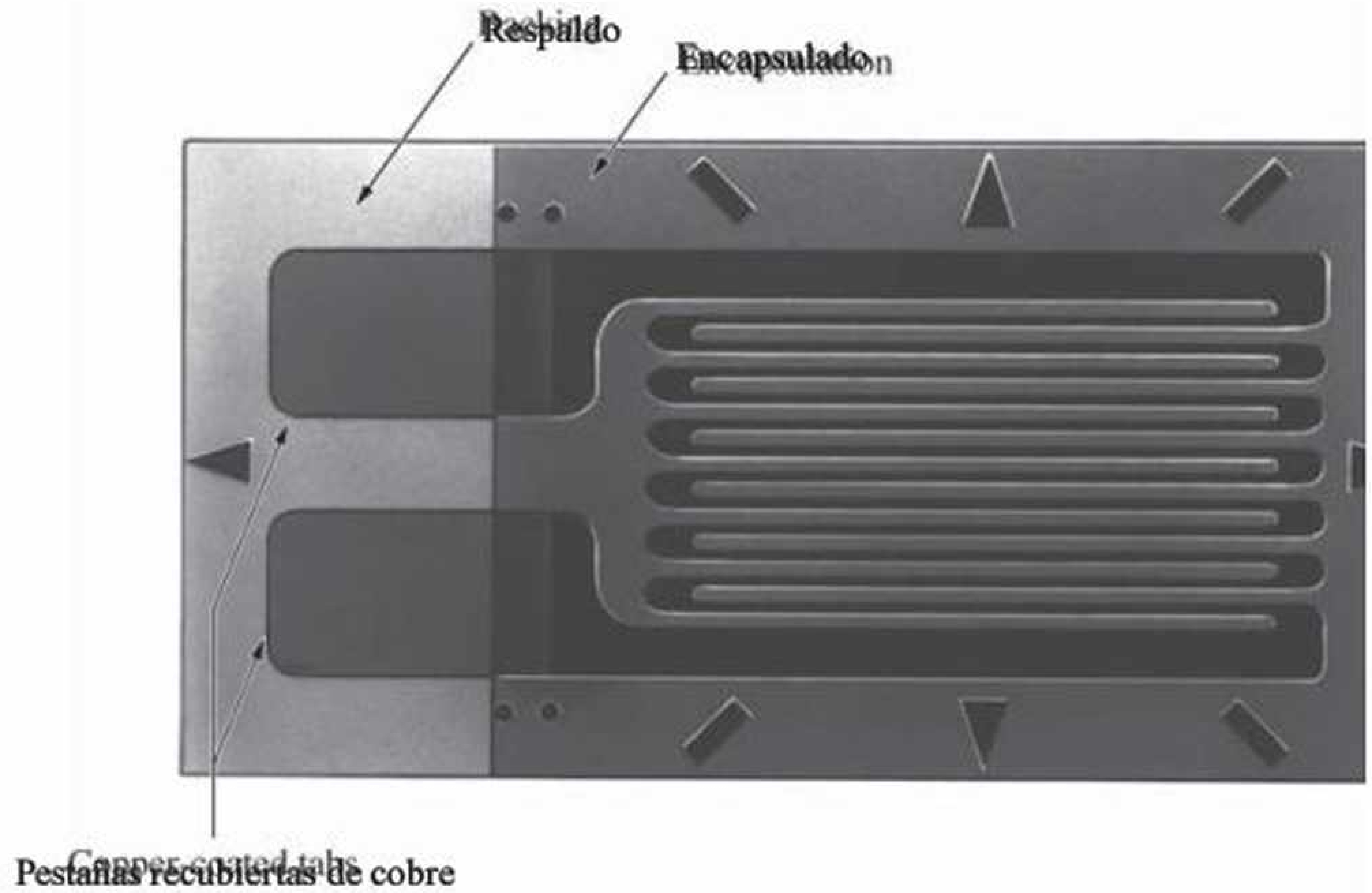
FIGURA 1–21
(a) Recubrimiento fotoelástico aplicado a una pieza fundida compleja. (b) Evaluación de un patrón de esfuerzo en un material fotoelástico mediante luz polarizada. (Fuente: Measurements Group, Inc., Raleigh, NC)



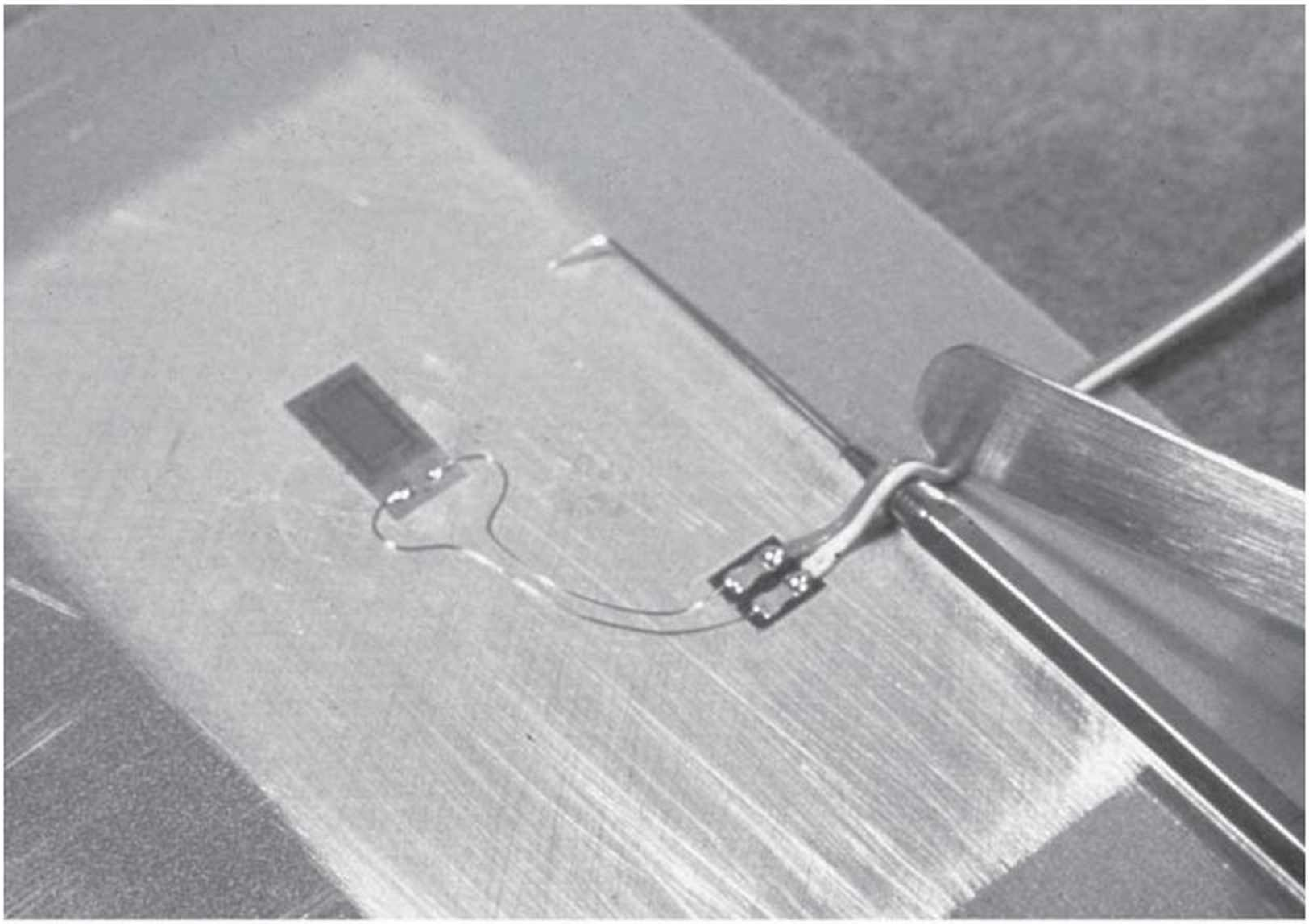
(*a*)



(*b*)



(*a*) Geometría típica



(*b*) Medidor de deformación montado en una barra plana

FIGURA 1–22 Medidor de deformación-geometría típica e instalación. (Fuente: Measurements Group, Inc., Raleigh, NC)

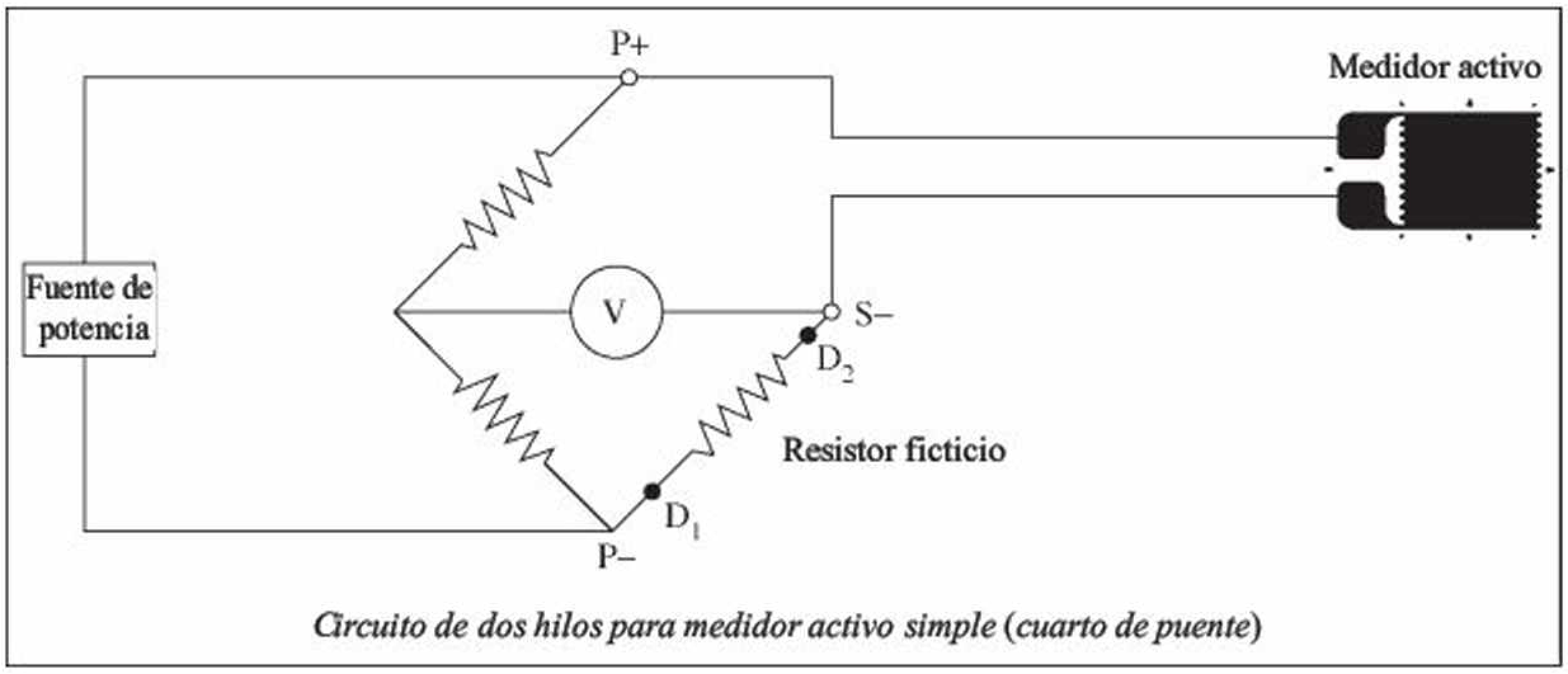


FIGURA 1–23
Puente de Wheatstone con un medidor de deformación instalado en un brazo. (Fuente: Measurements Group, Inc., Raleigh, NC)

Cuando se carga el componente, el medidor experimenta las mismas deformaciones que la superficie y la resistencia del medidor cambia en proporción a la deformación aplicada. El medidor se conecta entonces a un circuito de medición eléctrico llamado *puente de Wheatstone*, como se ilustra en la figura 1–23. El puente tiene cuatro brazos y el medidor de deformación se conecta a uno de ellos. Los restantes contienen resistores ficticios de la misma resistencia nominal. Cuando el medidor se somete a deformación, su resistencia cambia y hace que cambie el voltaje medido a través de la diagonal del puente. La lectura de voltaje puede convertirse en deformación cuando se aplica un factor de calibración llamado *factor de medidor*. Para la deformación en una dirección, como la provocada por tensión axial, se utiliza la ley de Hooke y determinar esfuerzo con

$$\sigma = E\epsilon$$

donde ϵ es la deformación
E es el módulo de tensión de elasticidad del material de la pieza que se está probando
σ es el esfuerzo normal, o de tensión o de compresión

Se utilizan otros estilos de medidores de deformación y otras configuraciones de instalación en casos que implican condiciones de esfuerzo más complejas. Algunas de éstas se abordarán en capítulos posteriores.

Análisis del elemento finito. El análisis del elemento finito (FEA, *finite element analysis*) es una técnica computacional que permite determinar esfuerzos y deflexiones en complejos modelos de componentes de carga creados por computadora. El modelo se crea con un sistema de diseño asistido por computadora que utiliza un método de modelado sólido tridimensional. Luego, el modelo se subdivide en muchos elementos pequeños pero finitos. Se aplican cargas simuladas y se establecen condiciones de apoyo en el modelo. Además se ingresan datos de propiedad de material, tales como el módulo de elasticidad y la relación de Poisson. La figura 1–24 es un ejemplo de un modelo de elemento finito.

El software FEA utiliza un método de análisis matricial que calcula el efecto de las fuerzas que actúan en los límites de cada elemento. El resultado es el efecto integrado de las cargas externamente aplicadas y los apoyos, lo que conduce a valores computados de esfuerzos y deflexiones a través de todo el componente. Los resultados compilados típicamente se muestran en gráficos de colores que muestran con claridad los puntos de máximo esfuerzo y de-flexión.

El diseñador puede evaluar entonces la seguridad relativa de los niveles de esfuerzo y proceder a optimizar el diseño para aprovechar a cabalidad la resistencia y rigidez del material del cual está hecho el componente. Con esta técnica se logran diseños más eficientes, más

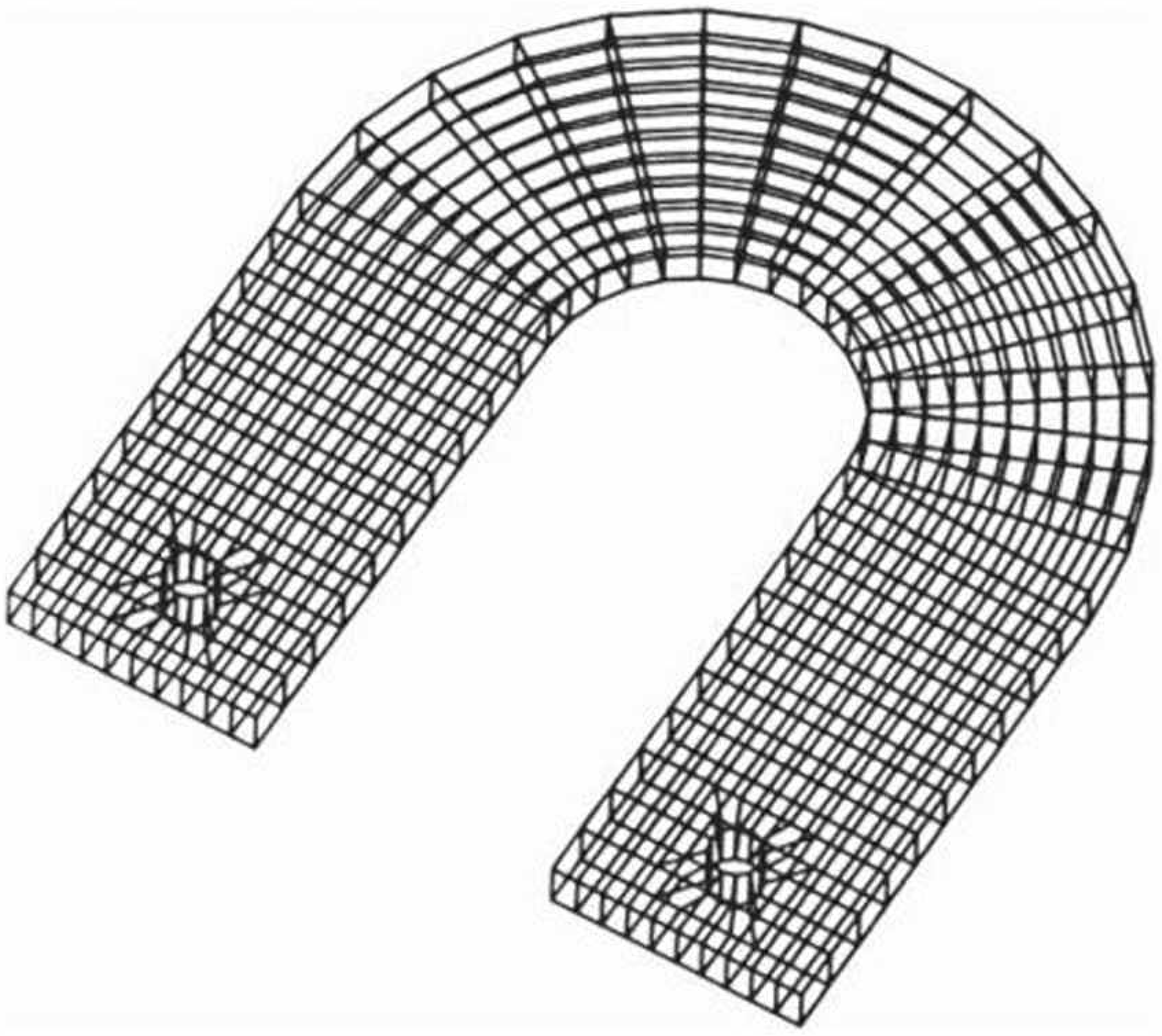


FIGURA 1–24
Modelo de análisis de elemento finito. (Fuente: Measurements Group, Inc., Raleigh, NC)

ligeros y más baratos. Y el proceso puede realizarse con bastante rapidez sin hacer modelos físicos. A menudo se completan varias iteraciones de diseño en un solo día, lo que conduce a rápido desarrollo del producto.

SITIOS EN INTERNET

1. TubeNet www.tubenet.org/tubes.shtml Una lista de dimensiones, propiedades y proveedores de tubo y tubería de acero, cobre, titanio, tántalo o tantalio (elemento metálico raro) y otros materiales.
2. Stainless Tubular Products www.stainlesstubular.com Un proveedor de tubo y tubería de acero inoxidable.
3. Copper Development Association www.copper.org Una asociación profesional de la industria del cobre, el sitio ofrece una gran cantidad de tamaños y características físicas de la tubería de cobre. Del sitio se puede descargar un *Copper Tube Handbook* o partes de él.
4. Plastics Pipe Institute www.plasticpipe.org Una asociación que representa todos los segmentos de la industria de tubos de plástico; el sitio incluye una lista de fabricantes de tubo de plástico donde se pueden encontrar datos de tamaños, materiales e información de aplicación.
5. Charter Plastics www.charterplastics.com Un proveedor de tubo y tubería de plástico de polietileno.
6. Expert Piping Supply www.expertpiping.com Un proveedor de tubo de cobre acero, PVC, CPVC, polietileno y polipropileno en una amplia gama de diámetros y espesores de pared.
7. The Piping Tool Box www.piping-toolbox.com Un sitio que contiene dimensiones y estándares de tubos y temas relacionados.
8. American Institute of Steel Construction (AISC) www.aisc.org Una asociación del ramo que presta servicio a la comunidad de diseño de acero estructural y la industria de la construcción. Editor del *AISC Steel Construction Manual*.
9. Webco Mechanical Tubing Products www.webcoindustries.com/tubing/mechanical/ Fabricante de tubería mecánica en formas redondas, cuadradas y rectangulares hechas de varios aceros al carbón y de aleación.
10. Central Steel & Wire Co. www.centralsteel.com Proveedor de varios metales (acero al carbón y de aleación, inoxidable, aluminio, cobre, latón, bronce) en muchos perfiles (perfiles estructurales, fleje, láminas, placas, varillas, tubería [redonda, cuadrada, rectangular], tubo, alambre).
11. Ryerson, Inc. www.ryerson.com Proveedor de varios metales (acero al carbón y de aleación, inoxidable, aleaciones de níquel, aluminio, cobre, latón, bronce) en muchos perfiles (perfiles estructurales, fleje, láminas, placas, varillas, tubería [redonda, cuadrada, rectangular], tubo y alambre. También artículos de plástico en lámina, varilla y tubería.
12. Vishay Micro–Measurements www.vishay.com Productor de medidores de deformación de precisión e instrumentos asociados y accesorios.

REFERENCIAS

1. Aluminum Association, *Aluminum Design Manual*, Washington, DC, 2005.
2. American Institute of Steel Construction, *Steel Construction Manual*, 13ª ed., Chicago, 2005.
3. American Society for Testing and Materials, ASTM Standard A6/A6M–05a, *Standard Specification for General Requirements for Rolled Structural Steel Bars, Plates, Shapes, and Sheet Piling*. West Conshohocken, PA, 2005.
4. American Society for Testing and Materials, ASTM Standard E621–94(1999)el, *Standard Practice for the Use of Metric (SI) Units in Building Design and Construction*, West Conshohocken, PA, 1999.
5. American Society for Testing and Materials, ASTM Standard SI–10, *Standard for Use of the Internacional System of Units (SI). The Modern Metric System*, West Conshohocken, PA, 2002 (Nota: Este estándar reemplaza a ASTM E380.)
6. Avallone, Eugene A y Theodore Baumeister III, eds., *Marks' Standard Handbook for Mechanical Engineers*, 10ª ed., McGraw–Hill, Nueva York, 1996.
7. Budynas, R. G. y J. K. Nisbett, *Shigley' Mechanical Engineering Design*, 8ª ed., Mc-Graw-Hill, Nueva York, 2007.
8. Mott, R. L., *Applied Fluid Mechanics*, 6ª ed., Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 2006.
9. Oberg, E., F. D. Jones, H. L. Horton y H. H. Ryffell, *Machinery's Handbook*, 27ª ed., Industrial Press, Nueva York, 2004.
10. Young, W. C. y R.G. Budynas, *Roark's Formulas for Stress and Strain*, 7ª ed., McGraw-Hill, Nueva York, 2002.

PROBLEMAS

Definiciones

1–1. Defina *masa* y enuncie sus unidades tanto en el sistema inglés como en el sistema de unidades métricas SI.

1–2. Defina *peso* y enuncie sus unidades en ambos sistemas.

1–3. Defina *esfuerzo* y enuncie sus unidades en ambos sistemas.

1–4. Defina *esfuerzo normal directo.*

1–5. Explique la diferencia entre esfuerzo de compresión y esfuerzo de tensión.

1–6. Defina *esfuerzo cortante directo*.

1–7. Explique la diferencia entre cortante simple y cortante doble.

1–8. Dibuje un elemento de esfuerzo sometido a esfuerzo de tensión directo.

1–9. Dibuje un elemento de esfuerzo sometido a esfuerzo de compresión directo.

1–10. Dibuje un elemento de esfuerzo sometido a un esfuerzo cortante directo.

1–11. Defina *deformación normal* y enuncie sus unidades en ambos sistemas.

1–12. Defina *deformación por cortante* y enuncie sus unidades en ambos sistemas.

1–13. Defina *densidad* y *peso específico* y dé las unidades apropiadas para cada uno tanto en el sistema inglés como en el sistema SI.

1–14. Un resultado calculado de esfuerzo es de 48 625 951 N/m². Expréselo en notación SI preferida a cuatro números significativos.

1–15. Un resultado calculado de esfuerzo es de 23.7389 N/mm². Exprese el resultado en notación SI preferida a tres cifras significativas.

Conversiones Masa–Peso

1–16. Un camión transporta 1800 kg de grava. ¿Cuál es el peso de la grava en newtons?

1–17. Un camión de cuatro ruedas cuya masa total es de 4000 kg se encuentra detenido sobre un puente. Si 60% del peso es soportado por las ruedas traseras y 40% por las delanteras, calcule la fuerza ejercida en el puente en cada rueda.

1–18. Un total de 6800 kg de un fertilizante a granel se almacena en un depósito de fondo plano de 5.0 $\times$ 3.5 m por lado. Calcule la carga sobre el piso en newtons por metro cuadrado o pascales.

1–19. Una masa de 25 kg cuelga de un resorte cuya escala es de 4500 N/m . ¿Cuánto se alargará el resorte?

1–20. Mida la longitud, ancho y espesor de este libro en milímetros.

1–21. Determine su propio peso en newton y su masa en kilogramos.

1–22. Exprese el peso encontrado en el problema 1–16 en libras.

1–23. Exprese las fuerzas encontradas en el problema 1–17 en libras.

1–24. Exprese la carga del problema 1–18 en libras por pie cuadrado.

1–25. Con los datos del problema 1–19, calcule el peso de la masa en libras, la balanza del resorte en libras por pulgada y el alargamiento del resorte en pulgadas.

1–26. La base de hierro colado de una máquina pesa 2750 lb. Calcule su masa en *slugs*.

1–27. Un rollo de acero que cuelga de una báscula provoca una lectura de 12 800 lb. Calcule su masa en *slugs*.

1–28. Determine su propio peso en libras y su masa en *slugs*.

Conversión de unidades

1–29. Un recipiente de presión contiene un gas a 1200 psi. Exprese la presión en pascales.

1–30. El esfuerzo permisible de un acero estructural es de 21 600 psi. Expréselo en pascales.

1–31. El esfuerzo al cual se romperá un material sometido a una carga de tensión directa se llama *resistencia máxima*. La gama de resistencias máximas para aleaciones de aluminio oscila desde aproximadamente 14 000 hasta 76 000 psi. Exprese esta gama en pascales.

1–32. La flecha de un motor eléctrico gira a 1750 rpm. Exprese la velocidad de rotación en radianes por segundo.

1–33. Exprese un área de 14.1 in^2 en milímetros cuadrados.

1–34. La deformación permisible de una cierta viga es de 0.080 in. Exprésela en milímetros.

1–35. La base de la columna de un edificio mide 18.0 in por 18.0 in por lado y 12.0 in de altura. Calcule el área de sección transversal tanto en pulgadas cuadradas como en milímetros cuadrados. Calcule el volumen en pulgadas cúbicas, pies cúbicos, milímetros cúbicos y metros cúbicos.

1–36. Calcule el área en pulgadas cuadradas de una varilla que tiene un diámetro de 0.505 in. Acto seguido convierta el resultado en milímetros cuadrados.

Esfuerzos a tensión directa y compresión

1–37.M Calcule el esfuerzo en una barra redonda sometida a una fuerza de tensión directa de 3200 N si su diámetro es de 10 mm.

1–38.M Calcule el esfuerzo en una barra rectangular que tiene una sección de 10 mm por 30 mm si se aplica una fuerza de tensión directa de 20 kN.

1–39.E El eslabón del mecanismo de una máquina de empaquetado automática se somete a una fuerza de tensión de 860 lb. Si el eslabón es cuadrado de 0.40 in por lado, calcule el esfuerzo en el eslabón.

1–40.E Una barra circular, con diámetro de 3/8 in, soporta una caldera que pesa 1850 lb. Calcule el esfuerzo en la varilla.

1–41.M Se está diseñando una repisa para contener embalajes que tienen una masa total de 1840 kg. Dos varillas de soporte como las mostradas en la figura P1–41 sujetan la repisa. Cada varilla tiene un diámetro de 12.0 mm. Suponga que el centro de gravedad de los embalajes está a la mitad de la repisa. Calcule el esfuerzo en la parte media de las varillas.

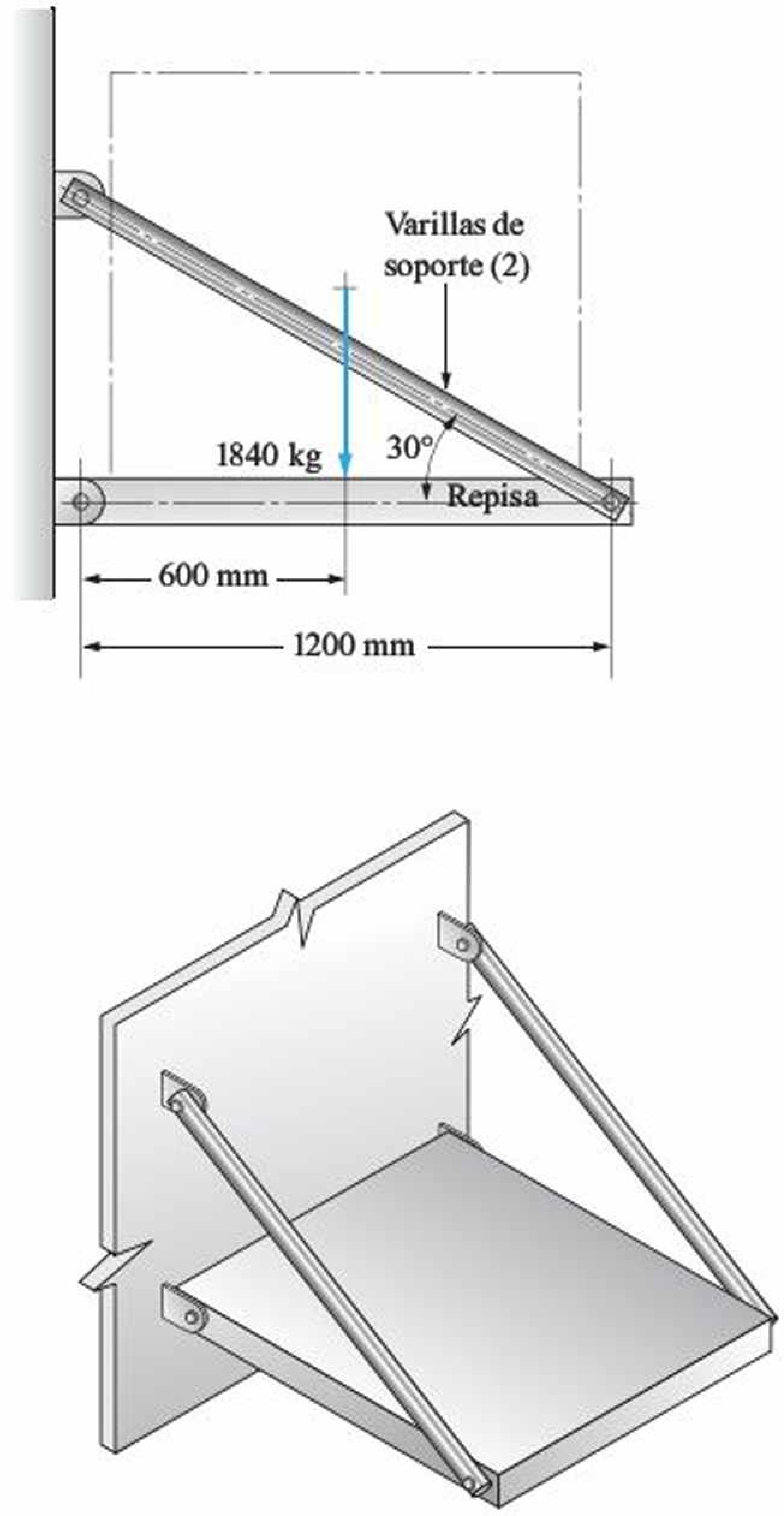


FIGURA P1–41 Soporte de repisa para el problema 1–41.

1–42.E La base de una columna de concreto es circular, con diámetro de 8 in y soporta una carga de compresión directa de 70 000 lb. Calcule el esfuerzo de compresión en el concreto.

1–43.E Tres bloques de madera cortos, cuadrados, de $3\frac{1}{2}$ in por lado, soportan una máquina que pesa 29 500 lb. Calcule el esfuerzo de compresión en los bloques.

1–44.M Un eslabón corto de un mecanismo soporta una carga de compresión axial de 3500 N. Si tiene una sección transversal cuadrada de 8.0 mm por lado, calcule el esfuerzo en el eslabón.

1–45.M Tres varillas de acero dispuestas como se muestra en la figura P1–45 soportan una máquina de 4200 kg de masa. El diámetro de cada varilla es de 20 mm. Calcule el esfuerzo en cada varilla.

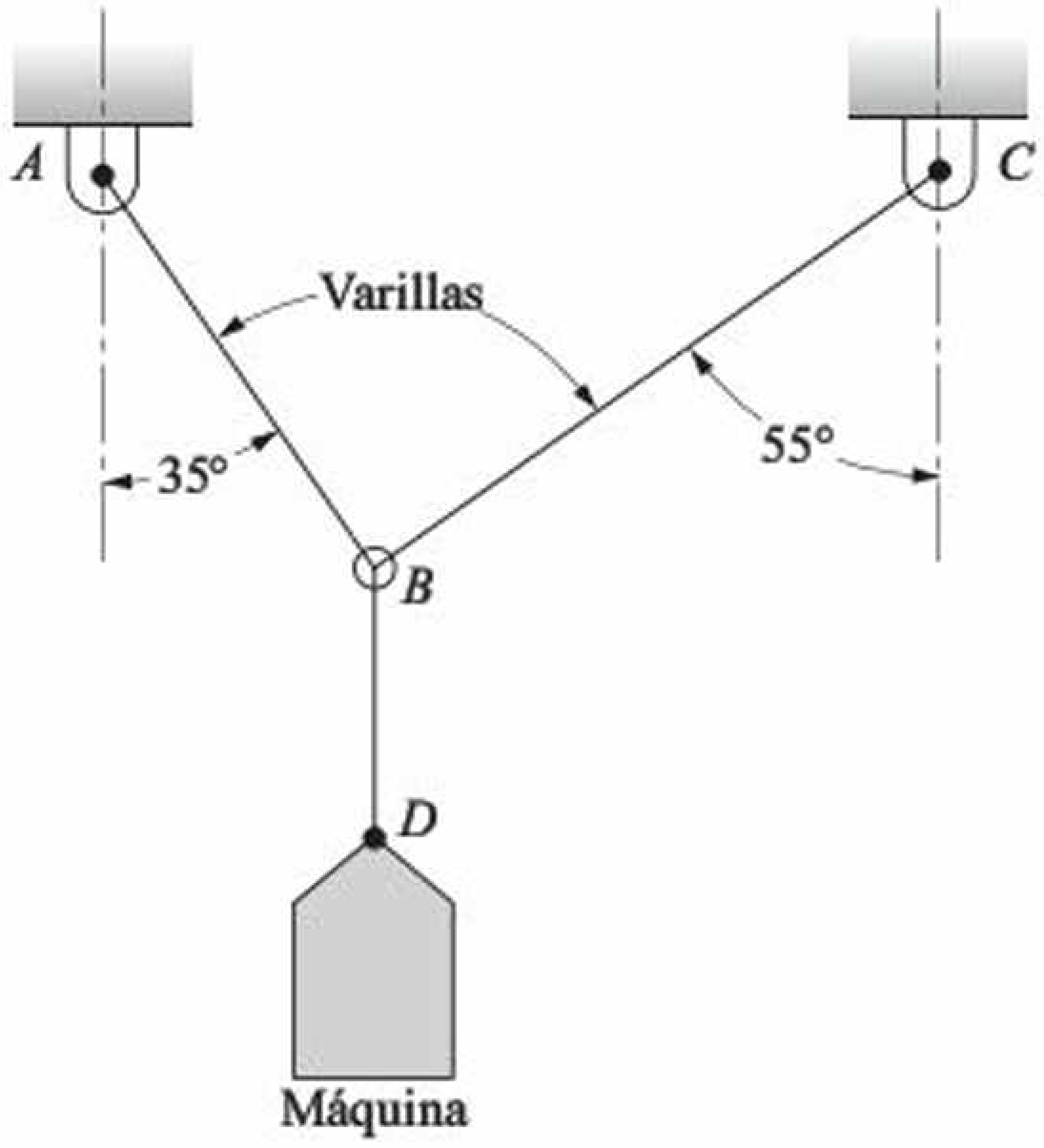


FIGURA PI–45 Varillas de soporte del problema 1–45.

1–46.M Se utiliza un centrifugador para separar líquidos de acuerdo con sus densidades por medio de fuerza centrífuga. La figura P1–46 ilustra un brazo del centrifugador que tiene un balde en su extremo para contener el líquido. En operación, el balde y el líquido tienen una masa de 0.40 kg. La magnitud de la fuerza centrífuga en newtons es de

$$F = 0.010\,97 \cdot m \cdot R \cdot n^2$$

donde m = masa en rotación del balde y líquido (kilogramos)

R = radio al centro de la masa (metros)

n = velocidad de rotación (revoluciones por minuto) = 3000 rpm

Calcule el esfuerzo en la barra redonda. Considere sólo la fuerza ejercida por el recipiente.

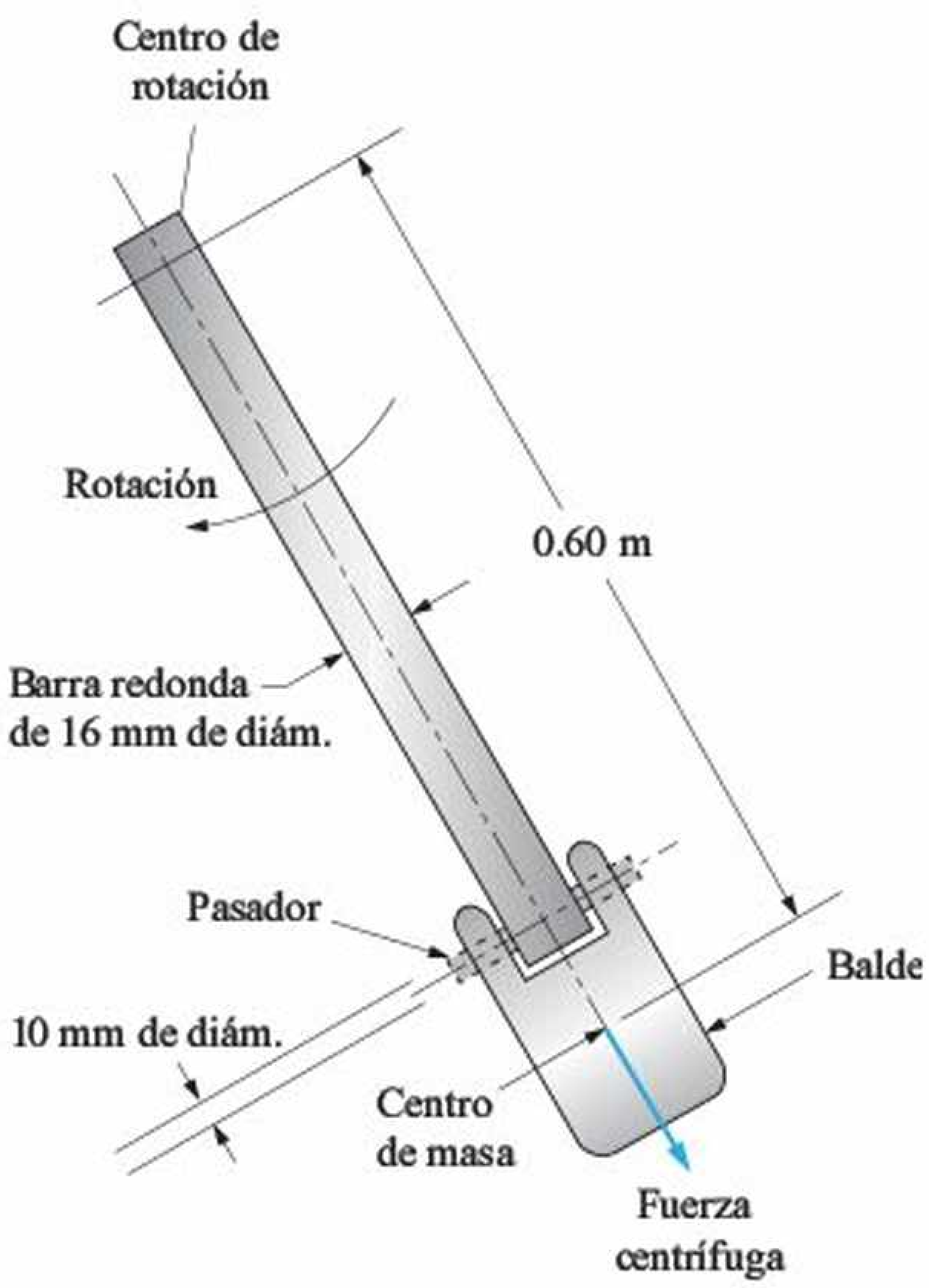


FIGURA PI–46 Centrífuga del problema 1–46.

1–47.M Una barra cuadrada soporta una serie de cargas como se muestra en la figura P1–47. Calcule el esfuerzo en cada segmento de la barra. Todas las cargas actúan a lo largo del eje central de la barra.

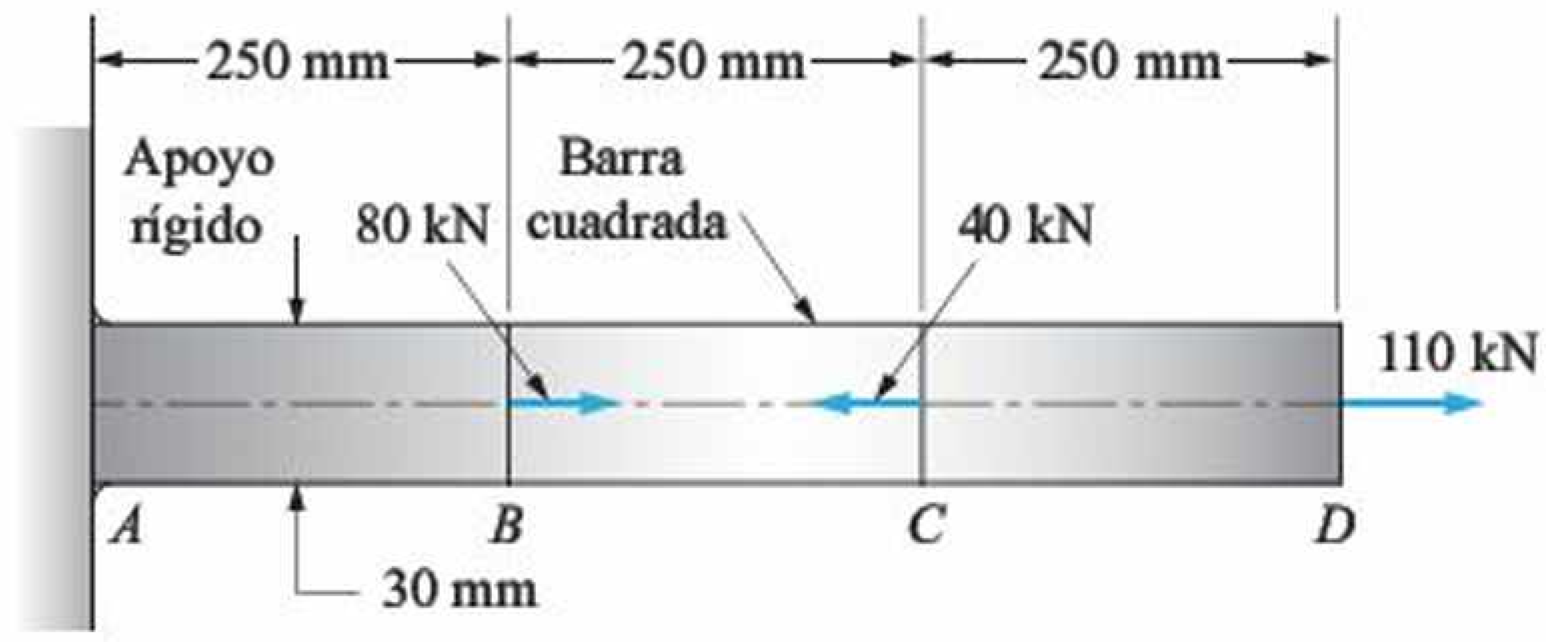


FIGURA PI–47 Escuadra que soporta cargas axiales en el problema 1–47.

1–48.M Repita el problema 1–47 con la barra circular de la figura P1–48.

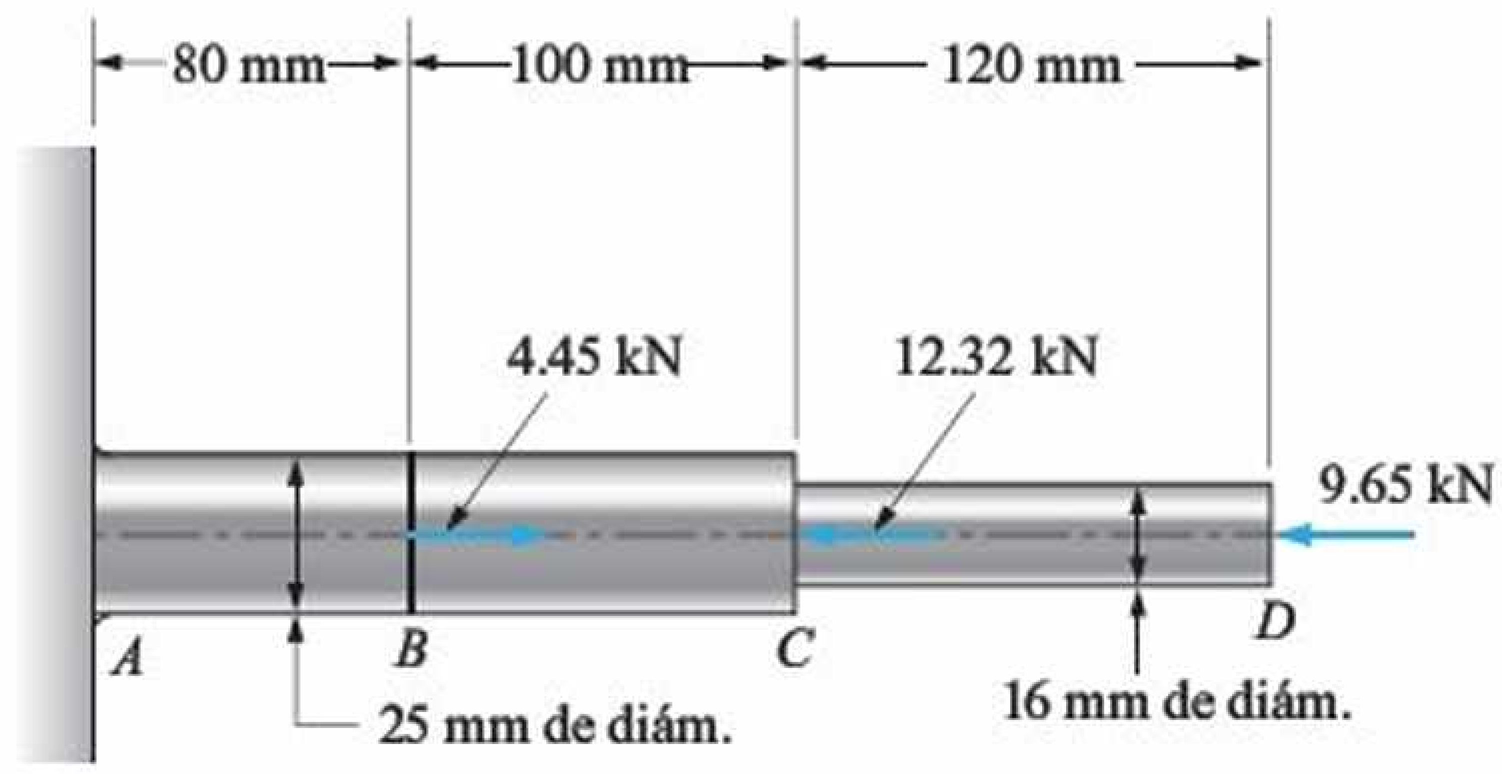


FIGURA PI–48 Barra circular que soporta cargas axiales en el problema 1–48.

1–49.E Repita el problema 1–47 con el tubo de la figura P1–49. El tubo es un tubo de acero cédula 40 de $1\frac{1}{2}$ in.

1–50.E Calcule el esfuerzo en el miembro *BD* mostrado en la figura P1–50 si la fuerza aplicada *F* es de 2800 lb.

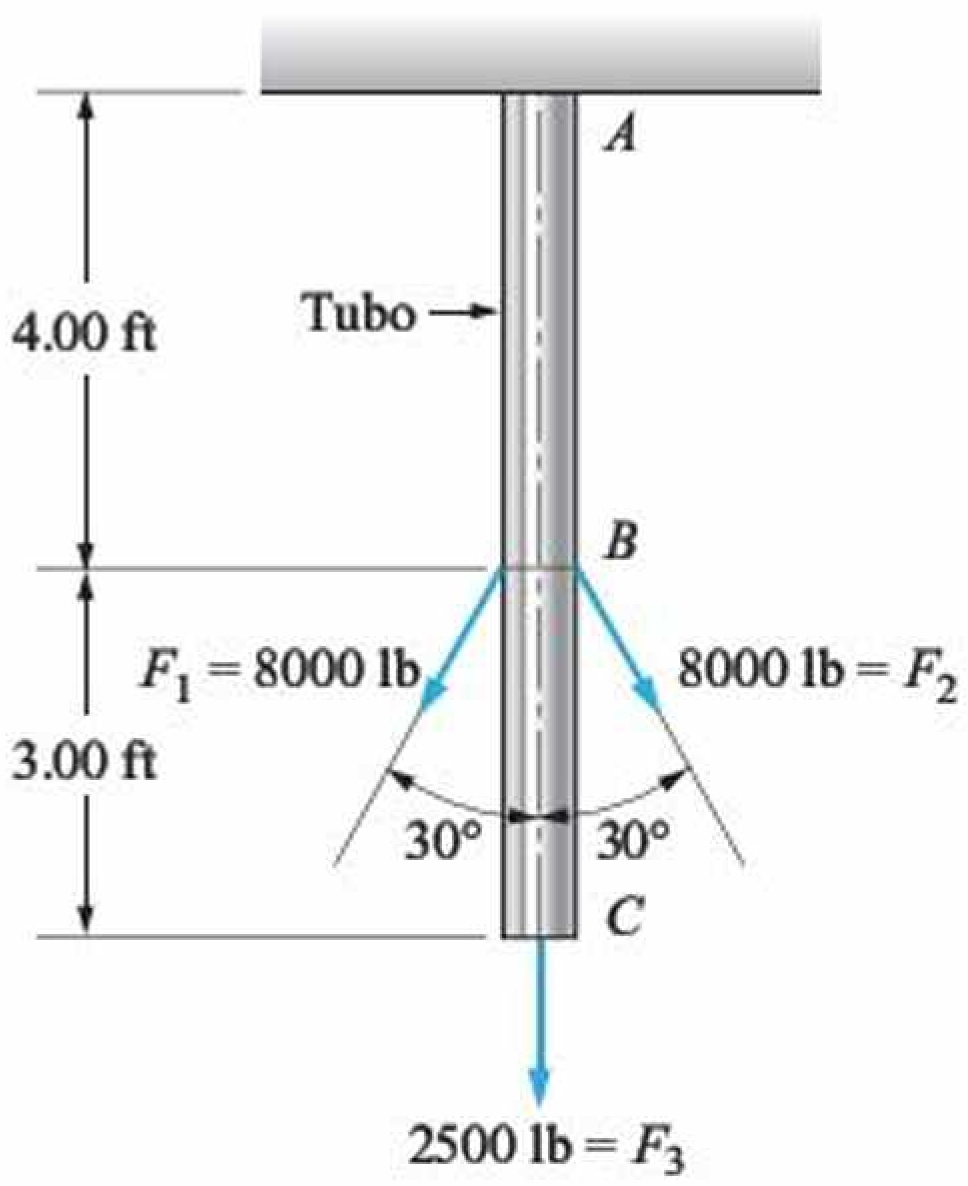


FIGURA PI–49 Tubo del problema 1–49.

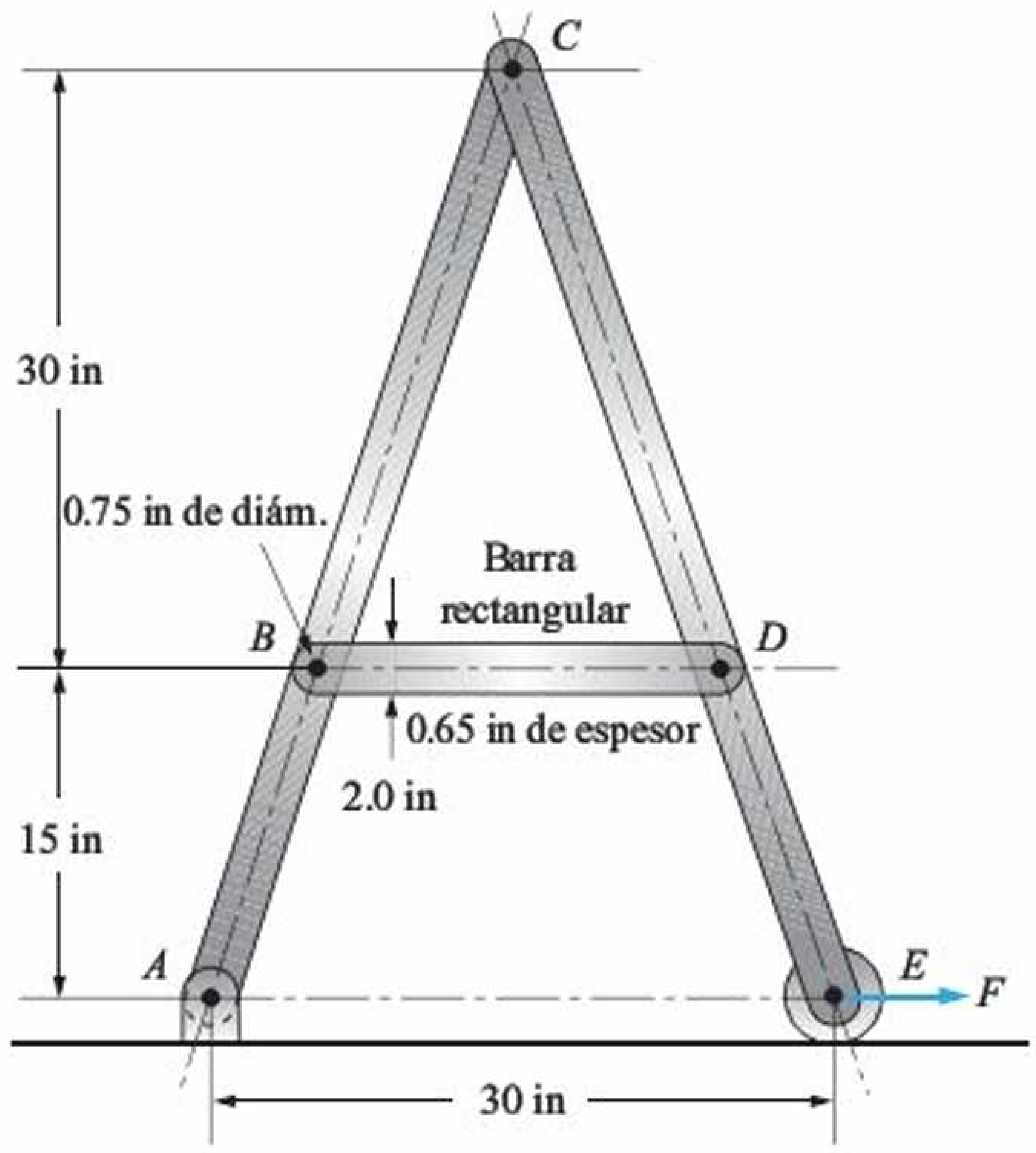


FIGURA PI–50 Armazón del problema 1–50.

En los problemas 51 y 52 con las armaduras mostradas en la figura P1–51 y P1–52, calcule las fuerzas en todos los miembros y los esfuerzos en la sección media, alejándose de cualquier junta. Referirse al apéndice para el área de sección transversal de los miembros indicados en las figuras. Considere que todas las juntas son de pasador.

1–51.M Use la figura P1–51.

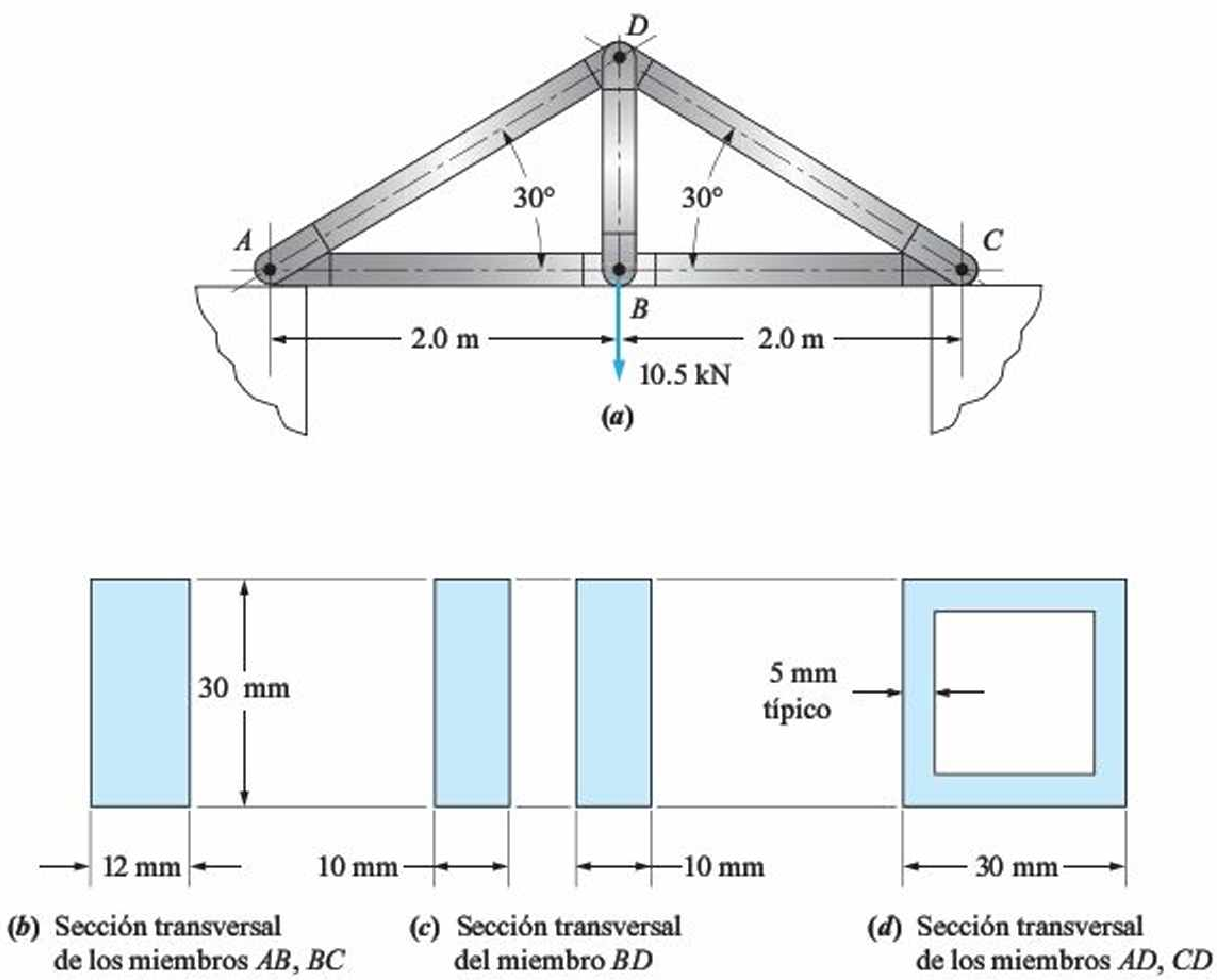
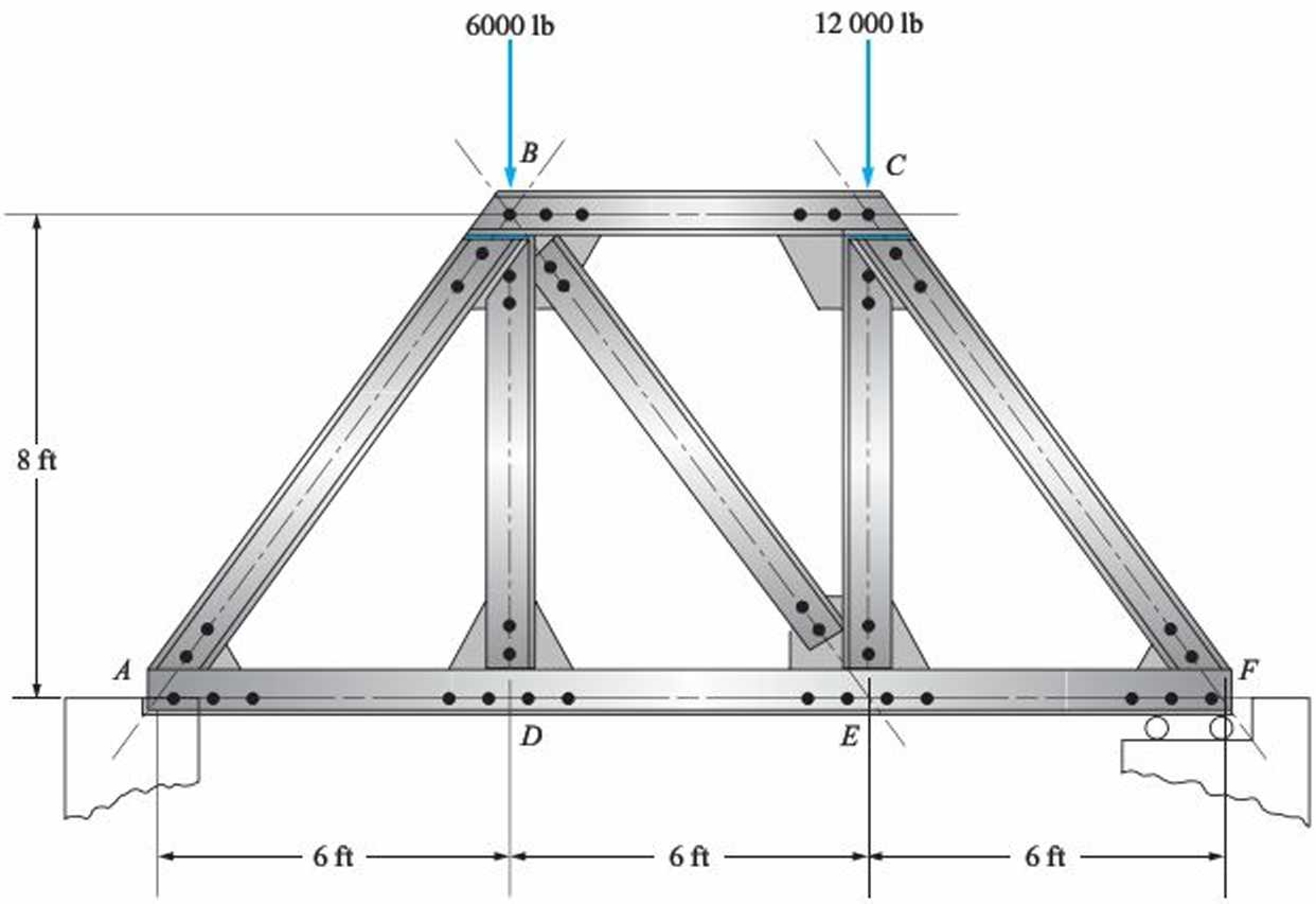


FIGURA PI–51 Armadura del problema 1-51.

1–52.E Use la figura P1–52.



Especificaciones de los miembros

AD, DE, EF L2 × 2 × 1/8 – doble —— ⅃L

BD, CE, BE L2 × 2 × 1/8 – simple —— ⅃

AB, BC, CF C3 × 4.1 – doble —— ⊐⊏

FIGURA PI–52 Armadura del problema 1–52.

1–53.M Determine el esfuerzo de tensión en el miembro *AB* mostrado en la figura P1–53.

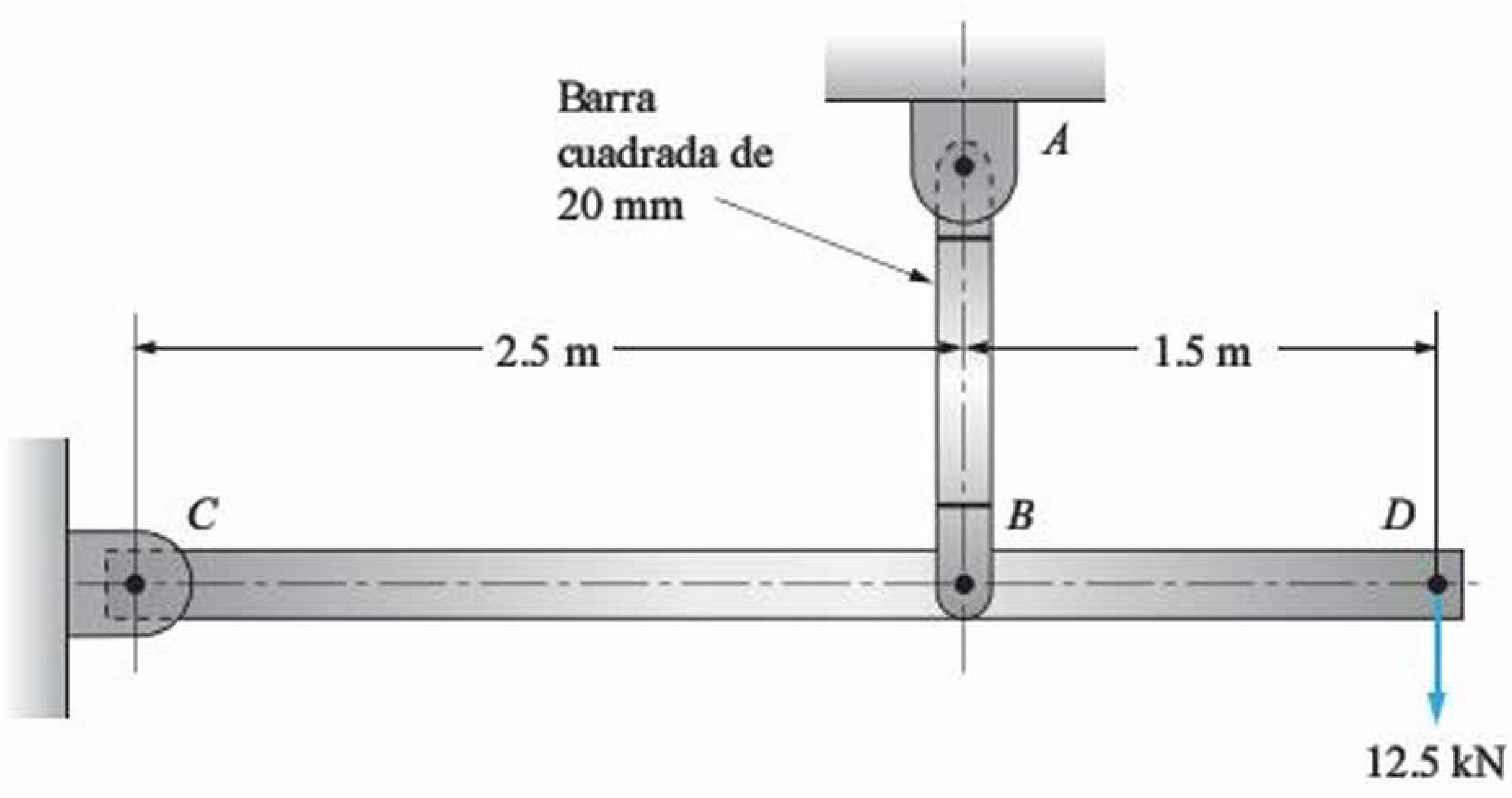


FIGURA PI–53 Soporte del problema 1–53.

1–54.E La figura P1–54 muestra el perfil de una probeta utilizada para medir las propiedades de tensión de metales (como se describe en el capítulo 2). Se aplica una fuerza de tensión mediante los extremos roscados y la sección de ensayo es la parte de diámetro reducido cerca de la mitad. Calcule el esfuerzo en la parte media cuando la carga es de 12 600 lb.

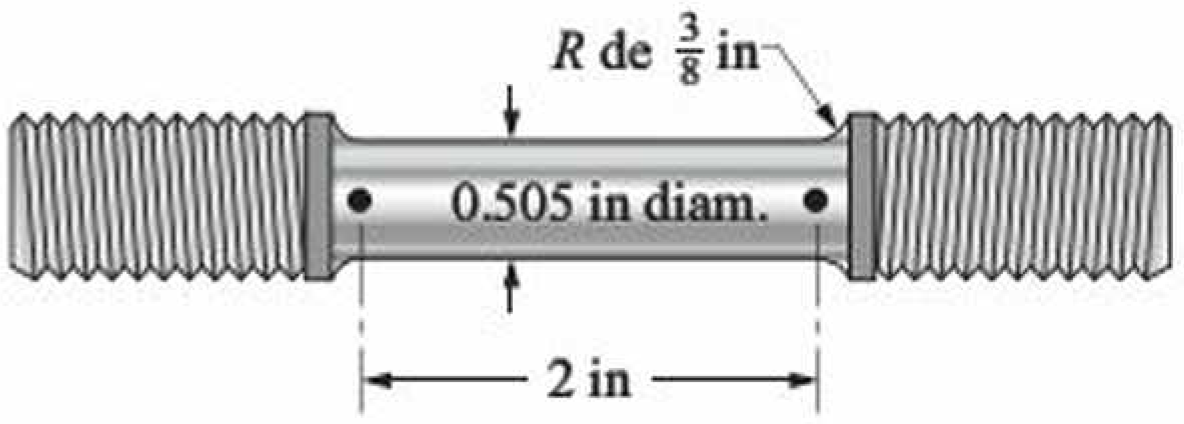


FIGURA PI–54 Probeta para ensayo de tensión del problema 1–54.

1–55.E Un corto miembro sometido a compresión tiene la sección transversal mostrada en la figura P1–55. Calcule el esfuerzo en el miembro si se aplica una fuerza de compresión de 52 000 lb en línea con su eje centroidal.

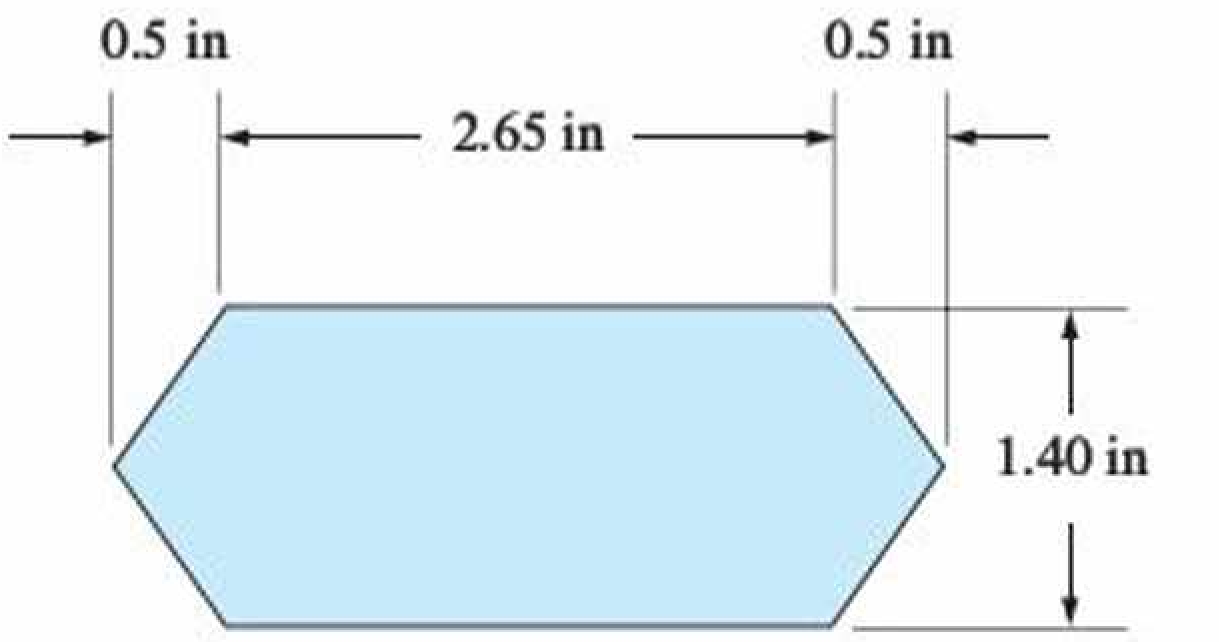


FIGURA PI–55 Elemento corto sometido a compresión del problema 1–55.

1–56.M Un corto miembro sometido a compresión tiene la sección transversal mostrada en la figura P1–56. Calcule el esfuerzo en el miembro si se aplica una fuerza de compresión de 640 kN en línea con su eje centroidal.

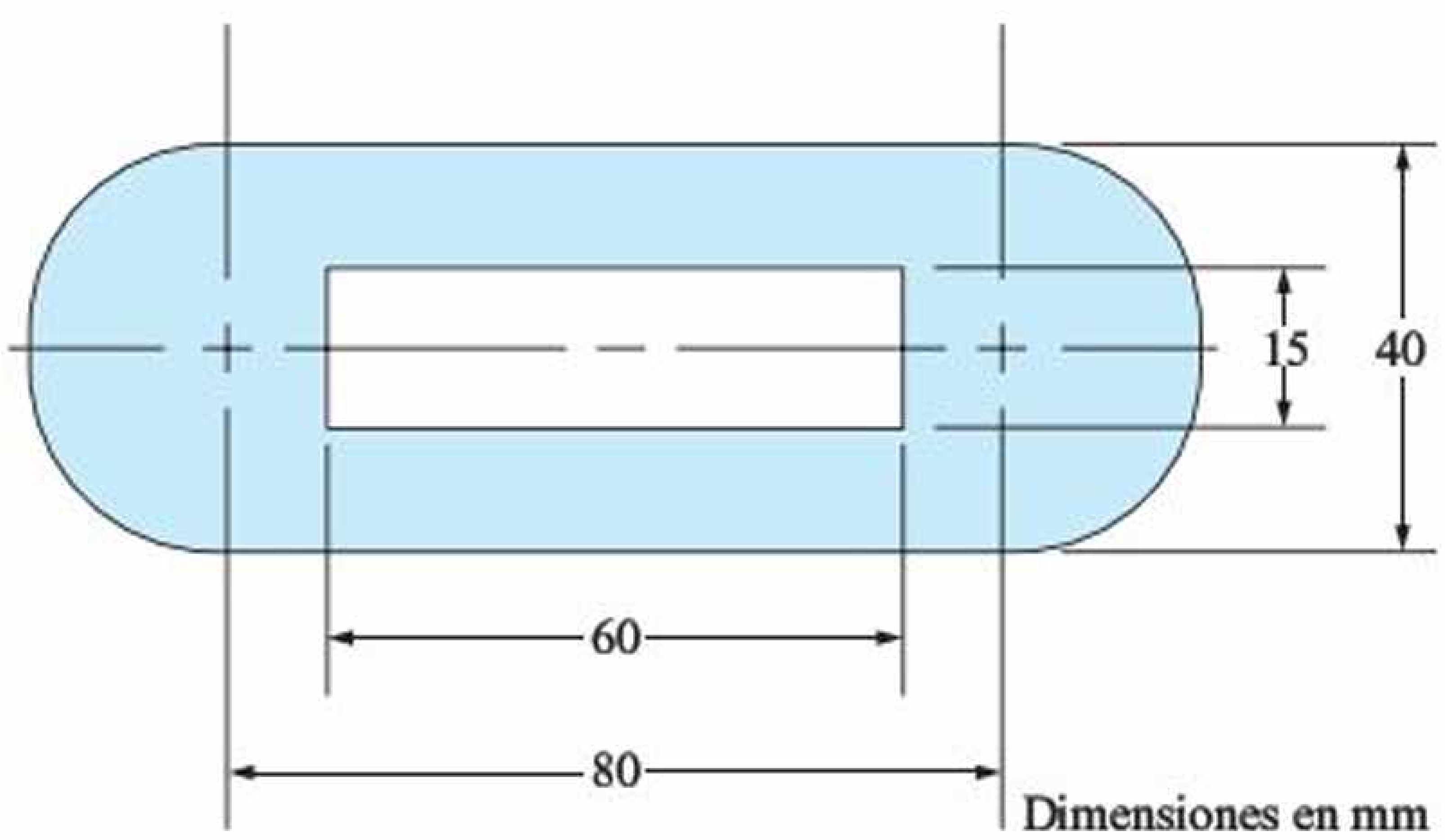


FIGURA PI–56 Miembro corto sometido a compresión del problema 1–56.

Esfuerzos cortantes directos

1–57.M Una conexión de pasador como la mostrada en la figura 1–15 se somete a una fuerza de 16.5 kN. Determine el esfuerzo cortante en el pasador de 12.0 mm de diámetro.

1–58.M En unas pinzas, el pasador de bisagra se somete a cortante directo, como se indica en la figura P1–58. Si el diámetro del pasador es de 3.0 mm y la fuerza ejercida en el mango, F_h, es de 55 N, calcule el esfuerzo en el pasador.

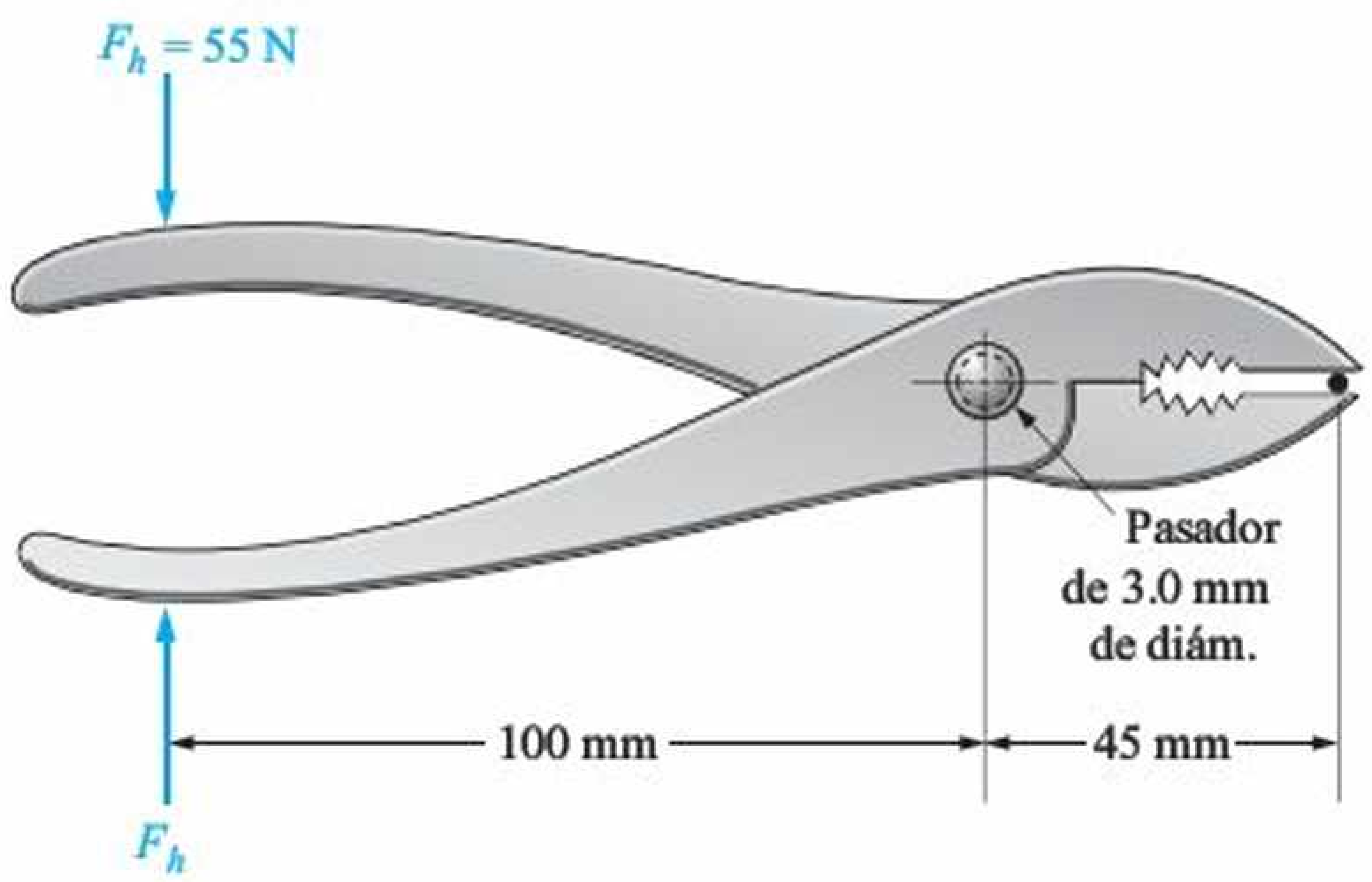


FIGURA PI–58 Armadura del problema 1–52.

1–59.M Con la centrifugadora mostrada en la figura P1–46 y los datos del problema 1–46, calcule el esfuerzo cortante en el pasador entre la barra y el balde.

1–60.E Se talla una muesca en un pedazo de madera, como se muestra en la figura P1–60, para soportar una carga externa F de 1800 lb. Calcule el esfuerzo cortante en la madera.

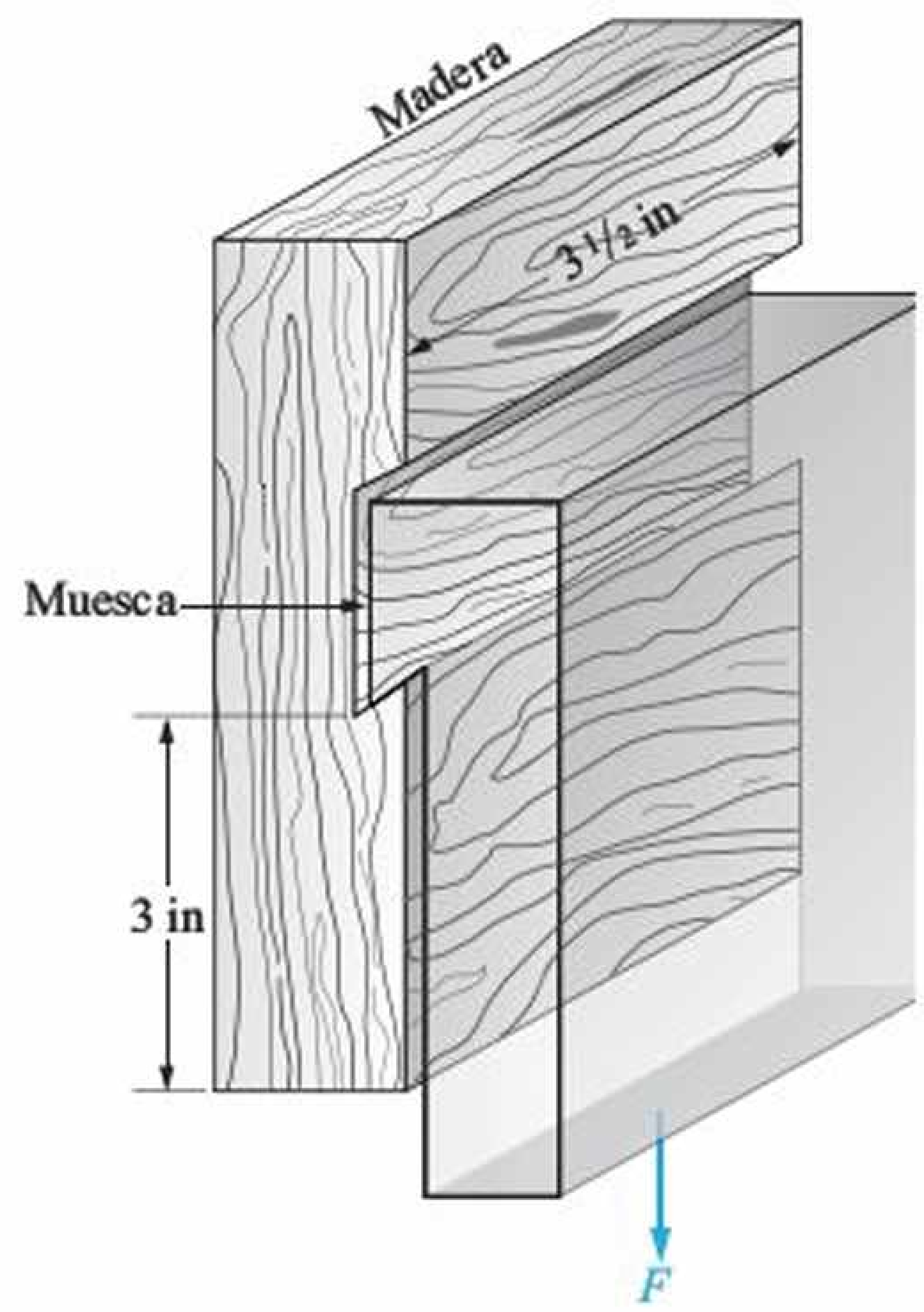


FIGURA PI–60 Bloque de madera con muesca cargado a cortante para el problema 1–60.

1–61.M La figura P1–61 muestra el perfil de un trozo de metal que se va a entresacar de una lámina de aluminio de 5.0 mm de espesor. Calcule el esfuerzo cortante en el aluminio si se aplica una fuerza de punzonado de 38.6 kN.

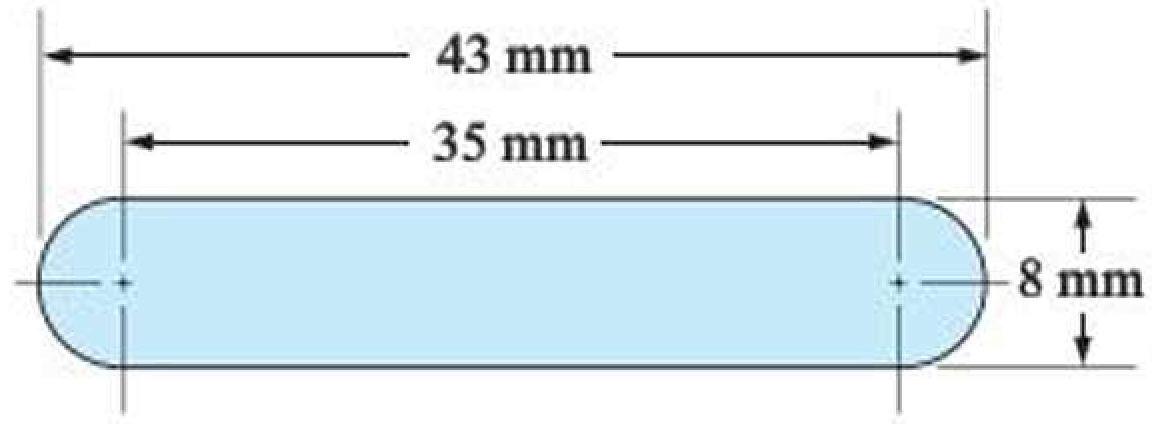


FIGURA PI–61 Perfil de un trozo de metal entresacado del problema 1–61.

1–62.E La figura P1–62 muestra el perfil de un trozo de metal que se va a entresacar de una lámina de acero de 0.194 in de espesor. Calcule el esfuerzo cortante en el acero si se aplica una fuerza de punzonado de 45 000 lb.

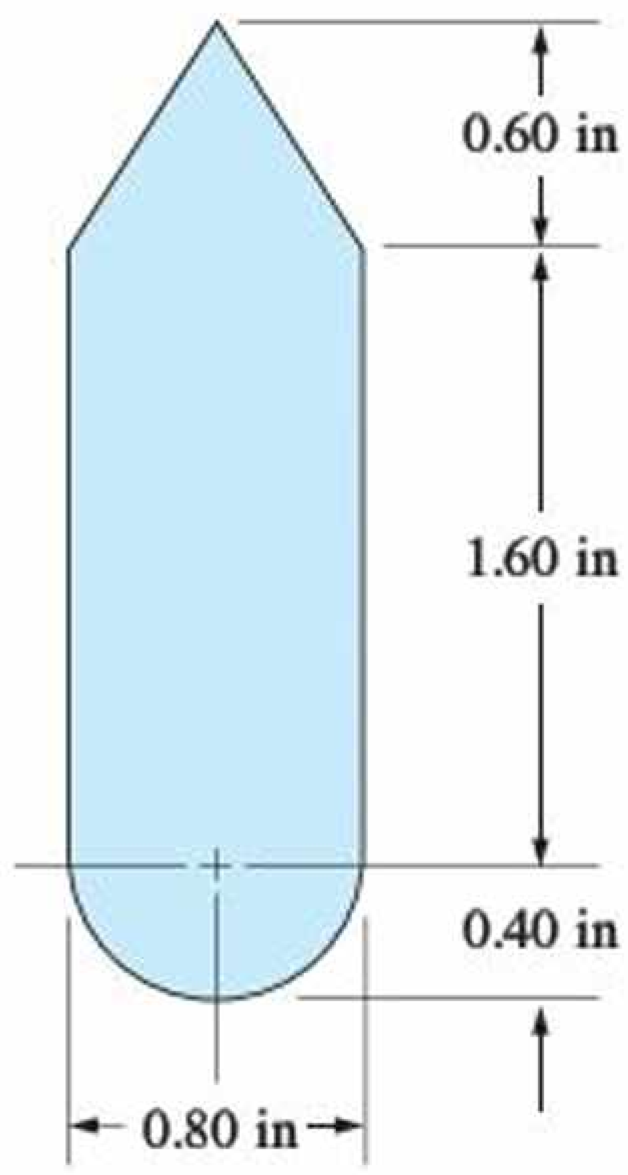


FIGURA PI–62 Conector para el problema 1–62.

1–63.M Las dimensiones de la cuña mostrada en la figura 1–18 son $b = 10$ mm, $h = 8$ mm y $L = 22$ mm. Determine el esfuerzo cortante en la cuña cuando la flecha de 35 mm de diámetro transfiere un momento de torsión de 95 N·m a la maza.

1–64.E Se utiliza una cuña para conectar una maza de un engrane a una flecha, como se muestra en la figura 1–18. Tiene una sección transversal rectangular con $b = \frac{1}{2}$ in y $h = \frac{3}{8}$ in. La longitud es de 2.25 in. Calcule el esfuerzo cortante en la cuña cuando transmite 8000 lb·in de momento de torsión de la flecha de 2.0 in de diámetro a la maza.

1–65.E Un par de tubos se conecta como se muestra en la figura P1–65. Bajo una fuerza de compresión de 20 000 lb, la carga se transfiere del tubo superior a través del pasador al conector, luego a través del collar al tubo inferior. Calcule el esfuerzo cortante en el pasador y en el collar.

1–66.E Una pequeña grúa hidráulica, como la mostrada en la figura P1–66, soporta una carga de 800 lb. Determine el esfuerzo cortante que ocurre en el pasador en B, el cual se encuentra

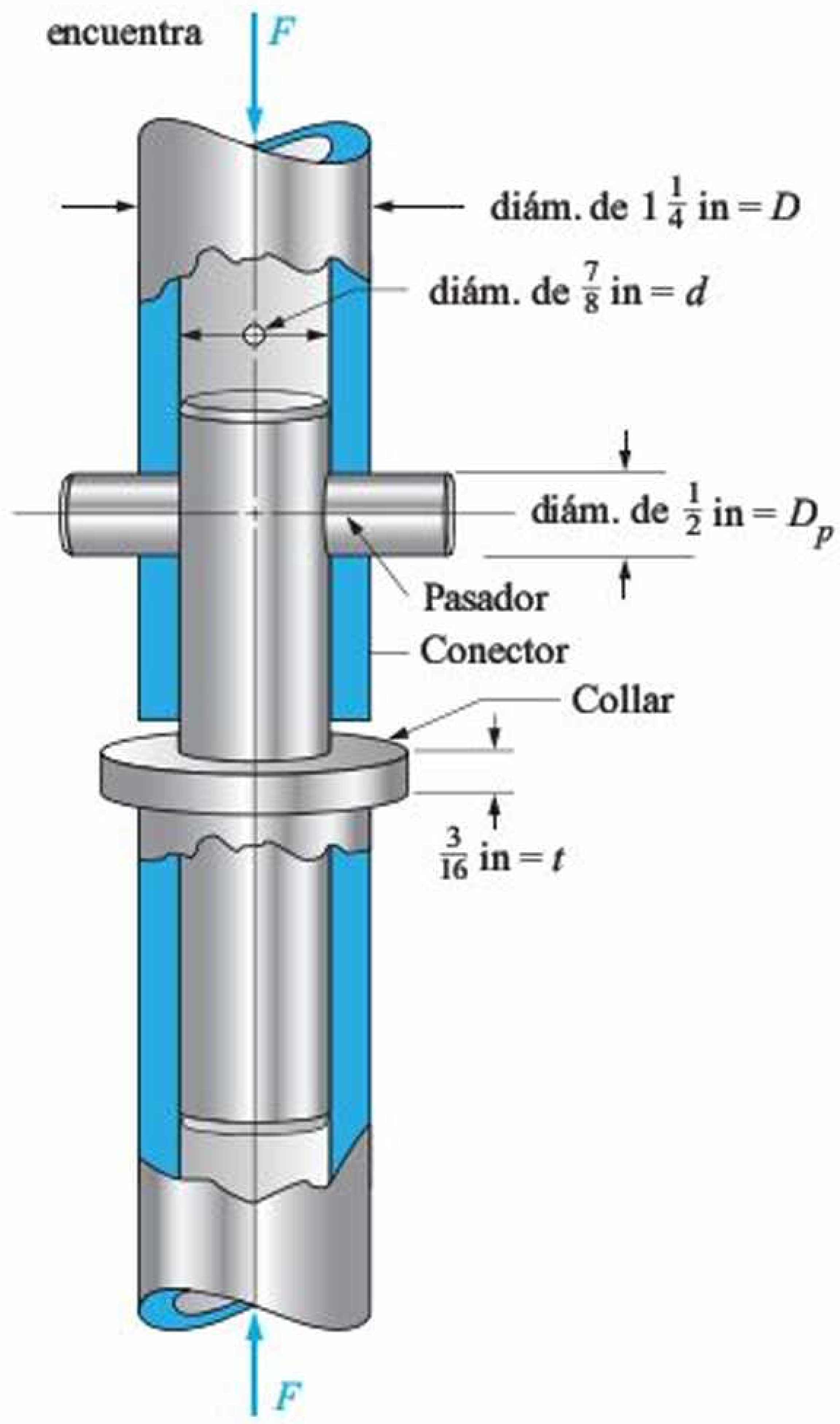


FIGURA PI–65 Conector para el problema 1–65.

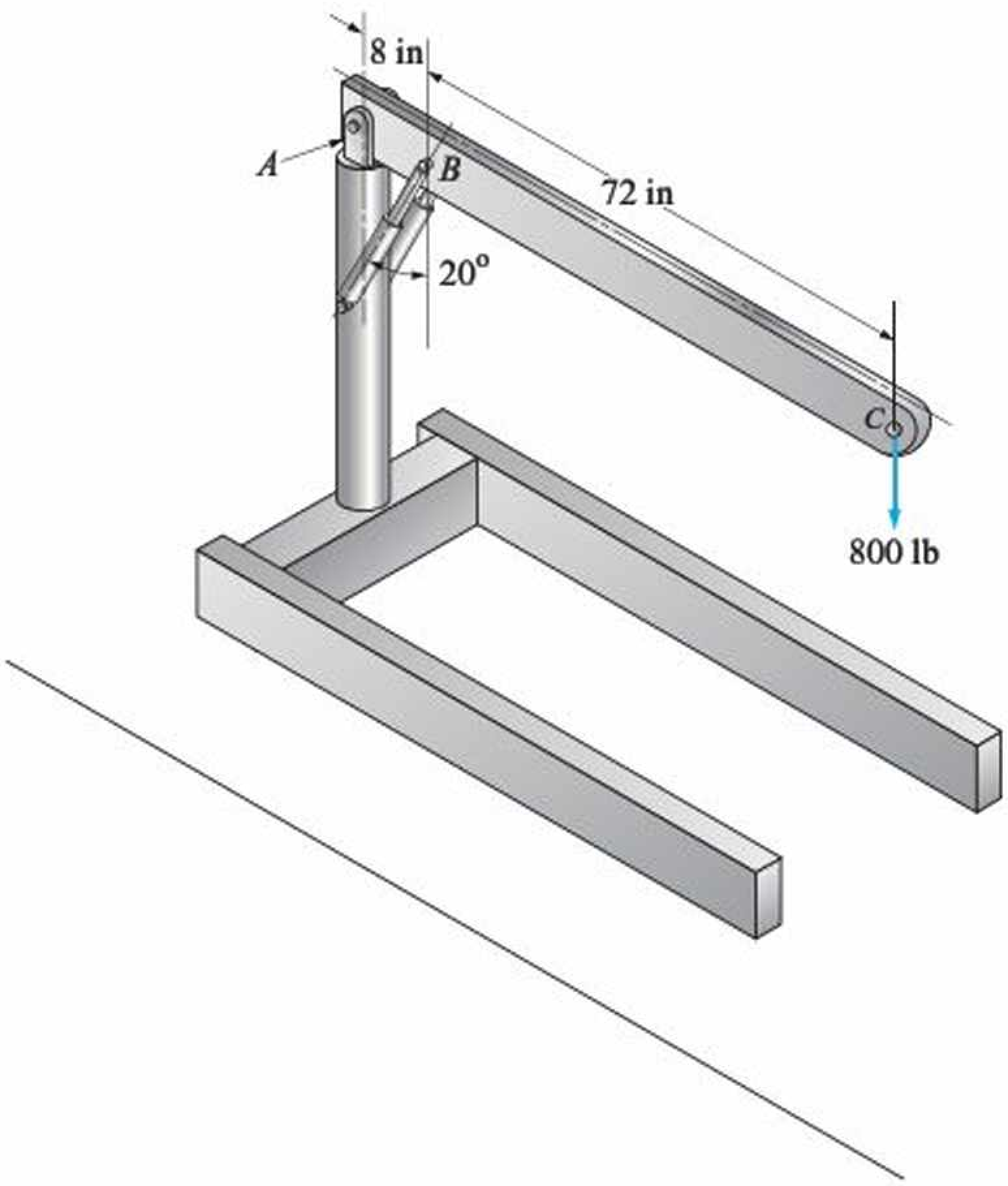


FIGURA PI–66 Grúa hidráulica para el problema 1–66.

sometido a cortante doble. El diámetro del pasador es de $\frac{3}{8}$ in.

1–67.M La cremallera de un gato de camión tiene la configuración de dientes mostrada en la figura P1–67. Con una carga de 80 kN, calcule el esfuerzo cortante en la base de los dientes.

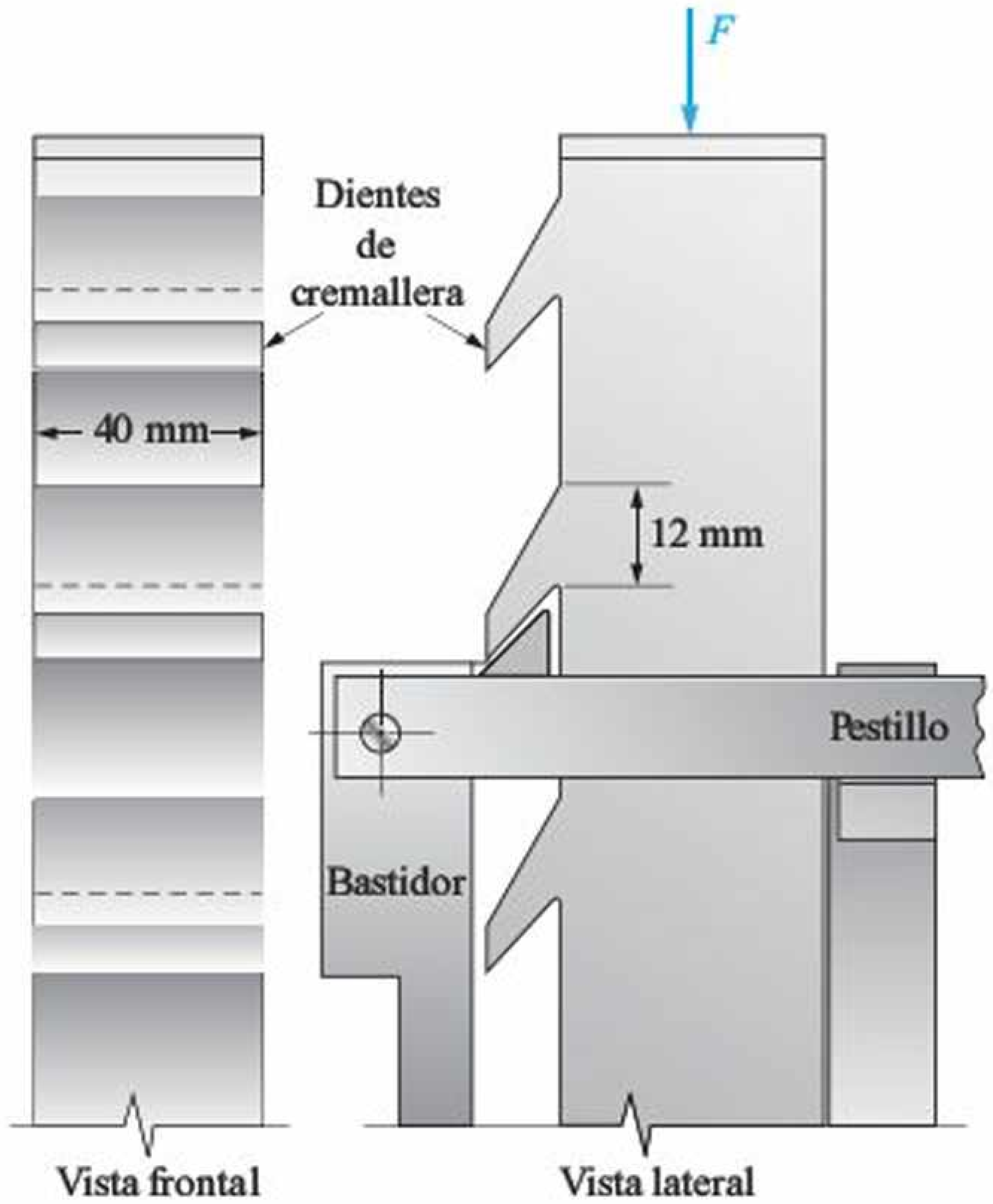


FIGURA PI–67 Cremallera de gato para el problema 1–67.

1–68.M La figura P1–68 muestra un ensamble en el cual el bloque superior está soldado al bloque inferior. Calcule el esfuerzo cortante en la soldadura si la fuerza es de 88.2 kN.

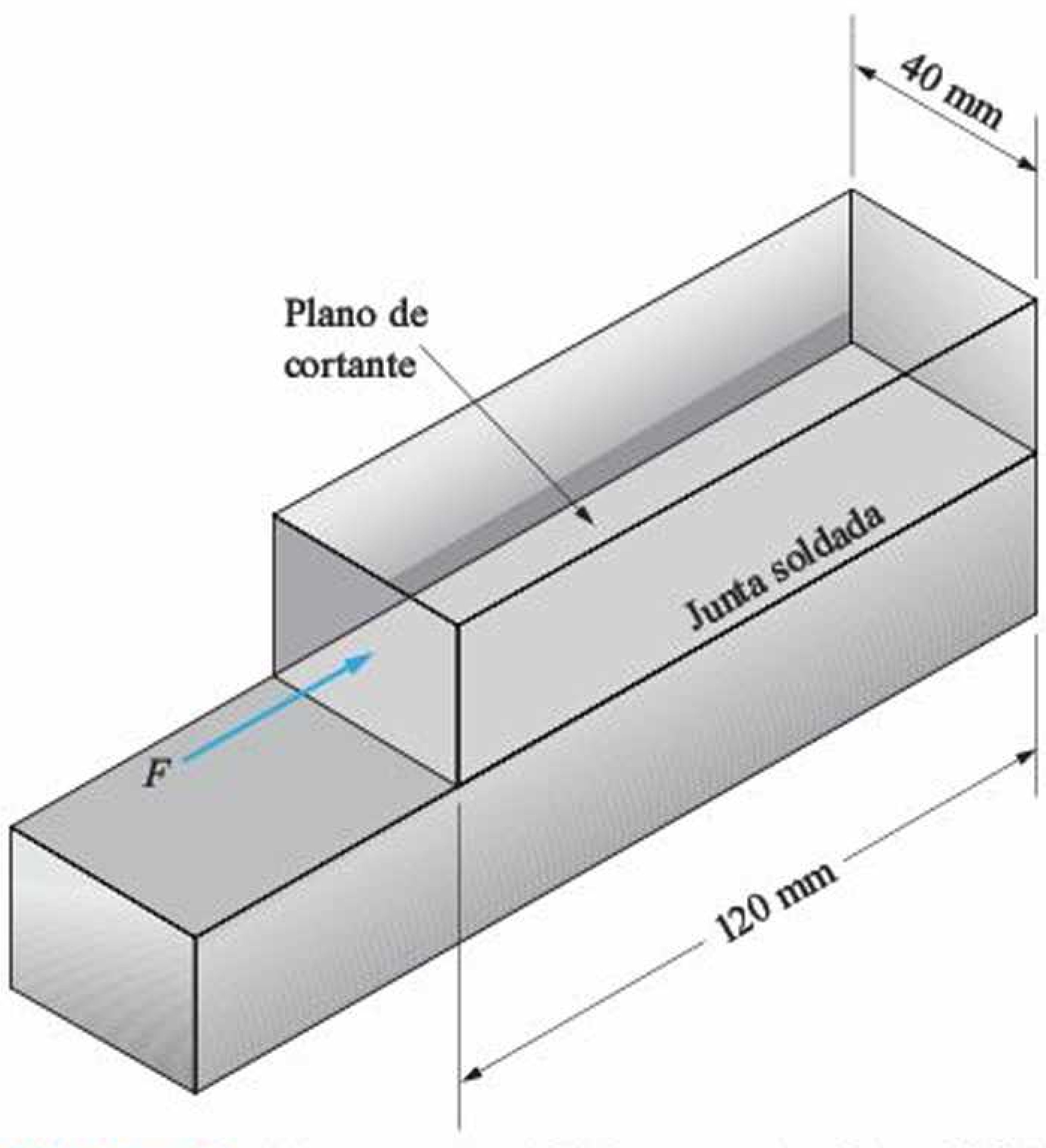


FIGURA PI–68 Componentes soldados para el problema 1–68.

1–69.M La figura 1–69 muestra un perno sometido a una carga de tensión. Un modo de falla sería si el vástago circular del perno se desprende de la cabeza, en una acción de corte. Calcule el esfuerzo cortante en la cabeza para este modo de falla si se aplica una fuerza de 22.3 kN.

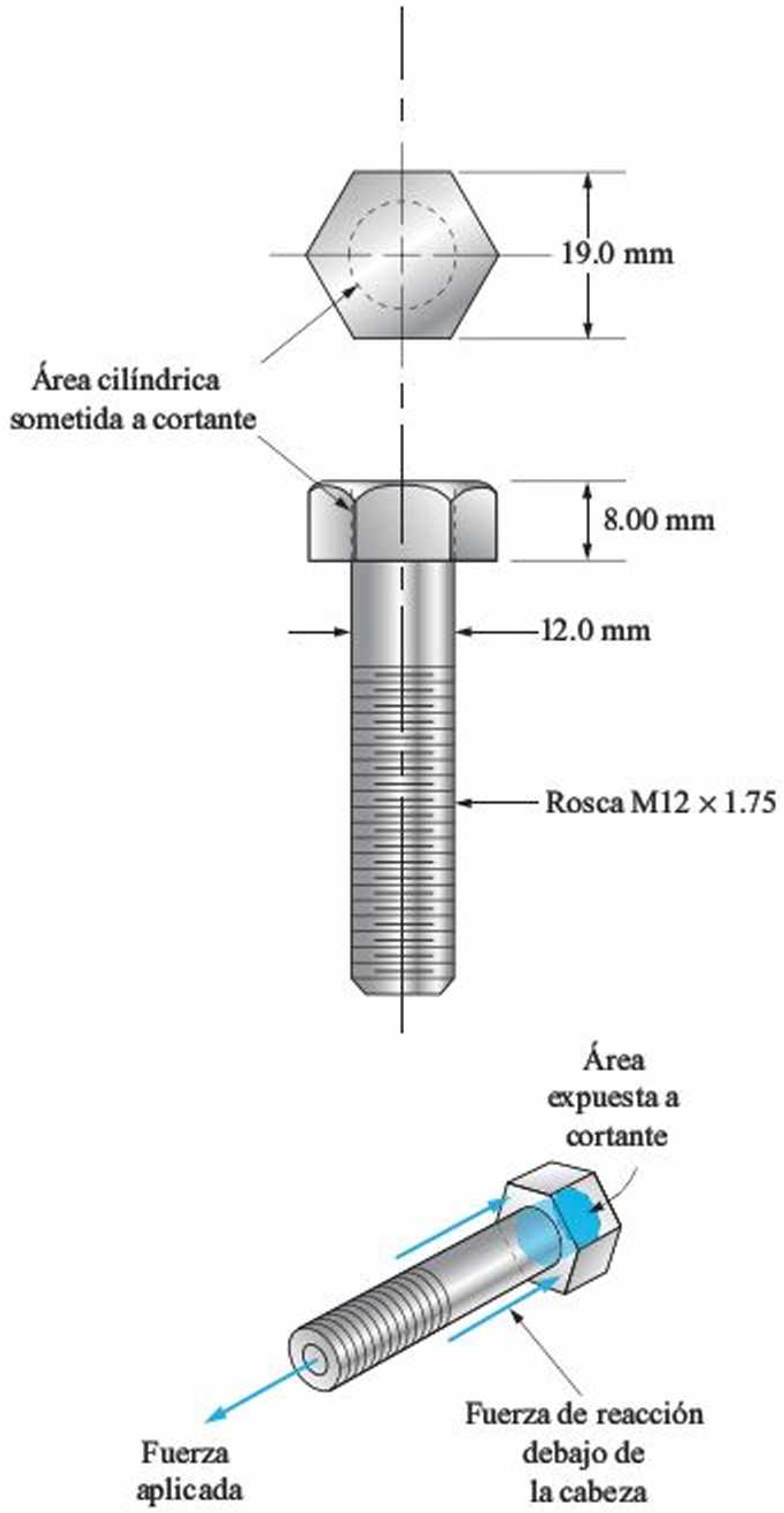


FIGURA PI–69 Perno para el problema 1–69.

1–70.M La figura P1–70 muestra una junta traslapada remachada que conecta dos placas de acero. Calcule el esfuerzo cortante en los remaches producido por una fuerza de 10.2 kN aplicada a las placas.

1–71.M La figura P1–71 muestra una junta a tope remachada con cubreplacas que conectan dos placas de acero. Calcule el esfuerzo cortante en los remaches producido por una fuerza de 10.2 kN aplicada a las placas.

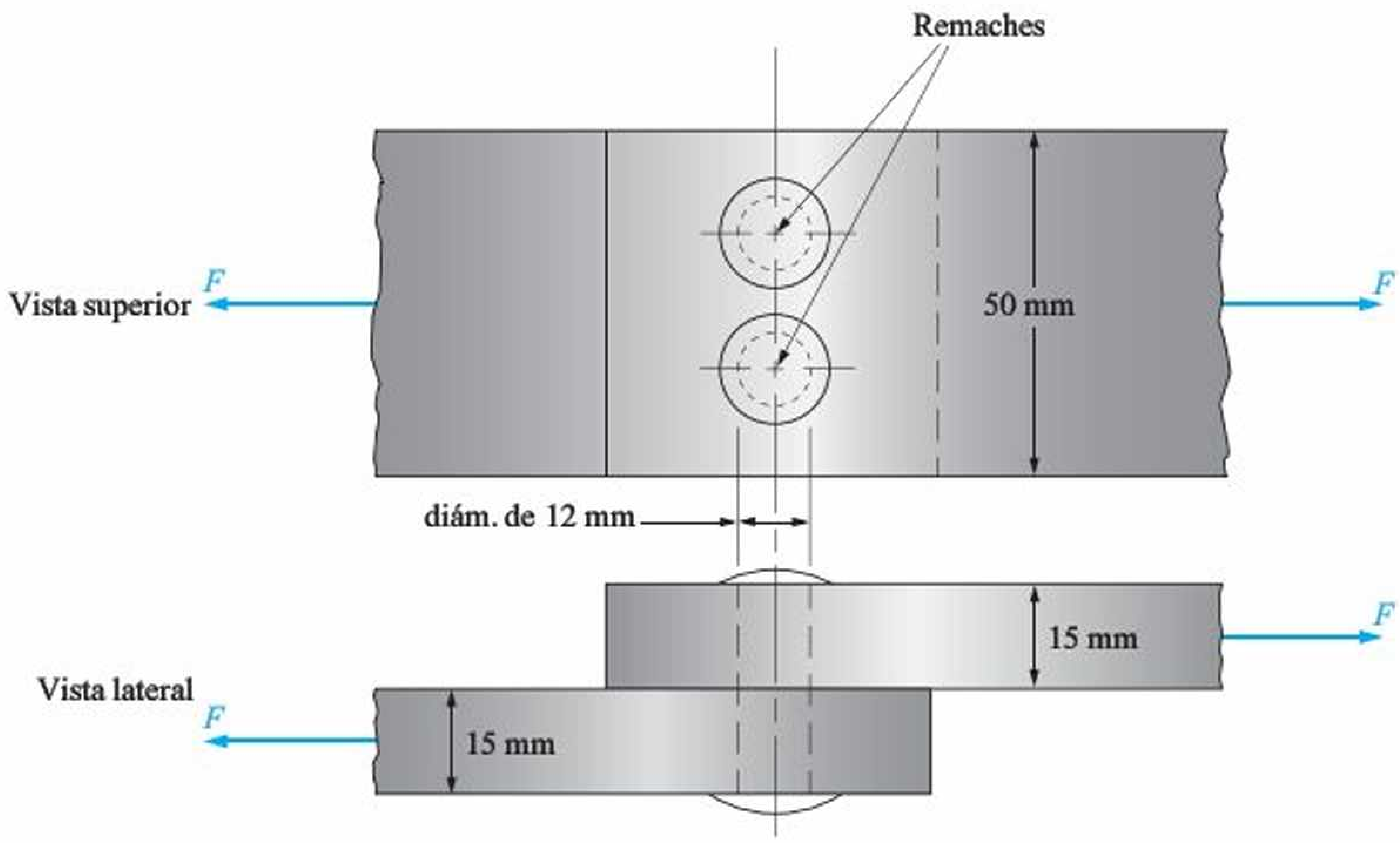


FIGURA PI–70 Junta traslapada remachada para el problema 1–70.

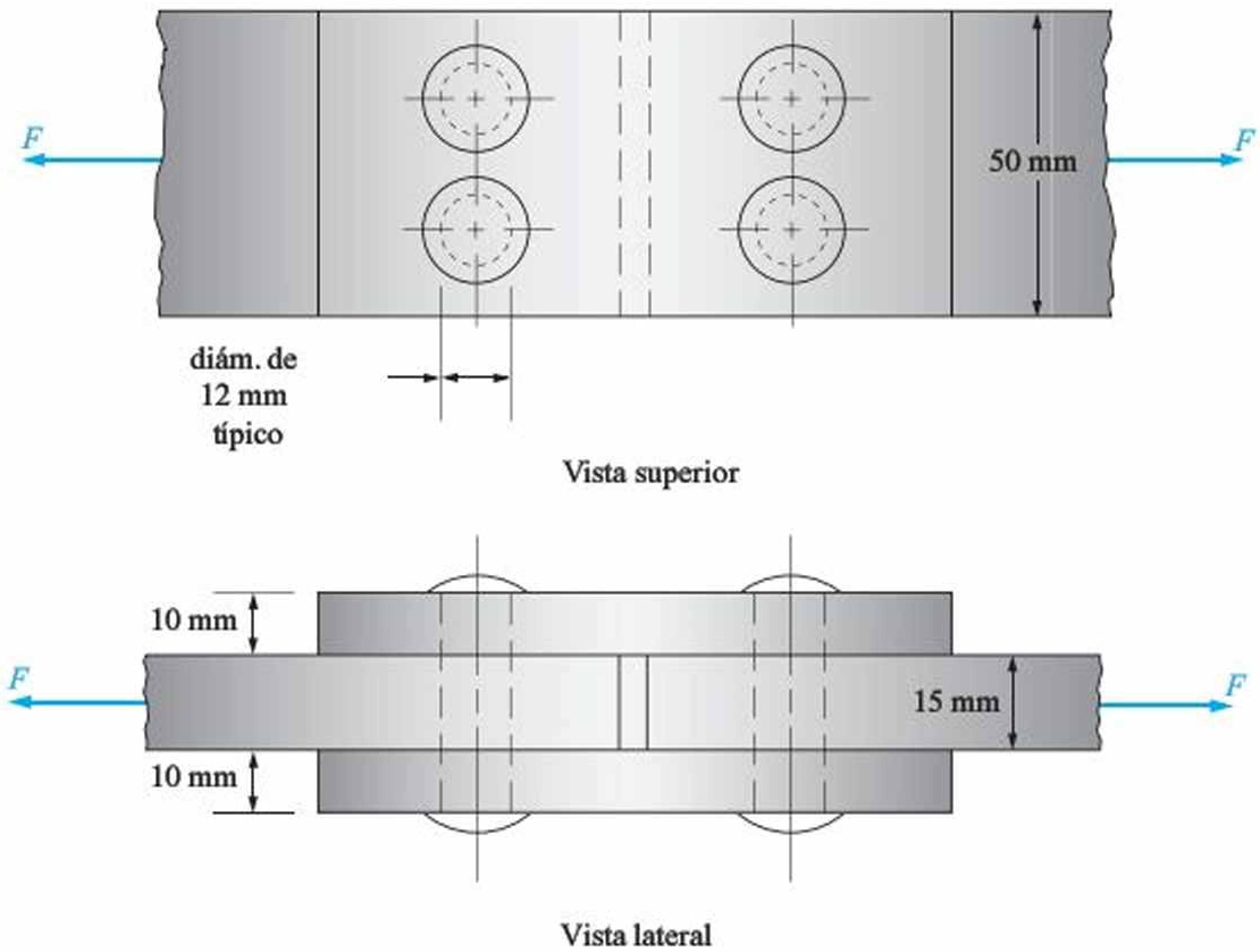


FIGURA PI–71 Junta a tope remachada para el problema 1–71

2

Propiedades de diseño de materiales

La imagen completa y actividad

2–1 Objetivos de este capítulo

2–2 Propiedades de diseño de materiales

2–3 Acero

2–4 Hierro fundido

2–5 Aluminio

2–6 Cobre, latón y bronce

2–7 Zinc, magnesio, titanio y aleaciones de níquel

2–8 No metales en ingeniería de diseño

2–9 Madera

2–10 Concreto

2–11 Plásticos

2–12 Compuestos

2–13 Selección de materiales

La imagen completa

Propiedades de diseño de materiales

Mapa de análisis

- Al diseñar máquinas, estructuras o productos de consumo deberá entender cómo reaccionan los materiales a cargas externamente aplicadas.
- Verá en qué medida son fundamentales las relaciones entre esfuerzo y deformación en un material dado para entender el punto anterior.
- La resistencia de un material es el valor al cual falla por fractura o por deformación excesiva llamada cedencia.
- Se familiarizará con las formas en que las propiedades de los materiales aparecen listados en el apéndice de este libro, y en muchas otras fuentes industriales de datos.
- Obtendrá una visión general de las principales propiedades de diseño de muchos metales y no metales.

Actividad

¿Alguna vez ha observado cuidadosamente un producto que falló debido a que un componente crítico se haya roto? Describa el producto, cómo falló y la apariencia del material cerca de la ruptura. ¿Qué clase de material era? ¿Era un metal o un no metal?

Busque, por ejemplo, productos hechos de metales, plásticos, concreto u otros materiales. Compare la naturaleza de la falla de cada material en función de la apariencia del material fracturado.

¿Parece como si se hubiera roto de repente, más o menos como se rompe una tiza cuando cae al piso? ¿O fue deformándose notablemente cerca de la ruptura antes de fallar?

¿Por qué se rompió? ¿Cómo se estaba utilizando cuando se rompió? ¿Fue una sobrecarga momentánea, un impacto, una vibración o una flexión repetida?

Estudie las propiedades de materiales que aparecen en los apéndices A–14 a A–20 de este libro. Observe las diferentes clases de aceros, hierro fundido, aluminio, madera y plásticos. Busque los valores de resistencia llamados resistencia máxima, resistencia a la cedencia y resistencia al cortante. Otras propiedades incluyen el módulo de elasticidad, el porcentaje de alargamiento (una medida de ductilidad) y la densidad.

La seguridad, el objetivo final del diseño y análisis de esfuerzo, requiere que los materiales no fallen, lo que haría a un producto inadecuado para su propósito pensado. La falla puede adoptar varias formas. Los tipos principales de falla considerados en este libro son los siguientes:

1. El material de algún componente podría fracturarse por completo.
2. El material puede deformarse en exceso bajo carga, de modo que el componente deje de funcionar satisfactoriamente.
3. Una estructura o uno de sus componentes podría volverse inestable y pandearse y, por lo tanto, ser incapaz de soportar las cargas pretendidas.

El estudio de la resistencia de los materiales requiere un conocimiento de cómo las fuerzas y los momentos externos afectan los esfuerzos y deformaciones desarrolladas en el material de un miembro de carga. Para poner en uso práctico este conocimiento, sin embargo, un diseñador debe saber cómo tales esfuerzos y deformaciones pueden ser soportados con seguridad por el material. De este modo, las propiedades de los materiales en relación con el diseño deben ser comprendidas junto con el análisis requerido para determinar la magnitud de los esfuerzos y deformaciones.

En este capítulo presentamos información con respecto a los materiales más frecuentemente utilizados en la fabricación de componentes de estructuras y dispositivos mecánicos, enfatizando las propiedades de diseño de los materiales, en lugar de su estructura metalúrgica o composición química. Aunque es cierto que un conocimiento completo de la estructura de los materiales es de ayuda para el diseñador, es más importante saber cómo se comportan los materiales cuando soportan cargas. Éste es el comportamiento en el cual nos concentramos en este capítulo. Consulte las referencias 4, 9, 12 y 29.

En primer lugar, abordamos las propiedades de diseño de los materiales que afectan el desempeño del producto. Enseguida se describe una amplia variedad de metales, incluidos el carbón y aleaciones de acero, el acero inoxidable, acero estructural, hierro fundido, aluminio, cobre, latón, bronce, zinc, magnesio, titanio y algunas aleaciones de níquel.

Los no metales presentados incluyen madera, concreto, plásticos y compuestos. Se analiza la forma en que el comportamiento de estos materiales difiere de la de los metales junto con algunas de sus propiedades especiales.

2–1 OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

Después de completar este capítulo, usted deberá ser capaz de:

1. Mencionar los usos típicos de los materiales de ingeniería.
2. Definir las propiedades de resistencia de metales, *resistencia máxima a tensión*, *punto de cedencia*, *resistencia a la cedencia*, *límite elástico* y *límite proporcional.*
3. Definir la *ley de Hooke* y las propiedades de rigidez de metales, *módulo de elasticidad a tensión y módulo de elasticidad a cortante*.
4. Definir la *relación de Poisson* y dar su valor para materiales típicos.
5. Describir el comportamiento dúctil y frágil de los materiales.
6. Definir *el porcentaje de alargamiento* y describir su relación con la ductilidad de los materiales.
7. Describir el sistema de numeración unificado (UNS, *Unified Numeric System*) para metales y aleaciones.
8. Describir la designación de cuatro dígitos para aceros.
9. Describir las propiedades importantes de los aceros al carbón, de las aleaciones de acero, de aceros inoxidables y de aceros estructurales.
10. Describir el sistema de designación de cuatro dígitos para aleaciones de aluminio forjado y fundido.
11. Describir las designaciones de temple de aluminio.
12. Describir las propiedades de diseño del cobre, latón, bronce, zinc, magnesio y titanio.
13. Describir las propiedades de diseño de hierros fundidos, incluidos hierro gris, hierro dúctil, hierro templado dúctil, hierro dúctil con temple austenítico, hierro blanco o fundición blanca y hierro maleable o forjable.
14. Describir las propiedades de diseño de la madera, concreto, plástico y compuesto.

2–2 PROPIEDADES DE DISEÑO DE MATERIALES

La selección de un material requiere la consideración de muchos factores, tales como

resistencia	rigidez	ductilidad	peso
tenacidad a la fractura	maquinabilidad	manejabilidad	soldabilidad
apariencia	estabilidad	costo	disponibilidad

compatibilidad con el ambiente en el que el producto debe operar

Se dice más acerca de la naturaleza general del proceso de selección de materiales posteriormente en este capítulo. En relación con el estudio de resistencia de materiales, el énfasis principal es sobre la *resistencia*, *rigidez* y *ductilidad*. Los tipos de resistencia considerados con mayor frecuencia son la *resistencia a la tensión*, *a compresión* y *a la cedencia*. La resistencia a la tensión y cedencia son consideradas primero.

Resistencia a la tensión y a la cedencia. Los datos de referencia que contienen las propiedades mecánicas de metales casi siempre incluyen la *resistencia a la tensión* y *a la cedencia* del metal. La comparación de los esfuerzos reales en una pieza, con la resistencia a la



FIGURA 2–1
Máquina de prueba universal para obtener datos de esfuerzo-deformación de materiales. (Fuente: Instron Corporation, Norwood, MA)

tensión o a la cedencia del material del cual está hecha la pieza es el método usual de evaluar la conveniencia del material para soportar las cargas aplicadas con seguridad. En el capítulo 3 y capítulos subsecuentes se discute más acerca de los detalles del análisis de esfuerzo.

La resistencia a la tensión y la resistencia a la cedencia se determinan probando una muestra del material en una máquina de ensayo de tensión, como la mostrada en la figura 2–1 (consulte en la referencia 8 los métodos empleados). Una barra redonda o tira plana se coloca en las mordazas superior e inferior. La figura 2–2 muestra una fotografía de una probeta típica a tensión. Se aplica una fuerza de tensión lenta y constantemente a la muestra, alargándola hasta que se rompe. Durante la prueba se traza una gráfica que muestra la relación entre el esfuerzo en la muestra y la deformación, o deformación unitaria.



FIGURA 2–2
Probeta para prueba de tensión montada en un sujetador. (Fuente: Tinius Olson Testing Machine Co., Inc., Willow Grove, PA)

En la figura 2–3 se muestra un diagrama típico esfuerzo-deformación. Se puede ver que durante la primera fase del proceso de carga, la gráfica de esfuerzo contra deformación es una línea recta, lo que indica que el esfuerzo es directamente proporcional a la deformación. Después del punto A en el diagrama, la curva ya no es una línea recta; este punto se llama *límite proporcional*. A medida que se incrementa la carga de forma continua en la muestra, se llega a un punto llamado *límite elástico*, marcado B en la figura 2–3. Con esfuerzos por debajo de este punto, el material recobrará su tamaño y forma originales al desaparecer la carga. Con esfuerzos mayores, el material se deforma permanentemente. El *punto de cedencia* o *límite elástico* es el esfuerzo con el cual se produce un alargamiento notable de la muestra sin un incremento aparente de la carga. El punto de cedencia se encuentra en C en la figura 2–3, aproximadamente a 36 000 psi (248 MPa). Si se aplican cargas aún mayores, una vez que se ha llegado al punto de cedencia, la curva sube de nuevo. Después de que alcanza un pico, la curva cae un poco hasta que finalmente la muestra se rompe y se termina la gráfica. El esfuerzo aparente más alto tomado del diagrama de esfuerzo–deformación se llama *resistencia a la tensión*. En la figura 2–3, la resistencia a la tensión sería aproximadamente de 53 000 psi (365 MPa).

El hecho de que la curva esfuerzo–deformación en la figura 2–3 caiga después de alcanzar un pico indica que el nivel de esfuerzo se reduce. En realidad, no lo hace: el *esfuerzo verdadero* continúa elevándose hasta la falla final del material. La razón de la aparente reducción del esfuerzo es que la gráfica tomada de una máquina de ensayo de tensión típica en realidad es una gráfica de *carga contra alargamiento* en lugar de *esfuerzo contra deformación*. El eje vertical se convierte en esfuerzo dividiendo la carga (fuerza) aplicada a la probeta entre el área de sección transversal *original* de ésta.

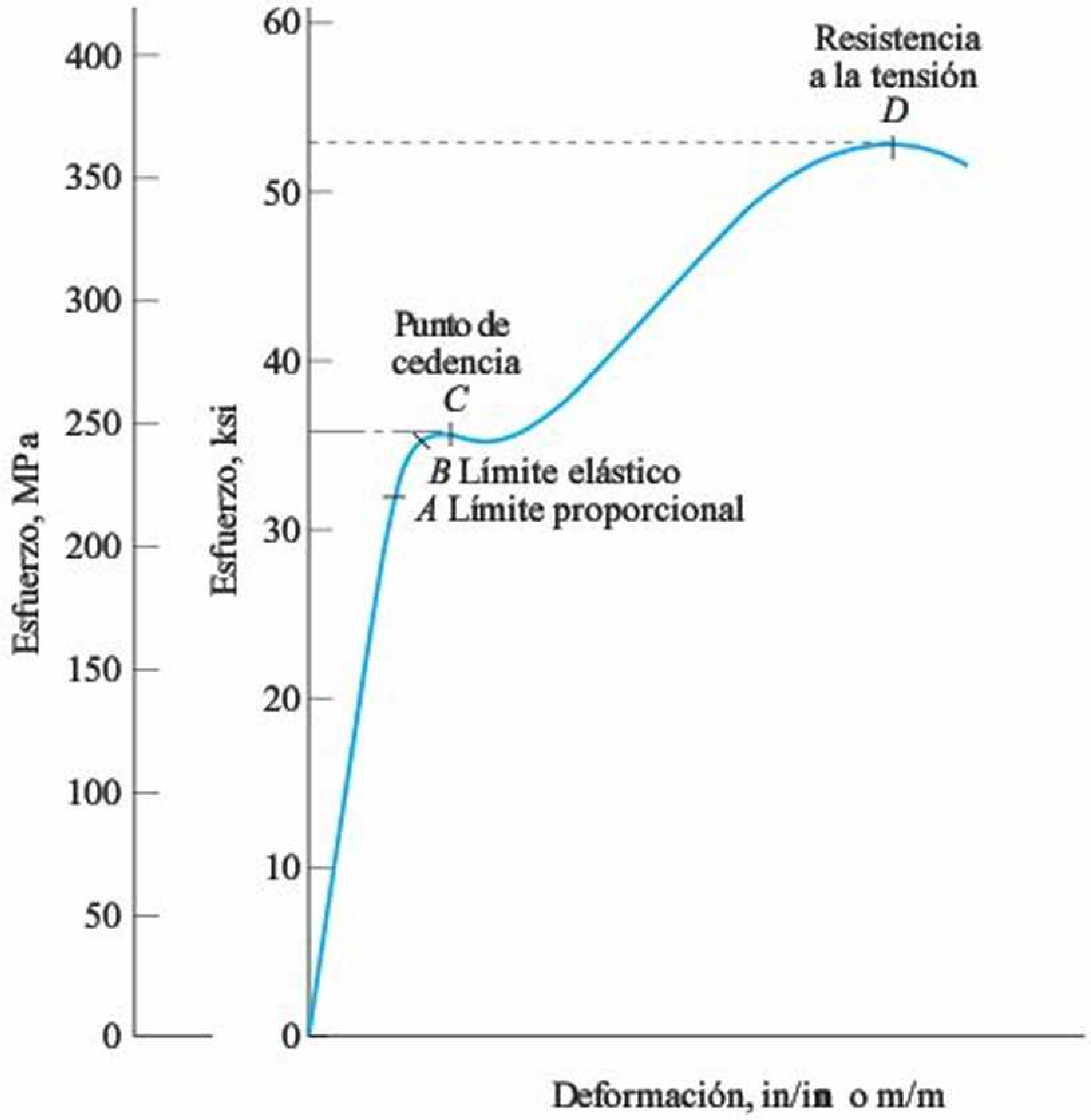


FIGURA 2–3 Curva de esfuerzo–deformación típica para acero.

Cuando la probeta se aproxima a su carga de ruptura, se reduce el diámetro y consecuentemente se reduce el área de sección transversal. El área reducida requiere una fuerza menor para que la probeta se siga alargando, aun cuando el esfuerzo en el material se esté incrementando. Esto da por resultado la curva mostrada en la figura 2–3. Debido a que es muy difícil monitorear la disminución del diámetro y la experimentación ha demostrado que existe poca diferencia entre el esfuerzo máximo verdadero y el encontrado a partir de la curva del pico del *esfuerzo aparente* contra la deformación, se acepta el pico como la resistencia a la tensión del material.

A continuación se resumen las definiciones de las propiedades de resistencia claves de aceros:

El límite proporcional es el valor de esfuerzo en la curva de esfuerzo–deformación en el que la curva se aparta por primera vez de una línea recta.

El límite elástico es el valor de esfuerzo en la curva de esfuerzo–deformación en el que el material se ha deformado plásticamente; es decir, cuando ya no recobrará su tamaño y forma originales después de que se retire la carga.

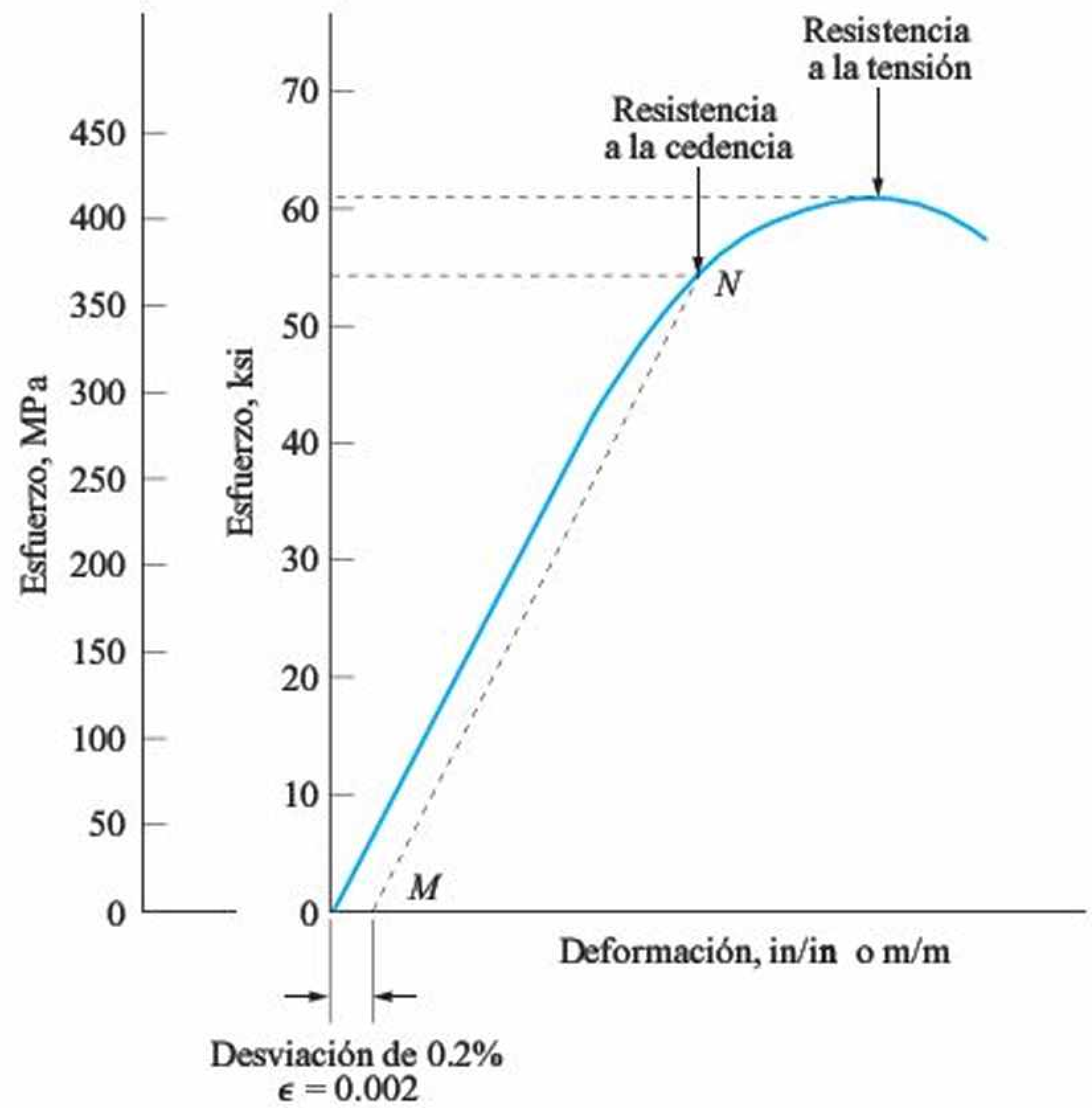
El punto de cedencia es el valor de esfuerzo en la curva de esfuerzo–deformación donde existe un incremento significativo de la deformación con poco o ningún incremento del esfuerzo.

La resistencia a la tensión es el valor más alto del esfuerzo aparente en la curva de esfuerzo–deformación.

Muchos metales no exhiben un punto de cedencia bien definido como el de la figura 2–3. Algunos ejemplos son aceros aleados de alta resistencia, aluminio y titanio. No obstante, estos materiales en realidad sí ceden, en el sentido de que se deforma una cantidad apreciable antes de que de hecho se fracturen. Para estos materiales, un diagrama de esfuerzo–deformación típico se vería como el mostrado en la figura 2–4: una curva uniforme sin ningún punto de cadencia pronunciado. Para materiales como ésos, una línea como la *M–N* trazada paralela a la parte de línea recta de la curva de ensayo define la resistencia a la cedencia.

El punto *M* casi siempre se determina localizando el punto sobre el eje de deformación que representa una deformación de 0.002 in/in (pulg/pulg). Este punto también se conoce como

FIGURA 2–4
Curva típica de esfuerzo-deformación para aluminio.



punto de desviación de 0.2%. El punto N donde la línea de desviación corta la curva, define la resistencia a la cedencia del material, de cerca de 55 000 lb/in² (psi) en la figura 2–4. La resistencia máxima se encuentra en el pico de la curva, como se describió. Se utiliza la *resistencia a la cedencia* en lugar del punto de cedencia para estos materiales.

Las unidades para la desviación sobre el eje de deformación pueden ser de cualquier sistema. Recuerde que la deformación, en ocasiones llamada *deformación unitaria*, es una relación del alargamiento del material con una carga específica a su longitud original en la condición descargada. Por lo tanto, la deformación en realidad no tiene dimensiones. Si las mediciones se tomarán directamente en el sistema métrico SI, la deformación estaría en m/m, metros de alargamiento por metro de longitud original. También se podría utilizar mm/mm.

El valor de la desviación, 0.2%, es típico de los metales más comúnmente utilizados. Se puede utilizar otros valores si el 0.2% no da resultados confiables y convenientes. No obstante, se asume el valor de 0.2% a menos que se establezca otro.

En resumen, para muchos materiales que no exhiben un punto de cedencia pronunciado, la definición de *resistencia a la cedencia* es

> ***La resistencia a la cedencia es el valor de esfuerzo, en la curva de esfuerzo–deformación, al cual una línea recta trazada desde un valor de deformación de 0.002 in/in (o m/m) y paralela a la parte recta de la curva de esfuerzo–deformación corta la curva.***

Resistencia a la compresión. El comportamiento de esfuerzo–deformación de la mayoría de los metales forjados es casi el mismo a compresión que a tensión. Esto se debe a que el material tiene una estructura casi uniforme y homogénea en su totalidad. Cuando un material se comporta de forma similar pese a la dirección de las cargas, se conoce como material *isotrópico*. Para materiales isotrópicos, entonces, en general no se realizan pruebas de compresión distintas y no se reportan datos distintos para resistencia a la compresión.

Pero muchos materiales exhiben diferentes comportamiento y resistencia a compresión que a tensión. Esto se llama comportamiento *anisotrópico*. Algunos ejemplos son muchos metales, algunos plásticos, concreto, madera y compuestos. Es recomendable que busque datos tanto de resistencia a la compresión como de resistencia a la tensión de dichos materiales.

Rigidez. Con frecuencia es necesario determinar cuánto se deformará una parte bajo carga para garantizar que la deformación excesiva no inutilice la parte. Esto puede ocurrir con esfuerzos por debajo de la resistencia a la cedencia del material, sobre todo en miembros muy largos, o en dispositivos de alta precisión. La rigidez de un material es una función de su *módulo de elasticidad*, en ocasiones llamado *módulo de Young*.

El modulo de elasticidad, E, es una medida de la rigidez de un material determinada por la pendiente de la parte de línea recta de la curva esfuerzo–deformación. Es la relación del cambio del esfuerzo al cambio correspondiente de la deformación.

Esto puede formularse matemáticamente como

Módulo de elasticidad

$$E = \frac{\text{esfuerzo}}{\text{deformación}} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (2\text{–}1)$$

Por consiguiente, un material que tiene una pendiente más pronunciada en su curva de esfuerzo–deformación será más rígido y se deformará menos bajo carga que uno de pendiente menos pronunciada. La figura 2–5 ilustra este concepto al mostrar las partes de línea recta de las curvas de esfuerzo–deformación de acero, titanio, aluminio y magnesio. Es posible apreciar que en el caso de dos partes idénticas, pero una hecha de acero y la otra de aluminio, la parte de aluminio se deformaría aproximadamente tres veces más cuando se sometiera a la misma carga.

El diseño de miembros de carga típicos en máquinas y estructuras es tal que el esfuerzo queda por debajo del límite proporcional; es decir, en la parte de línea recta de la curva de esfuerzo–deformación. A continuación definimos la *ley de Hooke*.

Cuando el nivel de esfuerzo en un material bajo carga está por debajo del límite proporcional y existe una relación de línea recta entre esfuerzo y deformación, se dice que la ley de Hooke es válida.

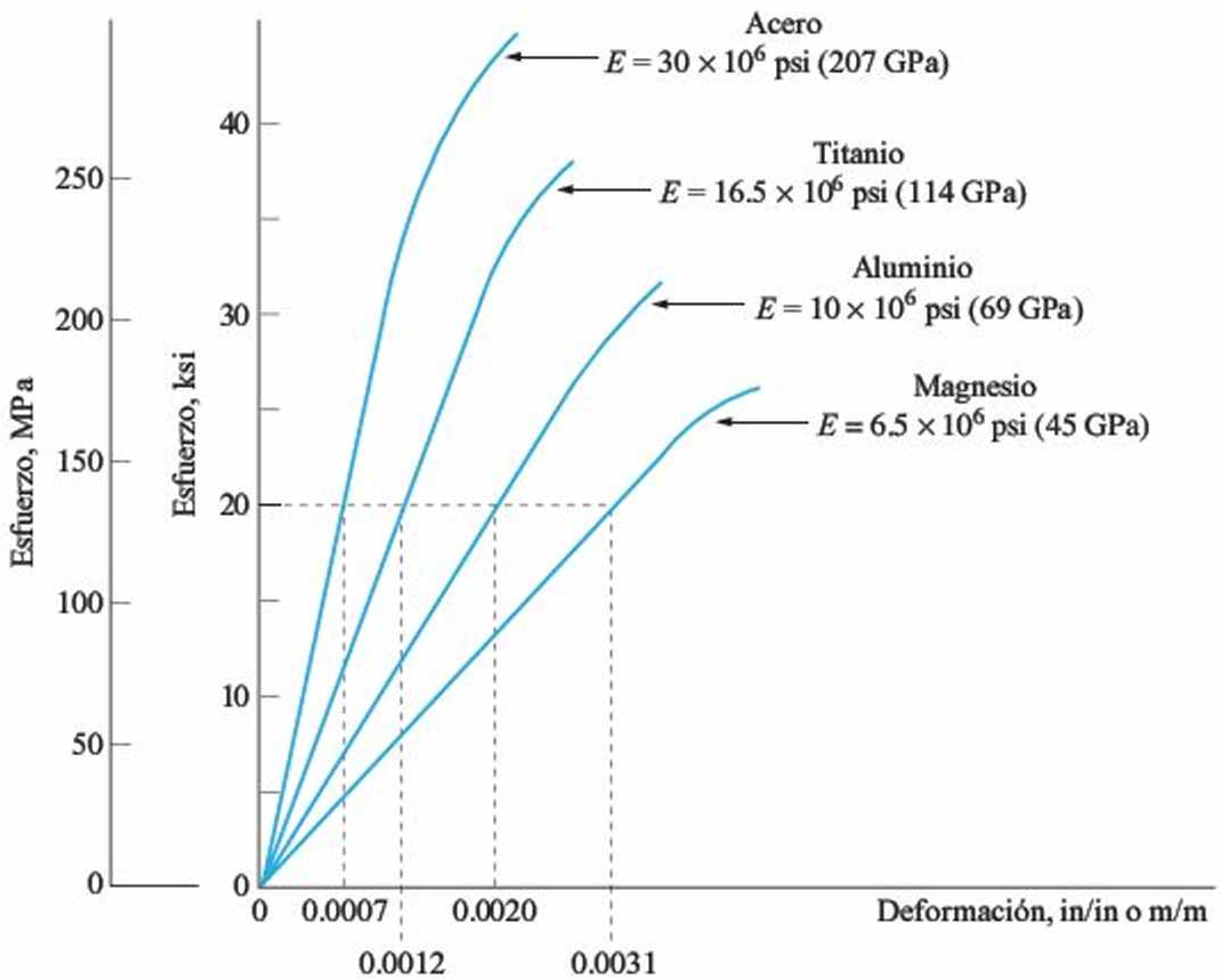


FIGURA 2–5
Módulo de elasticidad de diferentes metales.

Muchas de las fórmulas utilizadas para análisis de esfuerzo están basadas en la suposición de que la ley de Hooke se les aplica. Este concepto también es útil para técnicas de análisis experimental de esfuerzos en las que la deformación se mide en un punto. El esfuerzo correspondiente en dicho punto se calcula con una variación de la ecuación (2–1)

$$\sigma = E\epsilon \tag{2–2}$$

La ecuación (2–2) es válida únicamente donde la deformación ocurre en sólo una dirección. Esto se llama *deformación uniaxial* y se aplica a miembros sometidos a tensión o compresión axial y vigas sometidas a flexión pura. Cuando los esfuerzos ocurren en dos direcciones (*esfuerzo biaxial*), se deberá considerar el efecto adicional del segundo esfuerzo. El esfuerzo biaxial se aborda en el capítulo 10.

Ductilidad. Cuando se rompen los metales, su fractura puede clasificarse como dúctil o como frágil. Un material dúctil se alargará y cederá antes de fracturarse y en la sección fracturada el área de la sección transversal se reducirá notablemente. A la inversa, un material frágil se fracturará de repente con poco o ningún cambio en el área de la sección fracturada. Los materiales dúctiles se prefieren para piezas que soportan cargas repetidas o que se someten a carga de impacto, porque en general son más resistentes a la falla por fatiga y porque absorben mejor la energía del impacto.

FIGURA 2–6
Longitud de calibración en una probeta para una prueba de tensión. (a) Longitud de calibración marcada en una probeta. (b) Probeta en un dispositivo utilizado para marcar la longitud de calibración. (Fuente: Tinius Olson Testing Machine Co., Inc., Willow Grove, PA)



Típicamente de 2.00 in o 50 mm

(*a*)



(*b*)

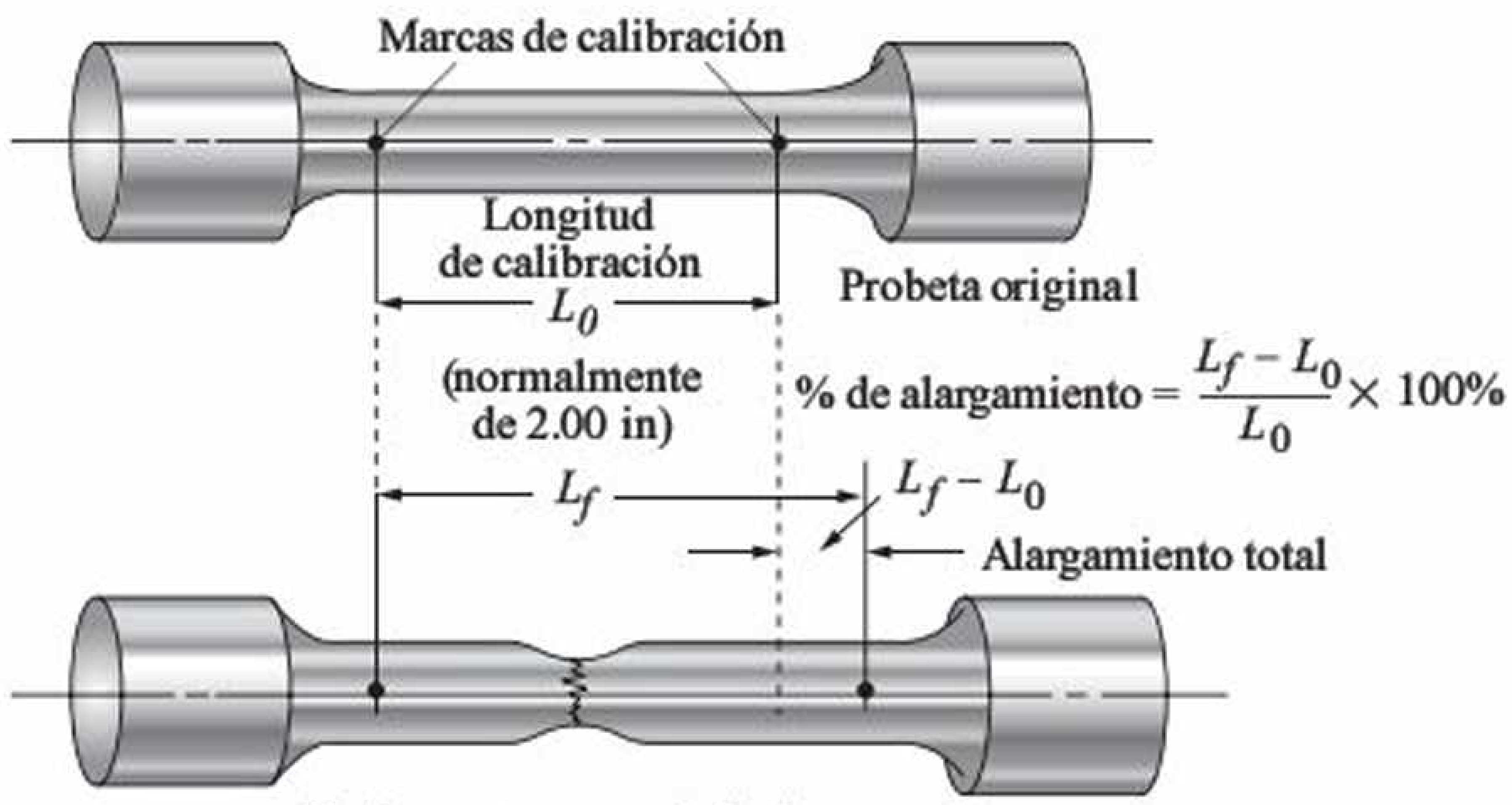


FIGURA 2–7 Medición del porcentaje de alargamiento.

Normalmente, la ductilidad en metales se mide durante la prueba de tensión al observar cuánto se alargó el material permanentemente después de la fractura. Al inicio de la prueba, se ponen marcas de calibración en la muestra de prueba, como se muestra en la figura 2–6. La mayoría de las pruebas utilizan 2.00 in o 50.0 mm como longitud de calibración, como se muestra en la figura. Los aceros estructurales muy dúctiles en ocasiones utilizan 8.000 in o 200.00 mm como longitud de calibración. Una vez que la muestra ha sido tensada hasta que la fractura, las partes rotas se unen y se mide de nuevo la distancia entre las marcas. Vea la figura 2–7. De acuerdo con estos datos, el *porcentaje de alargamiento* se calcula de la siguiente manera

Porcentaje de alargamiento

$$\text{porcentaje de alargamiento} = \frac{\text{longitud final} - \text{longitud de calibración}}{\text{longitud de calibración}} \times 100\% \qquad (2\text{–}3)$$

Se considera que un metal es *dúctil* si su porcentaje de alargamiento o elongación es de más del 5.0%. Un material con un porcentaje de alargamiento menor del 5.0% se considera como *frágil* y no exhibe el fenómeno de cedencia. La falla de ese tipo de materiales es repentina, sin ninguna deformación notable antes de la fractura final. En la mayoría de las aplicaciones de diseño estructural y mecánico, el comportamiento dúctil es deseable y el porcentaje de alargamiento del material deberá ser de significativamente mayor al 5.0%. Un alto porcentaje de alargamiento indica un material altamente dúctil.

En suma, las siguientes definiciones se utilizan para describir la ductilidad de metales:

El porcentaje de alargamiento es la relación del alargamiento plástico de una probeta sometida a tensión, después de la falla final dentro de un conjunto de marcas de calibración, a la longitud original entre las marcas de calibración. Es una medida de la ductilidad.

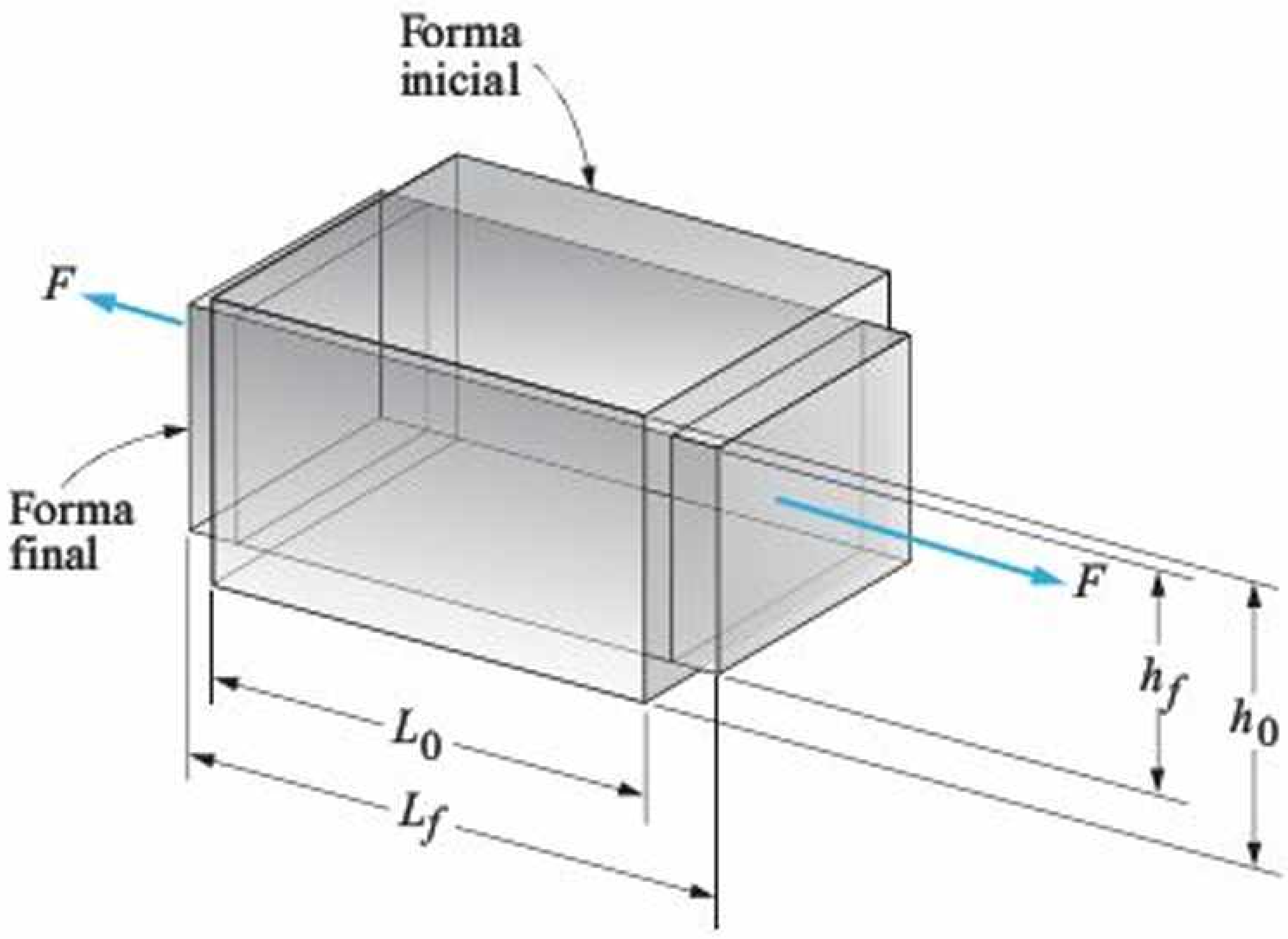
Un material dúctil es aquel que puede ser alargado, formado o estirado significativamente antes de que se fracture. Un metal que exhibe un porcentaje de alargamiento de más de 5.0% se considera dúctil.

Un material frágil es uno que falla de repente bajo carga con poca o ninguna deformación plástica. Un metal que exhibe un porcentaje de alargamiento menor al 5.0% se considera frágil.

Prácticamente todas las formas de acero forjado y aleaciones de aluminio son dúctiles. Pero las formas de más alta resistencia tienden a tener una menor ductilidad y el diseñador a menudo se ve obligado a comprometer la resistencia y ductilidad en la especificación del material. El hierro fundido gris, algunas formas de aluminio fundido y algunas de alta resistencia de acero forjado o fundido son frágiles.

Relación de Poisson. La figura 2–8 muestra un entendimiento más completo de la deformación de un miembro sometido a esfuerzo normal. El elemento mostrado se tomó de la ba-

FIGURA 2–8
Ilustración de la relación de Poisson para un elemento a tensión.



rra sometida a tensión. La fuerza de tensión en la barra provoca un alargamiento de la barra en la dirección de la fuerza aplicada, como era de esperarse. Pero, al mismo tiempo, el ancho de la barra se reduce. Por lo tanto, en el elemento sometido a esfuerzo ocurre un alargamiento y contracción simultáneos. Con el alargamiento se puede determinar la deformación axial y con la contracción se puede determinar la deformación lateral.

Definimos el término *relación de Poisson* como la relación de la cantidad de deformación lateral entre la deformación axial. Es decir,

Relación de Poisson

$$\text{Relación de Poisson} = \nu = \frac{\text{Deformación lateral}}{\text{Deformación axial}} = \frac{-\epsilon_L}{\epsilon_a} \qquad \textbf{(2–4)}$$

El signo negativo en la deformación lateral se introduce para garantizar que la relación de Poisson es un número positivo cuando las deformaciones se calculan como se indica en la figura 2–8. También se dice que la relación de Poisson es un valor absoluto de la relación de deformación.

Los materiales más comúnmente utilizados tienen un valor de la relación de Poisson entre 0.25 y 0.35. Para concreto, ν varía ampliamente según el grado y el esfuerzo aplicado, pero en general queda comprendido entre 0.1 y 0.25. Los elastómeros y el caucho pueden tener relaciones de Poisson próximos a 0.50. En la tabla 2–1 se dan valores aproximados de la relación de Poisson.

Se utiliza la relación de Poisson en el cálculo de esfuerzo de contacto, en ocasiones llamado *esfuerzo de Hertz*, cuando se transfieren fuerzas a través de áreas muy pequeñas. Los ejemplos mostrados en la figura 3–14 incluyen cilindros o esferas que actúan sobre pla-

TABLA 2–1 Valores aproximados de la relación de Poisson, ν.

Material	ν	Material	ν
Concreto	0.10−0.25	Aluminio (la mayoría de las aleaciones)	0.33
Vidrio	0.24	Cobre	0.33
Hierro dúctil	0.27	Latón	0.33
Hierro fundido gris	0.21	Zinc	0.33
Plástico	0.20−0.40	Bronce al fósforo	0.35
Acero al carbón y de aleación	0.29	Magnesio	0.35
Acero inoxidable (18-8)	0.30	Plomo	0.43
Titanio	0.30	Hule, elastómeros	0.50

Notas: Los valores son aproximados y varían un poco con la composición específica. El hule y elastómeros tienden a un valor límite de 0.50.

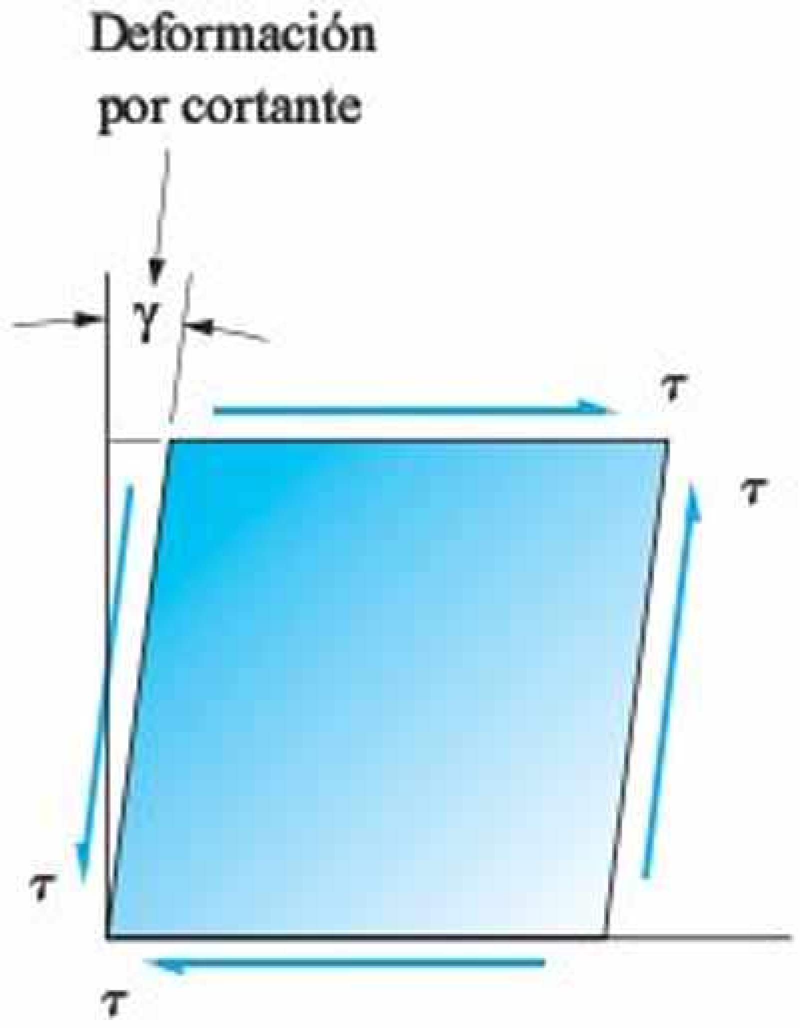


FIGURA 2–9
Deformación por cortante mostrada en un elemento de esfuerzo.

cas planas, cojinetes de bolas esféricos que actúan en sus canales de rodadura y el área de contacto entre dos dientes de engranes. El análisis completo de estos esfuerzos requiere una descripción detallada de la deformación que ocurre alrededor de la pequeña área de contacto. Se debe emplear principios de elasticidad, y la relación de Poisson de los materiales de los dos miembros en contacto influye significativamente en las deformaciones. Vea las referencias 7 y 10 en el capítulo 1.

LECCIÓN 4

Algunos tipos de análisis experimental de esfuerzo también utilizan la relación de Poisson. Por ejemplo, los medidores de deformación de resistencia eléctrica detectan las deformaciones locales en la superficie de las partes que soportan carga. Un análisis preciso requiere se midan las deformaciones principales en dos direcciones perpendiculares, los resultados se emplean para calcular el esfuerzo en la ubicación de los medidores.

Deformación por cortante. Los primeros análisis de deformación del capítulo 1 describieron la deformación normal porque es provocada por el esfuerzo de tensión o compresión normal desarrollado en un miembro que soporta carga. Bajo la influencia de un esfuerzo cortante, se produciría deformación.

La figura 2–9 muestra un elemento de esfuerzo sometido a cortante. La acción cortante en caras paralelas del elemento tiende a deformarlo angularmente, como se muestra a un grado exagerado. El ángulo γ (gamma), medido en radianes, es la *deformación por cortante*. En problemas prácticos se encuentran sólo valores muy pequeños de deformación por cortante y, por lo tanto, las dimensiones del elemento cambian sólo un poco.

Módulo de elasticidad a cortante

La relación del esfuerzo cortante a la deformación por cortante se llama **módulo de elasticidad a cortante** ***o*** **módulo de rigidez** ***y está denotado por*** **G.**

Módulo de elasticidad a cortante

Esto es

$$G = \frac{\text{esfuerzo cortante}}{\text{deformación por cortante}} = \frac{\tau}{\gamma} \qquad \textbf{(2–5)}$$

G es una propiedad del material y está relacionada con el módulo de tensión y la relación de Poisson por

Relación entre G, E y la relación de Poisson

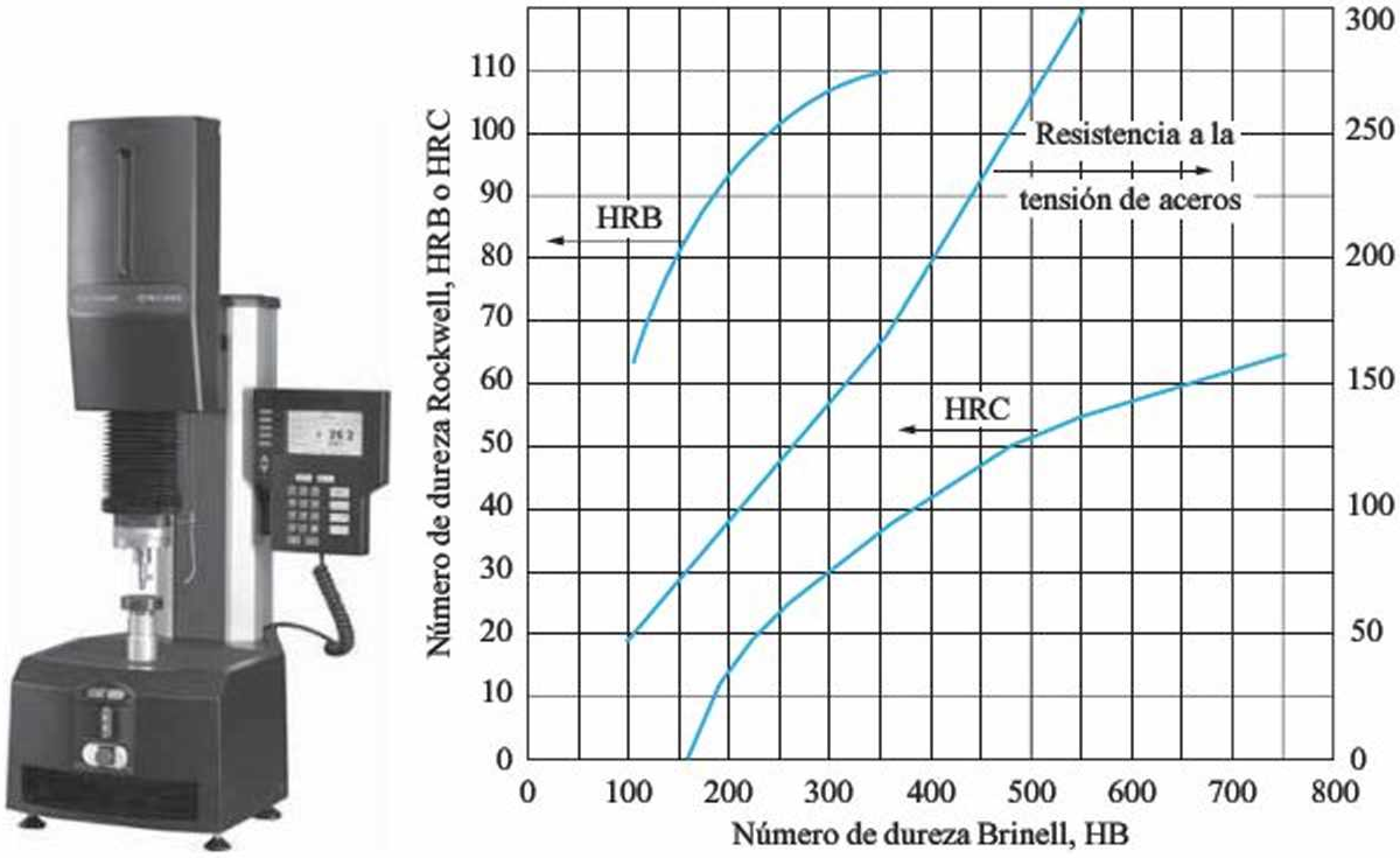
$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \qquad \textbf{(2–6)}$$

El cálculo de deflexión torsional de flechas en el capítulo 4 requiere el uso de G.

Resistencia a la flexión y módulo de flexión. Otras medidas de rigidez y resistencia a menudo reportadas, en particular para plásticos, son la *resistencia a la flexión y el módulo de flexión.* Como su nombre lo implica, se carga una probeta del material como viga a flexión, se toman datos y grafican como carga contra deflexión. Con estos datos y el conocimiento de

la geometría de la probeta, se calcula el esfuerzo y la deformación. La relación de esfuerzo a deformación es una medida del módulo de flexión. El estándar ASTM D 790[1] define el método completo. Observe que los valores son significativamente diferentes del módulo de tensión debido a que el patrón de esfuerzo en la probeta es una combinación de tensión y compresión. Los datos son útiles para comparar la resistencia y rigidez de diferentes materiales cuando una pieza que soporta carga se somete a flexión en servicio. El estándar ISO 178 describe un método similar para determinar propiedades de flexión.

FIGURA 2–10
Probador de dureza y conversiones. (a) Probador de dureza Rockwell, (b) Conversiones de dureza y relaciones con la resistencia a la tensión de aceros. (Fuente: Instron Corporation, Norwood, MA)



(*a*) Probador de dureza Rockwell. (*b*) Conversiones de dureza y relaciones con la resistencia.

Dureza. La resistencia de material, por la huella de un penetrador es una indicación de su *dureza*. Varios tipos de dispositivos, procedimientos y penetradores miden la dureza; el probador de dureza Brinell y el probador de dureza Rockwell se utilizan con mucha frecuencia para elementos de máquina. Para aceros, el probador de dureza Brinell utiliza una bola de acero endurecido de 10 mm de diámetro como penetrador bajo una carga de 3000 kg de fuerza. La carga produce una huella permanente en el material de prueba y el diámetro de la huella está relacionado con el número de dureza Brinell, el cual se abrevia HB. La cantidad que se está midiendo es la carga dividida entre el área de contacto de la huella. Para aceros, el valor de HB varía desde aproximadamente 100 para acero al bajo carbón recocido hasta más de 700 para aceros de alta aleación de alta resistencia en la condición temple por inmersión. En los valores altos, por encima de HB 500, el penetrador es en ocasiones de carburo de tungsteno en lugar de acero. Para metales más blandos, se utiliza una carga de 500 kg.

El probador de dureza Rockwell utiliza una bola de acero endurecido de $\frac{1}{16}$ in de diámetro bajo una carga de 100 kg fuerza para metales blandos y la dureza resultante se reporta como Rockwell B, R_B o HRB. Para metales duros, tales como aceros aleados térmicamente tratados, se utiliza la escala Rockwell C. Se aplica una carga de 150 kg fuerza sobre un penetrador de diamante (un penetrador *brale*) cuya forma es esfero–cónica. La dureza Rockwell C en ocasiones se reporta como R_C o HRC. Se utilizan muchas otras escalas Rockwell.

[1] ASTM International. *Standard Test Method for Flexural Properties of Unreinforced and Reinforced Plastics and Electrical Insulating Materials, Standard D790*. West Conshohocken, PA: ASTM International, 2003.

TABLA 2–2 Comparación de escalas de dureza con resistencia a la tensión para aceros.

Material y condición	Dureza			Resistencia a la tensión	
	HB	HRB	HRC	ksi	MPa
1020 recocido	121	70		60	414
1040 laminado en caliente	144	79		72	496
4140 recocido	197	93	13	95	655
4140 OQT 1000	341	109	37	168	1160
4140 OQT 700	461		49	231	1590

Los métodos Rockwell y Brinell están basados en parámetros diferentes y conducen a números bastante diferentes. Sin embargo, como ambos miden dureza, existe una correlación entre ellos, como se indica en la figura 2–10. También es importante señalar que, sobre todo para aceros aleados altamente endurecidos, existe una relación casi lineal entre el número de dureza Brinell y la resistencia a la tensión del acero, de acuerdo con la ecuación

Relación aproximada entre dureza y resistencia para acero

$$0.50(\text{HB}) = \text{resistencia a la tensión aproximada (ksi)} \quad \textbf{(2–7)}$$

Esta relación se muestra en la figura 2–10. La dureza en un acero indica su resistencia al desgaste, así como su resistencia.

Para comparar las escalas de dureza con la resistencia a la tensión, considere la tabla 2–2. Observe que existe un traslape entre las escalas HRB y HRC. Normalmente, se utiliza la HRB para metales blandos y varía, aproximadamente, de 60 hasta 100, en tanto que la HRC se utiliza para metales duros y varía desde 20 hasta 65. No se recomienda utilizar números HRB por encima de 100 o números HRC por debajo de 20. Los mostrados en la tabla 2–2 son sólo para propósitos de comparación.

En tanto que las escalas Rockwell B y C se utilizan para componentes sustancialmente hechos de aceros, se pueden utilizar otras escalas de dureza Rockwell para diferentes materiales, como la tabla 2–3 lo indica. Visite el sitio de Internet 27 para descargar un reporte sobre medición de dureza Rockwell de materiales metálicos.

TABLA 2–3 Escalas de dureza Rockwell y sus usos.

Escala	Símbolo	Usos típicos
A	HRA	Acero delgado, acero endurecido con superficie endurecida poco profunda
B	HRB	Aceros blandos tales como al bajo carbón, recocidos o laminados en caliente; aluminio blando, cobre, hierros fundidos
C	HRC	Aceros duros tales como aceros de aleación térmicamente tratados, aceros para herramientas, titanio
D	HRD	Aceros con superficie endurecida de mediana profundidad, hierros fundidos duros
E	HRE	Metales antifricción duros, aluminio, magnesio, hierros fundidos
F	HRF	Chapas metálicas blandas delgadas, cobre recocido y aleaciones de zinc
G	HRG	Cobre al berilio, bronce al fósforo, hierros fundidos blandos
H	HRH	Aluminio, zinc, plomo
K	HRK	Metales antifricción blandos, plásticos, hules y otros materiales blandos
		Escalas L, M, P, R, S y V y α también disponibles
15N	HR15N	Similar a la escala A pero para materiales más delgados o endurecimiento superficial delgado
30N	HR30N	Similar a la escala C pero para materiales más delgados o endurecimiento superficial más delgado
45N	HR45N	Similar a la escala D pero para materiales más delgados o endurecimiento superficial delgado
15T	HR15T	Similar a la escala B pero para materiales más delgados
30T	HR30T	Similar a la escala F pero para materiales más delgados
45T	HR45T	Similar a la escala G pero para materiales más delgados

Nota: Los dispositivos de medición utilizan endentadores de diferentes tamaños y formas y fuerzas aplicadas. Pera más detalles consulte las normas ASTM E18, ISO 6508.

TABLA 2–4 Medición de dureza de plásticos, hules y elastómeros.

Método Shore		
Escala de durómetro	Símbolo	Usos típicos
A	Shore A	Hules naturales vulcanizados blandos, elastómeros (p. ej., neopreno), cuero, cera, fieltro
B	Shore B	Hule moderadamente duro tal como se utiliza para rodillos de impresora y platinas
C	Shore C	Hules medio duros y plásticos
D	Shore D	Hules duros y plásticos tal como hojas de vinilo, plexiglas, cubiertas de mostrador laminadas
DO	Shore DO	Tejidos textiles muy densos
O	Shore O	Hule blando tal como plastilina; tejidos textiles
OO	Shore OO	Tejidos textiles de baja densidad; hule esponja
OOO	Shore OOO	Espumas plásticas blandas
T	Shore T	Textiles de mediana densidad en carretes
M	Shore M	Hule sellos anulares y hule laminado delgado

Método IRHD (grado de dureza de hule Internacional)	
Nombre	Usos típicos
IRHD Micro	Pequeños: Sellos anulares, componentes pequeños, materiales delgados
IRHD Macro L	Blandos: Lecturas hasta de 35 IRHD L
IRHD Macro N	Normales: Lecturas desde 30 IRHD hasta 100 IRHD N

Nota: Los dispositivos de medición endentadores de diferentes tamaños, formas y fuerzas aplicadas. Para más detalles, consulte las normas ASTM D2240, ISO 868 o DIN 53505.

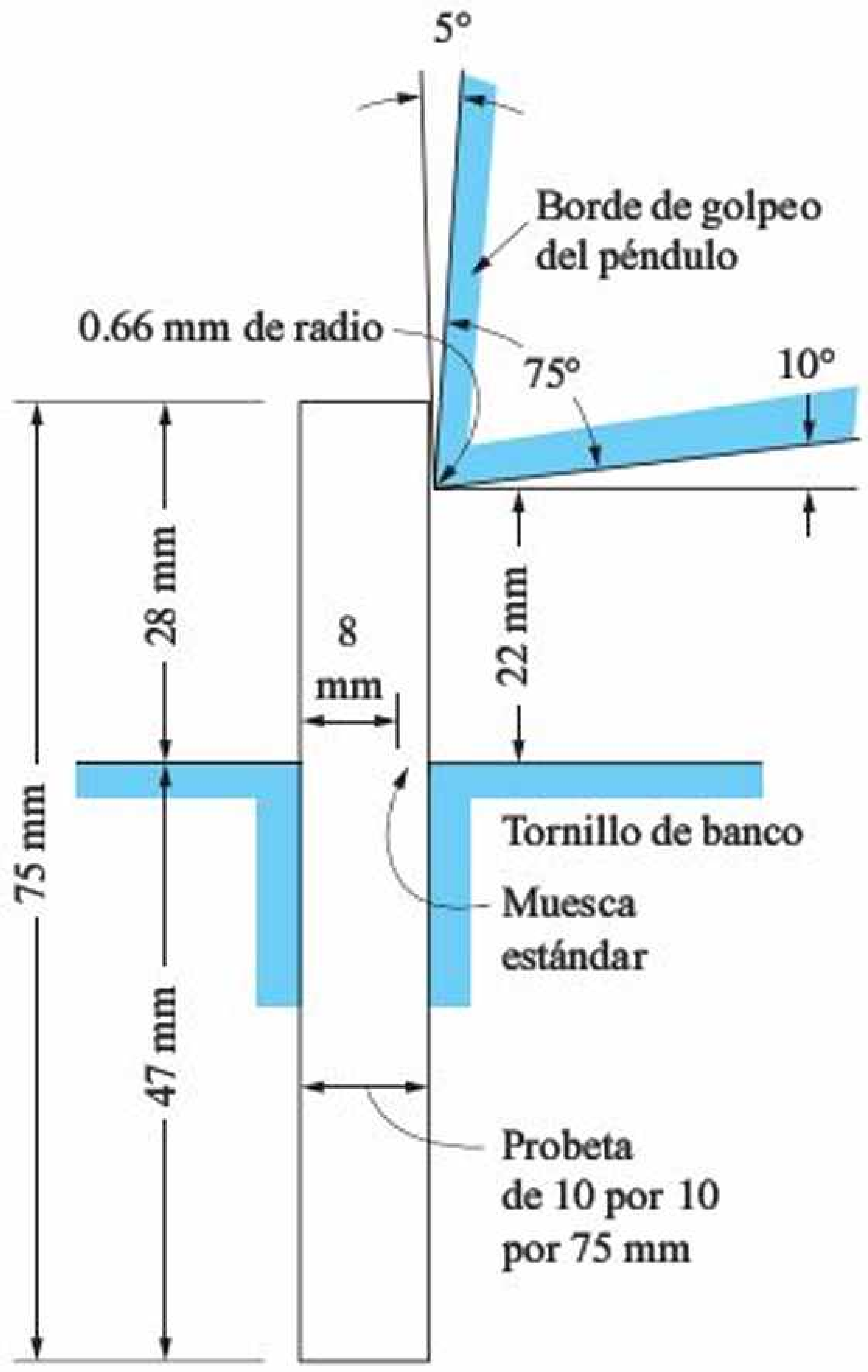
Para plásticos, hules y elastómeros, es típico utilizar los métodos Shore o IRHD (International Rubber Hardness Degree). La tabla 2–4 contiene algunas de las escalas más populares. Las escalas Rockwell R, L, M, E, K y las escalas α también se utilizan para algunos plásticos. Estas escalas varían por el tamaño y geometría del penetrador y la fuerza aplicada.

Otros métodos de medición de dureza incluyen el Vickers, Knoop, Universal y dureza por rebote. Visite los sitios de Internet 24 y 26 para discusiones de estos métodos y sus usos.

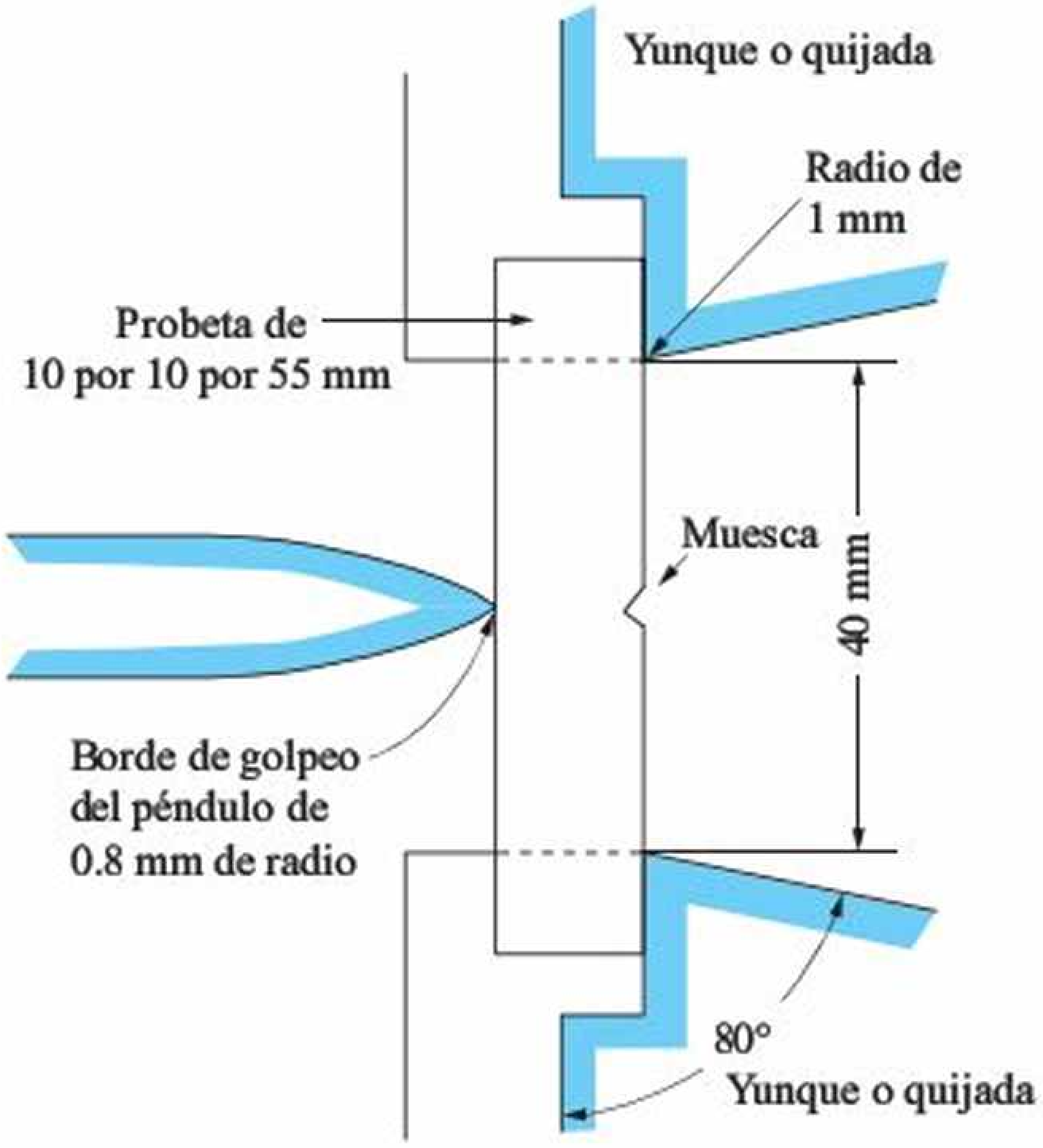
Tenacidad y energía de impacto. La *tenacidad* es la capacidad de un material de absorber energía aplicada sin falla. Las partes sometidas a cargas, choques o impactos repentinamente aplicados requieren un alto nivel de tenacidad. Se utilizan varios métodos para medir la cantidad de energía requerida para romper una probeta particular hecha de un material de interés. El valor de absorción de energía obtenido con dichas pruebas a menudo se conoce como *energía de impacto* o *resistencia al impacto*. Sin embargo, es importante señalar que el valor real depende en gran medida de la naturaleza de la muestra de prueba, en particular de su geometría. No es posible utilizar los resultados de prueba de forma cuantitativa cuando se realicen cálculos de diseño. En su lugar, se puede comparar la energía de impacto de varios materiales candidatos a una aplicación particular como una indicación cualitativa de su tenacidad. El diseño final deberá ser sometido a prueba en condiciones de servicio reales para verificar su capacidad de supervivencia segura durante su uso esperado.

Para metales y plásticos, son populares dos métodos de determinar energía de impacto, *Izod* y *Charpy*, con datos a menudo reportados en la literatura de proveedores del material. La figuras 2–1 (a) y (b) muestran las dimensiones de probetas estándar y la forma de aplicar la carga. En cada método se deja caer un péndulo con una masa pesada que porta un golpeador o porra especialmente diseñada desde una altura conocida. La porra hace contacto con la probeta a una velocidad alta en la parte inferior del arco del péndulo; por consiguiente, el péndulo posee una cantidad de energía cinética conocida. La parte (c) muestra un probador. Generalmente, la probeta se rompe durante la prueba y absorbe una parte de la energía del péndulo permitiendo que pase a través del área de prueba. La máquina de prueba está configurada para que mida la altura final a la cual el péndulo oscila y para que indique la cantidad de energía removida. Ese valor se reporta en unidades de energía de J (Joules o N·m). Algunos metales dúctiles y muchos plásticos no se rompen durante la prueba y el resultado se reporta entonces como *sin ruptura*.

FIGURA 2–11
Dispositivos y equipo para pruebas de impacto. (Fuente: Instron Corporation, Norwood, MA).



(*a*) Probeta para prueba Izod y porra (vista lateral)



(*b*) Probeta para prueba Charpy y porra (vista superior)



(*c*) Probador de impacto tipo péndulo



(*d*) Probador de impacto tipo caída

La prueba estándar *Izod* emplea una probeta cuadrada con una muesca en V cuidadosamente maquinada de 2.0 mm (0.079 in) de profundidad, de acuerdo con las especificaciones de la norma ASTM D 256.[2] La probeta se sujeta en una prensa de tornillo especial con la muesca alineada con el borde superior de la prensa de tornillo. La porra hace contacto con la probeta a una altura de 22 mm sobre la muesca y lo somete a carga como si fuera una viga en voladizo sometida a flexión. Cuando se utiliza para plásticos, el ancho puede ser diferente del mostrado en la figura 2–11. Esto obviamente cambia la cantidad total de energía que la probeta absorberá durante la fractura. Por consiguiente, los datos de energía de impacto se dividen entre el ancho de la probeta y los resultados se reportan en unidades de N·m/m o ft·lb/in. Por otra parte, algunos proveedores y clientes pueden ponerse de acuerdo en probar el material con la muesca alejándose de la porra en lugar de hacia ella, como se muestra en la figura 2–11. Esto mide la energía de impacto del material con menos influencia de la muesca.

La prueba *Charpy* también utiliza una probeta cuadrada con una muesca de 2.0 mm (0.079 in) de profundidad, centrada a lo largo de la longitud. La probeta se coloca nuevamente en un yunque rígido sin que se lo sujete. Consulte la norma ASTM A 370[3] para la geometría específica y el procedimiento de prueba. La muesca mira hacia el lado contrario del lugar donde la porra hace contacto con la probeta. La carga puede ser descrita como la deflexión de una viga simplemente apoyada. La prueba Charpy se utiliza muy a menudo para probar metales.

Otro método de prueba de impacto utilizado para algunos plásticos, compuestos y productos terminados es el probador de *caída de pesa*. Vea la figura 2–11 (d). Aquí una masa conocida se eleva verticalmente sobre la probeta hasta una altura especificada. De este modo, tiene una cantidad conocida de energía potencial. Al permitir que la masa caiga libremente se imparte una cantidad predecible de energía cinética a la probeta sujeta a una base rígida. La energía inicial, la forma de soporte, la geometría de la probeta y la forma de la porra (llamada mazo) son críticas para los resultados encontrados. Un método estándar descrito en la norma ASTM D 3763,[4] emplea un mazo esférico con diámetro de 12.7 mm. El mazo casi siempre penetra la probeta. El aparato típicamente está equipado con sensores que miden y grafican la carga contra las características de deflexión dinámicamente, lo que da al diseñador mucha información sobre cómo se comporta el material durante un evento de impacto. Los datos reportados incluyen carga máxima, deflexión de la probeta en el punto de carga máxima y la energía disipada hasta el punto de carga máxima. La energía se calcula determinando el área bajo el diagrama de carga–deflexión. También se describe la apariencia de la probeta e indica si la fractura ocurrió y si fue una fractura dúctil o frágil.

Resistencia a la fatiga o resistencia bajo cargas repetidas. Las partes sometidas a aplicaciones de cargas repetidas o condiciones de esfuerzo que varían con el tiempo durante varios miles o millones de ciclos fallan a causa del fenómeno de *fatiga*. Los materiales se prueban bajo cargas cíclicas controladas para determinar su capacidad de resistir tales cargas repetidas. Los datos resultantes se reportan como *resistencia a la fatiga*, también llamada *resistencia bajo cargas repetidas* del material. Consulte la referencia 25 y el sitio de Internet 23.

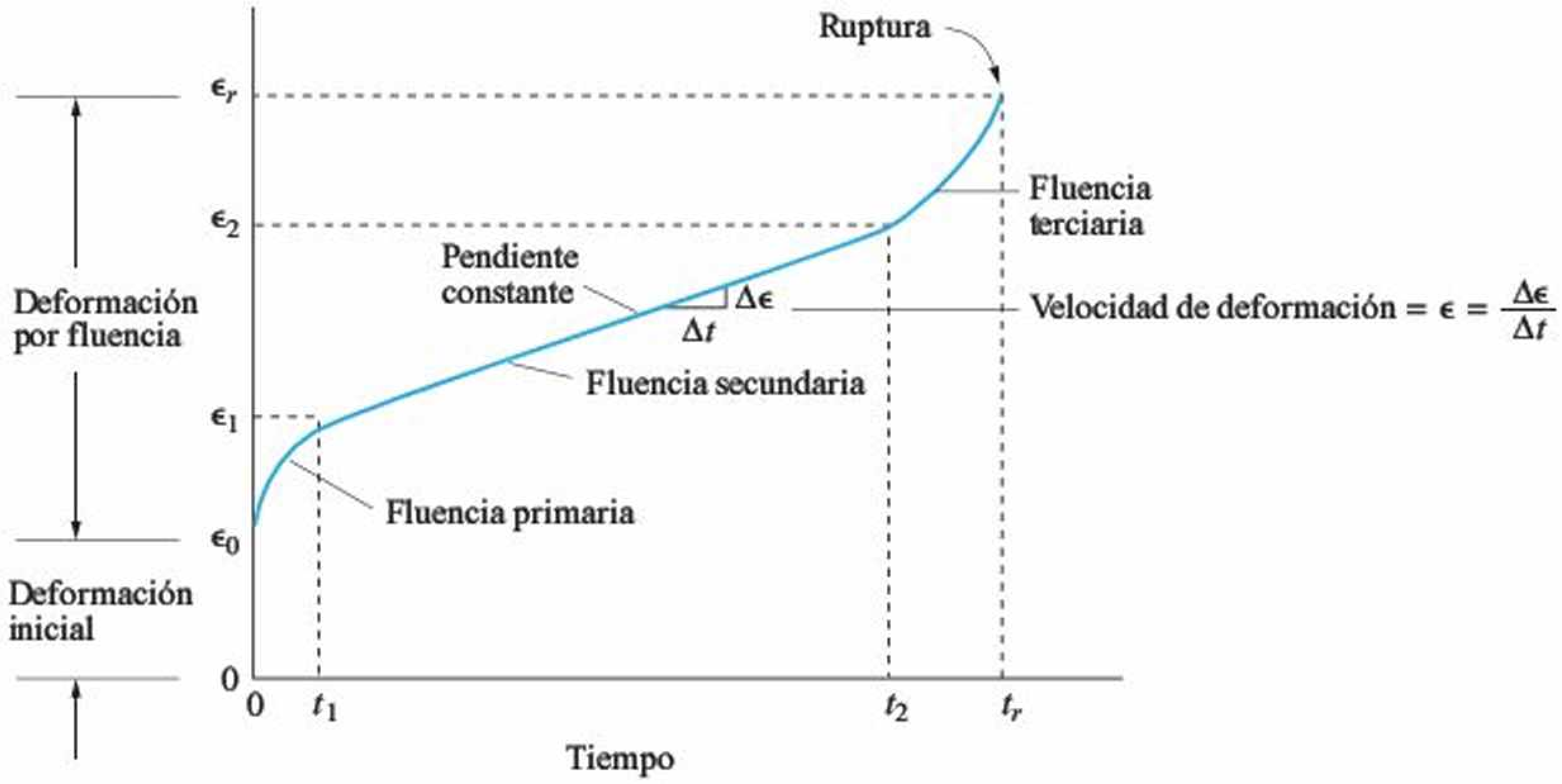
Fluencia. Cuando los materiales se someten a carga altas de forma continua, pueden experimentar un alargamiento progresivo con el tiempo. Este fenómeno, llamado *fluencia*, deberá ser considerado para la mayoría de los plásticos y metales que operan a altas temperaturas. Deberá realizar pruebas de fluencia cuando la temperatura de operación de un miembro de metal exceda aproximadamente de 0.3 (T_m) donde T_m es la temperatura de fusión expresada como una temperatura absoluta. La fluencia puede ser importante para miembros críticos en motores de combustión interna, hornos, turbinas de vapor, turbinas de gas, reactores nucleares o motores de cohetes. El esfuerzo puede ser de tensión, compresión, flexión o cortante.

[2]ASTM International. *Standard Test Methods for Determining the Izod Pendulum Impact Resistance of Plastics, Standard D256*. West Conshohocken, PA: ASTM International, 2006.

[3]ASTM International. *Standard Test Methods and Definitions for Mechanical Testing of Steel Products, Standard A370*. West Conshohocken, PA: ASTM International, 2005.

[4]ASTM International. *Standard Test Methods for High Speed Puncture of Plastics Using Load and Displacement Sensors, Standard D3763*. West Conshohocken, PA: ASTM International, 2002.

FIGURA 2–12
Comportamiento de fluencia típico.



La figura 2–12 muestra el comportamiento típico de metales que fluyen. El eje vertical es la deformación por fluencia en unidades tales como pulgada sobre pulgada (in/in) o milímetro sobre milímetro (mm/mm), sobre aquella que ocurre inicialmente a medida que se aplica la carga. El eje horizontal es el tiempo, normalmente medido en horas porque la fluencia se desarrolla lentamente a largo plazo. Durante la parte primaria de la curva de deformación por fluencia contra tiempo, la velocidad de incremento de la deformación inicialmente se eleva con una pendiente un tanto pronunciada que luego decrece. La pendiente es constante (línea recta) durante la segunda porción de la curva. Luego, la pendiente se incrementa en la tercera porción que precede a la fractura final del material.

La fluencia se mide sometiendo una probeta a una carga constante conocida, posiblemente mediante la aplicación de un peso muerto, mientras la probeta se calienta y mantiene a una temperatura uniforme. Se toman lecturas de deformación contra tiempo por lo menos en la etapa de fluencia secundaria y posiblemente hasta la fractura, para determinar la deformación por ruptura provocada por fluencia. Realizando pruebas dentro de un intervalo de temperaturas se obtiene una familia de curvas que son útiles para el diseño.

La fluencia puede ocurrir en muchos plásticos cerca de la temperatura ambiente. La figura 2–13 muestra una forma de expresar los datos de fluencia de materiales plásticos. Es una gráfica de esfuerzo aplicado contra deformación en el miembro con los datos mostrados para una temperatura específica de la probeta. Las curvas muestran la cantidad de deformación que se desarrollaría dentro de los tiempos especificados en niveles de esfuerzo crecientes. Por ejemplo, si este material se sometiera a un esfuerzo constante de 5.0 MPa durante 5000 horas, la deformación total sería de 1.0%. Es decir, la probeta se alargaría en una cantidad de 0.01 veces la longitud original. Si el esfuerzo fuera de 10.0 MPa durante 5000 horas, la deformación total sería aproximadamente de 2.25%. El diseñador debe tomar en cuenta esta deformación por fluencia para asegurarse de que el producto funcione satisfactoriamente con el tiempo.

Densidad. *Densidad* se define como la masa por unidad de volumen de un material. Sus unidades usuales son kg/m^3 en el SI y lb/in^3 en el sistema inglés, donde la unidad libra se toma como libra–masa. La letra griega ro (ρ) es el símbolo de densidad.

En algunas aplicaciones se utiliza el término *peso específico* o *densidad de peso* para indicar el peso por unidad de volumen de un material. Unidades típicas son N/m^3 en el SI y lb/in^3 en el sistema inglés, donde la libra se toma como libras fuerza. La letra griega gamma (γ) es el símbolo de peso específico.

Coeficiente de dilatación térmica. El *coeficiente de dilatación térmica* es una medida del cambio de longitud de un material sometido a un cambio de temperatura. Está definido por la relación

Coeficiente de dilatación térmica

$$\alpha = \frac{\text{cambio de longitud}}{L_o(\Delta T)} = \frac{\text{deformación}}{(\Delta T)} = \frac{\epsilon}{(\Delta T)} \quad \textbf{(2–8)}$$

donde L_o = longitud original
ΔT = cambio de temperatura

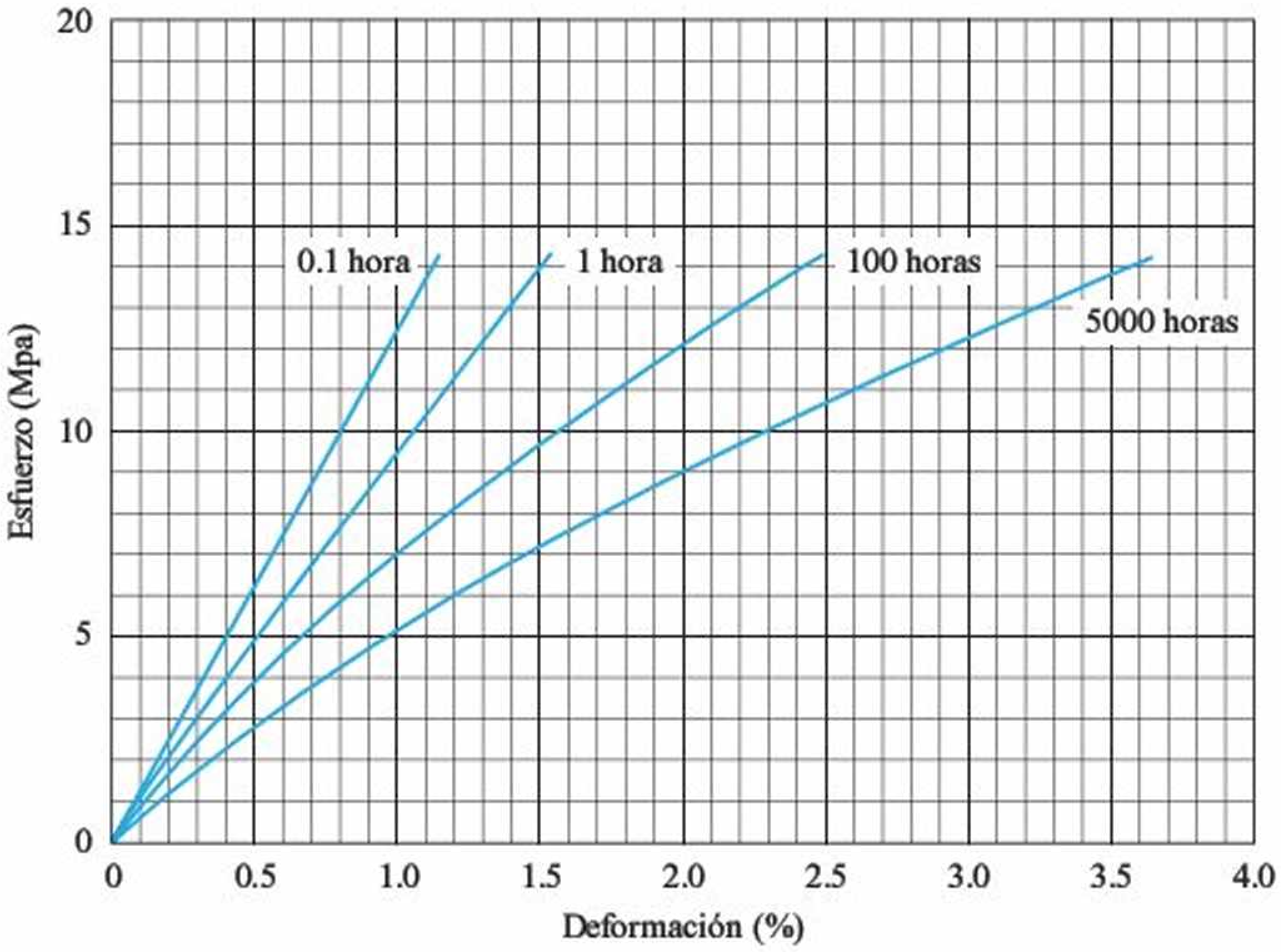


FIGURA 2–13 Ejemplo de esfuerzo contra deformación en función del tiempo para nylon 66 a 23°C (73°F). (Fuente: Dupont Polymers, Wilmington, DE)

Prácticamente todos los metales y plásticos de dilatan cuando la temperatura se incrementa, pero diferentes materiales se dilatan a diferentes grados. En el caso de máquinas y estructuras que contienen partes de más de un material, los diferentes grados pueden tener un efecto significativo en el desempeño del ensamble y en los esfuerzos producidos.

Clasificación de metales y aleaciones. Varias asociaciones industriales son responsables de establecer estándares para la clasificación de metales y aleaciones. Cada una dispone de su propio sistema de numeración, conveniente para el metal particular amparado por el estándar. Pero esto crea confusión en ocasiones, cuando existe un traslape entre dos o más estándares y se utilizan esquemas ampliamente diferentes para denotar los metales. Se ha puesto orden en la clasificación de metales con el uso del Sistema Unificado de Numeración (UNS, por sus siglas en inglés) definido en el Estándar E527–83(2003), **Standard Practice for Numbering Metals and Alloys (UNS)**, de la American Society for Testing and Materials (ASTM) (consulte la referencia 3). Además de registrar los materiales bajo el control de ASTM, el UNS coordina las designaciones de:

The Aluminum Association (AA)

American Iron and Steel Institute (AISI)

Copper Development Association (CDA)

Society of Automotive Engineers (SAE)

La serie primaria de números dentro del UNS aparece en la tabla 2–5 junto con la organización responsable de asignar los números dentro de cada serie.

Muchas aleaciones dentro del UNS retienen los muy conocidos números de los sistemas utilizados por muchos años por la asociación individual. Por ejemplo, la siguiente sección des-

TABLA 2–5 Sistema de numeración unificado (UNS).

Número de serie	Tipos de metales y aleaciones	Organización responsable
Metales no ferrosos y aleaciones		
A00001–A99999	Aluminio y aleaciones de aluminio	AA
C00001–C99999	Cobre y aleaciones de cobre	CDA
E00001–E99999	Metales de tierras raras y aleaciones	ASTM
L00001–L99999	Metales de baja fusión y aleaciones	ASTM
M00001–M99999	Metales no ferrosos varios y aleaciones	ASTM
N00001–N99999	Níquel y aleaciones de níquel	SAE
P00001–P99999	Metales preciosos y aleaciones	ASTM
R00001–R99999	Metales reactivos y refractarios y aleaciones	SAE
Z00001–Z99999	Zinc y aleaciones de zinc	ASTM
Metales ferrosos y aleaciones		
D00001–D99999	Aceros, propiedades mecánicas especificadas	SAE
F00001–F99999	Hierros y aceros fundidos	ASTM
G00001–G99999	Aceros al carbón y de aleación (incluye los anteriores aceros al carbón y de aleación SAE)	AISI
H00001–H99999	Aceros H; templabilidad especificada	AISI
J00001–J99999	Aceros fundidos (excepto aceros para herramientas)	ASTM
K00001–K99999	Aceros varios y aleaciones no ferrosas	ASTM
S00001–S99999	Aceros (inoxidables) resistentes al calor y la corrosión	ASTM
T00001–T99999	Aceros para herramientas	AISI

cribe el sistema de designación de cuatro dígitos del AISI para aceros al carbón y aleados. La figura 2–14 muestra dos ejemplos: AISI 1020, un acero al carbón simple y AISI 4140, un acero aleado. Estos aceros portarían las designaciones UNS G10200 y G41400, respectivamente.

2–3 ACERO

El término *acero* se refiere a aleaciones de hierro y carbón y, en muchos casos, a otros elementos. Debido al gran número de aceros disponibles, en esta sección se clasificarán como aceros al carbón, aceros aleados, aceros inoxidables y aceros estructurales. Consulte la referencia 5.

Para *aceros al carbón* y *aceros aleados* se utiliza un código de designación de cuatro dígitos para definir cada aleación. La figura 2–14 muestra el significado de cada dígito. Los

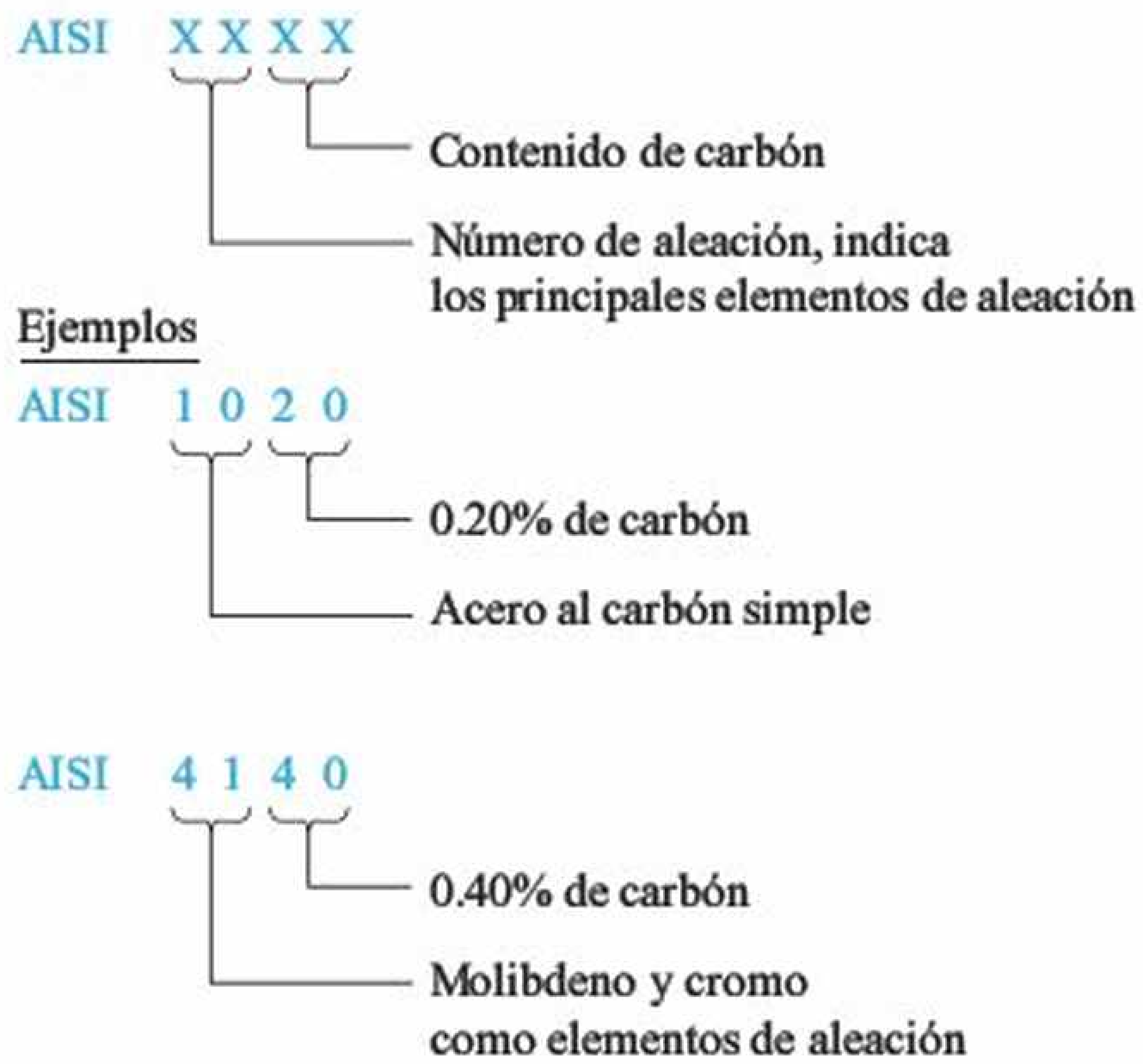


FIGURA 2–14 Sistema de designación de acero.

TABLA 2–6 Principales elementos de aleación en aleaciones de acero.

Acero AISI núm.	Elementos de aleación	Acero AISI núm.	Elementos de aleación
10xx	Carbón simple	46xx	Molibdeno–níquel
11xx	Azufre (corte libre)	47xx	Molibdeno–níquel-cromo
13xx	Manganeso	48xx	Molibdeno–níquel
14xx	Boro	5xx	Cromo
2xxx	Níquel	6xx	Cromo-vanadio
3xxx	Níquel–cromo	8xx	Níquel–cromo–molibdeno
4xxx	Molibdeno	9xx	Níquel–cromo–molibdeno (excepto 92xx)
41xx	Molibdeno–cromo	92xx	Silicio–manganeso
43xx	Molibdeno–cromo–níquel		

cuatro dígitos serían los mismos para aceros clasificados por el Instituto Estadounidense del Acero (AISI, American Iron Institute) y la Asociación de Ingenieros Automotrices (Society of Automotive Engineers). La clasificación de la Asociación Estadounidense para Pruebas y Materiales (ASTM, American Society for Testing and Materials) se describe más adelante.

En general, los dos primeros dígitos en una designación de cuatro dígitos para acero denotan los principales elementos de aleación, además del carbón, en el acero. Los dos últimos dígitos denotan el porcentaje (o puntos) promedio de carbón en el acero. Por ejemplo, si los dos últimos dígitos son 40, el acero tendría aproximadamente un contenido de carbón de 0.4%. Al carbón se le otorga ese lugar tan prominente en la designación de aleación porque, en general, a medida que se incrementa el contenido de carbón, la resistencia y dureza del acero también lo hacen. El contenido de carbón en general oscila desde 0.1% hasta aproximadamente 1.0%. Es de hacerse notar que mientras la resistencia se incrementa con el creciente contenido de carbón, el acero también se vuelve menos dúctil.

La tabla 2–6 muestra los principales elementos de aleación, los que corresponden a los dos primeros dígitos de la designación de acero. La tabla 2–7 muestra algunas aleaciones comunes junto con los usos principales de cada una.

Condiciones para aceros. Las propiedades mecánicas de los aceros al carbón y de aleación son muy sensibles a la manera en que se forman y a los procesos de tratamiento térmico. El apéndice A–14 incluye la resistencia máxima, la resistencia a la cedencia y el porcentaje de alargamiento de varios aceros en varias condiciones. Observe que éstas son propiedades ejemplo o típicas en las que no se puede confiar para diseño. Las propiedades de material dependen de muchos factores, incluido el tamaño de sección, la temperatura, la composición real, las

TABLA 2–7 Aleaciones de acero comunes y usos típicos.

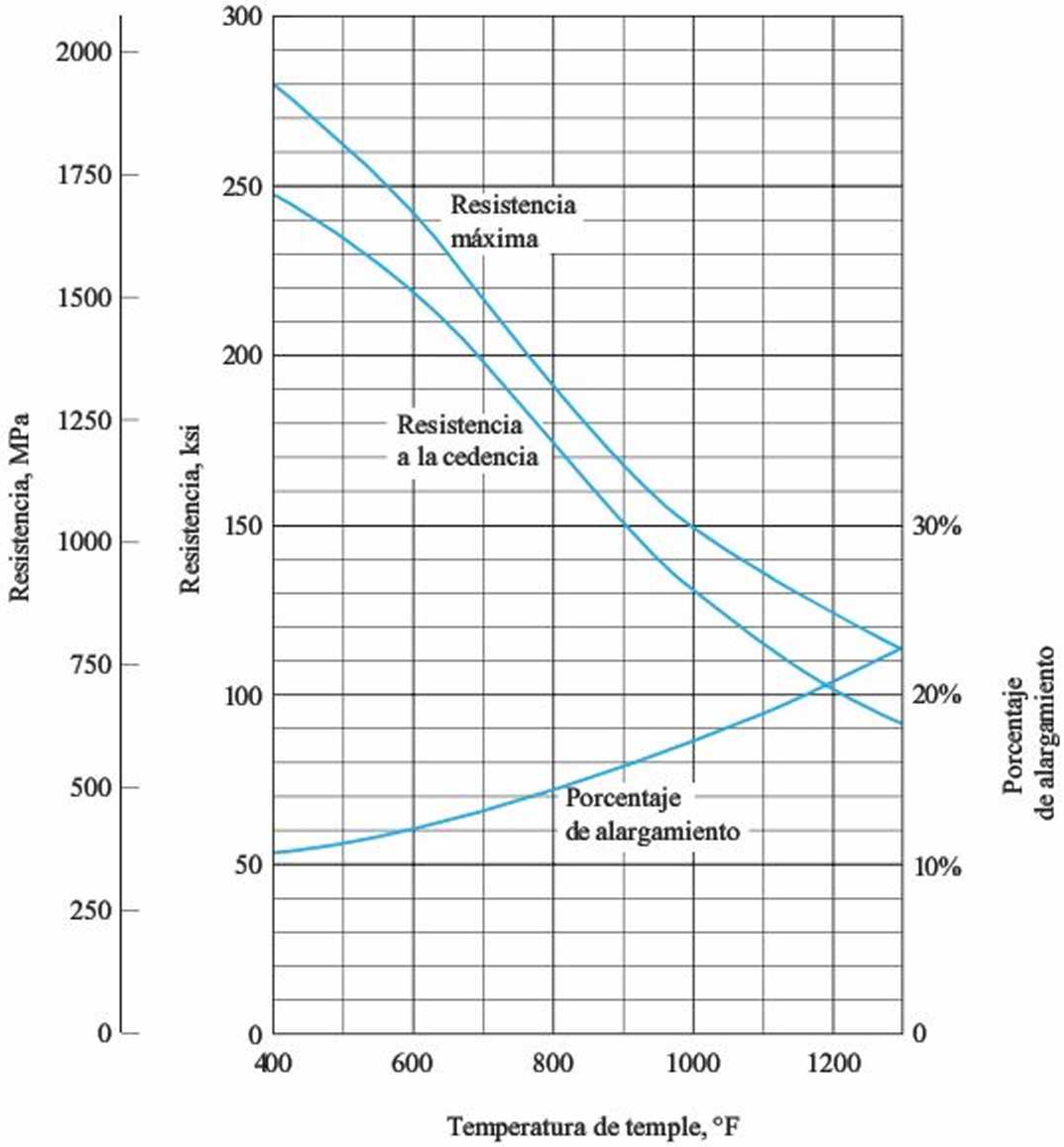
Acero AISI núm.	Usos típicos
1020	Acero estructural, barras, placa
1040	Partes de maquinaria, flechas
1050	Partes de maquinaria
1095	Herramientas, resortes
1137	Flechas, partes de máquina para fabricar tornillos (aleación de corte libre)
1141	Flechas, partes maquinadas
4130	Acero de alta resistencia de uso general; flechas, engranes, pasadores
4140	Igual que 4130
4150	Igual que 4140
5160	Engranes de alta resistencia, pernos
8760	Herramientas, resortes, cinceles

variables en el procesamiento y las técnicas de fabricación. Es responsabilidad del diseñador investigar la posible variedad de propiedades de un material y diseñar miembros de carga que sean seguros a pesar de la combinación de factores presentes en una situación dada.

En general, mientras más severamente se trabaja un acero, más fuerte será. Algunas formas de acero, tal como lámina, barras y perfiles estructurales, se producen mediante *laminado en caliente* mientras aún se encuentran a una temperatura elevada. Esto produce un acero de baja resistencia, relativamente blando, el cual tiene una ductilidad muy alta y es fácil de formar. La laminación del acero hasta una forma final, mientras se encuentra cerca de la temperatura ambiente, se conoce como *laminado en frío* y produce una alta resistencia y una ductilidad un tanto baja. Se puede obtener una resistencia aún más alta mediante *estirado en frío*, estirando el material a través de matrices mientras se encuentra cerca de la temperatura ambiente. Por lo tanto, de estos tres métodos populares de producir perfiles de acero, la forma de estirado en frío (CD, *cold–drawn*) produce la resistencia más alta, seguido por las formas de laminado en frío (CR, *cold–rolled*) y laminado en caliente (HR, *hot–rolled*). Esto se ve en el apéndice A–14 comparando la resistencia del mismo acero, por ejemplo el AISI 1040, en las condiciones de laminado en caliente y estirado en frío.

Los aceros de aleación en general son tratados térmicamente para que desarrollen propiedades específicas (vea la referencia 7). El tratamiento térmico implica elevar la temperatura del acero hasta aproximadamente entre 1450 (288°C) y 1650°F (según la aleación) y luego enfriarlo rápidamente sumergiéndolo en agua o aceite. Después de enfriado, el acero tiene una alta resistencia y dureza, pero también es frágil. Por esta razón, normalmente se realiza un tratamiento subsecuente llamado *temple* (o *estirado*). El acero se calienta de nuevo a una temperatura entre 400 y 1300°F y luego se enfría. El efecto del temple de un acero de aleación se ve en la figura 2–15. Así pues las propiedades de un acero térmicamente tratado pueden ser controladas especificando una temperatura de temple. En el apéndice A–14, la condición

FIGURA 2–15
Efecto de la temperatura de temple en la resistencia y ductilidad de un acero aleado.



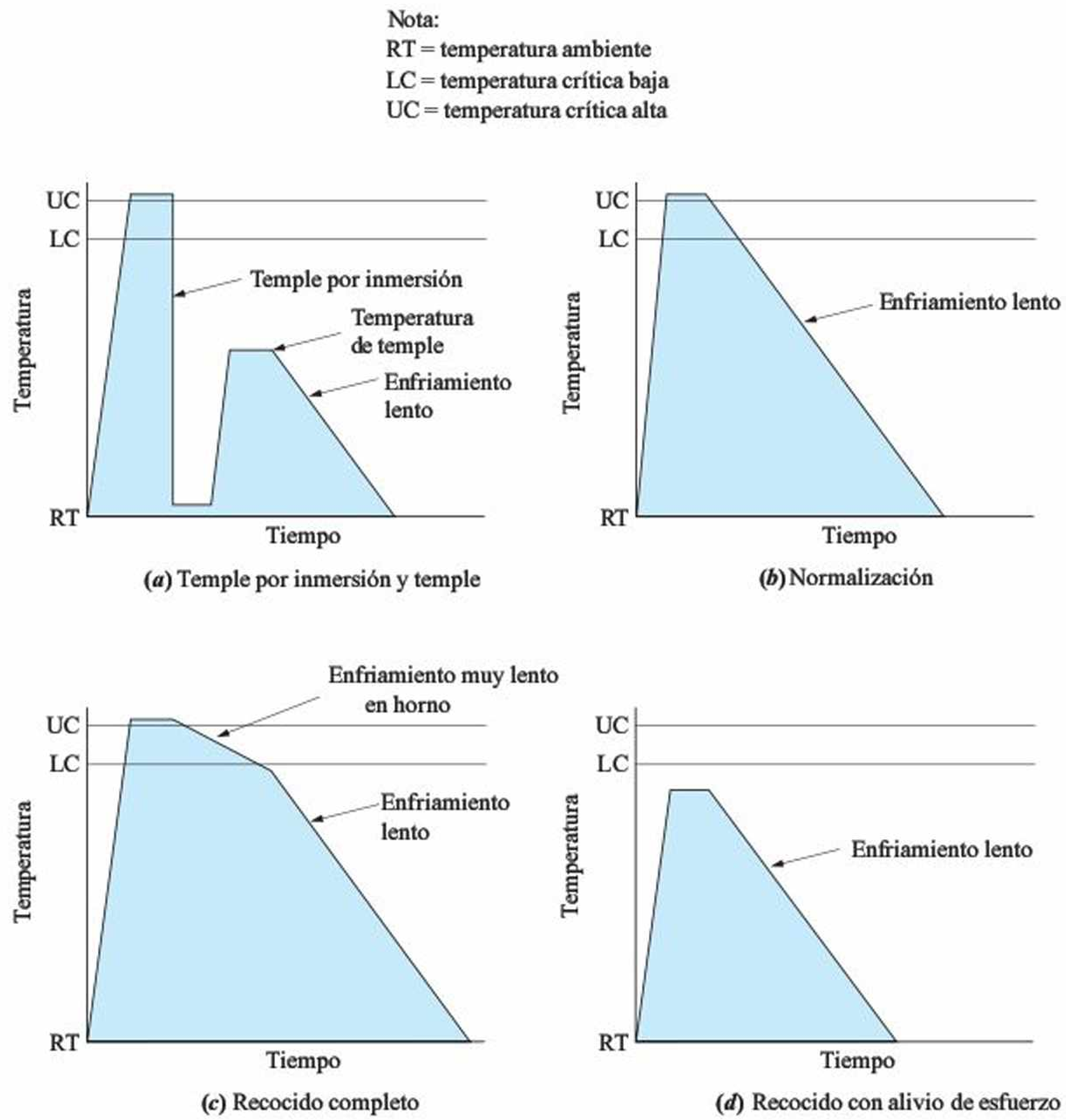
de aleaciones térmicamente tratadas se describe como OQT 400. Esto significa que el acero fue tratado térmicamente enfriándolo en aceite y luego templándolo a 400°F. Asimismo, WQT 1300 significa enfriado en agua y templado a 1300°F.

Las propiedades de aceros térmicamente tratados a temperaturas de temple de 400 y 1300°F muestran la gama total de propiedades que el acero térmicamente tratado puede tener. Sin embargo, la práctica especifica temperaturas de temple de no menos de 700°F porque los aceros tienden a ser demasiado frágiles a bajas temperaturas de temple. Las propiedades de varias aleaciones se dan en el apéndice A–14 a temperaturas de temple de 700°F, 900°F y 1300°F para darle una idea de la variedad de resistencias disponibles. Estas aleaciones son buenas opciones para seleccionar materiales en problemas en capítulos posteriores. Por interpolación se pueden determinar resistencias a temperaturas intermedias.

El *recocido* y la *normalización* son tratamientos térmicos diseñados para ablandar el acero, para impartirle propiedades más uniformes, para hacerlo más fácil de formar o para aliviar los esfuerzos desarrollados en el acero durante procesos tales como soldadura, maquinado o formado. Dos de los tipos de procesos de recocido son el recocido completo y el recocido de alivio de esfuerzos. La figura 2–16 ilustra estos procesos de tratamiento térmico, junto con el enfriado y temple.

La *normalización* del acero se inicia calentándolo a aproximadamente la misma temperatura (llamada *temperatura crítica alta*) que se requeriría para endurecerlo enfriándolo por inmersión, como se describió antes. Pero en lugar de enfriarlo por inmersión, el acero se enfría en aire en calma a temperatura ambiente. Esto produce una estructura de grano fino, uniforme, una ductilidad mejorada, una mejor resistencia al impacto y una maquinabilidad mejorada.

FIGURA 2–16
Tratamientos térmicos para acero.



El *recocido completo* implica calentamiento a más de la temperatura crítica alta seguido por enfriamiento muy lento a la temperatura crítica baja y luego enfriamiento en aire en calma a temperatura ambiente. Ésta es una de las formas más blandas del acero que lo hace que se trabaje mejor para corte, formado y maquinado.

El *recocido con alivio de esfuerzos* consiste en calentar a menos de la temperatura baja crítica, manteniéndolo hasta alcanzar una temperatura uniforme en toda la pieza y luego enfriar a temperatura ambiente. Esto alivia los esfuerzos residuales y previene la subsiguiente distorsión.

Aceros inoxidables. Los *aceros inoxidables* obtienen su nombre debido a su resistencia a la corrosión. El elemento primario en la aleación de aceros inoxidables es el cromo, presente en un 17% en la mayoría de las aleaciones. Se utiliza un mínimo de 10.5% de cromo, y puede llegar hasta 27%.

Aunque están disponibles más de 40 grados de acero inoxidable con los productores de acero, usualmente se categorizan en tres series que contienen aleaciones con propiedades similares. Las propiedades de algunos aceros inoxidables aparecen el apéndice A–15.

Los aceros de las series 200 y 300 tienen una alta y buena resistencia a la corrosión. Pueden ser utilizados a temperaturas de aproximadamente 1200°F con buena retención de sus propiedades. Debido a su estructura, estos aceros son esencialmente no magnéticos. Su buena ductilidad y tenacidad, y su buena soldabilidad, los hace útiles en equipo de procesamiento químico, productos arquitectónicos y productos relacionados con alimentos. No son endurecibles por tratamiento térmico, aunque pueden ser fortalecidos mediante trabajo en frío. Las clases de trabajo en frío típicamente se conocen como *cuarto duro*, *medio duro*, *tres cuartos duro*, *duro* y *totalmente duro*, con la resistencia incrementada a medida que la dureza es más alta. Pero la ductilidad se reduce a medida que se incrementa la dureza. El apéndice A–15 muestra las propiedades de algunas aleaciones de acero inoxidable en dos condiciones, recocido, y totalmente duro, es decir, los extremos de resistencias disponibles. La condición recocido es ocasiones se llama *blando*.

Los aceros de la serie AISI 400 se utilizan para molduras automotrices y equipo de procesamiento químico tal como tanques para ácidos. Ciertas aleaciones pueden ser tratadas térmicamente de modo que puedan ser utilizadas como hojas de cuchillos, resortes, cojinetes de bolas e instrumentos quirúrgicos. Estos aceros son magnéticos.

Los *aceros endurecidos por precipitación,* tales como el 17–4PH y el PH13–8Mo, son endurecidos manteniéndolos a una temperatura elevada, aproximadamente entre 900º y 1100°F. Tales aceros en general se clasifican como *aceros inoxidables de alta resistencia,* con resistencias a la fluencia de aproximadamente 180 000 psi (1240 MPa) o más altas y se utilizan en vehículos aeroespaciales, motores y otras aplicaciones donde la alta resistencia y la resistencia a la corrosión se requieren.

Aceros estructurales. Los *aceros estructurales* se producen en las formas de lámina, placa, barras, tubería y perfiles estructurales tales como vigas I, vigas de patín ancho, canales y ángulos. La ASTM asigna una designación de número a estos aceros, la cual es el número del estándar que define las propiedades mínimas requeridas. El apéndice A–16 incluye grados frecuentemente utilizados para aceros estructurales y sus propiedades. Vea también la referencia 3 y el sitio de Internet 6.

Un acero muy popular para aplicaciones estructurales es el ASTM A36, un acero al carbón utilizado para muchos perfiles, placas y barras comercialmente disponibles. Tiene una resistencia mínima a la fluencia de 36 ksi (248 MPa), es soldable y se utiliza en puentes, edificios para propósitos estructurales generales.

Los perfiles W ampliamente utilizados en la construcción de edificios y otras estructuras industriales en la actualidad se hacen comúnmente de acero ASTM A992, uno de los varios grados de aceros de baja aleación y alta resistencia (HSLA). Con resistencia a cedencia mínima de 50 ksi (345 MPa), permite utilizar vigas más livianas, en comparación con el acero ASTM A36 anteriormente utilizado, en muchas aplicaciones con significativos ahorros de costos. Es de hacerse notar que prácticamente todos los aceros tienen el mismo módulo de elasticidad, el cual es una indicación de la rigidez del material. Por consiguiente, es crítico evaluar la deflexión de una viga además de su resistencia.

Otro grado HSLA de acero estructural que cada vez se utiliza más es el ASTM A913, grado 65 con resistencia a la cedencia mínima de 65 ksi (448 MPa). Su uso en secciones de columnas pesadas y algunas otras aplicaciones críticas de vigas o armaduras ha permitido ahorrar

en peso y costos en estructuras importantes tales como el estadio de fútbol profesional en Houston, TX, y un rascacielos de oficinas en Nueva York. Este acero también está disponible en grados 50, 60 y 70 con resistencias a la cadencia mínimas correspondientes en ksi.

El ASTM A242 en grados 42, 46 y 50 es otro acero HSLA que se produce como perfiles, placas y barras para usos estructurales generales. Una ventaja adicional de esta aleación es su resistencia a la corrosión, aproximadamente cuatro veces la del acero al carbón simple, lo que hace que muchos se refieran a él como *acero a prueba de intemperie*. Los tres grados están disponibles en perfiles W. El grado 50 es el más comúnmente disponible para otros perfiles laminados. Como se indica en el apéndice A–16, los grados disponibles para placas y barras dependen de su espesor.

El ASTM A514 es un acero de aleación de alta resistencia, térmicamente tratado mediante enfriado por inmersión y temple y producido como placas y barras. Los espesores hasta de 2.5 in tienen una resistencia a la cedencia de 100 ksi (690 MPa). Los espesores más grandes se clasifican a una resistencia a la cedencia mínima de 90 ksi (620 MPa).

Otro acero estructural HSLA de uso general es el ASTM A572, disponible en todos tipos de perfiles, placas y barras. Los grados 42, 50, 55, 60 y 65 se utilizan para perfiles. Todas las placas y barras hasta de 8 in de espesor están disponibles en el grado 42; hasta de 4 in en el grado 50; hasta de 2 in en el grado 55 y hasta 1.25 in en los grados 60 y 65.

Las *secciones estructurales huecas* (HSS, *hollow structural sections*), en ocasiones llamadas *tubería estructural*, son redondas, cuadradas o rectangulares y típicamente están hechas de acero ASTM A501 (moldeado en caliente) o de acero ASTM A500 (moldeado en frío) en varios grados de resistencia. Cuando se producen como *tubo*, se especifica el acero ASTM A53 grado B con una resistencia a la cedencia de 35 ksi (240 MPa). Vea en los apéndices A–9 y A–12 un muestreo de tamaños de perfiles HSS:

En suma, los productos de acero estructural vienen en muchas formas y en una amplia variedad de propiedades. Una cuidadosa selección de un tipo de acero adecuado considera la resistencia, costo y disponibilidad requeridos. La tabla 2–8 contiene las especificaciones de material preferidas junto con otras cuya disponibilidad deberá ser confirmada antes de especificarlas. Consulte la referencia 2 en el capítulo 1 para una lista más completa de aceros estructurales preferidos y disponibles para una más amplia variedad de tipos y tamaños de elementos.

TABLA 2–8 Grados de acero estructural disponibles para perfiles típicos, placas y barras.

Designación ASTM	Grado	Resistencia a la cedencia ksi	Resistencia a la cedencia MPa	Aceros disponibles para las aplicaciones listadas: Perfiles W	Perfiles S, C, L	Tubo	HSS o cuadrada	HSS redonda rectangular	Placas y barras
A36		36	248	A	P	—	—	—	P: hasta 8 in.
A53		35	241	—	—	P	—	—	—
A242		42	290	A	—	—	—	—	A: 1.5 a 4 in.
		46	317	A	—	—	A	—	A: 0.75 a 1.5 in.
		50	345	A	A	—	A	—	A: hasta 0.75 in.
A500	B	42	290	—	—	—	—	P	—
		46	317	—	—	—	P	—	—
	C	46	317	—	—	—	—	A	—
		50	345	—	—	—	A	—	—
A501		36	248	—	—	—	A	A	—
A514		90	621	—	—	—	—	—	A: 2.5 a 6 in.
		100	690	—	—	—	—	—	A: hasta 2.5 in.
A572	42	42	290	A	A	—	—	—	A: hasta 6 in.
	50	50	345	A	A	—	—	—	A: hasta 4 in.
	55	55	379	A	A	—	—	—	A: hasta 2 in.
	60	60	414	A	A	—	—	—	A: hasta 1.25 in.
	65	65	448	A	A	—	—	—	A: hasta 1.25 in.
A913	65	65	448	A	A	—	—	—	—
A992	50	50	345	P	—	—	—	—	—

Notas: Adaptada de la referencia 1, capitulo 1. Otros materiales, grados y perfiles disponibles
P = especificación de material preferida
A = Disponible–Consultar con el proveedor
– = No disponible

2–4 HIERRO FUNDIDO

Las propiedades atractivas del hierro fundido incluyen su bajo costo, buena resistencia al desgaste, buena maquinabilidad y la habilidad de ser moldeado en formas complejas. Aquí se analizarán cinco variedades: hierro gris, hierro dúctil, hierro dúctil templado, hierro blanco y hierro maleable.

Hierro gris. El *hierro gris* se utiliza en bloques de motor automotrices, bases de maquinaria, tambores de freno y grandes engranes. Normalmente se especifica mediante un número de grado correspondiente la resistencia a la tensión final mínima. Por ejemplo, el hierro gris grado 20 tiene una resistencia máxima de por lo menos 20 000 psi (138 MPa); el grado 60 tiene s_u = 60 000 psi (414 MPa) y así sucesivamente. Los grados usuales disponibles van desde 20 hasta 60. El hierro gris es un tanto frágil, de modo que su resistencia a la cedencia normalmente no se reporta como propiedad. Una característica sobresaliente del hierro gris es que su resistencia a la compresión es muy alta, aproximadamente de tres a cinco veces su resistencia a la tensión. Esto deberá ser tomado en cuenta en el diseño, en especial cuando una pieza se somete a esfuerzos de flexión, como se verá en el capítulo 7.

Debido a las variaciones de la velocidad de enfriamiento después de que el hierro colado fundido se vierte en un molde, la resistencia de una sección particular de una pieza depende del espesor de la sección. La figura 2–17 ilustra esto para el hierro gris grado 40. La resistencia en el lugar puede variar desde un valor tan alto como 52 000 psi (339 MPa) hasta un valor tan bajo como 27 000 psi (186 MPa).

Hierro dúctil. El *hierro dúctil* difiere del hierro gris en que exhibe cedencia, tiene un mayor porcentaje de alargamiento y de resistencia a la tensión generalmente más alta. Los grados de hierro dúctil se designan mediante un sistema de tres números tal como 80–55–6. El primer número indica la resistencia a la tensión máxima mínima en ksi, el segundo es la resistencia a la cedencia en ksi y el tercero es el porcentaje de alargamiento. Por consiguiente, el grado 80–55–6 tiene una resistencia máxima de 80 000 psi, una resistencia a la cedencia de 55 000 psi y un porcentaje de alargamiento de 6%. Los usos del hierro dúctil incluyen cigüeñales y engranes para trabajo pesado.

Hierro dúctil con templado austenítico. El *hierro dúctil con templado austenítico* (ADI, por sus siglas en inglés) tiene una resistencia más alta y una mejor ductilidad que los hierros dúctiles estándar, como se puede ver en el apéndice A–17. Esto permite que las partes sean más pequeñas y más livianas y hace que el ADI sea adecuado para usos tales como engranes automotrices, cigüeñales y miembros estructurales de equipo de construcción y transporte al reemplazar a los aceros fundidos o colados.

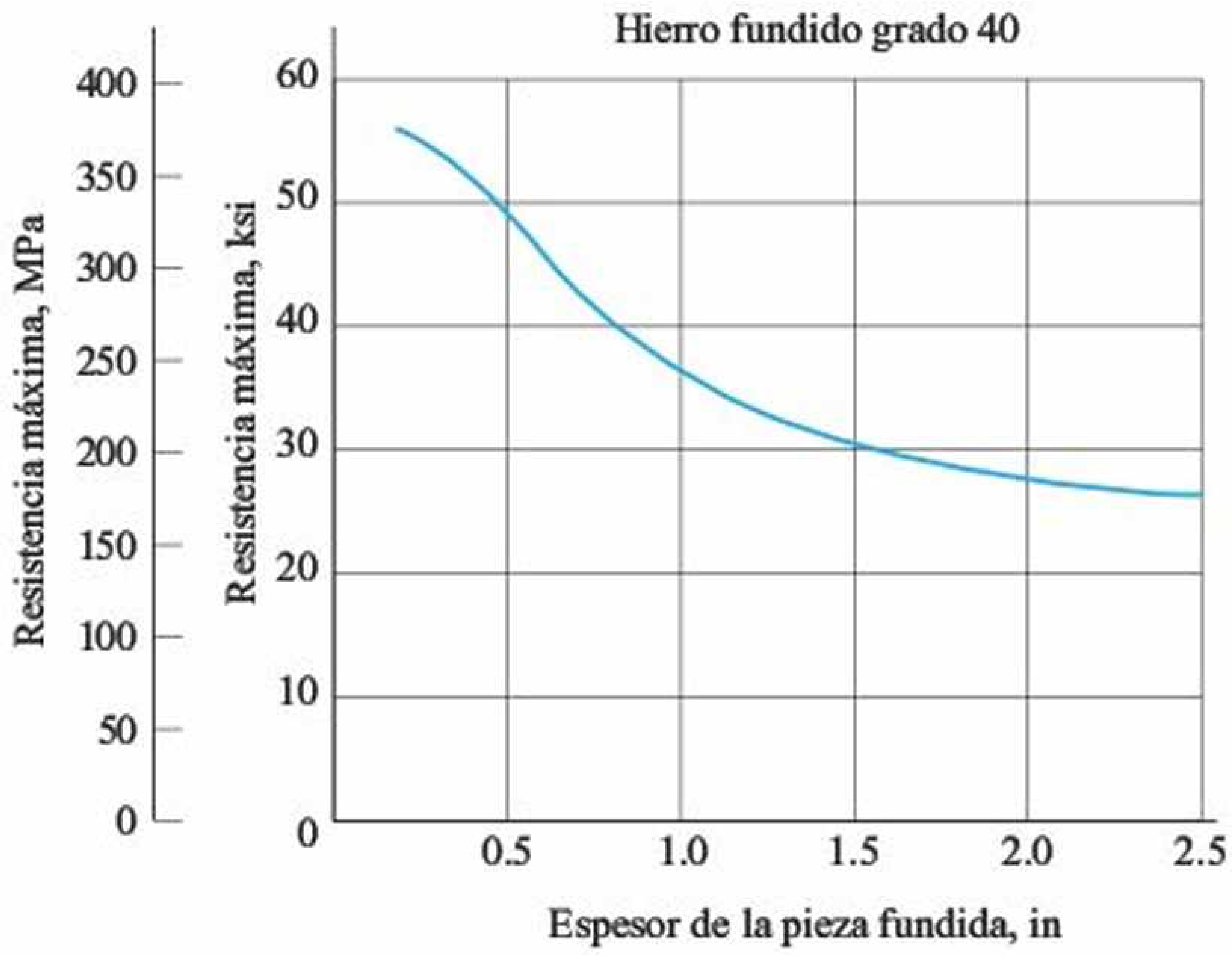


FIGURA 2–17 Resistencia contra espesor de hierro fundido gris grado 40.

El templado austenítico puede incrementar la resistencia del hierro dúctil en casi un factor de 2. Primero las piezas fundidas se calientan entre 1500°F y 1700°F (816°C a 927°C) y se mantienen así para que alcancen una estructura uniforme. Luego se enfrían rápidamente por inmersión a una temperatura baja, 450°F a 750°F (232°C a 400°C) y se mantienen así de nuevo. Después de varias horas de calentamiento isotérmico, se permite que las piezas fundidas se enfríen a temperatura ambiente.

Hierro blanco. El *hierro blanco* se produce enfriando rápidamente una pieza fundida de hierro gris o hierro dúctil durante el proceso de solidificación. El enfriamiento típicamente se aplica a áreas seleccionadas; las que se vuelven muy duras tienen una alta resistencia al desgaste. El enfriamiento no permite que el carbón presente en el hierro brote durante la solidificación y de ahí la apariencia blanca. Las áreas alejadas del medio de enfriamiento se solidifican más lentamente y adquieren las propiedades normales del hierro base. Una desventaja del proceso de enfriamiento es que el hierro blanco es muy frágil.

Hierro maleable. El *hierro maleable* se utiliza en piezas automotrices y de camión, maquinaria de construcción y equipo eléctrico. Exhibe cedencia, sus resistencias a la tensión son comparables a las del hierro dúctil y sus resistencias a la compresión máximas son un poco más altas que las del hierro dúctil. En general, se utiliza un número de cinco dígitos para designar grados de hierro maleable. Por ejemplo, el grado 40010 tiene una resistencia a la cedencia de 40 000 psi (276 MPa) y un porcentaje de alargamiento de 10%.

El apéndice A–17 da las propiedades mecánicas de varios grados de hierro gris, hierro dúctil, ADI y hierro maleable.

2–5 ALUMINIO

Las aleaciones de aluminio están diseñadas para que alcancen propiedades óptimas para usos específicos. Algunas se producen principalmente como lámina, placa, barras o alambre. Los perfiles estructurales estándar y secciones especiales a menudo se troquelan. Se utilizan varias aleaciones para forja, en tanto que otras son aleaciones de fundición especiales. El apéndice A–18 da las propiedades de aleaciones de aluminio seleccionadas. Vea también las referencias 1 y 6.

El aluminio en forma forjada utiliza una designación de cuatro dígitos para definir las diversas aleaciones disponibles. El primer dígito indica el grupo de aleación de acuerdo al elemento de aleación principal. El segundo denota una modificación de la aleación básica. Los dos últimos dígitos identifican una aleación específica dentro del grupo. A continuación se describen brevemente las siete series principales de aleaciones de aluminio.

- *Serie 1000*, 99.0% de aluminio o más. Excelente resistencia a la corrosión, manejabilidad y conductividad térmica y eléctrica. Bajas propiedades mecánicas. Utilizada en los campos químico y eléctrico, para molduras automotrices (aleación 1100) y para tubos de condensador troquelados y aletas de intercambiador de calor (aleación 1200).
- *Serie 2000*, cobre como elemento de aleación. Térmicamente tratable con altas propiedades mecánicas. Resistencia a la corrosión más baja que la de la mayoría de las aleaciones. Utilizada en revestimientos estructurales de aviones, paneles de carrocería automotriz, partes de máquinas de fabricar tornillos, sujetadores y cascos de asientos.
- *Serie 3000*, manganeso como elemento de aleación. No térmicamente tratable, aunque se puede obtener mediante trabajo en frío. Buena resistencia a la corrosión y manejabilidad. Utilizada en equipo químico, utensilios de cocina, revestimientos residenciales, tanques de almacenamiento, radiadores automotrices y núcleos de calentadores, molduras y tubos de condensador.
- *Serie 4000*, silicio como elemento de aleación. No térmicamente tratable con un bajo punto de fusión. Utilizada como alambre de soldar y aleación para soldadura de latón. Aleación 4032 utilizada en pistones.
- *Serie 5000*, magnesio como elemento de aleación. No térmicamente tratable, aunque se puede obtener una resistencia moderada mediante trabajo en frío. Buena resistencia a la corrosión y soldabilidad. Utilizada en servicio marino, recipientes sujetos a presión, molduras automotrices, herrajes para el constructor, estructuras soldadas, torres

de TV, malacates de perforación, defensas de camión, escudos térmicos, ruedas y varios soportes en motores.

- *Serie 6000*, silicio y magnesio como elementos de aleación. Térmicamente tratable a resistencia moderada. Buena resistencia a la corrosión, formabilidad y soldabilidad. Se utiliza en estructuras de servicio pesado, camiones y equipo ferrocarrilero, tubos, muebles, extrusiones arquitectónicas, piezas maquinadas y forjas. Las aplicaciones automotrices incluyen partes de suspensión, partes de ensamble de defensas, flechas de transmisión, cilindros y pistones de frenos, piezas de máquinas de fabricar tornillos, sujetadores y portaequipajes. La aleación 6061 es una de las más versátiles disponibles.
- *Serie 7000*, zinc como elemento de aleación. Térmicamente tratable a muy alta resistencia. Relativamente escasa resistencia a la corrosión y soldabilidad. Utilizada principalmente para miembros estructurales de aviones. La aleación 7075 se encuentra entre las aleaciones de más alta resistencia disponibles. Se utiliza en su mayor parte en formas laminadas, estiradas y troqueladas y también en forjas. Las aplicaciones automotrices incluyen correderas de asientos, refuerzos de defensas, barras de soporte de cabeceras y aletas de condensador.

Designaciones de temple de aluminio. En vista de que las propiedades mecánicas de virtualmente todas las aleaciones de aluminio son muy sensibles al trabajo en frío o al tratamiento térmico, se aplican sufijos de cuatro dígitos a las designaciones de aleación para describir el temple. Las designaciones de temple más frecuentemente utilizadas se describen a continuación.

- *Temple O*. Totalmente recocido para obtener alta ductilidad. El recocido hace que las aleaciones sean más fáciles de formar mediante flexión o estirado. Las piezas formadas en la condición de recocido con frecuencia son tratadas térmicamente después para mejorar sus propiedades.
- *Temple H*, endurecido por deformación. Utilizado para mejorar las propiedades de aleaciones no térmicamente tratables, tales como las de las series 1000, 3000 y 5000. La H siempre va seguida por un número de dos o tres dígitos para designar un grado específico de endurecimiento por deformación o procesamiento especial. El segundo dígito después de la H oscila entre 0 a 8 e indica un grado sucesivamente más grande de endurecimiento por deformación y por ende una mayor resistencia. El apéndice A–18 da las propiedades de varias aleaciones de aluminio. Para la aleación 3003, la tabla muestra que la resistencia a la cedencia se incrementa de 18 000 psi (124 MPa) a 27 000 psi (186 MPa) conforme el temple cambia de H12 a H18.
- *Temple T*, térmicamente tratado. Utilizado para mejorar la resistencia y lograr una condición estable. La T siempre va seguida por uno o más dígitos que indican un tratamiento térmico particular. Para productos forjados, tales como lámina, placa, extrusiones, barras y tubos estirados, las designaciones más frecuentemente utilizadas son T4 y T6. El tratamiento T6 produce una mayor resistencia aunque generalmente reduce su manejabilidad. En el apéndice A–18 aparecen varias aleaciones térmicamente tratables en los temples O, T4 y T6 para ilustrar el cambio de propiedades.

Las aleaciones de aluminio fundidas se designan por medio de un sistema de cuatro dígitos de la forma XXX.X, donde el primer dígito indica el grupo de aleación principal de acuerdo a los elementos principales de aleación. La tabla 2–9 muestra los grupos. Los dos dígitos siguientes indican la aleación específica dentro del grupo o indican la pureza del aluminio. El último dígito, después del punto decimal, indica la forma del producto: 0 para piezas fundidas y 1 o 2 para lingotes.

El aluminio también es sensible a la forma en que se produce, al tamaño de las secciones y a la temperatura. El apéndice A–18 incluye propiedades típicas, por lo que no se puede confiar en ellas para diseño. Las referencias 1, 3 y 6 dan datos extensos sobre resistencias mínimas.

El aluminio fundido se utiliza para grandes miembros estructurales y bastidores, bloques de motor, cabezas de cilindros, múltiples, piezas internas de motor, engranes de dirección, cajas y piezas internas de transmisión, ruedas y dispositivos de medición de combustible.

TABLA 2–9 Grupos de aleación aluminio fundido.

Grupo	Principales elementos de aleación
1XX.X	99% o más aluminio
2XX.X	Cobre
3XX.X	Silicio, cobre, magnesio
4XX.X	Silicio
5XX.X	Magnesio
6XX.X	(Serie no utilizada)
7XX.X	Zinc
8XX.X	Estaño
9XX.X	Otros elementos

2–6 COBRE, LATÓN Y BRONCE

El cobre y las aleaciones de cobre tienen buena resistencia a la corrosión, son fáciles de fabricar y tienen apariencia atractiva. Normalmente se clasifican como *cobre*, *latón* o *bronce*, según las cantidades y tipos de elementos de aleación empleados. Se utiliza trabajo en frío para modificar las propiedades de resistencia y dureza de estos metales, que van desde temples *blandos*, *un cuarto duros*, *medio duros*, *tres cuartos duros*, *duros*, *extraduros*, *resorte* y *extrarresorte* según el porcentaje de trabajo en frío durante el procesamiento. En el apéndice A–15 se dan las propiedades de cuatro tipos de materiales basados en cobre y a continuación se analizan. El sitio de Internet 11 permite buscar en una base de datos grande de materiales de cobre.

Cobre. El nombre *cobre* se utiliza con más frecuencia para denotar virtualmente el metal puro que tiene 99% o más cobre. El material C14500 nominalmente tiene 99.5% de cobre y 0.55% de telurio y sus usos típicos incluyen conectores eléctricos, partes de motor que conducen corriente eléctrica, productos de máquinas de fabricar tornillos, accesorios de plomería y regaderas automáticas.

El *cobre al berilio* (C17200) nominalmente tiene 98.1% de cobre y 1.9% de berilio, por lo que se aparta de la definición estricta de cobre puro. El berilio agrega una significativa resistencia, lo que conduce a usos tales como pinzas de contacto, partes de relevador, sujetadores, tubería para el Bourdon de manómetros, partes de bomba, válvulas y una variedad de componentes maquinados, resortes y forjas.

Latón. Los *latones* son aleaciones de cobre y zinc con plomo agregado en ocasiones para mejorar la maquinabilidad. El material C36000 es un latón corte libre con 61.5% de cobre, 35.4% de zinc y 3.1% de plomo. Los usos automotrices incluyen partes de termostato, conectores de fluidos, cuerpos de sensores e insertos roscados para piezas de plástico. Otros usos industriales incluyen herrajes para el constructor, sujetadores, asientos de válvula de componentes de grifos, toberas, engranes y piezas de máquinas de fabricar tornillos. Otros latones se utilizan en aplicaciones marinas, casquillos de municiones, mobiliario residencial y tubería para intercambiadores de de calor.

Bronce. El cobre aleado con estaño y una amplia variedad de elementos tales como plomo, zinc y fósforo, cae dentro de la familia del *bronce*. El bronce al fósforo (C54400) tiene 88% de cobre, 4% de estaño, 4% de plomo, 4% de zinc y 0.25% de fósforo. Su buena resistencia, ductilidad y propiedades de desgaste permiten usos tales como engranes, flechas, cojinetes, rondanas de empuje o presión, piezas de máquinas de fabricar tornillos, conectores eléctricos y piezas de válvulas.

2–7 ZINC, MAGNESIO, TITANIO Y ALEACIONES DE NÍQUEL

Zinc. El *zinc* tiene una moderada resistencia y tenacidad, y una excelente resistencia a la corrosión. Se utiliza en formas forjadas tales como chapas y hojas laminadas y varillas o alambre estirado. Las baterías de celda seca, herrajes para el constructor y placas para fotograbado son algunas de las aplicaciones principales.

Se fabrican muchas piezas de zinc mediante moldeado a presión porque el punto de fusión es de menos de 800°F (427°C), mucho menor que otros metales moldeados a presión. El acabado, tal como sale del molde, es adecuado para muchas aplicaciones, tales como partes de máquinas de negocios, cuerpos de bombas, cajas de motor y armazones de máquinas para

trabajo liviano. Donde se requiere una apariencia decorativa, la electrodeposición con níquel y cromo es fácil de realizar. Piezas tan conocidas como portafaros y molduras de carrocería automotriz se hacen de esta manera. Vea el sitio de Internet 13.

Las aleaciones de zinc típicamente contienen aluminio y una pequeña cantidad de magnesio. Algunas aleaciones incluyen cobre o níquel. El desempeño de los productos finales puede ser muy sensible a pequeñas cantidades de otros elementos y se imponen límites máximos al contenido de hierro, plomo, cadmio y estaño en algunas aleaciones.

La aleación de fundición de zinc más ampliamente utilizada se llama *aleación número 3* en ocasiones llamada *Zamak 3.* Contiene 4% de aluminio y 0.035% de magnesio. Otra se llama *Zamak 5* y también contiene 4% de aluminio con 0.055% de magnesio y 1.0% de cobre. Un grupo de aleaciones con más alto contenido de aluminio son las aleaciones ZA con ZA–8, ZA–12 y ZA–27 como las más populares. Las propiedades de resistencia de la aleación de zinc ZA12 se dan en el apéndice A–15.

Magnesio. El *magnesio* es el metal más ligero comúnmente utilizado en piezas que soportan carga. Su densidad de sólo 0.066 lb/in^3 (1830 kg/m^3) es de sólo un cuarto de la del acero y el zinc, un quinto de la del cobre y dos tercios de la del aluminio. Su resistencia es moderada, tiende y se presta muy bien para aplicaciones en las que el peso fabricado final de la pieza o estructura debe ser liviano. Las escaleras, carretillas, piezas de transportadoras de banda, herramientas mecánicas portátiles y cubiertas de podadoras de césped utilizan magnesio. En la industria automotriz, las piezas de carrocería, ruedas de ventilador, cuerpos de bomba y soportes, a menudo, son de magnesio. En aeronaves, su ligereza hace que este metal sea atractivo para pisos, bastidores, revestimientos de fuselaje y ruedas. La rigidez (módulo de elasticidad) del magnesio es baja, lo cual es una ventaja en piezas donde el impacto debe ser absorbido. Además, su ligereza permite diseños de bajo peso en comparación con otros metales de rigidez equivalente. Consulte en el apéndice A–15 las propiedades de una aleación de magnesio fundido.

Titanio. El *titanio* tiene una resistencia muy alta y su densidad es de sólo la mitad de la del acero. Aun cuando el aluminio tiene una densidad más baja, el titanio es superior tanto al aluminio como a la mayoría de los aceros en cuanto a resistencia contra peso. Retiene una alto porcentaje de su resistencia a temperaturas elevadas y puede ser utilizado hasta aproximadamente 1000°F (538°C). La mayoría de las aplicaciones del titanio se encuentran en la industria aeroespacial en partes de motor, partes y revestimiento de fuselaje, ductos, estructuras de naves espaciales y recipientes a presión. Por su resistencia a la corrosión y las altas temperaturas, las industrias químicas utilizan titanio en intercambiadores de calor y como forro de equipo de procesamiento. Su alto costo es un factor importante que debe ser considerado.

El apéndice A–15 muestra las propiedades de un ejemplo de cada uno de los cuatro tipos principales de titanio: titanio alfa puro, aleación alfa, aleación beta y aleación alfa–beta. En general las aleaciones alfa–beta y beta son las formas más fuertes y son térmicamente tratables por lo que es fácil adecuar sus propiedades a usos específicos, considerando formabilidad, maquinabilidad, forjabilidad y soldabilidad, resistencia a la corrosión, resistencia a alta temperatura y resistencia a la fluencia aparte de su resistencia a temperatura ambiente típica, rigidez y ductilidad. El término "añejado" indica un tratamiento térmico final y se deberán consultar referencias más completas sobre añejado para valorar la variedad de propiedades que se pueden lograr.

Aleaciones de níquel. Las *aleaciones de níquel* a menudo se especifican para aplicaciones en las que se requiere una alta resistencia a la corrosión o una alta resistencia o ambas a temperaturas elevadas. Algunos ejemplos son componentes de motor de turbina, motores de cohete, piezas de horno, sistemas de procesamiento químico, sistemas de procesamiento farmacéutico, sistemas de energía nuclear y equipo contra contaminación del aire.

El apéndice A–15 da propiedades típicas de tres aleaciones de níquel listadas de acuerdo con sus designaciones UNS en la serie NXXXXX. La mayoría de las aleaciones de níquel no son tratadas térmicamente; no obstante, se emplea trabajo en frío para incrementar la resistencia, lo que es evidente para la aleación N04400 en el apéndice A–15. Para las aleaciones N06600 y N06110, los datos de resistencia se dan para temperatura ambiente y varias tempe-

raturas elevadas hasta de 1200°F (649°C). Algunas aleaciones son utilizables hasta 2000°F (1093°C). Las aleaciones a menudo se agrupan bajo las categorías de *resistente a la corrosión* o *resistente al calor*. En tanto que el níquel se encuentra en el 50% o más de estas aleaciones, los principales elementos de aleación incluyen cromo, molibdeno, cobalto, hierro, cobre y niobio. Visite los sitios de Internet 28–30 para conocer más productores de estas aleaciones. Observe las marcas ofrecidas por estas compañías y el extenso conjunto de propiedades disponibles en sus sitios web.

El desempeño en cuanto a fluencia es una importante propiedad de las aleaciones de níquel porque a menudo operan bajo cargas y esfuerzos significativos a altas temperaturas, donde la ruptura por fluencia es un modo de falla posible. Además, el módulo de elasticidad se reduce a medida que se incrementa la temperatura, lo que produce deformaciones inaceptables que deben ser consideradas en la fase de diseño. Los productores publican la fluencia y el módulo elástico contra temperatura para sus materiales, aparte de los datos de resistencia básicos.

2–8 NO METALES EN INGENIERÍA DE DISEÑO

La madera y el concreto se utilizan ampliamente en la construcción. Los plásticos y compuestos se encuentran en prácticamente todos los campos de diseño, incluidos productos de consumo, equipo industrial, automóviles, aviones y productos arquitectónicos. Para el diseñador, las propiedades de resistencia y rigidez son de primordial importancia con los no metales, como lo son con los metales. Por sus diferencias estructurales en los no metales, su comportamiento es bastante diferente de los metales.

La madera, concreto, compuestos y muchos plásticos tienen estructuras *anisotrópicas*. Esto significa que las propiedades mecánicas del material difieren según la dirección de la carga. Además, debido a sus cambios químicos naturales, las propiedades varían con el tiempo y a menudo con las condiciones climáticas. El diseñador debe estar enterado de estos factores.

2–9 MADERA

Como la madera es un producto natural, su estructura depende de la forma en que crece y no de la manipulación por parte de los seres humanos, como en el caso de metales. La forma larga, esbelta, cilíndrica de los árboles crea una estructura interna compuesta de celdas longitudinales. Conforme crece el árbol, se agregan anillos por afuera de la madera más vieja. De este modo, el núcleo llamado corazón de la madera tiene propiedades diferentes que la madera alburente o tierna, cerca de la superficie externa.

La especie de la madera también afecta sus propiedades, ya que las diferentes clases de árboles producen madera más dura o más blanda, más fuerte o más débil. Incluso en la misma especie se presenta la variabilidad a causa de las diferentes condiciones de crecimiento, tales como diferencias en el suelo y la cantidad de sol y lluvia.

La estructura celular de la madera da lugar al grano que es tan evidente cuando se sierra en forma de tablas y maderos. La resistencia de la madera depende de si carga perpendicular o paralelamente al grano. Además, siguiendo el grano, la resistencia es diferente en una dirección radial que en una dirección tangencial con respecto al tronco del árbol cilíndrico original del cual se cortó.

Otra variable importante que afecta la resistencia de la madera es el contenido de humedad. Los cambios en la humedad relativa puede variar la cantidad de agua absorbida por las celdas de la madera.

El apéndice A–19 da propiedades típicas de tres especies de madera a menudo utilizada en la construcción: pino Douglas, abeto y pino del sur. Observe los tres grados listados para cada uno. El grado 1 es el más alto, que representa madera limpia con pocos defectos tales como nudos. El grado 2 es madera de construcción común con nudos u otros defectos ocasionales. El grado 3 es el más deficiente con nudos notables y gran variedad en el grano. Los valores de resistencia permisible se reducen dramáticamente del grado 1 al grado 3. Los grados, y por lo tanto las resistencias permisibles, se determinan por medio de reglas estándar adoptadas por el Laboratorio de productos forestales de Estados Unidos (U.S. Forest Products Laboratory). Consulte la referencias 19 y 31.

TABLA 2–10 Madera graduada para máquina.

	Esfuerzos permisibles (paralelos al grano)							
	Flexión		Tensión		Compresión		Módulo de elasticidad	
Grado	psi	Mpa	psi	Mpa	psi	MPa	psi	GPa
Madera clasificada para esfuerzo de máquina (MSR)								
1350f-1.3E	1350	9.3	750	5.2	1600	11.0	1.3×10^6	9.0
1800f-1.6E	1800	12.4	1175	8.1	1750	12.1	1.6×10^6	11.0
2400f-2.0E	2400	16.5	1925	13.3	1975	13.6	2.0×10^6	13.8
2850f-2.3E	2850	19.7	2300	15.9	2150	14.8	2.3×10^6	15.9
Madera evaluada para máquina (MEL)								
M-10	1400	9.7	800	5.5	1600	11.0	1.2×10^6	8.3
M14	1800	12.4	1000	6.9	1750	12.1	1.7×10^6	11.7
M-21	2300	15.9	1400	9.7	1950	13.4	1.9×10^6	13.1
M-24	2700	18.6	1800	12.4	2100	14.5	1.9×10^6	13.1

Fuente: Forest Products Society, 1997.

En el capítulo 3 se utilizan las propiedades de tensión u compresión. Las resistencias a la flexión y al cortante horizontal se consideran en el capítulo 7 que se ocupa de esfuerzos en vigas. Note la muy baja resistencia a cortante, de sólo 70 a 90 lb/in^2 (0.48 a 0.66 MPa). Ésta representa el modo de falla prevaleciente de vigas de madera, como se verá más a fondo en el capítulo 8.

Madera estructural grado máquina. Sistemas alternos de graduación de madera utilizan procesos de graduación de máquina para clasificarla en grados relacionados con sus propiedades de resistencia y rigidez. Dos sistemas como ésos son *valuada para esfuerzo de máquina* (*MSR*, *machine-stressed rated*) y *madera evaluada para máquina* (*MEL*, *machine evaluated lumber*). La tabla 2–10 muestra grados representativos de cada sistema. Más grados están disponibles y no todos son utilizados para todos los productos. Los usuarios deberán comentar los detalles de los sistemas de valoración con los vendedores antes de especificar productos particulares.

2–10 CONCRETO

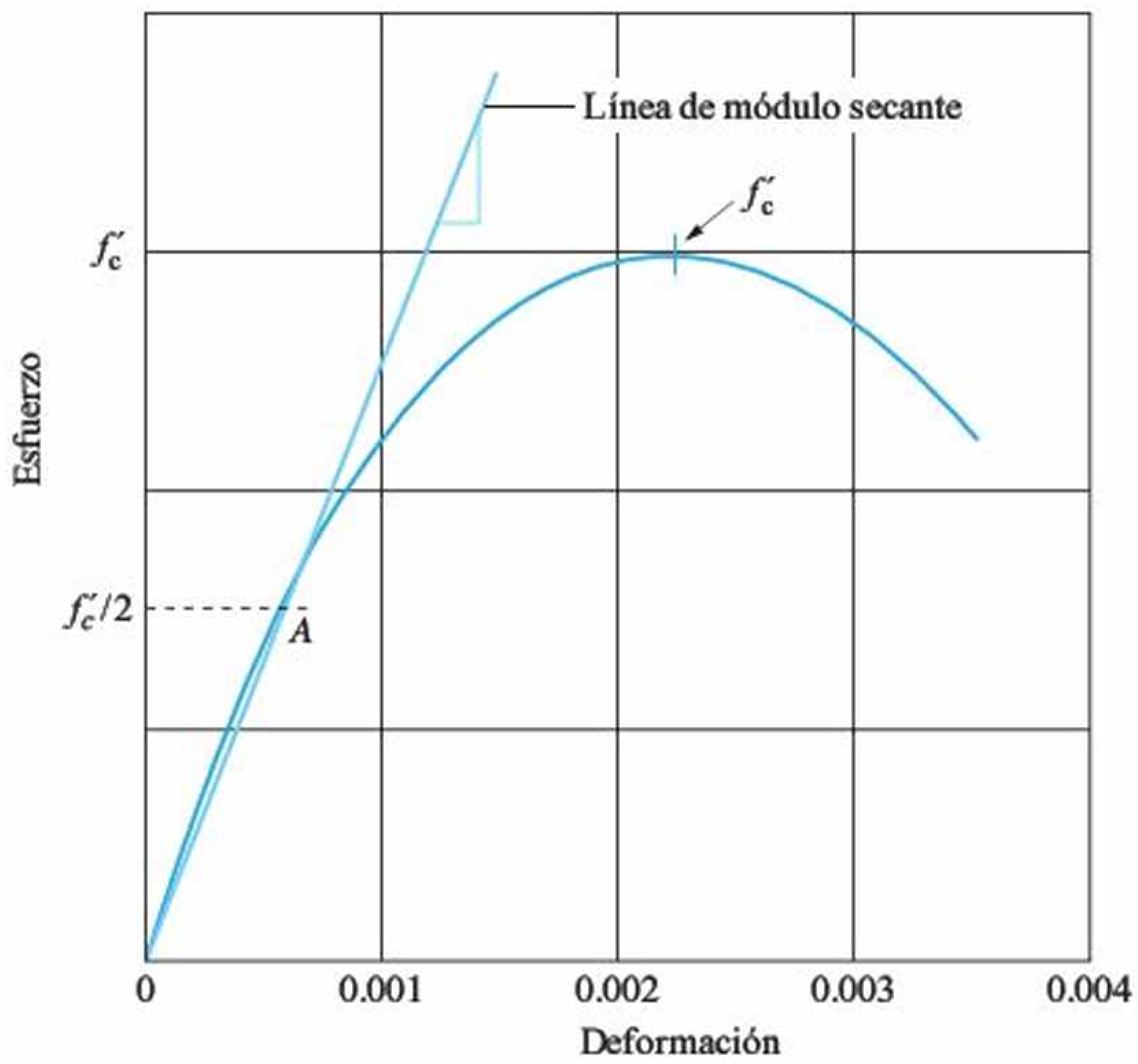
Los componentes del concreto son cemento y un agregado. La adición de agua y el mezclado completo de los componentes tienden a producir una estructura uniforme con el cemento que recubre todas partículas del agregado. Después de curada, la masa está firmemente unida. Algunas de las variables implicadas al determinar la resistencia final del concreto son el tipo de cemento utilizado, el tipo y tamaño del agregado y la cantidad de agua agregada.

Una mayor cantidad de cemento en el concreto produce una mayor resistencia. La reducción de la cantidad de agua con respecto a la cantidad de cemento incrementa la resistencia del concreto. Desde luego, se debe agregar suficiente agua para que el cemento recubra el agregado y permitir que el concreto sea vertido y trabajado antes de que cure en exceso. La densidad del concreto, afectada por el agregado, también es un factor. Casi siempre se utiliza una mezcla de arena, grava y piedra quebrada para concreto de grado construcción.

El concreto se gradúa de acuerdo con su resistencia a la compresión, la cual varía desde aproximadamente 2000 lb/in^2 (14 MPa) hasta 7000 lb/in^2 (48 MPa). La resistencia a la tensión del concreto es extremadamente baja y es práctica común asumir que es cero. Naturalmente, el refuerzo del concreto con varillas de acero permite utilizarlo en vigas y losas anchas, puesto que el acero resiste carga de tensión.

El concreto debe ser curado para que desarrolle su resistencia nominal. Deberá mantenerse húmedo durante por lo menos 7 días, tiempo en el cual tiene aproximadamente el 60% a 70% de su resistencia a la compresión nominal. Aun cuando su resistencia continúa incremen-

FIGURA 2–18
Curva típica de esfuerzo deformación para concreto.



tándose con los años, a menudo se utiliza la resistencia a 28 días para determinar su resistencia nominal.

El concreto puede ser sometido a prueba con una máquina universal de prueba similar a la mostrada en la figura 2–1, preparada para aplicar una carga de compresión. Normalmente la probeta es un cilindro de 6 in de diámetro de 12 in de longitud (150 mm × 300 mm). La carga se incrementa lentamente hasta que ocurre una fractura compresiva, el esfuerzo y la deformación se rastrean de forma continua durante la prueba. La figura 2–18 muestra una curva típica de esfuerzo–deformación para concreto. Observe lo siguiente:

1. La curvatura de la curva esfuerzo–deformación es continua y alcanza un pico a una deformación de aproximadamente 0.002.
2. El pico de la curva se considera como la resistencia máxima a la compresión o la resistencia nominal del concreto, llamada f'_c en la industria de la construcción.
3. La ausencia de una parte de línea recta de la curva esfuerzo–deformación requiere una definición especial del módulo de elasticidad para concreto. El Instituto Estadounidense de Estándares (ASI, American Standard Institute) define el *módulo secante*, como se muestra en la figura 2–18, como la pendiente la línea que va del origen a través de la intersección sobre la curva con el nivel de esfuerzo de $f'_c/2$ (punto A).
4. La falla ocurre a una deformación de aproximadamente 0.003 a 0.004, según la resistencia máxima del concreto. La falla puede ocurrir como cortante a lo largo de líneas angulares dentro de la probeta o como cuarteaduras a lo largo de planos casi verticales.

La figura 2–19 muestra curvas típicas de esfuerzo deformación de varios grados de concreto. Una observación importante con respecto a estas curvas es que el módulo secante varía significativamente y es más alto para los grados de resistencia más alta.

El peso específico del concreto, en ocasiones llamado *peso unitario,* varía desde aproximadamente 90 lb/ft^3 hasta 160 lb/ft^3 (14.1 kN/m^3 hasta 25.1 kN/m^3) con la clase de agregado que tiene una mayor influencia. Cuando se utilizan unidades SI, a menudo se exige la densidad de masa, la cual varía desde 1.44 kg/m^3 hasta 2.56 kg/m^3. Para concreto grado construcción común los valores nominales son

Peso específico:	150 lb/ft^3	o	23.6 kN/m^3
Densidad:	150 lb$_m$/ft^3	o	2.40 kg/m^3

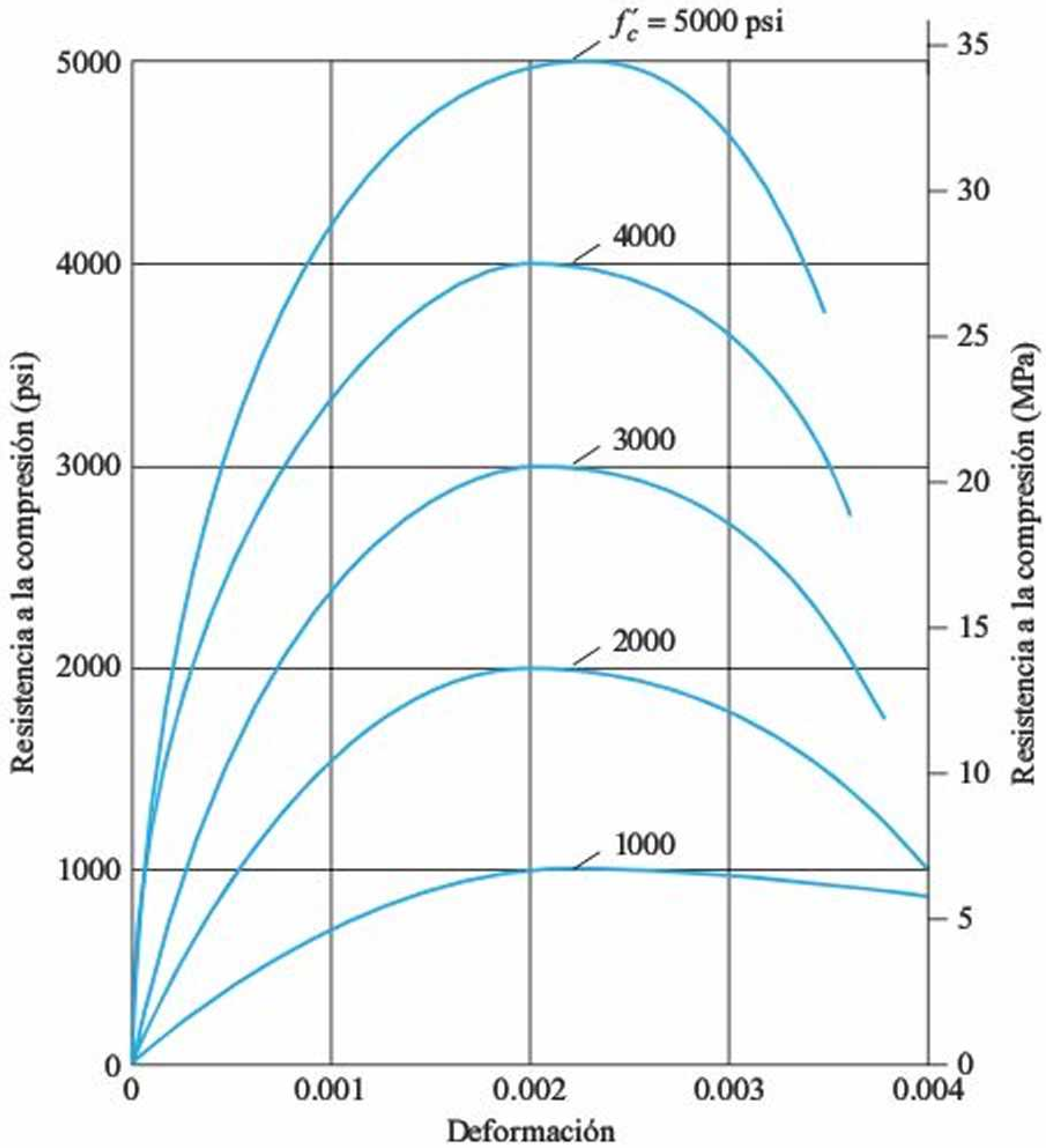


FIGURA 2–19
Curvas de esfuerzo–deformación típicas para varios grados de concreto.

El módulo de elasticidad depende en parte del peso específico y la resistencia nominal. De acuerdo con el Instituto Estadounidense del Concreto, el módulo de elasticidad puede ser calculado con

$$E_c = 33\gamma^{3/2}\sqrt{f'_c} \tag{2–9}$$

donde E_c = Módulo de elasticidad a compresión, lb/in²
γ = Peso específico, lb/ft³
f'_c = Resistencia nominal a la compresión del concreto, lb/in²

Con $\gamma = 150$ lb/ft³, el rango de valores esperados para el módulo de elasticidad, calculado con la ecuación (2–9), se muestra en la tabla 2–11.

Los esfuerzos de trabajo permisibles en el concreto normalmente son del 25% de la resistencia nominal a 28 días. Por ejemplo, el concreto valorado a 2000 lb/in² (14 MPa) tendría un esfuerzo permisible de 500 lb/in² (3.4 MPa).

TABLA 2–11 Módulo de elasticidad de concreto.

Resistencia nominal, f'_c		Módulo de elasticidad	
psi	MPa	psi	GPa
2000	13.8	2.7×10^6	18.6
3000	20.7	2.7×10^6	22.7
4000	27.6	2.7×10^6	26.2
5000	34.5	2.7×10^6	29.6
600	41.4	2.7×10^6	32.4
7000	48.3	2.7×10^6	35.2

2–11 PLÁSTICOS

Los plásticos se componen de grandes cadenas de moléculas llamadas *polímeros*. Son materiales orgánicos sintéticos que puede ser formulados y procesados en literalmente miles de formas.

Una posible clasificación es entre materiales *termoplásticos* y materiales de *termofraguado*. Los termoplásticos pueden ser ablandados repetidamente mediante calentamiento sin que cambien las propiedades o la composición química. A la inversa, después de un curado inicial de los plásticos de termofraguado, no pueden ser ablandados de nuevo. Durante el curado ocurre un cambio químico con calor y presión.

Algunos ejemplos de termoplásticos incluyen ABS, acetales, acrílicos, acetato de celulosa, fluorocarbonos TFE, nylon, polietileno, polipropileno, poliestireno y vinilos. Los plásticos termofraguados incluyen fenólicos, epóxicos, poliésteres, silicones, uretanos, alquidos, alilos y aminos. Algunos de ellos se describen a continuación.

Termoplásticos

- *Nylon* (*Poliamida PA*). Buena resistencia, resistencia al desgaste y tenacidad; una amplia variedad de posibles propiedades según los rellenos y formulaciones. Utilizado para partes estructurales, artefactos mecánicos tales como engranes y cojinetes, y partes que requieren resistencia al desgaste.
- *Acrilonitrilo–butadieno–estireno* (*ABS*). Buena resistencia al impacto, rigidez, resistencia moderada. Utilizado para cajas, cascos, estuches, piezas de aparatos domésticos, tubos, accesorios de conexión.
- *Policarbonato*. Excelente tenacidad, resistencia al impacto y estabilidad dimensional. Utilizado para levas, engranes, cajas, conectores eléctricos, productos para el procesamiento de alimentos, cascos, y piezas de bombas y medidores.
- *Acrílico*. Buena resistencia a la intemperie y resistencia al impacto; puede fabricarse con excelente transparencia o translucido u opaco con color. Utilizado para encristalado de ventanas, lentes, señalizaciones y cajas.
- *Cloruro de polivinilo* (*PVC*) Buena resistencia, resistencia a la intemperie y rigidez. Utilizado para tubos, conductos eléctricos, pequeñas cajas, ductos y molduras.
- *Polimida*: Buena resistencia y resistencia al desgaste, muy buena retención de las propiedades a temperaturas elevadas hasta de 500°F. Utilizado para cojinetes, sellos, aspas giratorias y partes eléctricas.
- *Acetal*: Alta resistencia, rigidez, dureza y resistencia al desgaste; baja fricción, buena resistencia a la intemperie y resistencia química. Utilizado para engranes, bujes, ruedas dentadas, partes de transportadora de banda y productos de plomería. [Nombre genérico: poli–oxi–metileno (POM).]
- *Elastómero de poliuretano*. Un material semejante al hule y una excepcional tenacidad y resistencia a la abrasión; buena resistencia al calor y los aceites. Utilizado para ruedas, rodillos, engranes, ruedas dentadas, partes de transportadora de banda y tubería.
- *Resina de poliéster termoplástico* (*PET*). Resina de politereftalato de etileno (PET) con fibras de vidrio o minerales. Muy alta resistencia y rigidez, excelente resistencia a productos químicos y al calor, excelente estabilidad dimensional y buenas propiedades eléctricas. Utilizada para partes de bombas, cajas, partes eléctricas, partes de motor, autopartes, manijas de horno, engranes, ruedas dentadas y artículos deportivos.
- *Elastómero de poliéter-éster*: Plástico flexible con excelente tenacidad y elasticidad, alta resistencia a la fluencia, al impacto y la fatiga bajo flexión, buena resistencia química. Permanece flexible a bajas temperaturas y conserva buenas propiedades a temperaturas moderadamente elevadas. Utilizado para sellos, cinturones, diafragmas de bomba, botas protectoras, tubería, resortes y dispositivos para absorber impactos. Se pueden utilizar grados de alto módulo para engranes y ruedas dentadas.

Termofraguados

- *Fenólicos*: Alta rigidez, buena moldeabilidad y estabilidad dimensional, muy buenas propiedades eléctricas. Utilizado para partes que soportan carga en equipo eléctrico, mecanismos de control eléctrico, contactos múltiples, pequeñas cajas, manijas de aparatos domésticos y utensilios de cocina, engranes y partes estructurales y mecánicas. El alquido, alilo y amino tienen propiedades y usos similares a los de los fenólicos.
- *Poliéster*. Conocido como *fibra de vidrio* cuando se refuerza con fibras de vidrio; alta resistencia y rigidez, buena resistencia a la intemperie. Utilizado para cajas, perfiles estructurales y paneles.

Consideraciones especiales para la selección de plásticos. A menudo se selecciona un plástico particular para una combinación de propiedades, tales como peso ligero, flexibilidad, color, resistencia, rigidez, resistencia química, características de baja fricción o transparencia. La tabla 2–12 contiene los materiales plásticos principales utilizados para seis diferentes tipos de aplicaciones. Las referencias 4, 11, 14, 16, 29 y 30 proporcionan un extenso estudio comparativo de las propiedades de diseño de plásticos.

Si bien la mayoría de las mismas definiciones de propiedades de diseño descritas en la sección 2–2 de este capítulo pueden ser utilizadas para plásticos, así como para metales, en general se requiere una cantidad significativa de información adicional para especificar un material plástico apropiado. A continuación se dan algunas de las características especiales de los plásticos. Use los datos del apéndice A–20 en la solución de los problemas que vienen en este libro donde se requieren las propiedades de plásticos seleccionados. Existe una amplia variedad de propiedades entre las muchas formulaciones de plásticos incluso dentro de una clase dada. Consulte la extensa cantidad de guías de diseño disponibles con los vendedores de materiales plásticos. Visite los sitios de Internet 14–19.

1. La mayoría de las propiedades de plásticos son altamente sensibles a la temperatura. En general, la resistencia a la tensión, la resistencia a la compresión, el módulo elástico y la energía de falla por impacto se reducen significativamente conforme se incrementa la temperatura.

TABLA 2–12 Aplicaciones de materiales plásticos.

Aplicaciones	Propiedades deseadas	Plásticos adecuados
Cajas, contenedores, ductos	Alta resistencia al impacto, rigidez, bajo costo, formabilidad, resistencia al ambiente, estabilidad dimensional	ABS, poliestireno, polipropileno, polietileno, acetato de celulosa, acrílicos
Correderas de cojinetes de baja fricción	Bajo coeficiente de fricción, resistencia a la abrasión, calor y corrosión	Fluorocarbonos TFE, nylon, acetales
Componentes de alta resistencia, engranes, levas y rodamientos	Alta resistencia a la tensión y al impacto, estabilidad a altas temperaturas, maquinable	Nylon, fenólicos, acetales rellenos-TFE
Equipo químico y térmico	Resistencia química y térmica, buena resistencia, baja absorción de humedad	Fluorocarbonos, polipropileno, polietileno, epoxicos, poliésteres, fenólicos
Partes electroestructurales	Resistencia eléctrica, resistencia al calor, resistencia alto impacto, estabilidad dimensional, rigidez	Alilos, alquidos, aminos, epoxicos, fenólicos, poliésteres, silicones
Componentes de transmisión de luz	Buena transmisión de la luz en colores transparentes y translucidos, formabilidad, resistencia al astillamiento	Acrílicos, poliestireno, acetato de celulosa, vinilos

2. Muchos plásticos absorben una considerable cantidad de humedad del ambiente y exhiben cambios dimensionales y como resultado se tienen degradación de las propiedades de resistencia y rigidez.
3. Los componentes que soportan carga continuamente deben ser diseñados para soportar la fluencia o relajación, como se describe en la sección 2–2.
4. El comportamiento de los plásticos bajo carga repetida (fatiga), choque e impacto es muy variable y muchos grados son especialmente formulados para un buen desempeño en semejantes ambientes. Los datos de tenacidad mediante las pruebas de Izod, Charpy o de caída deberán ser obtenidos del vendedor junto con resistencias específicas a la fatiga de los materiales.
5. Los métodos de procesamiento pueden tener grandes efectos en las dimensiones y propiedades finales de las piezas hechas de plástico. Los plásticos moldeados se contraen significativamente durante la solidificación y curado. Las líneas de división producidas donde las mitades del molde se encuentran pueden afectar la resistencia. La velocidad de solidificación puede diferir ampliamente en una parte dada según los espesores de sección, la complejidad de la forma y la ubicación de los bebederos que vierten el plástico fundido en el molde. El mismo material puede producir diferentes propiedades dependiendo de si es procesado por moldeado por inyección, extrusión, soplado o maquinado con un bloque sólido o barra. Consulte la referencia 18.
6. La resistencia a químicos, a la intemperie, a la luz directa del sol y a otros cambios ambientales debe ser verificada.
7. Los plásticos pueden exhibir un cambio de propiedades a medida que envejecen, en particular cuando se someten a temperaturas elevadas.
8. Las características de inflamabilidad y eléctricas deben ser consideradas. Algunos plásticos se formulan especialmente para altos valores de inflamabilidad como lo exige el Underwriters Laboratory y otras agencias.
9. Los plásticos utilizados para el almacenar y procesar alimentos deben satisfacer las normas de la Administración de Drogas y Alimentos de Estados Unidos (*U.S. Food and Drug Administration*).

2–12 COMPUESTOS

Los compuestos son materiales con dos o más constituyentes mezclados en una forma que produzca unión adhesiva o mecánica entre los materiales. Para formar un compuesto, se distribuye un material de relleno en una matriz, de tal suerte que aquél refuerce a ésta. Típicamente, el relleno es un material fuerte, rígido en tanto que la matriz es de baja densidad. Cuando los materiales se unen, mucha de la capacidad de soportar carga del compuesto es producida por el material de relleno. La matriz sirve para mantener el relleno en una orientación favorable con respecto a la manera en que se aplica la carga y para distribuirla en el relleno. El resultado es un compuesto un tanto optimizado de alta resistencia y alta rigidez con bajo peso. Consulte las referencias 10, 15, 17, 20, 21, 23, 26 y 27.

Se puede producir una variedad prácticamente infinita de materiales compuestos combinando diferentes materiales de matriz con diferentes rellenos en diferentes formas y en diferentes orientaciones. Incluso la madera y el concreto, abordados con anterioridad en este capítulo, son técnicamente ejemplos de compuestos. No obstante, el uso común del términos se refiere a aquellos materiales que utilizan polímeros, metales o cerámicos como materiales de matriz con una amplia variedad de materiales de relleno para formar compuestos.

Ejemplos de productos terminados hechos de materiales compuestos. El número y la variedad de aplicaciones de los materiales compuestos es grande y sigue creciendo. Los siguientes artículos son sólo una muestra de estas aplicaciones.

Productos de consumo y recreación. Artículos deportivos tales como raquetas de tenis, esquís para nieve, tablas para nieve, esquís acuáticos, tablas de surf, bates de béisbol,



FIGURA 2–20
Rodilleras con varios componentes hechos de compuestos. (Fuente: A&P Technology, Cincinnati, OH)

palos de jockey, garrochas de saltar, palos de golf; numerosos productos que tienen las conocidas cubiertas y paneles de fibra de vidrio; cascos de botes y otros equipos de a bordo; sistemas médicos y prótesis. La figura 2–20 muestra una rodillera con varios componentes hechos de materiales compuestos.

Equipo de transportación terrestre. Cuadros, ruedas y asientos de bicicleta; paneles de carrocería autos y camiones y estructuras de apoyo, ductos de aire, bolsas de aire, flechas de transmisión, resortes para carros deportivos y camiones de alto desempeño, cuencos de piso, camas de camiones de reparto y parachoques. La figura 2–21 muestra una bicicleta de alto desempeño que emplea un cuadro y otras partes estructurales compuestas.



FIGURA 2–21
Bicicleta de alto rendimiento que emplea un cuadro y otras partes estructurales compuestas. (Fuente: A&P Technology, Cincinnati, OH)

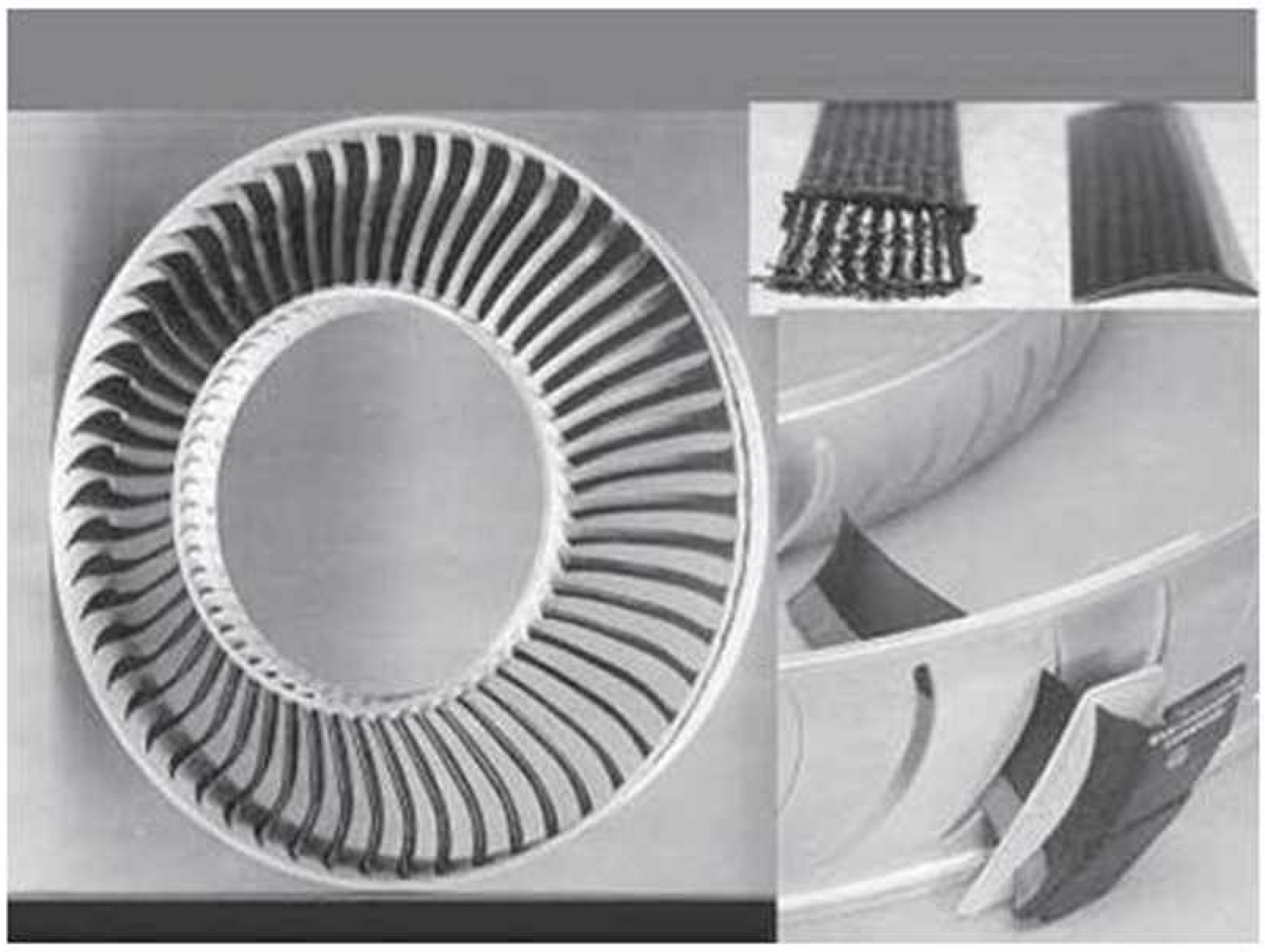


FIGURA 2–22
Aspas del estator de un motor de turbina hecho de materiales compuestos. (Fuente: A&P Technology, Cincinnati, OH).

Sistemas aeronáuticos y aeroespaciales. Paneles de fuselaje y elementos estructurales internos, alas, superficies de control (alerones, spoilers, colas, timones), sistemas de piso, capuchas y barquillas de motor, puertas de tren de aterrizaje, estructuras y accesorios de compartimiento de carga, paredes laterales interiores, guarniciones, divisiones, paneles de techo, divisores, ductos de sistema de control ambiental, arcones de estiba, sistemas y dispositivos estructurales de baños, superficies aerodinámicas (aspas) en la sección del compresor de motores de turbina, toberas de cohete, rotores de helicóptero, hélices y tanque a bordo para almacenar agua y aguas residuales. Las figuras 2–22 y 2–23 muestran las aspas del compresor de un motor de turbina y algunas herramientas utilizadas para fabricarlas.

Instalaciones industriales: Tanques de almacenamiento y recipientes a presión para procesamiento de petróleo, productos químicos y agrícolas, tubos para conducir productos químicos a través de ambientes corrosivos, sistemas sépticos, instalaciones para el tratamiento de aguas residuales, sistemas de revestimiento con un metal o de limpieza química, equipo para la fabricación de pulpa y papel, tanques portátiles para camiones y ferrocarriles, equipo de tratamiento ambiental, cascos y ropa protectora, sistema de almacenamiento y procesamiento de alimentos, minería y sistemas de manejo de materiales.

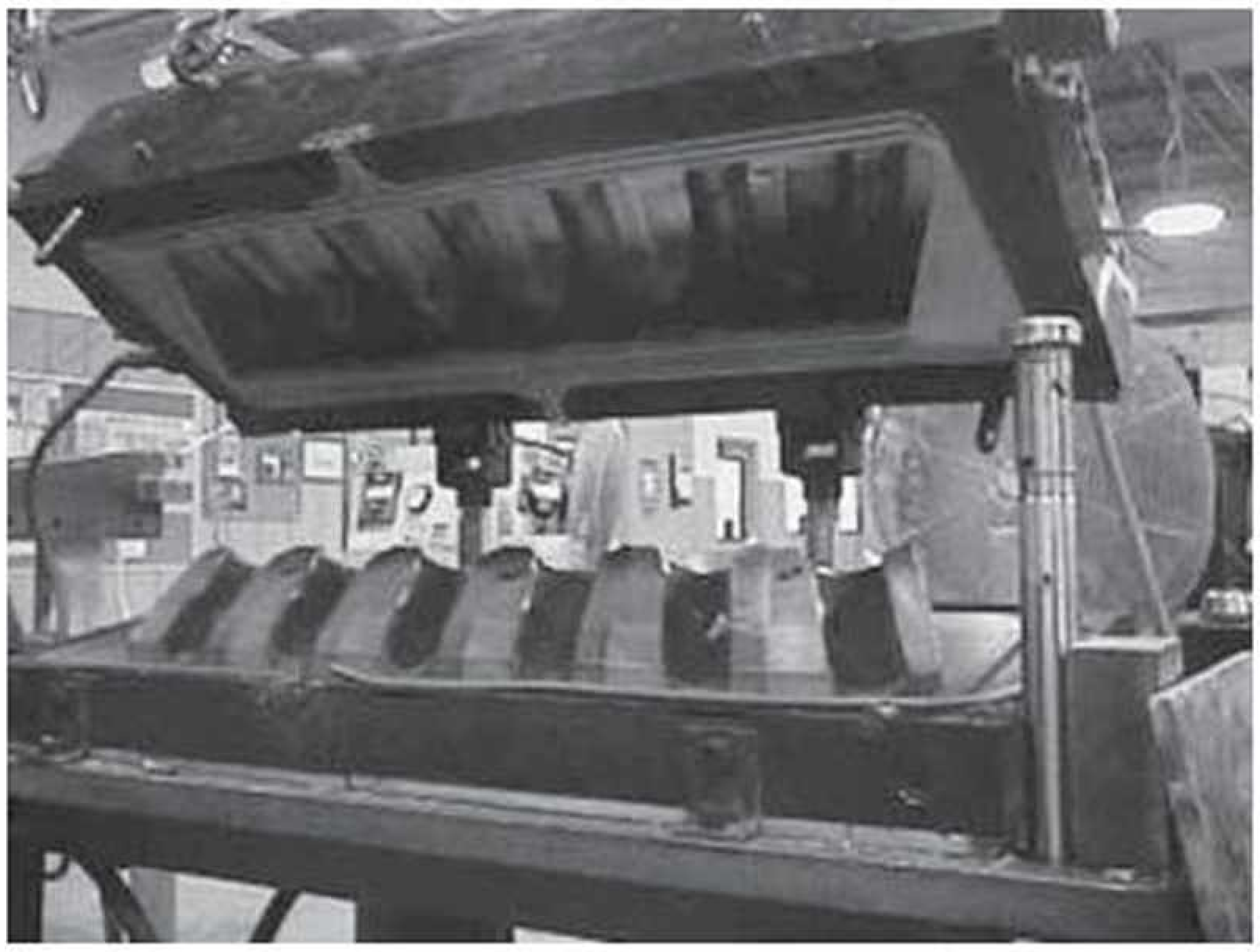


FIGURA 2–23
Prensa de formar para la fabricación de aspas del estator de un motor de turbina, mostrado en la figura 2–22. (Fuente: A&P Technology, Cincinnati, OH).

Sistemas eléctricos y electrónicos. Tarjetas de circuito impreso, tarjetas de alambrado impreso, tarjetas de montaje superficial, encapsulado de componentes electrónicos y componentes de sistemas de conmutación.

Construcción de edificios. Perfiles estructurales, sistemas de techos y pisos, envolturas de equipo, canales y caños de bajada, torres de enfriamiento, puentes y andenes, sistemas de tuberías y ductos.

Clasificaciones de los materiales compuestos por el tipo de matriz. Un método de clasificar materiales compuestos es por el tipo del material de la matriz. Se utilizan tres clasificaciones generales, como se describe a continuación, junto con materiales de matriz típicos, usos y combinaciones de matriz–relleno.

Compuesto de matriz de polímero (PMC, por sus siglas en inglés)

Termoplásticos: polietilenos, poliamidas (nylon), poliestirenos, polipropilenos, policarbonatos, polietercetonas (PEEK), sulfuros de polietileno (PPS), cloruro de polivinilo (PVC)

Termofraguados: poliésteres, epóxicos, fenólicos, polimidas (PI), ésteres de vinilo, silicones

Los PMC se utilizan por su alta resistencia y rigidez, baja densidad y relativamente bajo costo en aplicaciones aeroespaciales, automotrices, marinas, químicas, eléctricas y deportivas. Los compuestos PMC comunes incluyen poliéster-vidrio (fibra de vidrio convencional), epoxi-vidrio, polimida–vidrio, epoxi–aramida, epoxi–carbón, PEEK–carbón y PPS–carbón.

Compuestos de matriz metálica (MMC): aluminio (Al), titanio (Ti), magnesio (Mg), hierro (Fe), cobre (Cu), níquel (Ni), y aleaciones de estos metales con ellos mismos y con molibdeno (Mo), cesio (Ce) y boro (B).

Se prefieren los MMC por su alta resistencia, alta rigidez, resistencia a la abrasión, estabilidad dimensional, conductividad eléctrica y térmica, habilidad para operar a altas temperaturas y tenacidad y típicamente se utilizan en aplicaciones aeroespaciales y motrices. Ejemplos de compuestos MMC incluyen Al–SiC (carburo de silicio), Ti–SiC, Al–B, Al–C(carbón), Al–grafito, Mg-SiC y Al–Al_2O_3 (óxido de aluminio).

Compuestos de matriz de cerámica (CMC, por sus siglas en inglés): carburo de silicio, nitruro de silicio, alumina, zirconia, vidrio–cerámica, vidrio, carbón, grafito.

Se prefieren los CMC por su alta resistencia, alta rigidez y alta tenacidad a la fractura con respecto a los de sólo cerámica, y por su capacidad para operar a altas temperaturas y baja dilatación térmica. Son atractivos para hornos, motores, y naves aeroespaciales. Los compuestos CMC comunes incluyen carbón–carbón (C–C), carburo de silicio–carbón (SiC–C), carburo de silicio–carburo de silicio (SiC–SiC), cerámica vidriada–carburo de silicio, carburo de silicio-aluminosilicato de litio (SiC–LAS) y carburo de silicio, aluminosilicato de calcio (SiC–CAS). En los casos en que el mismo material básico aparece tanto como matriz como relleno, éste es de diferente forma tal como pelillos, fibras trozadas o cordones para obtener las propiedades preferidas.

Formas de materiales de relleno. Muchas formas de materiales de relleno se utilizan como se indica a continuación.

- Cordones de fibras continuas compuestos de muchos filamentos individuales unidos entre sí.
- Cordones trozados en tramos cortos (0.75 a 50 mm o 0.03 a 2.00 in).
- Cordones largos trozados dispersos en la forma de tapete.
- Cordones largos trozados alineados con las direcciones principales de la trayectoria de la carga.

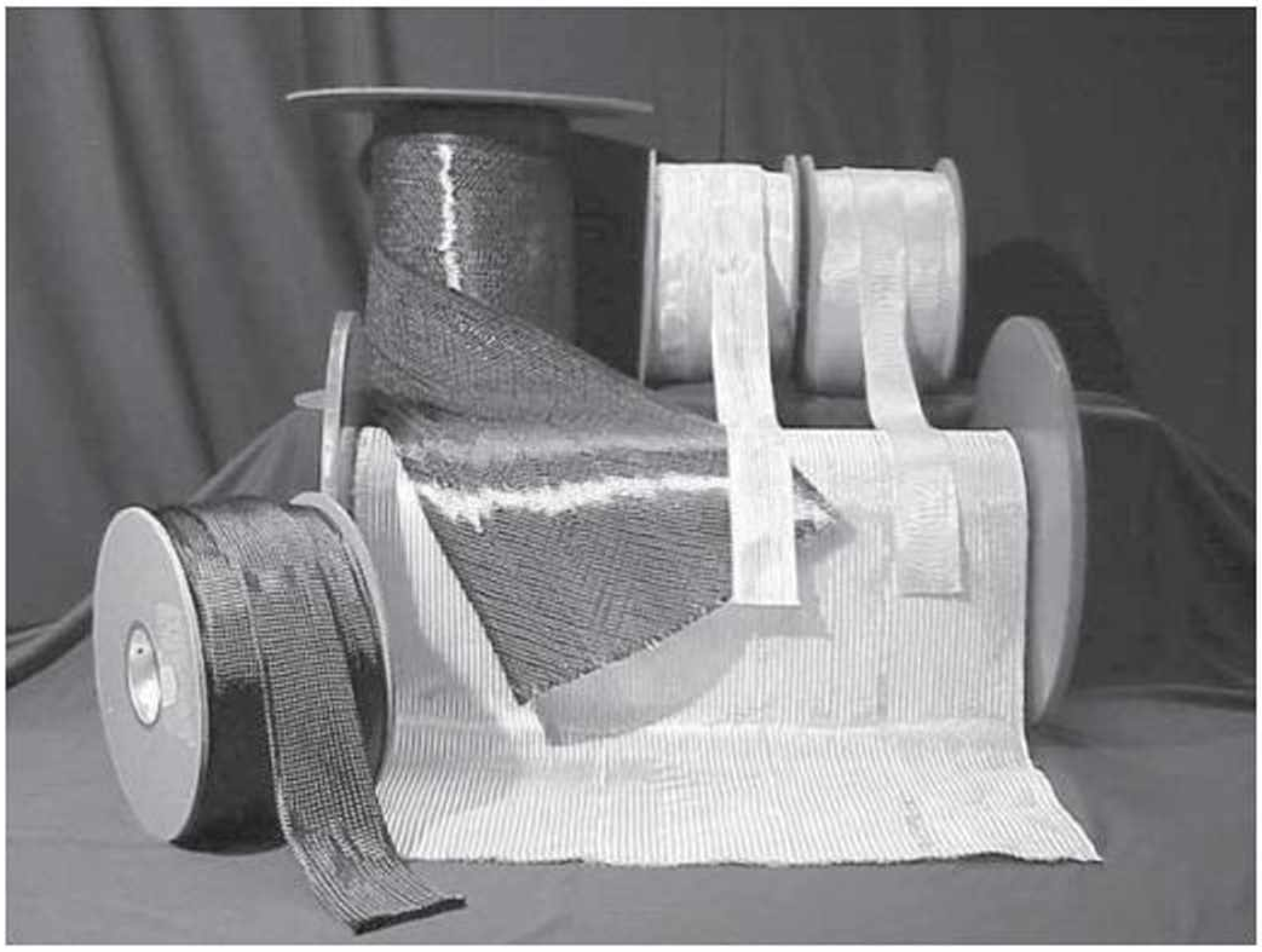


FIGURA 2–24
Telas y mangas trenzadas hechas de fibras de carbón y vidrio utilizadas para materiales compuestos. Los productos mostrados en las figuras 2–20 a 2–22 están hechos con materiales de relleno. (Fuente: A&P Technology, Cincinnati, OH).

- Primera torsión: Un grupo de cordones paralelos.
- Tela tejida hecha de una primera torsión o cordones.
- Filamentos de metal o alambre.
- Microesferas sólidas o huecas.
- Hojuelas de metal, vidrio o mica.
- Pelillos de cristal simple de materiales tales como grafito, carburo de silicio y cobre.

La figura 2–4 muestra varios estilos de tela tejida y trenzada en forma de tubo o manga adecuada para fabricar tubería estructural, flechas de transmisión, aspas de turbina, bates, cajas, componentes de prótesis, artefactos quirúrgicos y muchos otros productos hechos de compuestos. Se pueden emplear tanto fibras de vidrio como de carbón. Los productos mostrados en las figuras 2–20 a 2–22 están hechos con estas mangas trenzadas.

Tipos de materiales de relleno. Los rellenos, también llamados fibras, vienen en muchos tipos basados tanto en materiales orgánicos como inorgánicos. Algunos de los rellenos más populares se dan a continuación.

- Fibras de vidrio en cinco diferentes tipos:

  Vidrio A: Buena resistencia química porque contiene álcalis tal como óxido de sodio

  Vidrio C: Formulaciones especiales para una resistencia mayor que el vidrio A

  Vidrio E: Vidrio ampliamente utilizado con buena capacidad aislante eléctrica y buena resistencia

  Vidrio S: Vidrio de alta resistencia para alta temperatura

  Vidrio D: Mejores propiedades eléctricas que el vidrio E
- Fibras de cuarzo y vidrio con alto contenido de sílice: buenas propiedades a altas temperaturas de hasta 2000°F (1095°C)
- Fibras de carbón hechas base de PAN (PAN es poliacrilonitrilo): Aproximadamente 95% de carbón con muy alto módulo de elasticidad
- Fibras de grafito: Más de 99% de carbón e incluso con módulo elasticidad más alto que el carbón; las fibras más rígidas típicamente utilizadas en compuestos
- Fibras de tungsteno recubiertas de carburo de silicio: Resistencia y rigidez similares a boro/tungsteno pero con una capacidad a temperaturas más altas.

- Fibras de aramida: Un miembro de la familia poliamida de polímeros: alta resistencia y rigidez con densidad más baja en comparación con el vidrio: muy flexible (fibras de aramida producidas por la compañía DuPont, conocidas como *Kevlar*)

Ventajas de los compuestos. Los diseñadores buscan crear productos que sean seguros, fuertes, rígidos, livianos y altamente tolerantes al ambiente en el que operarán. Los compuestos a menudo sobrepasan estos objetivos en comparación con materiales alternativos tales como metales y plásticos sin relleno. Dos parámetros que se utilizan para comparar materiales son la *resistencia específica* y el *módulo específico*, son definidos como:

La resistencia específica es la relación de la resistencia a la tensión de un material a su peso específico.

El módulo específico es la relación del módulo de elasticidad de un material a su peso específico.

Como el módulo de elasticidad es una medida de la rigidez de un material, el módulo específico en ocasiones se llama *rigidez específica*.

Aunque obviamente no son una longitud, estas dos cantidades tienen la *unidad* de longitud, derivada de la relación de las unidades de resistencia o módulo de elasticidad, y las unidades de peso específico. En el sistema inglés, las unidades de resistencia a la tensión y módulo de elasticidad son lb/in^2 en tanto que el peso específico (peso por unidad de volumen) se expresa en lb/in^3. Así pues, la unidad de resistencia específica o módulo específico se da en pulgadas. En el sistema métrico SI, la resistencia y el módulo se expresan en N/m^2 (Pascales) en tanto que el peso específico está en N/m^3. Por consiguiente, la unidad de resistencia específica o módulo específico está en metros.

La tabla 2–13 compara la resistencia específica y la rigidez específica de materiales seleccionados con ciertas aleaciones de acero, aluminio y titanio. La figura 2–25 compara estos materiales por medio de gráficas de barras. La figura 2–26 es una curva de estos datos con resistencia específica sobre el eje vertical y el módulo específico sobre el eje horizontal. Cuando el peso es crítico, el material ideal quedaría en la parte superior derecha de esta gráfica. Observe que los datos que aparecen en estas gráficas y figuras son para compuestos con los materiales de relleno alineados en la dirección más favorable para resistir las cargas aplicadas.

Las ventajas de los compuestos se resumen como sigue:

1. Las resistencias específicas de los materiales compuestos pueden ser hasta de cinco veces las de aleaciones de acero de alta resistencia.
2. Los valores del módulo específico de los materiales compuestos pueden ser hasta ocho veces las de aleaciones de acero, aluminio o titanio.
3. Los materiales compuestos generalmente funcionan mejor que el acero o aluminio en aplicaciones donde las cargas son cíclicas, lo que conduce a una potencial falla por fatiga.
4. En los casos en que se prevén cargas y vibraciones, los compuestos pueden estar especialmente formulados con materiales que produzcan una alta tenacidad y un alto nivel de amortiguación.
5. Algunos compuestos tienen una mayor resistencia al desgaste que los metales.
6. Una cuidadosa selección de la matriz y los materiales de relleno permite obtener una superior resistencia a la corrosión.
7. Los cambios dimensionales originados por cambios de temperatura típicamente son mucho menores para los compuestos que para los metales. Más sobre este tema puede consultarse en el capítulo 3, en el cual se define la propiedad *coeficiente de dilatación térmica*.
8. Debido a que las propiedades de los materiales compuestos son altamente direccionales, los diseñadores deben colocar las fibras de refuerzo en la dirección que produzca

TABLA 2–13 Comparación de resistencia específica y módulo específico de materiales seleccionados.

Material	Resistencia a la tensión, s_u (ksi)	Peso específico, γ (lb/in³)	Resistencia específica (in)	Módulo específico (in)
Acero ($E = 30 \times 10^6$ psi)				
AISI 1020 HR	55	0.283	0.194×10^6	106×10^8
AISI 5160 OQT 700	263	0.283	0.929×10^6	1.06×10^8
Aluminio ($E = 10.0 \times 10^6$ psi)				
6061T6	45	0.098	0.459×10^6	1.02×10^8
7075-T6	83	0.101	0.822×10^6	0.99×10^8
Titanio ($E = 16.5 \times 10^6$ psi)				
Ti-6A1-4V Templado y envejecido a 1000° F	160	0.160	1.00×10^6	1.03×10^8
Compuesto de vidrio-epoxy ($E = 4.0 \times 10^6$ psi) 34% de contenido de fibra	114	0.061	1.87×10^6	0.66×10^8
Compuesto de aramida-epoxy ($E = 11.0 \times 10^6$ psi) 60% de contenido de fibra	200	0.050	4.0×10^6	2.20×10^8
Compuesto de boro-epoxy ($E = 30.0 \times 10^6$ psi) 60% de contenido de fibra	270	0.075	3.60×10^6	4.00×10^8
Compuesto de grafito-epoxy ($E = 19.7 \times 10^6$ psi) 62% de contenido de fibra	278	0.057	4.86×10^6	3.45×10^8
Compuesto de grafito-epoxy ($E = 48 \times 10^6$ psi) Módulo ultraalto	160	0.058	2.76×10^6	8.28×10^8

la resistencia y rigidez requeridas bajo las condiciones de carga específicas a las que se verán sometidos.

9. Las estructuras compuestas a menudo pueden hacerse en una pieza de forma compleja, lo que reduce el número de partes en un producto y el número de operaciones de sujeción requeridas. La eliminación de juntas en general también mejora la confiabilidad de tales estructuras.

10. Las estructuras compuestas por lo general se terminan en su forma final o casi final, lo que reduce el número de operaciones secundarias requeridas.

Limitaciones de los compuestos. Los diseñadores deben equilibrar muchas propiedades de los materiales en sus diseños, al mismo tiempo que consideran las operaciones de fabricación, costos, seguridad, duración y servicio del producto. La lista siguiente da algunos de las principales inquietudes cuando se utilizan compuestos.

1. Los costos de los materiales compuestos en general son más elevados que los de muchos materiales alternativos.
2. Las técnicas de fabricación difieren bastante de las utilizadas para dar forma a los metales. Puede que se requiera equipo de fabricación nuevo, así como capacitación adicional para los operarios de producción.
3. El desempeño de productos hechos con algunas técnicas de producción con materiales compuestos es más variable que cuando se utilizan técnicas de fabricación con metales.
4. El límite de la temperatura de operación para compuestos de matriz polimérica en general es de 500°F (260°C). [Pero los compuestos de matriz de metal o cerámica

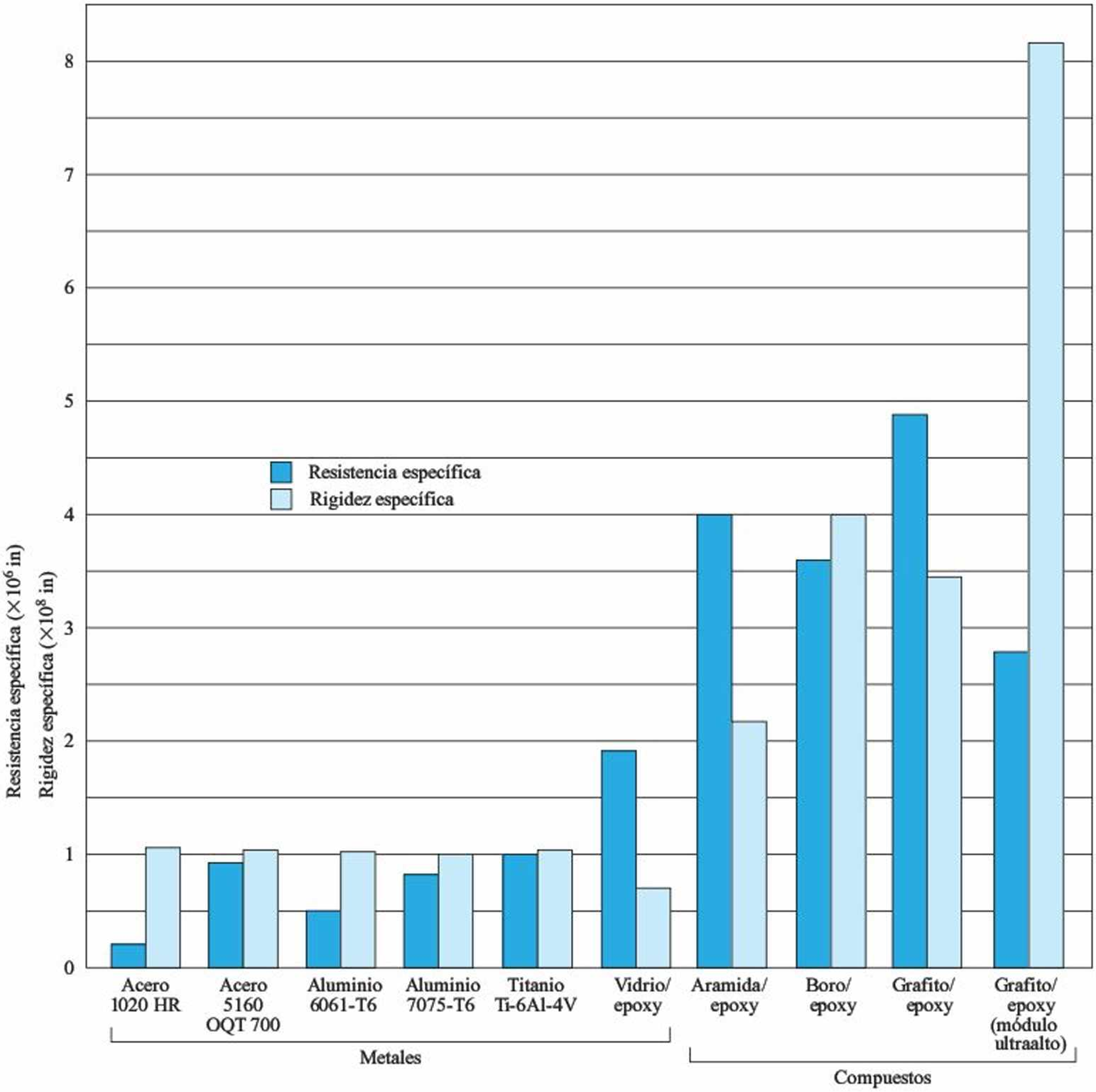


FIGURA 2–25
Comparación de resistencia específica y rigidez específica de materiales seleccionados.

pueden ser utilizados a temperaturas más altas, hasta de 1500°C (2700°F), encontradas en motores.]

5. Las propiedades de los materiales compuestos no son isotrópicas. Esto quiere decir que las propiedades varían dramáticamente con la dirección de las cargas aplicadas. Los diseñadores deben tener en cuenta estas variaciones para garantizar la seguridad y la operación satisfactoria bajo todos los tipos de carga anticipados.
6. En este momento, muchos diseñadores no están familiarizados con el comportamiento de los materiales compuestos y los detalles de predecir modos de falla. Si bien se ha avanzado en ciertas industrias, tales como la de equipo aeroespacial y recreativo, existe la necesidad de más conocimiento general sobre el diseño de materiales compuestos.

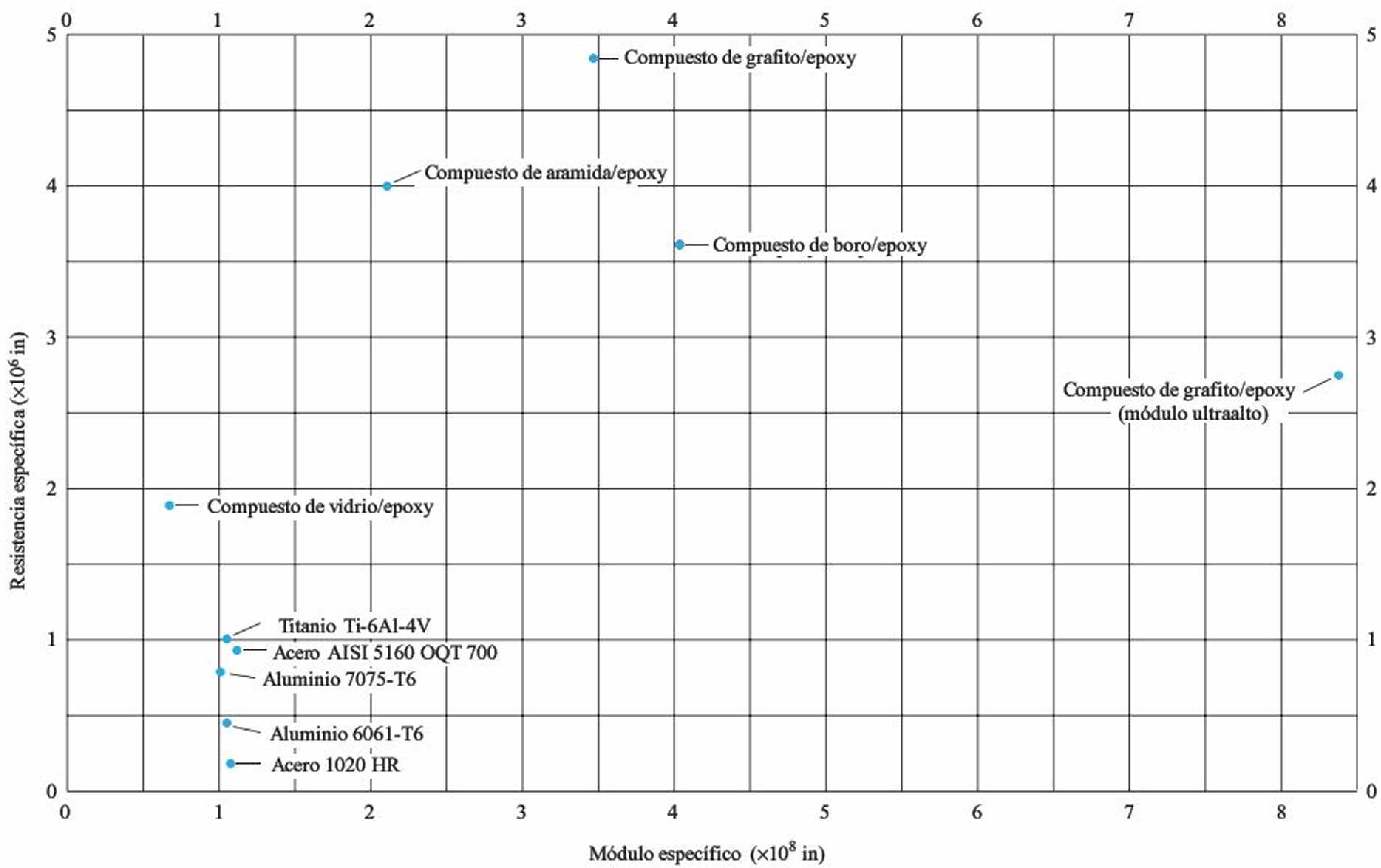


FIGURA 2–26 Resistencia específica contra módulo específico de metales y compuestos seleccionados.

7. El análisis de estructuras compuestas requiere el conocimiento detallado de más propiedades de los materiales que la que se requiere para metales.

8. La inspección y pruebas de estructuras compuestas en general son más complicadas y menos precisas que las de estructuras de metal. Es posible que se requieran técnicas no destructivas especiales para asegurarse de que no haya fallas importantes en el producto final que pudieran debilitar seriamente la estructura. Puede ser necesario someter a prueba a la estructura completa en lugar de probar una muestra del material debido a la interacción de las diferentes partes entre sí y debido a la direccionalidad de las propiedades de los materiales.

9. La reparación y mantenimiento de las estructuras compuestas es una seria inquietud. Algunas de las técnicas de producción requieren ambientes especiales de temperatura y presión que pueden ser difíciles de reproducir en el campo cuando se requiere reparar un daño. La adhesión de un área reparada a la estructura madre también puede ser difícil.

Naturaleza direccional de las propiedades de los compuestos. En general, un material dado puede tener tres clases de comportamientos con respecto a las relaciones entre sus propiedades de resistencia y rigidez, y las direcciones de las aplicaciones de la carga. Estos comportamientos se llaman *isotrópico*, *anisotrópico* y *ortotrópico*.

El *comportamiento isotrópico* se da cuando la respuesta elástica del material es el mismo sin importar la dirección de la carga aplicada. Los materiales homogéneos tales como la mayoría de los metales forjados (acero, aluminio, cobre, titanio, etc.) en general se analizan como materiales isotrópicos. Muchas de las técnicas de análisis de esfuerzo y deformación utilizadas en este libro están basadas en la suposición de comportamiento isotrópico. Los datos sobre propiedades de los materiales isotrópicos en general incluyen un solo valor de resistencia a la tensión, módulo de elasticidad, relación de Poisson y otras propiedades.

El *comportamiento anisotrópico* implica que la respuesta elástica de un material es diferente en todas las direcciones. Es de esperarse que un material compuesto de un agregado de constituyentes altamente no uniforme, aleatorio, exhiba un comportamiento anisotrópico. Por lo tanto, no sería correcto utilizar las técnicas de análisis básicas desarrolladas en este libro porque están basadas en la suposición de un comportamiento isotrópico. Para componentes y estructuras hechos de tales materiales, se aconseja probarlos en condiciones de carga reales para verificar que son adecuados para una aplicación particular.

El *comportamiento ortotrópico* consiste en que las propiedades del material son diferentes en tres direcciones mutuamente perpendiculares. Éste es el comportamiento que más a menudo se asume para materiales compuestos, en particular para aquellos de construcción laminada como se describe a continuación. Para describir a cabalidad el comportamiento de un material ortotrópico hay que determinar su resistencia, módulo de elasticidad (rigidez) y relación de Poisson en cada una de las direcciones mutuamente perpendiculares. En general, estas direcciones se conocen como 1, 2 y 3. Consulte la referencia 27.

La figura 2–27 muestra un segmento de un material compuesto hecho con las fibras de repuesto alineadas en una dirección particular. En esos casos, la dirección 1 se alinea en esa dirección. Luego la dirección 2 en general se considera perpendicular a la dirección de las

FIGURA 2–27 Compuesto unidireccional que muestra la dirección de los ejes principales.

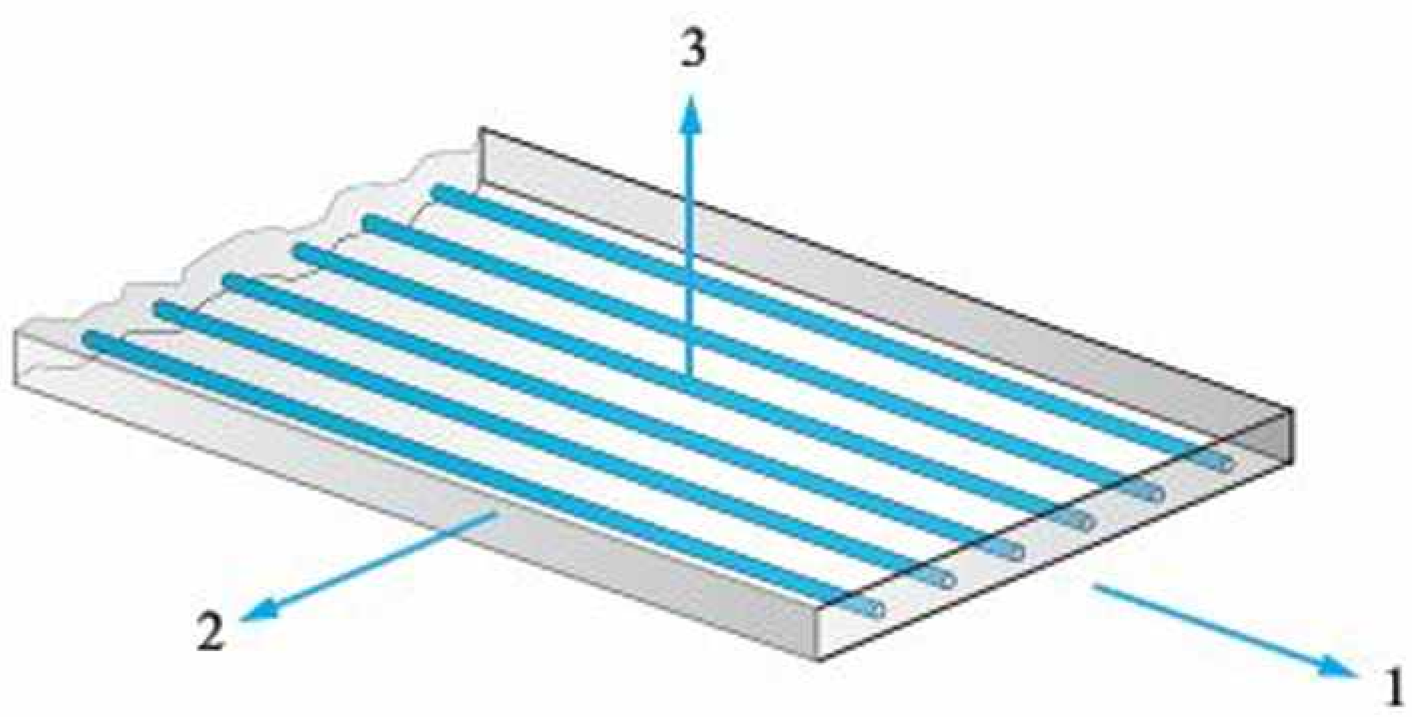


TABLA 2–14 Ejemplos del efecto de la construcción laminada en la resistencia y rigidez.

	Resistencia a la tensión				Módulo de elasticidad			
	Longitudinal		Transversal		Longitudinal		Transversal	
Tipo laminado	ksi	MPa	ksi	MPa	10^6 psi	GPa	10^6 psi	GPa
Unidireccional	200	1380	5	34	21	145	1.6	11
Casi isotrópico	80	552	80	552	8	55	8	55

fibras en el plano de la superficie del componente. La dirección 3 es entonces perpendicular a dicho plano. Deberá ser capaz de ver que las propiedades del material en las tres direcciones serían diferentes una de otra de acuerdo con la forma en que las fibras contribuyan a la resistencia de las cargas aplicadas.

Construcción compuesta laminada. Muchas estructuras hechas de materiales compuestos constan de varias capas del material básico que contiene tanto la matriz como las fibras de refuerzo. La forma en que las capas están orientadas una con respecto a la otra afecta las propiedades finales de la estructura terminada.

Como una ilustración, considere que cada capa está hecha de un conjunto de cordones paralelos del material de relleno de refuerzo, tal como fibras de vidrio E, incrustadas en la matriz de resina, tal como poliéster. En esta forma, el material en ocasiones se llama *prepeg*, lo que indica que el relleno ha sido preimpregnado en la matriz antes de formar la estructura y curar el ensamble.

Para producir la resistencia y rigidez máximas en una dirección particular, se podrían colocar varias capas del prepeg una encima de la otra con todas las fibras alineadas en la dirección de la carga de tensión esperada. Esto se llama *laminado unidireccional*. Una vez curado, el laminado tendría una resistencia y rigidez muy altas cuando se carga en la dirección de los cordones, llamada dirección *longitudinal*. Sin embargo, el producto resultante tendría una resistencia y rigidez muy bajas en la dirección perpendicular a la dirección de las fibras, llamada dirección *transversal*. Si se presentan cargas fuera del eje, la pieza puede fallar o deformarse significativamente. La tabla 2–14 da datos muestra de un compuesto de carbón/epoxy laminado unidireccional.

Para superar la carencia de resistencia y rigidez fuera del eje, las estructuras laminadas deberán hacerse con las fibras orientadas en diferentes direcciones. En la figura 2–28 se muestra una configuración popular. Si a la dirección longitudinal de la capa superficial se le da el nombre de *capa a 0°*, se hace alusión a esta estructura como

$$0°, 90°, +45°, -45°, -45°, +45°, 90°, 0°$$

La simetría y equilibrio de este tipo de colocación de capas produce propiedades casi uniformes en dos direcciones. En ocasiones se utiliza el término *casi isotrópico* para describir tal estructura. Observe que las propiedades perpendiculares a las caras de la estructura formada por capas (a través del espesor) aún son bastante bajas porque las fibras no se extienden en esa dirección. Además, la resistencia y rigidez en las direcciones primarias son un poco más bajas que si las capas estuvieran alineadas en la misma dirección. La tabla 2–14 muestra datos de ejemplo de un laminado casi isotrópico, comparado con uno que tiene fibras unidireccionales en la misma matriz.

Procesamiento de compuestos. Un método que frecuentemente se utiliza para producir productos compuestos es primero colocar capas de telas laminadas que tengan la forma deseada y luego impregnarlas con resina húmeda. Cada capa de tela puede ser ajustada en su orientación para producir propiedades especiales del artículo terminado. Una vez que la colocación de las capas y la impregnación de resina se terminan, todo el sistema se somete a calor y presión mientras que un agente de curado reacciona con la resina base para producir vinculación cruzada que aglutina todos los elementos en una estructura unificada tridimensional. El polímero se adhiere a las fibras y las mantiene en su posición y orientación preferidas durante el uso.

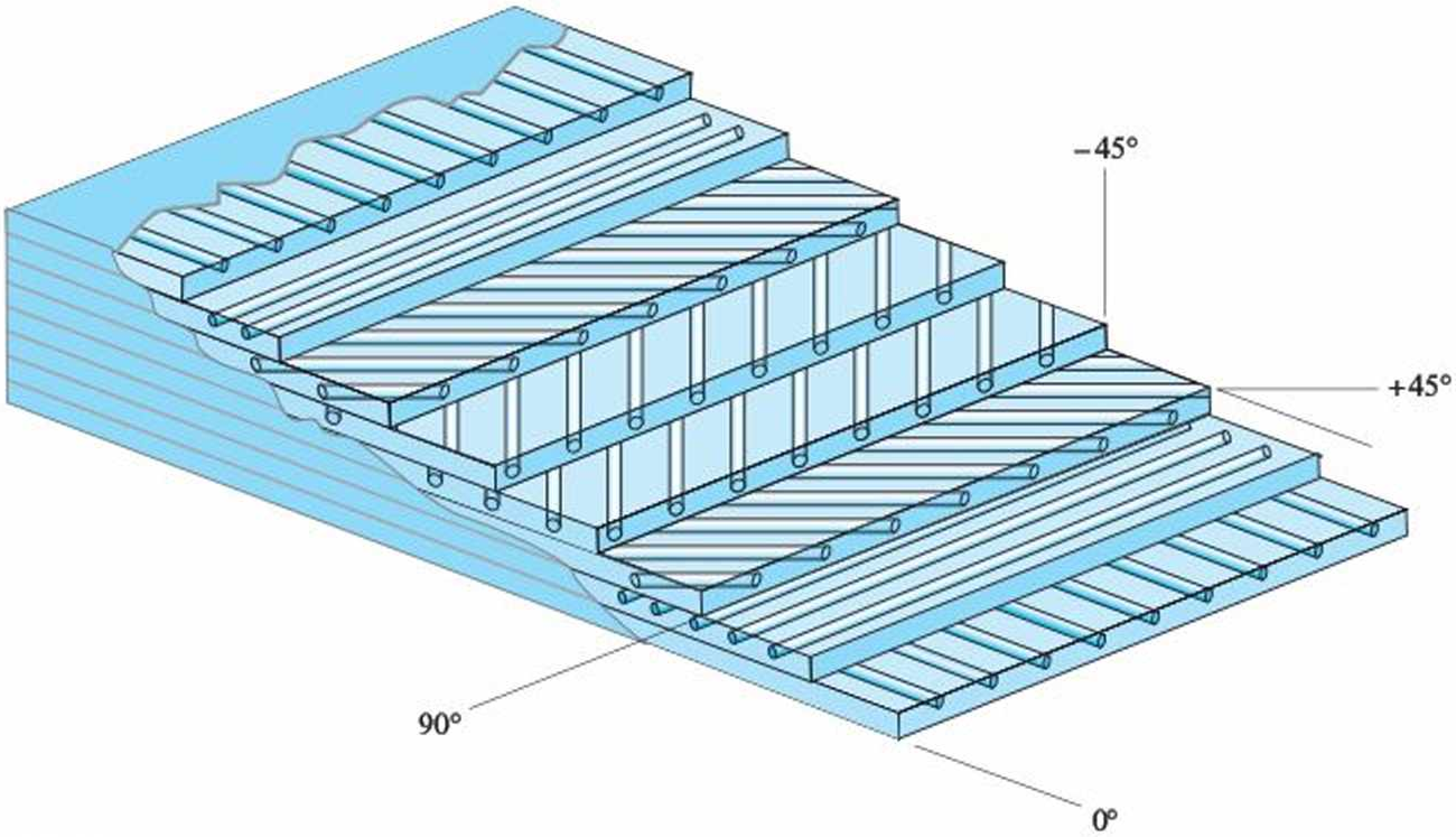


FIGURA 2–28
Construcción de compuesto laminada de varias capas diseñado para producir propiedades casi isotrópicas.

Un método alternativo de fabricar productos compuestos se inicia con un proceso de preimpregnación de las fibras con la resina para producir cordones, cintas, trenzas o láminas. La forma resultante, llamada *prepreg*, entonces se apila en capas o se enrolla para producir la forma y el espesor deseados. El paso final es el ciclo de curado como se describe para el proceso en húmedo.

Los compuestos con base de poliéster a menudo se producen como *compuestos moldeados laminados* (SMC, por sus siglas en inglés) en los que láminas de tela preimpregnadas se colocan en un molde, se forman y curan al mismo tiempo bajo calor y presión. Los grandes paneles de carrocerías automotrices pueden ser producidos de esta manera.

Pultrusion es un proceso en el cual las fibras de refuerzo se cubren de resina en el momento en que son jaladas a través de un troquel caliente para producir una forma continua con el perfil deseado. Este proceso se utiliza para producir varilla, tubería, perfiles estructurales (vigas I, canales, ángulos, y así sucesivamente, tes y secciones acopadas utilizadas como atiesadores en estructuras de aviones).

El *enrollado de filamentos* se utiliza para fabricar tubos, recipientes de presión, cubiertas de motor de cohete, gabinetes de instrumentos y contenedores de formas singulares o raras. El filamento continuo puede ser colocado en varias configuraciones, helicoidal, axial y circunferencial, para producir las características de resistencia y rigidez deseadas.

Predicción de las propiedades de los materiales compuestos. El siguiente análisis resume algunas de las variables importantes requeridas para definir las propiedades de un compuesto. El subíndice c se refiere al compuesto, m se refiere a la matriz y f se refiere a las fibras. La resistencia y rigidez de una material compuesto dependen de las propiedades elásticas de los componentes de las fibras y la matriz, pero otro parámetro es el volumen relativo del material compuesto de fibras, V_f y el del material compuesto de la matriz, V_m. Es decir,

V_f = Fracción en volumen de fibras en el compuesto

V_m = Fracción en volumen de la matriz en el compuesto

Observe que para un volumen unitario, $V_f + V_m = 1$. Entonces, $V_m = 1 - V_f$.

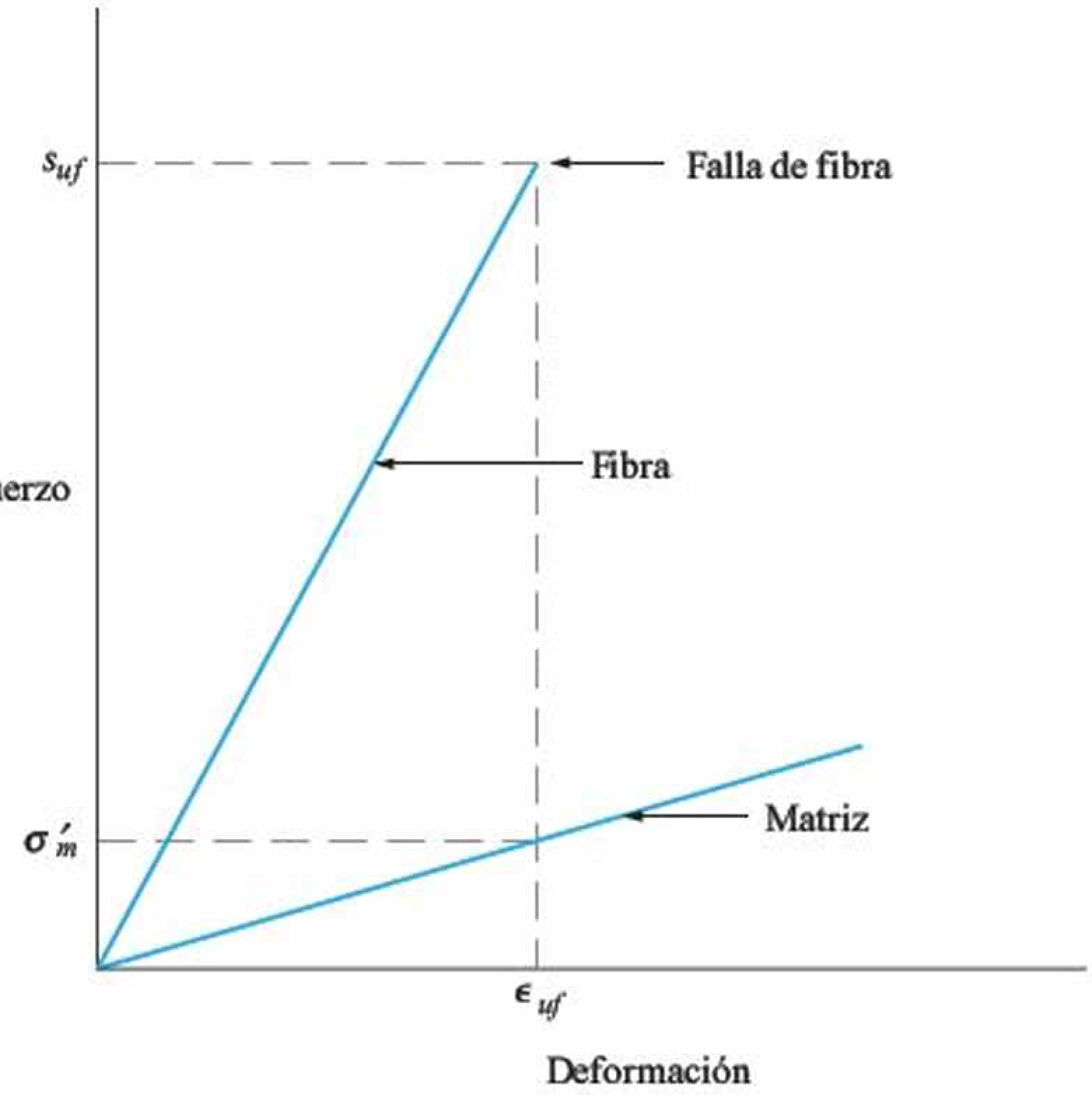


FIGURA 2–29 Esfuerzo contra deformación de materiales de fibras y matriz.

Utilizaremos un caso ideal para ilustrar la forma en que la resistencia y rigidez de un compuesto pueden ser pronosticadas. Considere un compuesto con fibras continuas unidireccionales alineadas en la dirección de la carga aplicada. Las fibras en general son mucho más fuertes y más rígidas que el material de la matriz. Además, la matriz tendrá mayor capacidad que las fibras de sufrir una deformación más grande antes de fracturarse. La figura 2–29 muestra estos fenómenos en una curva de esfuerzo contra deformación para las fibras y la matriz. Utilizaremos la siguiente notación para los parámetros clave que aparecen en la figura 2–29.

s_{uf} = Resistencia máxima de las fibras

ϵ_{uf} = Deformación en las fibras correspondiente a su máxima resistencia

σ'_m = Esfuerzo en la matriz con la misma deformación que ϵ_{uf}

La máxima resistencia del compuesto, s_{uc}, ocurre a un valor intermedio entre s_{uf} y σ'_m, según la fracción de volumen de las fibras y la matriz presentes en el compuesto. Es decir,

$$s_{uc} = s_{uf} V_f + \sigma'_m V_m \tag{2–10}$$

A cualquier nivel bajo de esfuerzo, la relación entre el esfuerzo total en el compuesto, el esfuerzo en las fibras y el esfuerzo en la matriz sigue un patrón similar,

$$\sigma_c = \sigma_f V_f + \sigma_m V_m \tag{2–11}$$

La figura 2–30 ilustra esta relación en un diagrama de esfuerzo-deformación.

Ambos miembros de la ecuación (2–6) se pueden dividir entre la deformación a la cual ocurren estos esfuerzos. Y, como para cada material, $\sigma/\epsilon = E$, el módulo de elasticidad del compuesto puede escribirse como

$$E_c = E_f V_f + E_m V_m \tag{2–12}$$

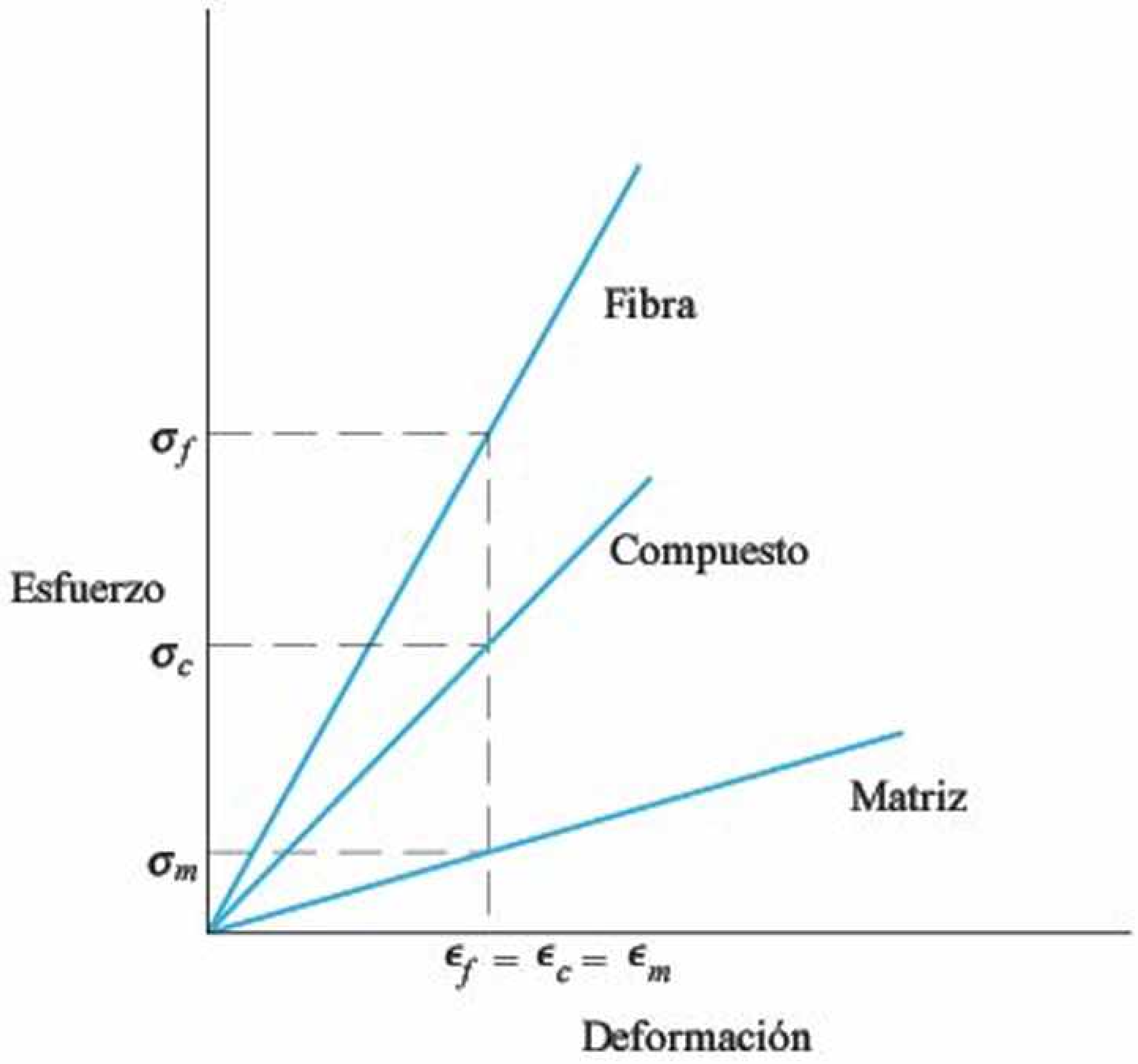


FIGURA 2–30 Relación entre esfuerzos y deformaciones de un compuesto y sus materiales de fibras y matriz.

La densidad de un compuesto se calcula del mismo modo

$$\rho_c = \rho_f V_f + \rho_m V_m \tag{2–13}$$

La densidad se define como masa por unidad de volumen. El peso específico, una propiedad relacionada, se define como peso por unidad de volumen y se denota con el símbolo γ (letra griega gamma). La relación entre densidad y peso específico es simplemente $\gamma = \rho g$, donde g es la aceleración de la gravedad. Si se multiplica cada término de la ecuación (2–8) por g se obtiene la fórmula para el peso específico de un compuesto,

$$\gamma_c = \gamma_f V_f + \gamma_m V_m \tag{2–14}$$

La forma de las ecuaciones 2–12 a 2–14 a menudo se conoce como *regla de las mezclas*.

La tabla 2–15 da valores ejemplo de las propiedades de algunos materiales de matriz y relleno. Recuerde que las propiedades pueden sufrir variaciones importantes, según la formulación exacta y la condición de los materiales.

Problema de ejemplo 2–1 (Sistema SI)

Calcule las propiedades esperadas de resistencia máxima a la tensión, módulo de elasticidad y peso específico de un compuesto hecho de cordones unidireccionales de fibras de carbón–PAN en una matriz epóxica. La fracción de volumen de fibras es de 30%. Use los datos de la tabla 2–15.

Solución

Objetivo Calcular los valores esperados de s_{uc}, E_c y γ_c para el compuesto.

Dato Matriz de epoxy: $s_{um} = 18$ ksi; $E_m = 0.56 \times 10^6$ psi; $\gamma_m = 0.047$ lb/in^3

Fibra-carbón-PAN: $s_{uf} = 470$ ksi, $E_f = 33.5 \times 10^6$ psi; $\gamma_f = 0.064$ lb/in^3

Fracción de volumen de fibra, $V_f = 0.30$. Y $V_m = 1.0 - 0.30 = 0.70$

TABLA 2–15 Propiedades ejemplo de matriz y materiales de relleno.

	Resistencia a la tensión		Módulo de tensión		Peso específico	
	ksi	MPa	10^6 psi	GPa	lb/in³	kN/m³
Materiales de matriz:						
Poliéster	10	69	0.40	2.76	0.047	12.7
Epóxicos	18	124	0.56	3.86	0.047	12.7
Aluminio	45	310	10.0	69	0.100	27.1
Titanio	170	1170	16.5	114	0.160	43.4
Materiales de relleno:						
Vidrio S	600	4140	12.5	86.2	0.09	24.4
Carbón–PAN	470	3240	33.5	231	0.064	17.4
Carbón–PAN (alta resistencia)	820	5650	40	276	0.065	17.7
Carbón (alto módulo)	325	2200	100	690	0.078	21.2
Aramida	500	3450	19.0	131	0.052	14.1

Análisis y resultados

Resistencia máxima a la tensión, s_{uc} calculada con la ecuación (2–5)

$$s_{uc} = s_{uf}V_f + \sigma'_m V_m$$

Para determinar σ'_m, primero se determina la deformación a la cual las fibras fallarían a s_{uf} Asuma que las fibras son linealmente elásticas hasta que fallan. Entonces,

$$\epsilon_f = s_{uf}/E_f = (470 \times 10^3 \text{ psi})/(33.5 \times 10^6 \text{ psi}) = 0.014$$

Con esta misma deformación, el esfuerzo en la matriz es

$$\sigma'_m = E_m\epsilon = (0.56 \times 10^6 \text{ psi})(0.014) = 7840 \text{ psi}$$

Entonces, en la ecuación (2–5),

$$s_{uc} = (470\ 000 \text{ psi})(0.30) + (7840 \text{ psi})(0.70) = 146\ 500 \text{ psi}$$

El módulo de elasticidad calculado con la ecuación (2–7),

$$E_c = E_fV_f + E_mV_m = (33.5 \times 10^6)(0.30) + (0.56 \times 10^6)(0.70)$$
$$E_c = 10.4 \times 10^6 \text{ psi}$$

El peso específico calculado con la ecuación (2–9),

$$\gamma_c = \gamma_fV_f + \gamma_mV_m = (0.064)(0.30) + (0.047)(0.70) = 0.052 \text{ lb/in}^3$$

Resumen de resultados

$$s_{uc} = 146\ 500 \text{ psi}$$

$$E_c = 10.4 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$\gamma_C = 0.052 \text{ lb/in}^3$$

Comentario

Observe que las propiedades resultantes para el compuesto son intermedias entre las correspondientes a las fibras y las correspondientes a la matriz.

2–13 SELECCIÓN DE MATERIALES

Una de las tareas más importantes de un diseñador es la especificación del material del cual cualquier componente individual de un producto se tiene que hacer. La decisión debe considerar un gran número de factores, muchos de los cuales ya se discutieron en este capítulo.

El proceso de selección de materiales debe comenzar con un claro entendimiento de las funciones y requerimientos de diseño para el producto y el componente individual. En seguida, el diseñador deberá considerar las interrelaciones entre lo siguiente:

- Las funciones del componente
- La forma del componente
- El material del cual se tiene que hacer el componente
- El proceso de fabricación utilizado para producir el componente

Los requerimientos generales en relación con el desempeño del componente deben ser detallados. Esto incluye, por ejemplo:

- La naturaleza de las fuerzas aplicadas al componente.
- Los tipos y magnitudes de los esfuerzos creados por las fuerzas aplicadas.
- La deformación permisible del componente en puntos críticos.
- Las interfaces con otros componentes del producto.
- El ambiente en el cual el componente tiene que operar.
- El tamaño físico y peso del componente.
- La estética esperada para el componente y el producto completo.
- Objetivos de costos para el producto en su conjunto y este componente en particular.
- Proceso de fabricación anticipado disponible.

Se puede elaborar una lista más detallada con más conocimiento de condiciones específicas.

Con los resultados de los ejercicios previamente descritos, usted deberá desarrollar una lista de propiedades de material claves que son importantes. Algunos ejemplos incluyen:

1. La resistencia indicada por la resistencia máxima a la tensión, resistencia a la cadencia, resistencia a la compresión, resistencia a la fatiga, resistencia al cortante y otras.
2. La rigidez indicada por el módulo de elasticidad a tensión, el módulo de elasticidad a cortante o módulo de flexión.
3. El peso y masa indicados por el peso específico y densidad.
4. La ductilidad indicada por el porcentaje de alargamiento.
5. La tenacidad indicada por la energía de impacto (Izod, Charpy, etc.).
6. Datos de desempeño en cuanto a fluencia.
7. La resistencia a la corrosión y compatibilidad con el ambiente.
8. Costo del material.
9. Costo para procesar el material.

Se deberá crear entonces una lista de materiales candidato con base en su conocimiento del comportamiento de varios tipos de material, aplicaciones exitosas similares y tecnologías materiales emergentes. Se deberá aplicar un análisis racional de las decisiones para determinar los tipos de material más adecuados de la lista de candidatos. Esto podría adoptar la forma de una matriz en la que las propiedades de cada material candidato se ingresan y clasifican. Un análisis del conjunto completo de datos ayudará a tomar la decisión final.

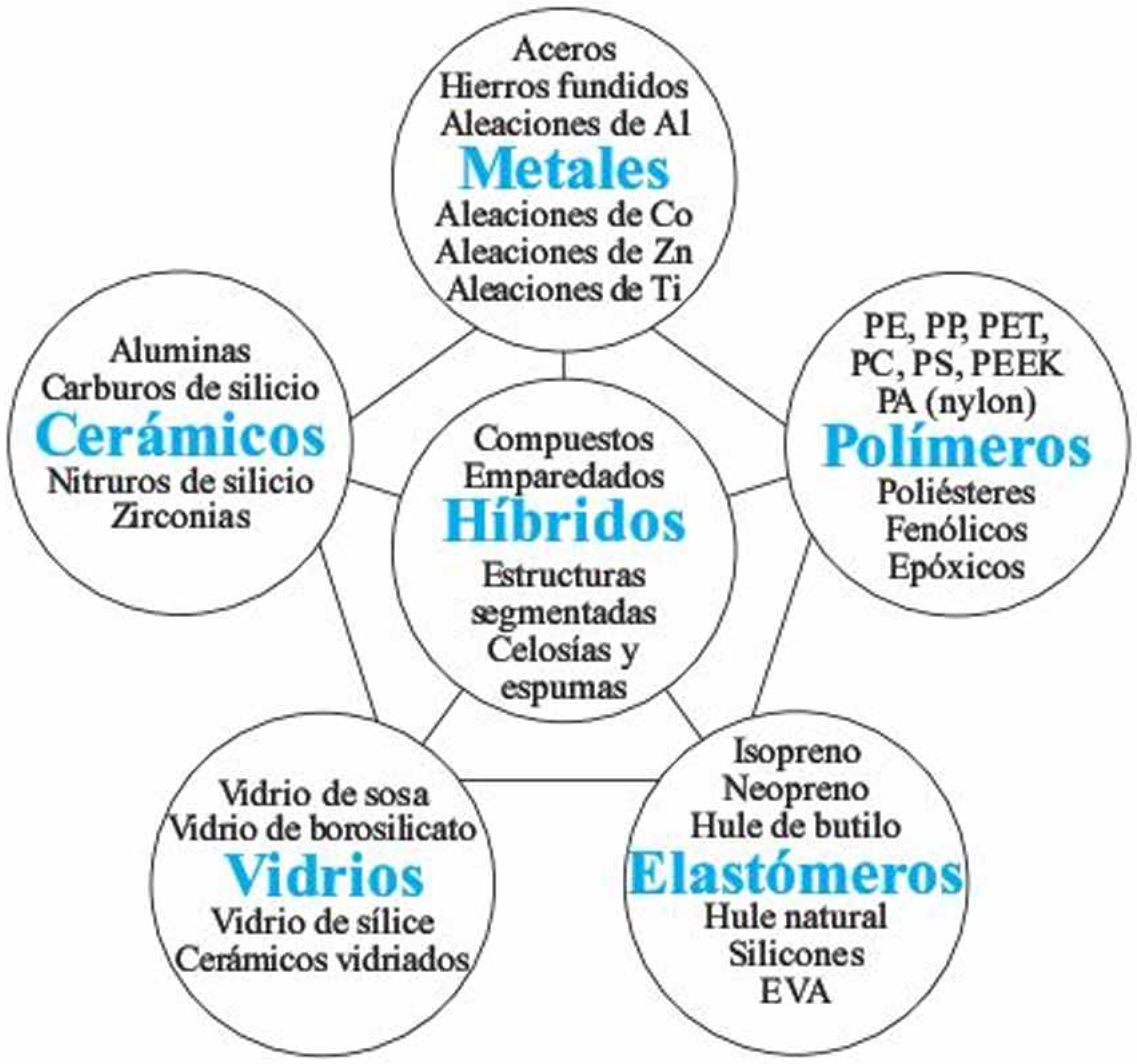


FIGURA 2–31 Clasificación de materiales. (Fuente: Granta Design, Cambridge, Reino Unido)

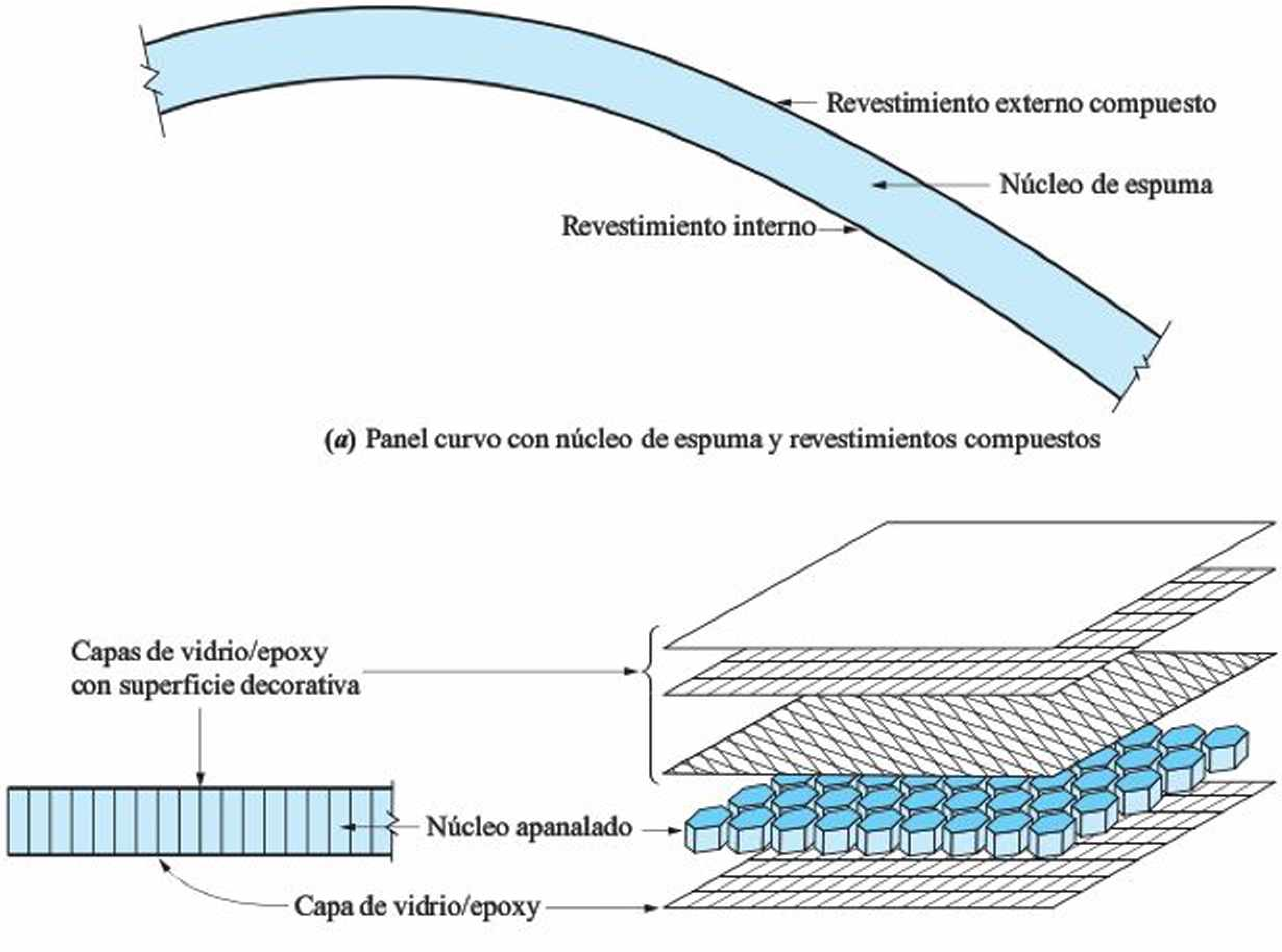
En las referencias 4–6, 9, 16 y 29 se describen procesos de selección de materiales más amplios.

La figura 2–31 es un resumen general de los tipos de material de entre los cuales un diseñador puede seleccionar para una aplicación particular. Básicamente muestra cinco clases primarias: metales, polímeros, cerámicos, vidrios y elastómeros, junto con híbridos que combinan dos o más materiales para lograr propiedades especializadas. Los compuestos analizados en la sección 2–12 son un ejemplo obvio cada vez más popular de materiales híbridos. También incluidas como híbridos están estructuras fabricadas, tales como paneles emparedados que emplean núcleos internos muy ligeros pero relativamente rígidos entre revestimientos externos fuertes que soportan mucha de la carga. Vea la figura 2–32. Los núcleos pueden ser espumas, panales, láminas corrugadas y otros materiales semejantes. La estructura resultante es un ejemplo de seleccionar materiales para optimizar el desempeño de un componente dado.

Sin embargo, el número cabal de materiales diferentes de los cuales escoger hace que la selección de materiales sea una tarea intimidante. Métodos especializados, como se describe en la referencia 4, ofrecen una guía significativa en el proceso de selección. Además, hay software disponible para buscar con rapidez muchos parámetros con el fin de producir listas de materiales candidato con datos cuantitativos sobre su desempeño, costo, productibilidad u otros criterios importantes. Dos ejemplos relativamente simples de procesos de selección ayudan a ilustrar el método. Visite el sitio de Internet 31.

Algunos componentes de una estructura o máquina pueden limitarse, por resistencia, a donde evitar la falla es lo primordial. Además, puede ser deseable reducir al mínimo el peso del componente como en aplicaciones aeroespaciales o donde el diseñador de un edificio desea un peso total bajo de una estructura para reducir los costos y las cargas sobre los cimientos. En este caso, la disposición de datos de propiedad de material en la forma mostrada en la figura 2–33 ayudaría a visualizar posibles opciones. Aquí el eje vertical es la resistencia a la cedencia de los materiales y el eje horizontal es la densidad. Si desea una alta resistencia y un peso bajo, el diseñador se dirigiría a la esquina superior izquierda de la gráfica. Las áreas sombreadas muestran el intervalo de resistencia y propiedades de densidad de las diferentes clases de materiales.

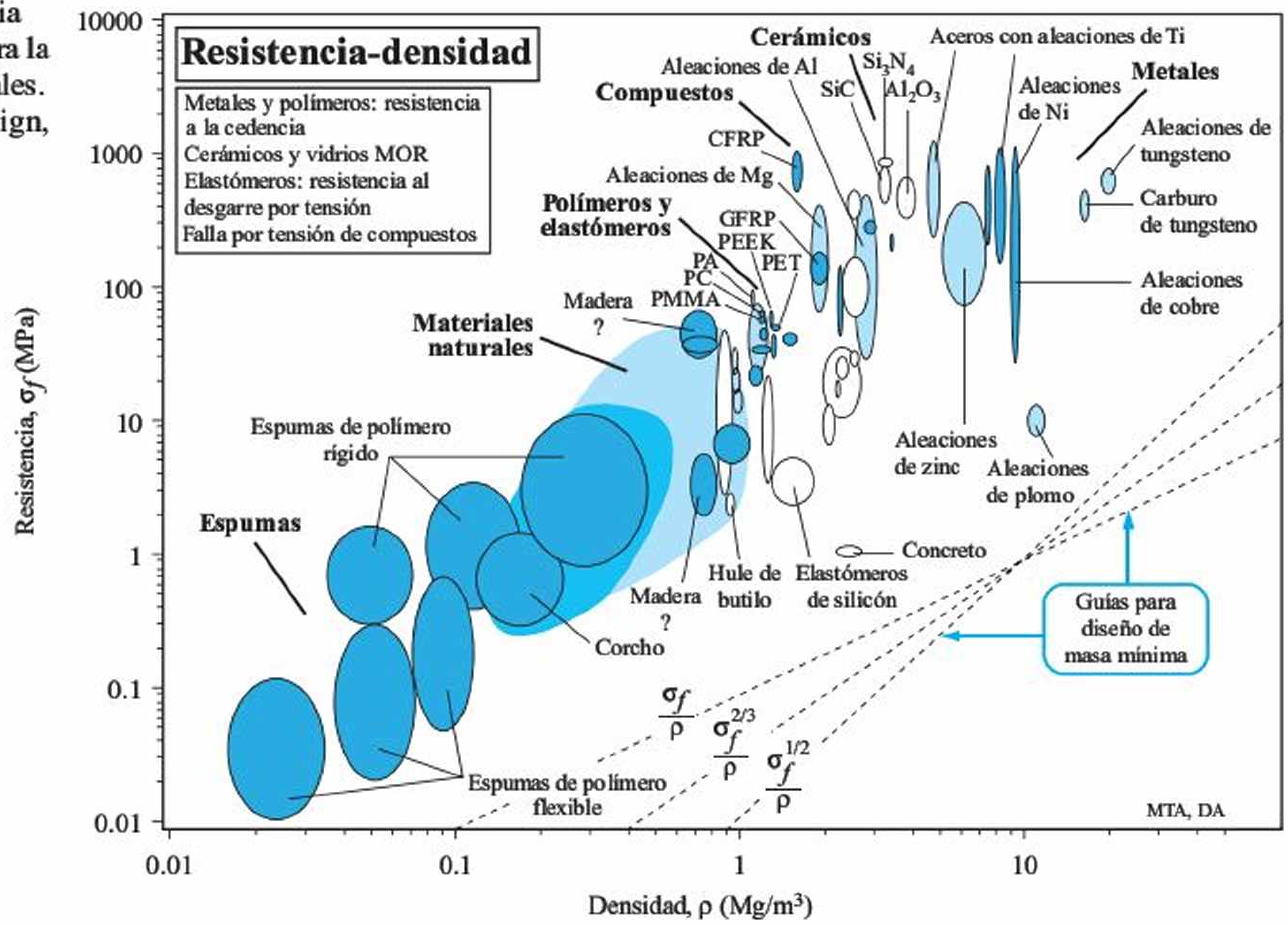
FIGURA 2–32
Paneles laminados con núcleos de peso ligero.



(*a*) Panel curvo con núcleo de espuma y revestimientos compuestos

(*b*) Paneles planos con núcleos de panales y revestimientos de varias capas

FIGURA 2–33
Gráfica de resistencia contra ductilidad para la selección de materiales. (Fuente: Granta Design, Cambridge, Reino Unido)



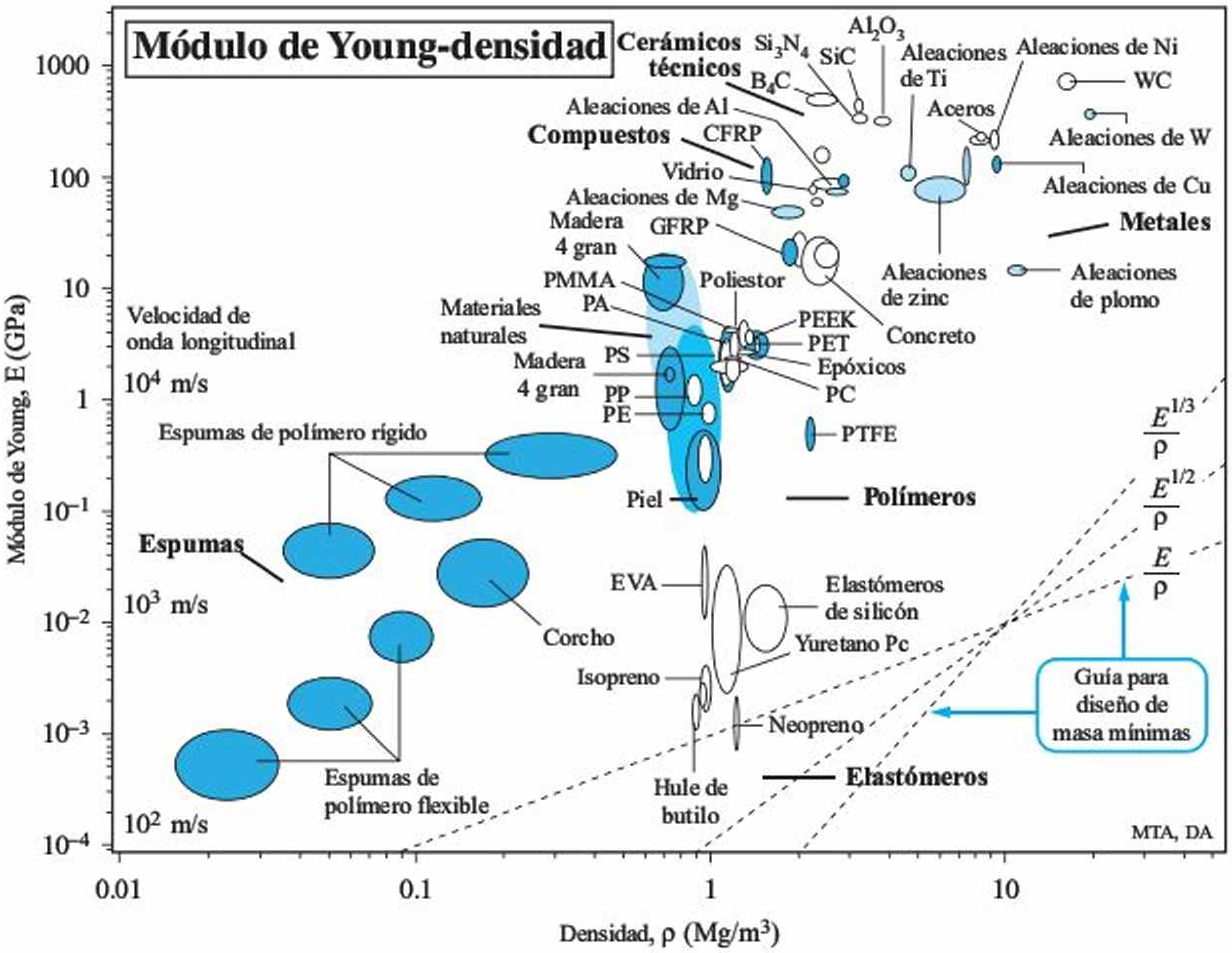


FIGURA 2–34
Gráfica de módulo de Young contra densidad para la selección de materiales. (Fuente: Granta Design, Cambridge, Reino Unido)

Se puede aplicar un método alterno donde la rigidez de un componente es primordial, como en el diseño del piso de un avión de pasajeros o un edificio de departamentos. Los ocupantes desean un piso rígido que no flexione notablemente. De nueva cuenta, es posible que el diseñador desee reducir al mínimo el peso. La figura 2–34 muestra una gráfica de módulo de elasticidad, E, contra densidad de varios materiales. Aquí, de nuevo el diseñador se dirigiría a la esquina superior izquierda en busca de materiales deseables. Gráficas más detalladas muestran ejemplos más específicos dentro de estas áreas, tales como aleaciones de acero específicas dentro la región más grande de "Metales".

Se pueden construir muchas otras búsquedas paramétricas con el software de selección.

REFERENCIAS

1. Aluminum Association, *Aluminum Design Manual*, Washington, DC, 2005.
2. American Concrete Institute, *2006 Manual of Concrete Practice*, American Concrete Institute, Farmington Hills, MI, 2006.
3. ASTM Internacional, *Annual Book of Standards*, 2006, West Conshohocken, PA, 2006.
4. Ashby, M. F., *Materials Selection in Mechanical Design*, 3ª ed., Butterworth–Heinemann, Burlington, MA, 2005.
5. ASM International, *ASM Handbook*, *Volume 1: Properties and Selection: Irons, Steels, and High Performance Alloys*, Materials Park, OH, 1990.
6. ASM International, *ASM Handbook*, *Volume 2: Properties and Selection: Nonferrous Alloys and Special–Purpose Materiales*, Materials Park, OH, 1991.
7. ASM International, *ASM Handbook*, *Volume 4: Heat Treating*, Materials Park, OH, 1991.
8. ASM International, *ASM Handbook*, *Volume 8: Mechanical Testing*, Materials Park, OH, 2000.
9. ASM International, *ASM Handbook*, *Volume 20: Materials Selection and Design*, Materials Park, OH, 1997.
10. ASM International, *ASM Handbook*, *Volume 21: Composites*, Materials Park, OH, 2001.
11. ASM Internacional, *Engineering Plastics*, *Engineered Materials Handbook*, *Volume 2*, Materials Park, OH, 1988.
12. ASM Internacional, *Metals Handbook Desk Edition*, 2ª ed., Materials Park, OH, 1998.
13. Avallone, Eugene A. y Theodore Baumeister Ill, eds., *Marks' Standard Handbook for Mechanical Engineers*, 10ª ed., McGraw–Hill, Nueva York, 1996.
14. Berins, Michael L., ed., *Plastic Engineering Handbook of the Society of the Plastics Industry, Inc*., 5ª ed., Chapman and Hall, Nueva York, 1995.

15. Bertholet, Jean–Marie y Michael J. Cole, *Composite Materials: Mechanical Behavior and Structural Analysis*, Springer Verlag, Nueva York, 1999.
16. Budinski, K. G. y M. K. Budinski, *Engineering Materials: Properties and Selection*, 8ª ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2005.
17. Bunsell, A. R. y J. Renard, *Fundamentals of Fibre Reinforced Composite Materials*, CRC Press, Boca Raton, FL., 2005.
18. Dupont Engineering Polymers, *Design Handbook for DuPont Engineering Polymers: General Design Principles*. The DuPont Company, Wilmington, DE, 2002.
19. Faherty, Keith F. y Thomas G. Williamson, *Word Engineering and Construction Handbook*, 3ª ed., McGraw–Hill, Nueva York, 1999.
20. Gay, D., D. Hoa y S. W. Tsai, *Composite Materials Design and Applications*, CRC Press, Boca Raton, FL., 2002.
21. Mallick, P. K., *Composites Engineering Handbook*, Marcel Dekker, Nueva York, 1997.
22. The Masonry Society, *Masonry Designer's Guide*, 4ª ed., The Masonry Society Boulder, Co, 2003.
23. Mazumdar, S., *Composites Manufacturing Materials Product, and Process Engineering*, CRC Press, Boca Raton, FL., 2001.
24. Mehta, P. Kumar y P.J. M. Monteiro, *Concrete*, 3ª ed., McGraw–Hill, Nueva York, 2006.
25. Mott, Robert L., *Machine Elements in Mechanical Design*, 4ª ed., Prentice–Hall, Upper Saddle River, NJ, 2004.
26. Richardson, T., *Composites: A Design Guide*, Industrial Press, Nueva York, 1987.
27. Staab, George H., *Laminar Composites*, Butterworth–Heinemann, Boston, 1999.
28. Shackelford, J. F. y W. Alexander, *The CRC Materials and Science and Engineering Handbook*, 3ª ed., CRC Press, Boca Raton, FL, 2000.
29. Shackelford, J. F., W. Alexander y J. S. Park, *The CRC Practical Handbook of Materials Selection*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.
30. Strong, A. Brent., *Plastics: Materials and Processing*, 3ª ed., Prentice–Hall, Upper Saddle River, NJ, 2006.
31. U.S. Department of Agricultura Forest Products Laboratory, *Wood Handbook-Woods as an Engineering Material*, Forest Products Laboratory, Madison, WI, 1999.

SITIOS DE INTERNET

1. AzoM.com (A a la Z de los materiales) www.azom.com Fuente de información de materiales para la comunidad del diseño. Bases de datos investigables gratuitas de metales, cerámicos, polímeros y compuestos. También se puede buscar por palabra clave, aplicación o tipo de industria.
2. Matweb www.matweb.com Base de datos de propiedades de material de muchos metales, plásticos, cerámicos y otros materiales de ingeniería.
3. ASM International www.asm-intl.org La sociedad de ingenieros de materiales y científicos: una red mundial dedicada al avance de la industria, tecnología y aplicaciones de metales y otros materiales.
4. TECHstreet www.techstreet.com Una tienda donde se pueden adquirir normas de la industria de los metales.
5. SAE International www.sae.org La sociedad de ingenieros automotrices, la sociedad de ingeniería para el avance de la movilidad en tierra o mar, en el aire o espacio. Un recurso de información técnica utilizada en el diseño de vehículos autopropulsados. Ofrece normas sobre metales, plástico y otros materiales junto con componentes y subsistemas de vehículos.
6. ASTM International www.astm.org Anteriormente conocida como la *American Society for Testing and Materials* (Sociedad Estadounidense para Pruebas y Materiales). Desarrolla y vende normas de propiedades de materiales, procedimientos de prueba y muchas otras normas técnicas.
7. American Iron and Steel Institute www.steel.org AISI desarrolla normas para la industria de materiales de acero y productos hechos de acero. Están disponibles manuales de productos de acero y normas industriales a través de la Iron & Steel Society (ISS), listados por separado.
8. Association for Iron & Steel Technology www.aist.org Promueve desarrollo técnico, producción, procesamiento y aplicación del hierro y el acero. Proporciona publicaciones, conferencias y reuniones técnicas para la comunidad del hierro y el acero.
9. Aluminum Association www.aluminum.org La asociación de la industria del aluminio. Proporciona numerosas publicaciones que pueden ser adquiridas.
10. Alcoa, Inc., www.alcoa.com Un fabricante de aluminio y productos fabricados. En el sitio web se pueden buscar propiedades de aleaciones específicas.
11. Copper Development Association www.copper.org Proporciona una gran base de datos consultable de propiedades de cobre forjado y fundido, aleaciones de cobre, latones y bronces. Permite buscar aleaciones apropiadas para usos industriales típicos con base en varias características de desempeño.
12. Metal Powder Industies Federation www.mpif.org La asociación internacional del ramo que representa a los productores de metales en polvo. Normas y publicaciones relacionadas con el diseño y producción de productos que utilizan metales en polvo.
13. INTERZINC www.interzinc.com Un grupo de transferencia de tecnología y desarrollo del mercado dedicado a incrementar el conocimiento de aleaciones de fundición de zinc. Proporciona asesoría de diseño, una guía de selección de aleaciones, propiedades de aleaciones y descripciones de aleaciones de fundición.

14. RAPRA Technology Limited www.rapra.net Fuente de información amplia para las industrias del plástico y hule. Anteriormente Rubber and Plastics Research Association. Este sitio también aloja el Cambridge Engineering Selector, un recurso computarizado que utiliza la metodología de selección de materiales de M. F. Sabih. Consulte la referencia 4.
15. Dupont Plastics www.plastics.dupont.com Información y datos sobre plásticos de DuPont y sus propiedades. Base de datos consultable por tipo de plástico o aplicación.
16. PolymerPlace.com www.polymerplace.com Fuente de información para la industria de los polímeros.
17. PlasticsUSA.com www.plasticsusa.com Un portal de Internet que proporciona información técnica para la industria de los polímeros e industrias del usuario final incluidos los sectores automotriz, de la construcción, eléctrico, médico, de encapsulado y del poliuretano. Incluye una base de datos de materiales plásticos, información sobre marcas y vínculos de proveedores de materiales plásticos y equipo de procesamiento.
18. Plastics Technology Online www.ptonline.com Una fuente de información en línea sobre la industria del plástico y procesos tales como moldeado por inyección, extrusión, moldeado por soplado, termoformación, espuma, materiales, herramientas y equipo auxiliar.
19. Society of Plastics Engineers www.4spe.org SPE promueve el conocimiento científico y de ingeniería y educación sobre plásticos y polímeros a nivel mundial.
20. U.S. Department of Agricultura, Forest Products Laboratory www.fpl.fs.fed.us Organización de investigación dedicada a producir información útil para la industria de productos forestales y usuarios de productos de madera.
21. American Concrete Institute www.aci-int.org Editor de documentos técnicos relacionados con la promoción del conocimiento del concreto, incluido el 2006 *Concrete Manual of Concrete Practice.*
22. The Masonry Society www.masonrysociety.org Una asociación profesional dedicada al avance del conocimiento sobre mampostería y editor de *Masonry Designer's Guide*.
23. MTS Systems Corporation *www.mts.com* Un proveedor de productos de prueba de materiales, incluidas máquinas de prueba universales, máquinas de pruebas dinámicas y de fatiga de metales, plásticos, biomateriales, madera, fibras y otros.
24. Instrom Corporation www.instrom.com Proveedor de productos de prueba de materiales incluidas máquinas de prueba universales, máquinas de pruebas dinámicas y de fatiga, probadores de choque térmico, dureza (Wilson y Shore), probadores de impacto, probadores de propagación de grietas y tenacidad a la fractura.
25. Tinius Olsen, Inc., www.tiniusolsen.com Un proveedor de productos de prueba de materiales incluidas máquinas de prueba universales estáticas, probadores de impacto, probadores de torsión y equipo especial para la industria de los plásticos y alimentos. El sitio cuenta con una pestaña Resource Center útil que proporciona información de referencia rápida.
26. Zwick Roell Group www.zwickroell.com Proveedor de productos de prueba de materiales incluidas máquinas de prueba universales, máquinas de pruebas dinámicas y de fatiga, probadores de impacto y sistemas automatizados especializados. The Indentec Hardness Testing Machines, Ltd. proporciona una amplia variedad de probadores de dureza.
27. Nacional Institute of Standards and Technology (NIST)-Special Publication 960–5, *Rockwell Hardness Measurement of Metallic Materials* de Samuel R. Low. Puede ser descargada de: http://www.metallurgy.nist.gov/reports/recommendedpractice/SP960.5.pdf
28. Special Metals Corporation www.specialmetals.com Productor de aleaciones de níquel de las marcas INCONEL, INCOLOY, NIMONIC, UDIMET, MONEL y NILO.
29. Allegheny Ludlum Corporation www.alleghenyludlum.com Productor de aleaciones de níquel de las marcas AL, ALLCORR y ALTEMP.
30. Haynes International, Inc., www.haynesintl.com Productor de aleaciones de níquel y cobalto de las marcas HASTELLOY, HAYNES y ULTIMET.
31. Granta Material Intelligence www.grantadesign.com Productor y comercializador del software de selección de materiales EduPack que utiliza conceptos desarrollados por el profesor Michael F. Ashby.

PROBLEMAS

2–1. Mencione cuatro clases de metales comúnmente utilizados para miembros sometidos carga.

2–2. Mencione 11 factores que deben considerarse cuando se selecciona un material para un producto.

2–3. Defina resistencia máxima a la tensión.

2–4. Defina punto de cedencia.

2–5. Defina resistencia a la cedencia.

2–6. ¿Cuándo se utiliza la resistencia a la cedencia en lugar del punto de cedencia?

2–7. Defina rigidez.

2–8. ¿Qué propiedad de material es una medida de su rigidez?

2–9. Enuncie la ley de Hooke.

2–10. ¿Qué propiedad de material es una medida de su ductilidad?

2–11. ¿Cómo se clasifica un material con respecto a si es dúctil o frágil?

2–12. Mencione cuatro tipos de aceros.

2–13. ¿Qué significa la designación AISI 4130 para un acero?

2–14. ¿Cuáles son la resistencia máxima, la resistencia a la cedencia y el porcentaje de alargamiento del acero AISI 1040 laminado en caliente? ¿Es un material dúctil o frágil?

2–15. ¿Cuál tiene una mayor ductilidad: el acero AISI 1040 laminado en caliente o el acero AISI 1020 laminado en caliente?

2–16. ¿Qué significa la designación AISI 1141 OQT 700?

2–17.E Si la resistencia a la cedencia de un acero es de 150 ksi, ¿se podría utilizar el AISI 1141? ¿Por qué?

2–18.M ¿Cuál es el módulo de elasticidad del acero AISI 1141? ¿Del acero AISI 5160?

2–19.E Una barra rectangular de acero es de 1.0 in por 4.0 in por 14.5 in. ¿Cuánto pesa en libras?

2–20.M Una barra circular es de 50 mm de diámetro y 250 mm de largo. ¿Cuánto pesa en newtons?

2–21.M Si se aplica una fuerza de 400 N a una barra de titanio y a una barra idéntica de magnesio, ¿cuál se alargaría más?

2–22. Mencione cuatro tipos de aceros estructurales y dé el punto de cedencia de cada uno.

2–23. ¿Qué significa la designación 6061–T6 de una aleación de aluminio?

2–24.E Mencione la resistencia máxima, la resistencia a la cedencia, el módulo de elasticidad y la densidad de aluminio 6061–O, 6061–T4 y 6061–T6.

2–25. Mencione cinco usos del bronce.

2–26. Mencione tres características deseables del titanio en comparación con el aluminio o acero.

2–27. Mencione cinco variedades de hierro fundido.

2–28. ¿Qué tipo de hierro fundido normalmente se considera que es frágil?

2–29.E ¿Cuáles las resistencias máximas a tensión y a compresión de hierro fundido ASTM A48 grado 40?

2–30. ¿Cómo difiere un hierro dúctil de un hierro gris?

2–31.E Mencione los esfuerzos permisibles a flexión, tensión, compresión y cortante del pino Douglas grado núm. 2.

2–32.E ¿Cuál es el intervalo normal de resistencias a la compresión del concreto?

2–33. Describa la diferencia entre materiales termoplásticos y termofraguados.

2–34. Mencione tres plásticos adecuados para usarse como engranes o levas en dispositivos mecánicos.

2–35. Describa el término *compuesto*.

2–36. Mencione cinco tipos básicos de materiales que se utilizan como matriz de compuestos.

2–37. Mencione cinco termoplásticos diferentes que se utilizan como matriz de compuestos.

2–38. Mencione tres plásticos termoformados utilizados como matriz de compuestos.

2–39. Mencione tres metales utilizados como matriz de compuestos.

2–40. Describa nueve formas que los materiales de relleno adoptan cuando se utilizan en compuestos.

2–41. Analice las diferencias entre *cordones*, *primera torsión* y *tela* como diferentes formas de rellenos para compuestos.

2–42. Mencione siete tipos de materiales de relleno utilizados para compuestos.

2–43. Nombre cinco tipos diferentes de fibras de vidrio utilizadas para compuestos y describa las características principales de cada uno.

2–44. ¿Cuál de los materiales de relleno comúnmente utilizados tiene la rigidez más alta?

2–45. ¿Qué materiales de relleno deben ser considerados para aplicaciones alta temperatura?

2–46. ¿Cuál es la marca comercial común de las fibras de aramida?

2–47. Defina la *resistencia específica* de un compuesto.

2–48. Defina el *módulo específico* de un compuesto.

2–49. Mencione diez ventajas de los compuestos comparados con los metales.

2–50. Mencione nueve limitaciones de los compuestos.

2–51. Con los datos de los materiales seleccionados en la tabla 2–13, mencione los diez materiales en orden de resistencia específica desde la más alta hasta la más baja. Para cada uno, calcule la relación de su resistencia específica a la del acero AISI 1020 HR.

2–52. Con los datos de los materiales seleccionados en la tabla 2–13, mencione los diez materiales en orden de módulo específico desde el más alto hasta el más bajo. Para cada uno, calcule la relación de su resistencia específica a la del acero AISI 1020 HR.

2–53. Describa un laminado unidireccional y su resistencia general y características de rigidez.

2–54. Describa un laminado casi isotrópico y su resistencia general y características de rigidez.

2–55. Compare la resistencia específica y características de rigidez generalmente esperadas de un laminado casi isotrópico con un laminado unidireccional.

2–56. Describa un compuesto laminado que ostenta la designación 0°, +45°, −45°, −45°, +45°, 0°.

2–57. Describa un compuesto laminado que ostenta la designación 0°, +30°, +45°, +45°, +30°, 0°.

2–58. Defina el término *fracción de volumen de una fibra* para un compuesto.

2–59. Defina el término *fracción de volumen de una matriz* para un compuesto.

2–60. Si la fracción en volumen de una fibra es de 0.60, ¿cuál es la fracción de volumen de la matriz?

2–61. Escriba la ecuación para la resistencia máxima esperada de un compuesto en función de las propiedades de su matriz y los materiales de relleno.

2–62. Escriba las ecuaciones para la *regla de mezclas* tal como se aplica a un compuesto unidireccional para el esfuerzo en éste, su módulo de elasticidad, su densidad y su peso específico.

2–63.M Calcule las propiedades esperadas de resistencia máxima, módulo de elasticidad y peso específico de un compuesto hechos de cordones unidireccionales de fibras de carbón-PAN de alta resistencia en una matriz epóxica. La fracción de volumen de las fibras es de 50%. Calcule la resistencia

específica y la rigidez específica. Use los datos de la tabla 2–15.

2–64.M Repita el problema 2–63 con fibras de carbón de alto módulo.

2–65.M Repita el problema 2–63 con fibras de aramida.

Problemas 2–66 a 2–77

Use la figura P2–66 para todos los problemas. Con los datos dados en el enunciado del problema y los datos lea en la curva de esfuerzo–deformación indicada, determine las siguientes propiedades para el material.

a) Resistencia a la cedencia. Diga si se utiliza el punto de cedencia para determinar este valor o si se utiliza el método de desviación de 0.2%.

b) Resistencia máxima a la tensión.

c) Límite proporcional.

d) Límite elástico.

e) Módulo de elasticidad en el intervalo de esfuerzos donde la ley de Hooke es válida.

f) Porcentaje de alargamiento. [La longitud de calibración para cada prueba es de 2.00 in].

g) Diga si el material es dúctil o frágil.

h) Examine los resultados y juzgue la clase de metal utilizado para determinar los datos de prueba.

i) Compare sus resultados y encuentre una aleación particular en las tablas del apéndice A–14 a A–18 que tenga propiedades similares.

2–66 Use la curva A de la figura P2–66. Longitud final entre las marcas de calibración = 2.22 in.

2–67 Use la curva B de la figura P2–66. Longitud final entre las marcas de calibración = 2.30 in.

2–68 Use la curva C de la figura P2–66. Longitud final entre las marcas de calibración = 2.30 in.

2–69 Use la curva D de la figura P2–66. Longitud final entre las marcas de calibración = 2.72 in.

2–70 Use la curva E de la figura P2–66. Longitud final entre las marcas de calibración = 2.01 in.

2–71 Use la curva F de la figura P2–66. Longitud final entre las marcas de calibración = 2.42 in.

2–72 Use la curva G de la figura P2–66. Longitud final entre las marcas de calibración = 2.10 in.

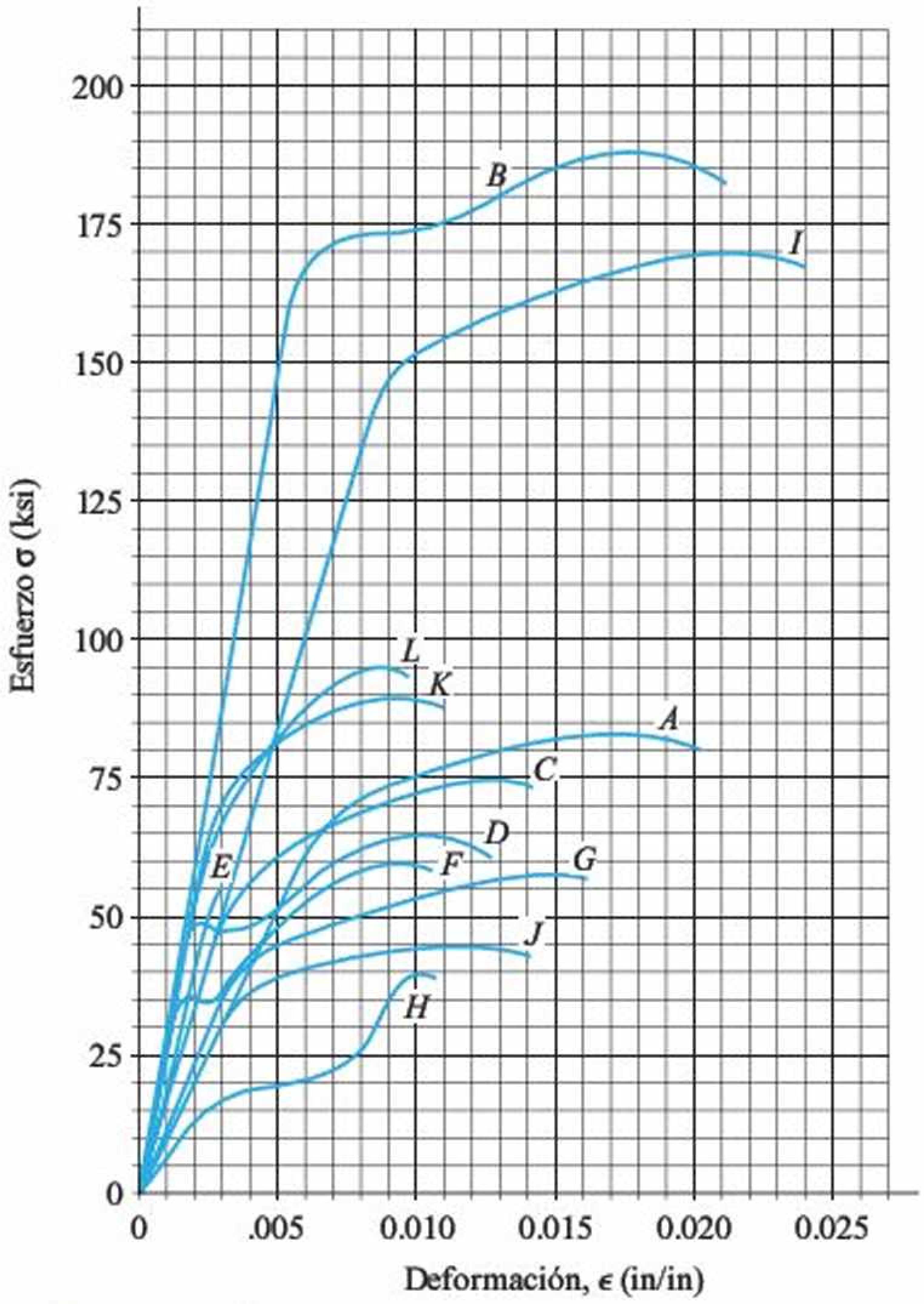


FIGURA P2–66
Curvas de esfuerzo-deformación.

2–73 Use la curva H de la figura P2–66. Longitud final entre las marcas de calibración = 2.10 in.

2–74 Use la curva I de la figura P2–66. Longitud final entre las marcas de calibración = 2.16 in.

2–75 Use la curva J de la figura P2–66. Longitud final entre las marcas de calibración = 2.34 in.

2–76 Use la curva K de la figura P2–66. Longitud final entre las marcas de calibración = 2.30 in.

2–77 Use la curva L de la figura P2–66. Longitud final entre las marcas de calibración = 2.04 in.

3

Esfuerzo directo, deformación y diseño

La imagen completa y actividad

3–1 Objetivos de este capítulo

3–2 Diseño de miembros sometidos a tensión o compresión directa

3–3 Esfuerzos normales de diseño

3–4 Factor de diseño

3–5 Métodos de diseño y guías para seleccionar factores de diseño

3–6 Métodos de calcular esfuerzo de diseño

3–7 Deformación elástica en miembros sometidos a tensión y compresión

3–8 Deformación provocada por cambios de temperatura

3–9 Esfuerzo térmico

3–10 Miembros hechos de más de un material

3–11 Factores de concentración de esfuerzo con esfuerzos axiales directos

3–12 Esfuerzo de apoyo

3–13 Esfuerzo de apoyo de diseño

3–14 Esfuerzo cortante de diseño

La imagen completa

Esfuerzo directo, deformación y diseño

Mapa de análisis

- Aprovechará la habilidad de calcular esfuerzos aprendida en el capítulo 2 y desarrollará habilidades en el *diseño de miembros que soportan carga*.
- En el diseño, especificará o determinará mediante cálculo un material adecuado del cual hacer el miembro, su forma y las dimensiones requeridas para que soporte una carga dada con seguridad.
- Considerará el diseño de miembros sometidos a esfuerzos directos: esfuerzo de tensión axial, esfuerzo de compresión axial, esfuerzo de apoyo y esfuerzo cortante directo.
- Aprenderá cómo seleccionar un *factor de diseño* razonable, *N*, y aplicarlo a las propiedades de material apropiadas para asegurarse de que el miembro experimente un nivel de esfuerzo seguro durante su uso.
- Se abordarán diferentes clases de cargas: estáticas, repetidas, impacto y choque.
- Aprenderá a considerar concentraciones de esfuerzo en miembros axialmente cargados donde la sección transversal cambia abruptamente.
- Además, aprenderá a calcular la deformación de miembros axialmente cargados, provocada tanto por esfuerzo como por dilatación térmica.

Descubra

Retomar en La imagen completa lo aprendido en el capítulo 1, donde identificó componentes de productos de consumo, estructuras y máquinas con los que está familiarizado.

Consideró la estructura de una casa, muebles, aparatos domésticos, bicicletas, automóviles, equipo de construcción, edificios comerciales, aviones y vehículos espaciales. ¿Qué más consideró?

Ahora concéntrese en las clases de cargas a las que esos ejemplos están sometidos.

¿Cuáles están sometidos a cargas que no varían significativamente con el tiempo, llamadas cargas estáticas? Un ejemplo podría ser una viga del sótano de su casa que sostiene la estructura de ésta. El peso muerto de la estructura no varía con el tiempo. ¿Qué otros ejemplos puede encontrar que estén sometidos a cargas estáticas?

¿Cuáles están sometidos a cargas repetidas? Éste es el caso cuando la carga se aplica y retira muchas veces durante la vida esperada del componente. Algunos componentes también experimentan cargas reversibles que alternadamente producen esfuerzos a tensión y luego a compresión. Considere algunas partes de su carro. Por ejemplo, las partes funcionales de la cerradura de las puertas experimentan altas cargas y esfuerzos cada vez que el cerrojo se traba. Las cargas se retiran cuando el cerrojo se destraba. El ciclo de carga y descarga se repite muchos miles de veces durante la vida del carro. ¿Qué otros ejemplos puede identificar?

¿Qué elementos de su lista están sometidos a choque o impacto? En este caso la carga se aplica repentina y agudamente. Un ejemplo ideal es un clavo que está siendo golpeado por un martillo o un reproductor de música portátil que se deja caer al suelo. Considere cómo responde un bate de béisbol o una raqueta de tenis cuando envía la pelota al fondo del parque o la línea de base de la cancha de tenis. ¿Puede pensar en más ejemplos?

¿Puede ver cómo estos tres tipos de ejemplos que acabamos de describir requieren criterios diferentes para diseñar estructuras y componentes seguros? En este capítulo aprenderá a especificar materiales apropiados para soportar semejantes cargas. También aprenderá a calcular un esfuerzo de diseño seguro y determinar la forma y dimensiones requeridas de partes sometidas a carga, de modo que no experimenten esfuerzo por encima de esos niveles.

En el capítulo 1 se presentó el concepto de esfuerzo directo junto con ejemplos del cálculo de esfuerzo de tensión directo, esfuerzo de compresión directo, esfuerzo cortante directo y esfuerzo de apoyo. Se hizo énfasis en el entendimiento de los fenómenos básicos, las unidades, la terminología y la magnitud de los esfuerzos encontrados en aplicaciones estructurales y mecánicas típicas. No se dijo nada sobre la aceptabilidad de los niveles de esfuerzo que se calcularon o el diseño de miembros que soportan una carga dada.

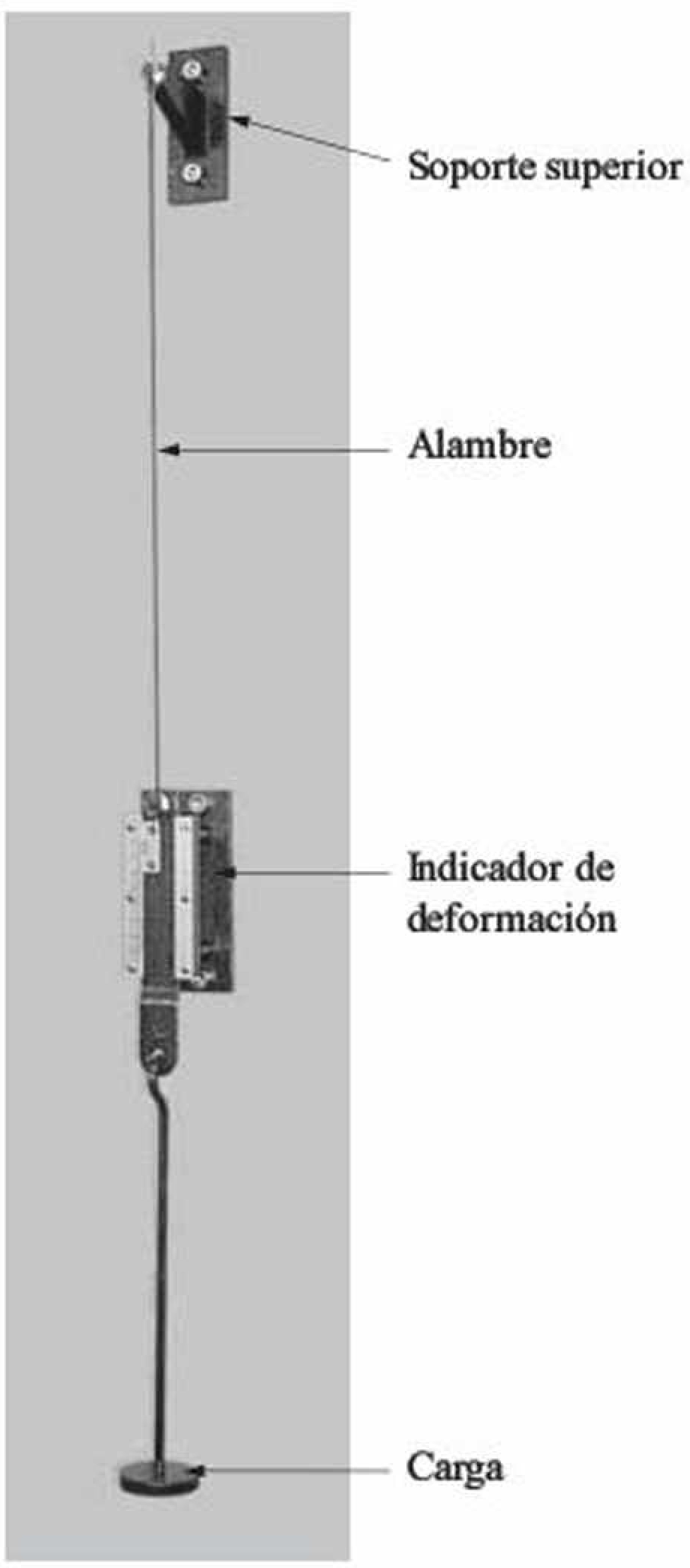
Este capítulo recalca principalmente el *diseño* en el que usted, como diseñador, debe tomar decisiones sobre si un diseño propuesto es satisfactorio o no lo es; qué forma y tamaño de sección transversal deberá tener el miembro sometido carga, y de qué material se deberá hacer el miembro.

Actividad Capítulo 3: Esfuerzo directo, deformación y diseño

Monte un sistema para sujetar firmemente un fino alambre de metal por un extremo y aplicar una fuerza de tensión axial directa en el otro. La figura 3–1 muestra un dispositivo de prueba comercial que realiza estas funciones. Si está disponible, se podría utilizar una máquina de prueba de tensión universal como la mostrada en la figura 2–1.

1. Mida el diámetro del alambre y la longitud inicial sin carga entre el punto de sujeción y el lugar donde se aplica la carga.
2. Aplique cargas en incrementos pequeños y mida la cantidad que el alambre se alargue con cada carga.
3. Calcule el esfuerzo en el alambre con cada carga total aplicada.
4. Divida cada medida de alargamiento entre la longitud inicial del alambre para determinar el esfuerzo en él.
5. Trace una gráfica del esfuerzo en el alambre sobre el eje vertical contra el alargamiento, que muestre también la deformación sobre el eje horizontal.
6. Después de que ha marcado varios puntos (¡y antes de que se rompa el alambre!) determine la pendiente de la línea en la gráfica, dividiendo el cambio de esfuerzo entre el cambio de deformación a lo largo de una parte conveniente de la gráfica donde la curva se aproxima mejor a una línea recta.
7. La pendiente calculada mide el módulo de elasticidad E a tensión, del metal.

FIGURA 3–1 Dispositivo de prueba de carga a tensión de un alambre. (Fuente: P.A. Hilton Ltd/Hi–Tech, Hampshire, Inglaterra).



8. Compare el valor calculado de E con el reportado en las tablas, si sabe de que material es del alambre. Si no lo sabe trate de identificar el tipo de metal comparándolo con valores registrados para algunos de los metales que aparecen en los apéndices 14–18.
9. Observe que la relación de línea recta en la gráfica puede ser establecida matemáticamente como
   a. $E = \Delta\sigma/\Delta\epsilon$ = Cambio de esfuerzo/cambio de deformación.
   b. $\sigma = E\varepsilon$ o Esfuerzo = Módulo de elasticidad × deformación.
10. Ahora continúe aplicando más carga hasta que el alambre se rompa.
11. Con la carga máxima que el alambre resistió antes de romperse, calcule el esfuerzo máximo en el alambre.
12. Desde luego, normalmente no deseamos romper el alambre. Por ello, suponiendo que deseamos limitar la carga a un valor seguro de no más de la mitad del esfuerzo al cual se rompió, calcule el esfuerzo.
13. Resuma los resultados reportando:
   a. El módulo de elasticidad del metal del cual está hecho el alambre.
   b. El esfuerzo máximo al cual se rompió el alambre.
   c. El esfuerzo a la mitad del máximo, llamándolo *esfuerzo permisible* o *esfuerzo de diseño*.
   d. El alargamiento total a la carga con la cual se produce el esfuerzo diseño en el alambre.

Esta prueba simple ilustra muchos de los conceptos principales que usará en este capítulo. Además del esfuerzo y la deformación provocados por cargas axiales directas, estudiará temas relacionados que tienen que ver con el esfuerzo de apoyo, esfuerzo de contacto y esfuerzo cortante directo.

3–1 OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

Al término de este capítulo, usted podrá:

1. Describir las condiciones que deben ser satisfechas para la aplicación satisfactoria de las fórmulas de esfuerzo directo.
2. Definir *esfuerzo de diseño* y decir cómo se determina un valor aceptable para él.
3. Definir *factor de diseño* y seleccionar valores apropiados para él, según las condiciones presentes en un diseño particular.
4. Analizar la relación entre los términos *esfuerzo de diseño*, *esfuerzo permisible* y *esfuerzo de trabajo*.
5. Analizar la relación entre los términos *factor de diseño*, *factor de seguridad* y *margen de seguridad*.
6. Describir 11 factores que afectan la especificación del factor de diseño.
7. Describir varios tipos de cargas experimentadas por estructuras o miembros de máquinas; por ejemplo, cargas estáticas, cargas repetidas, impactos y choques.
8. Diseñar miembros sometidos a esfuerzo de tensión directo, esfuerzo de compresión directo, esfuerzo cortante directo y esfuerzo de apoyo.
9. Evaluar la deformación provocada por esfuerzo axial y dilatación térmica, e incluirla en el diseño y análisis.
10. Determinar cuándo existen concentraciones de esfuerzo y especificar valores apropiados para los factores de concentración de esfuerzo.
11. Utilizar factores de concentración de esfuerzo en el diseño.

3–2 DISEÑO DE MIEMBROS SOMETIDOS A TENSIÓN O COMPRESIÓN DIRECTA

En el capítulo 1 se desarrolló la fórmula de esfuerzo directo y se estableció como sigue:

$$\sigma = \frac{F}{A} \tag{3-1}$$

donde

σ = esfuerzo normal directo: tensión o compresión
F = carga axial directa
A = área de sección transversal del miembro sometido a F

Para que la ecuación (3–1) sea válida, es necesario satisfacer las siguientes condiciones:

1. El miembro cargado debe ser recto.
2. La sección transversal del miembro cargado debe ser uniforme a todo lo largo del tramo considerado.
3. El material del cual está hecho el miembro debe ser homogéneo.
4. La carga debe aplicarse a lo largo del eje centroidal del miembro de modo que no haya tendencia a flexionarlo.
5. Los miembros sujetos a compresión deben ser cortos para que no haya tendencia a pandearse (consulte en el capítulo 11 el análisis especial requerido para miembros largos y esbeltos sometidos a esfuerzo de compresión, y por el método para decidir cuando un miembro debe ser considerado largo o corto).

Es importante reconocer que el concepto de esfuerzo se refiere a la resistencia interna opuesta por un *área unitaria*, es decir, un área infinitamente pequeña. Se considera que el esfuerzo actúa en un punto y que, en general, puede variar de un punto a otro en un cuerpo particular. La ecuación (3–1) indica que para un miembro sometido a tensión o compresión axial directa, el esfuerzo es uniforme a través de toda el área si se cumplen las cinco condiciones. En muchas aplicaciones prácticas las variaciones menores que pudieran ocurrir en los niveles de esfuerzo local son tomadas en cuenta mediante una cuidadosa selección del esfuerzo permisible, como se verá más adelante.

3–3 ESFUERZOS NORMALES DE DISEÑO

Un miembro, sometido a carga, falla cuando se rompe o deforma en exceso, lo que lo hace inaceptable para el propósito pretendido. Por ello es esencial que el nivel del esfuerzo aplicado nunca exceda la resistencia máxima a la tensión o la resistencia a la cedencia del material. Más adelante en este capítulo se considera la deformación excesiva sin cedencia.

El esfuerzo de diseño es ese nivel de esfuerzo que puede desarrollarse en un material al mismo tiempo que se garantiza que el miembro cargado es seguro.

Para calcular el diseño de esfuerzo, dos factores deben ser especificados: el *factor de diseño N* y la *propiedad del material en el que se basará el diseño.* En general, para metales, el esfuerzo de diseño está basado en la resistencia a la cedencia s_y o la resistencia máxima s_u del material.

El* factor de diseño N *es un número entre el cual se divide la resistencia reportada de un material para obtener el esfuerzo de diseño σ_d.

Se utilizan varios símbolos en diferentes campos para las propiedades de resistencia de materiales. En este libro se utilizan los siguientes:

s_y = Resistencia a la cedencia de un material
s_u = Resistencia máxima a la tensión de un material o simplemente resistencia a la tensión

El término *resistencia a la cedencia* se utilizará haciendo caso omiso de si el valor se obtuvo observando el punto de cedencia o utilizando la técnica desviación descrita en el capítulo 2.

Puede que otras referencias utilicen los símbolos σ_y y σ_u para estos valores. En el campo de construcción de edificios, en particular para estructuras de acero de edificios y miembros regidos por el Instituto Americano para la Construcción en Acero (AISC, American Institute of Steel Construction), se utilizan los símbolos F_y y F_u.

Se utilizan las siguientes ecuaciones para calcular el esfuerzo de diseño para un cierto valor de N:

Esfuerzo de diseño

$$\sigma_d = \frac{s_y}{N} \quad \text{basado en resistencia a la cedencia} \tag{3-2}$$

$$\sigma_d = \frac{s_u}{N} \quad \text{basado en resistencia máxima} \tag{3-3}$$

El diseñador normalmente determina el valor del factor de diseño, basado en criterio y experiencia. En algunos casos, los códigos, estándares o la política de compañía pueden especificar los factores de diseño que han de ser utilizados. Cuando el diseñador tiene que determinar el factor de diseño, su criterio debe basarse en su conocimiento de cómo las piezas pueden fallar y de los factores que afectan el factor de diseño. Las secciones 3–4, 3–5 y 3–6 dan información adicional sobre el factor de diseño y la opción de métodos de calcular esfuerzos de diseño.

Otras referencias pueden utilizar el término *factor de seguridad* en lugar de *factor de diseño*; además, se puede utilizar *esfuerzo permisible* o *esfuerzo de trabajo* en lugar de *esfuerzo de diseño*. La selección de los términos utilizados en este libro recalca el rol del diseñador al especificar el esfuerzo de diseño.

Teóricamente, un material podría ser sometido a un esfuerzo hasta s_y antes de que ceda. Esta condición corresponde a un valor del factor de diseño de $N = 1$ en la ecuación (3–2). Asimismo, con un factor de diseño de $N = 1$ en la ecuación (3–3), el material estaría al borde de la fractura máxima. Por lo tanto, $N = 1$ es el valor más bajo que podemos considerar.

En este libro utilizamos el concepto de esfuerzos de diseño y factores de diseño en oposición al margen de seguridad.

3–4 FACTOR DE DISEÑO

Muchos aspectos del problema de diseño intervienen en la especificación del factor de diseño. En algunos casos no se conocen las condiciones precisas de servicio, por lo que el diseñador entonces debe hacer estimaciones conservadoras de las condiciones, es decir, estimaciones que harían que el diseño resultante estuviera del lado seguro al considerar todas las variaciones posibles. La selección final de un factor de diseño depende de las 12 siguientes condiciones:

Códigos y estándares. Si el miembro que se está diseñando queda dentro de la jurisdicción de un código o estándar existente, obviamente el factor de diseño o esfuerzo de diseño debe ser seleccionado para satisfacer el código o estándar. Ejemplos de cuerpos que establecen estándares son:

Instituto Americano para la Construcción en Acero (AISC): edificios, puentes y estructuras similares que utilizan acero

Asociación del Aluminio (AA, Aluminum Association): edificios, puentes y estructuras similares que utilizan aluminio

Asociación Americana de Ingenieros Mecánicos (ASME, American Society of Mechanical Engineers): calderas, recipientes a presión, sistemas de ejes de transmisión y muchos otros componentes mecánicos.

Códigos de construcción estatales: edificios, puentes y estructuras similares que afectan la seguridad pública.

Departamento de Defensa de Estados Unidos—Estándares Militares: estructuras de vehículos aeroespaciales y otros productos militares.

Instituto Nacional Americano de Estándares (ANSI, American National Standards Institute): una amplia variedad de productos

Asociación Americana de Fabricantes de Engranes (AGMA, American Gear Manufacturers Association): engranes y sistemas de engranes.

Es responsabilidad del diseñador determinar cuáles, si los hay, estándares o códigos se aplican al miembro que se está diseñando y garantizar que el diseño satisfaga dichos estándares.

Resistencia del material como base. La mayoría de los diseños que utilizan metales están basados en la resistencia a la cedencia, en la resistencia máxima o en ambas, como previamente se estableció. Esto es porque la mayoría de las teorías de falla de un metal manifiestan una fuerte relación entre el esfuerzo a la falla y estas propiedades de material. Además, estas propiedades casi siempre se reportan para materiales utilizados en diseño de ingeniería. El valor del factor de diseño será diferente dependiendo de qué resistencia de material se utilice como base para el diseño, como se demostrará más adelante.

Tipo de material. Una consideración primordial con respecto al tipo de material es su ductilidad. Los modos de falla de materiales frágiles son bastante diferentes de aquellos de materiales dúctiles. Como los materiales frágiles, tal como el hierro gris, no exhiben cedencia, los diseños siempre se basan en la resistencia máxima. En general se considera que un metal es frágil si su porcentaje de alargamiento en una longitud de calibración de 2 in es de menos de 5%. Con excepción de las aleaciones altamente endurecidas, prácticamente todos los aceros son dúctiles. Con excepción de las fundiciones, el aluminio es dúctil. Otros factores de material que puedan afectar la resistencia de una pieza son su uniformidad y la confianza en las propiedades estipuladas.

Forma de la carga. Es posible identificar tres tipos principales de carga. Una *carga estática* es la que se aplica a una parte de manera lenta y gradual, y permanece aplicada, o por lo menos se aplica y retira sólo infrecuentemente durante la vida de diseño de la parte. Las *cargas repetidas* son aquellas que se aplican y retiran varios miles de veces durante la vida de diseño de la parte. Las fluctuaciones significativas de la carga sin que se descargue completamente la parte también se consideran cargas repetidas. Con cargas repetidas, una parte falla por el mecanismo de fatiga a un nivel de esfuerzo mucho más bajo que el que provocaría una falla con cargas estáticas. Las partes sujetas a *impacto* o *choque* requieren el uso de un gran factor de diseño por dos razones. Primero, una carga repentinamente aplicada provoca esfuerzos en la parte que son varias veces más altos que aquellos que se calcularían por medio de fórmulas estándar. Segundo, bajo una carga de impacto en general se requiere que el material absorba energía del cuerpo que produce el impacto. La certeza con la que el diseñador conozca la magnitud de las cargas esperadas también debe ser considerada cuando se especifique el factor de diseño.

Posible abuso de la parte. En la mayoría de los casos el diseñador controla las condiciones de uso reales del producto que diseña. Legalmente, es responsabilidad del diseñador considerar cualquier uso o *abuso* previsibles del producto y garantizar su seguridad. Además se debe considerar la posibilidad de una sobrecarga accidental en cualquier parte de un producto.

Complejidad del análisis de esfuerzo. A medida que la manera de carga,o la geometría de una estructura o una parte se vuelven más complejas, el diseñador es menos capaz de realizar un análisis preciso de la condición de esfuerzo. Por lo tanto, la confianza que se tenga en los resultados de los cálculos del análisis de esfuerzo afecta la selección de un factor de diseño.

Ambiente. Los materiales se comportan de forma diferente en diferentes condiciones ambientales. Es necesario considerar los efectos de la temperatura, humedad, radiación, clima, luz solar y atmósferas corrosivas en el material durante la vida de diseño de la parte.

TABLA 3–1 Efecto del tamaño en el acero AISI 4140 OQT 1100.

Tamaño de la probeta		Resistencia a la tensión		Resistencia a la cedencia		Porcentaje de alargamiento
in	mm	ksi	Mpa	ksi	Mpa	% en 2 in
0.50	12.7	158	1089	149	1027	18
1.00	25.4	140	965	135	931	20
2.00	50.8	128	883	103	710	22
4.00	101.6	117	807	87	600	22

Efecto del tamaño, en ocasiones llamado *efecto de masa*. Los metales presentan diferentes resistencias conforme el área de la sección transversal de una parte varía. La mayoría de los datos de propiedad de material se obtuvieron por medio de probetas estándar de aproximadamente 0.50 in (12.7 mm) de diámetro. Las partes con secciones más grandes en general tienen resistencias más bajas; las partes de tamaño menor, por ejemplo el alambre estirado, tienen resistencias significativamente más altas. En la tabla 3–1 se muestra un ejemplo del efecto del tamaño.

Control de calidad. Mientras más cuidadoso y completo sea un programa de control de calidad, un diseñador conocerá mejor cómo aparecerá en realidad el producto en servicio. Con un control de calidad deficiente, se deberá utilizar un factor de diseño más grande.

Riesgo presentado por una falla. El diseñador debe considerar las consecuencias de la falla de una parte particular. ¿Ocurriría un colapso catastrófico? ¿Se pondría en peligro a las personas? ¿Sufriría daños otro equipo? Tales consideraciones pueden justificar el uso de un factor de diseño más alto que el normal.

Costo. Generalmente es necesario hacer sacrificios de diseño en favor de la limitación de costos a un nivel razonable en condiciones de mercado. Por supuesto, en los casos en que se pone en riesgo la vida o propiedad no debe hacerse sacrificios que pudieran afectar seriamente la seguridad final del producto o estructura.

Segmento del mercado donde se va a utilizar la parte. Normalmente usted estará enterado del uso que se le va a dar a la parte que está diseñando y esto afecta su decisión sobre el factor de diseño apropiado. El uso de un factor de diseño bajo requiere que se conozcan bien las cargas, las propiedades de material y las consideraciones de diseño. La falta de confianza en cualquiera de estos parámetros debe inclinarlo a especificar un factor de diseño mayor. La adquisición de esa confianza puede requerir una cantidad significativa de investigación adicional, análisis de esfuerzo, control de calidad y pruebas, y todo eso es costoso. La industria aeroespacial en general invierte en la investigación y análisis necesarios para justificar un factor de diseño bajo, de modo que la parte resultante sea tan pequeña y liviana como sea práctico. A la inversa, los diseñadores de equipo de fabricación y de algún equipo agrícola y de construcción para trabajo pesado, en ocasiones utilizan factores de diseño más altos debido a la incapacidad de hallar datos precisos sobre las condiciones de uso.

3–5 MÉTODOS DE DISEÑO Y GUÍAS PARA SELECCIONAR FACTORES DE DISEÑO

Se deberá aplicar la experiencia de diseño y el conocimiento de las condiciones analizadas en la sección precedente para determinar un factor de diseño para una situación particular. Por último, es responsabilidad del diseñador establecer el factor de diseño para garantizar la seguridad del componente que se esté diseñando, al tiempo de lograr un diseño efectivo en cuanto a costos.

En este capítulo encontrará varías guías para especificar un factor de diseño para los esfuerzos directos que se utilizarán en este libro. Las guías no son precisas y están basadas en condiciones promedio. En futuros capítulos se presentan guías adicionales para otras clases de esfuerzos, tales como esfuerzos cortantes torsionales y esfuerzos de flexión.

TABLA 3–2 Criterios para esfuerzo de diseño—Esfuerzos normales directos.

Forma de la carga	Material dúctil	Material frágil
Estática	$\sigma_d = s_y/2$	$\sigma_d = s_u/6$
Repetida	$\sigma_d = s_u/8$	$\sigma_d = s_u/10$
Impacto o choque	$\sigma_d = s_u/12$	$\sigma_d = s_u/15$

Es dispendioso sobrediseñar intencionalmente un componente. Sin embargo, hay ocasiones en las que la incertidumbre con respecto a las condiciones reales de servicio justifica utilizar una selección más conservadora de un factor de diseño que los datos en las guías.

Además existen numerosos códigos y estándares que deben ser consultados en ciertas industrias. Entre éstos se encuentran los relativos a la construcción, tuberías y recipientes de presión, vehículos militares y aeroespaciales. Es su responsabilidad investigar si el producto o sistema que está diseñando es controlado por dichos códigos y estándares. En la siguiente sección se presenta una pequeña muestra de los códigos para el uso de acero o aluminio en edificios.

Las guías aquí presentadas son muy simples como para concentrarse en las cargas básicas de los esfuerzos abordados en este libro. En general se aplican a metales homogéneos, isotrópicos. Se recomienda un estudio adicional para ampliar su conocimiento de componentes y estructuras más complejos, materiales no isotrópicos y clases de carga más complejas. En particular se recomienda estudiar más las cargas repetidas (llamadas cargas de fatiga), el choque y el impacto. Todas las referencias que aparecen al final de este capítulo proporcionan información sobre tales estudios adicionales.

Guías para seleccionar el factor de diseño para esfuerzos normales directos. La tabla 3–2 incluye guías para seleccionar factores de diseño para utilizarlos en los problemas incluidos en este libro donde el componente que se está diseñando o analizando se encuentra sometido a esfuerzos normales directos, a tensión o a compresión.

El uso de factores de diseño y esquemas de métodos típicos de diseño se resumen aquí. El método específico utilizado depende del objetivo del problema. ¿Es el objetivo evaluar la seguridad relativa de un diseño dado? ¿Especificar un material adecuado del cual hacer un componente? ¿Determinar la forma y dimensiones requeridas del componente cuando se conoce la carga, y el material ha sido especificado?

Caso A Evaluar la seguridad de un diseño dado.

Datos

a) La magnitud y el tipo de carga que actúa en el componente de interés.
b) El material, incluida su condición, del cual está hecho el componente.
c) La forma y dimensiones de la geometría del componente.

Determinar Si el componente es o no razonablemente seguro:

Método

1. Identificar la clase de esfuerzo producido por la carga dada.
2. Determinar la técnica de análisis de esfuerzo aplicable.
3. Completar el análisis de esfuerzo para determinar el esfuerzo máximo esperado, $\sigma_{máx}$ en el componente.

4. Determinar la resistencia a la cedencia, resistencia máxima a la tensión y porcentaje de alargamiento del material. Decidir si el material es dúctil (porcentaje de alargamiento > 5%) o frágil (porcentaje de alargamiento < 5%).
5. Determinar la relación de esfuerzo de diseño apropiada. Para esfuerzos normales directos utilice σ_d de la ecuación (3–2) o (3–3).
6. Hacer $\sigma_{máx} = \sigma_d$ y resolver para obtener el factor de diseño, N.

7a. Cuando el diseño está basado en la resistencia a la cedencia:

$$\sigma_{máx} = \sigma_d = s_y/N$$
$$N = s_y/\sigma_{máx}$$

7b. Cuando el diseño está basado en la resistencia máxima a la tensión:

$$\sigma_{máx} = \sigma_d = s_u/N$$
$$N = s_u/\sigma_{máx}$$

8. Comparar el valor resultante del factor de diseño con el recomendado en las guías, considerando la tabla 3–2 y todos los factores analizados en la sección precedente.
9. Si el factor de diseño real es menor que el valor recomendado, se deberá rediseñar para incrementar el factor de diseño resultante.
10. Si el factor de diseño real es significativamente más alto que el valor recomendado, deberá rediseñar el componente para lograr un diseño económico que utilice menos material.

Caso B Especificar un material adecuado del cual se tendrá que hacer un componente.

Datos

a) La magnitud y tipo de carga aplicada al componente de interés.
b) La forma y dimensiones de la geometría crítica del componente.

Determine El material, incluida su condición, del cual hacer el componente.

Método

1. Identificar la clase de esfuerzo producido por la carga dada.
2. Determinar la técnica de análisis de esfuerzo aplicable.
3. Completar el análisis de esfuerzo para determinar el esfuerzo máximo esperado, $\sigma_{máx}$, en el componente.
4. Especificar un factor de diseño razonable con base en las guías recomendadas, considerando todos los factores analizados en la sección precedente.
5. Determinar la relación de esfuerzo de diseño apropiada. En el caso de esfuerzos normales directos, utilice σ_d de la ecuación (3–2) o (3–3) siguiendo las guías que aparecen en la tabla 3–2.
6. Hacer $\sigma_{máx} = \sigma_d$ y resolver para obtener la resistencia requerida del material.

7a. Cuando el diseño está basado en la resistencia a la cedencia:

$$\sigma_{máx} = \sigma_d = s_y/N$$
$$s_y \text{ requerida} = N(\sigma_{máx})$$

7b. Cuando el diseño está basado en la resistencia máxima a la tensión:

$$\sigma_{máx} = \sigma_d = s_u/N$$
$$s_u \text{ requerida} = N(\sigma_{máx})$$

8. Especificar un material apropiado que tenga la resistencia requerida. Considere también la ductilidad del material. Si la carga es repetida, choque o impacto, se recomienda un material altamente dúctil.

Caso C Determinar la forma y dimensiones del componente.

Datos
a) La magnitud y tipo de carga aplicada al componente de interés.
b) El material, incluida su condición, del cual se tiene que hacer el componente.

Determine La forma y dimensiones de la geometría crítica del componente.

Método
1. Determinar la resistencia a la cedencia, resistencia máxima y porcentaje de alargamiento del material seleccionado. Decidir si el material es dúctil (porcentaje de alargamiento > 5%) o frágil (porcentaje de alargamiento < 5%).
2. Especificar un factor de diseño apropiado considerando el tipo de carga, las condiciones dadas en la sección precedente y las guías recomendadas. En el caso de esfuerzos normales directos, utilizar la tabla 3–2.
3. Calcular el esfuerzo de diseño con la ecuación (3–2) o (3–3).

$$\sigma_d = s_y/N \text{ basado en la resistencia a la cedencia}$$
$$\sigma_d = s_u/N \text{ basado en la resistencia máxima a la tensión}$$

4. Escribir la ecuación del esfuerzo máximo esperado en el componente. Para esfuerzos normales directos,

$$\sigma_{máx} = F/A$$

5. Hacer $\sigma_{máx} = \sigma_d$ y resolver para el área de sección transversal requerida,

$$\sigma_{máx} = \sigma_d = F/A$$
$$A \text{ requerida} = F/\sigma_d$$

6. Determinar las dimensiones mínimas requeridas del área de sección transversal para lograr el área total necesaria. Esto depende de la forma que elija para hacer el componente. Puede ser sólida circular, cuadrada o rectangular; un tubo hueco, un perfil estructural estándar tal como un ángulo o algún perfil especial de su propio diseño.
7. Especificar dimensiones convenientes de la lista de tamaños básicos preferidos que aparece en el apéndice A–2.

Caso D Determinar la carga permisible en un componente.

Datos
a) El tipo de carga en el componente de interés.
b) El material, incluida su condición, del cual se tiene que hacer el componente.
c) La forma y dimensiones del componente.

Determine La carga permisible en el componente.

Método
1. Determinar la resistencia a la cedencia, resistencia máxima y porcentaje de alargamiento del material seleccionado. Decidir si el material es dúctil (porcentaje de alargamiento > 5%) o frágil (porcentaje de alargamiento < 5%).
2. Especificar un factor de diseño apropiado considerando el tipo de carga, el tipo de material, las condiciones citadas en la sección precedente y las guías recomendadas. Para esfuerzos normales directos, utilizar la tabla 3–2.
3. Calcular el esfuerzo de diseño con la ecuación (3–2) o (3–3).

$$\sigma_d = s_y/N \text{ basado en la resistencia a la cedencia}$$
$$\sigma_d = s_u/N \text{ basado en la resistencia máxima a la tensión}$$

4. Escribir la ecuación del esfuerzo máximo esperado en el componente. Para esfuerzos normales directos,

$$\sigma_{\text{máx}} = F/A$$

5. Hacer $\sigma_{\text{máx}} = \sigma_d$ y resolver para la carga máxima permisible.

$$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_d = F/A$$
$$F \text{ máxima permisible} = \sigma_d(A)$$

La siguiente sección se ocupa de combinaciones específicas de tipo de material y clases de carga. Cinco problemas de ejemplo ilustran la aplicación de los métodos de diseño descritos en esta sección.

3–6 MÉTODOS DE CALCULAR ESFUERZO DE DISEÑO

Un factor importante que debe ser considerado cuando se calcula esfuerzo de diseño es la forma en que la parte puede fallar cuando se somete a cargas. En esta sección se describen los modos de falla pertinentes a partes sometidas a cargas de tensión y compresión. Más adelante se analizan otras clases de carga.

Los modos de falla y los métodos consecuentes de calcular esfuerzos de diseño se clasifican de acuerdo con el tipo de material y la forma de carga. Los materiales dúctiles, con más de 5% de alargamiento, exhiben modos de falla un tanto diferentes de los de materiales frágiles. Las cargas estáticas, las cargas repetidas y las cargas de choque producen modos de falla diferentes.

Materiales dúctiles sometidos a cargas estáticas. Los materiales dúctiles sufren grandes deformaciones plásticas cuando el esfuerzo alcanza la resistencia de cedencia del material. En la mayoría de las condiciones de uso, esto haría que la parte fuera inadecuada para el uso pretendido. Por consiguiente, para materiales dúctiles sometidos a cargas estáticas, el esfuerzo de diseño normalmente se basa en la resistencia a la cedencia. Es decir,

$$\sigma_d = \frac{s_y}{N}$$

Como se indica en la tabla 3–2, un factor de diseño de $N = 2$ sería una opción razonable en condiciones promedio.

Materiales dúctiles sometidos a cargas repetidas. Bajo cargas repetidas, los materiales dúctiles fallan por un mecanismo llamado *fatiga*. El nivel de esfuerzo al cual ocurre la fatiga es más bajo que la resistencia a la cedencia. Probando materiales bajo cargas repetidas, se puede medir el esfuerzo al cual ocurrirá la falla. Los términos *resistencia a la fatiga* o *resistencia bajo cargas repetidas* se utilizan para expresar este nivel de esfuerzo. Sin embargo, a menudo no están disponibles valores de resistencia a la fatiga. Además, factores como el acabado superficial, el patrón exacto de carga y el tamaño de la pieza tienen un marcado efecto en la resistencia a la fatiga real. Para superar estas dificultades, a menudo conviene utilizar un valor alto para el factor de diseño cuando se calcula el esfuerzo de diseño para una parte sometida a cargas repetidas. También se recomienda utilizar la resistencia máxima como base para el esfuerzo de diseño, porque las pruebas muestran que existe una buena correlación entre la resistencia a la fatiga y la resistencia máxima. Consecuentemente, para materiales dúctiles sometidos a cargas repetidas, el esfuerzo de diseño se calcula con la ecuación

$$\sigma_d = \frac{s_u}{N}$$

Un factor de diseño de $N = 8$ sería razonable en condiciones promedio. También, las concentraciones de esfuerzo discutidas en la sección 3–11 deben ser tomadas en cuenta, puesto que las fallas por fatiga a menudo se originan en puntos de concentraciones de esfuerzo.

En los casos en que se dispone de valores de resistencia bajo cargas repetidas del material, el esfuerzo de diseño se calcula con

$$\sigma_d = \frac{s_n}{N}$$

donde s_n es el símbolo de resistencia a cargas repetidas. Se recomienda un factor de diseño N de 3 a 4. Consulte la referencia 6.

Materiales dúctiles bajo cargas de impacto o choque. Los modos de falla de partes sometidas a cargas de impacto o choque son bastante complejos. Dependen de la capacidad del material de absorber energía y de la flexibilidad de la parte. Se recomienda el uso de grandes factores de diseño, debido a la incertidumbre general de los esfuerzos que generan las cargas de choque. En este libro se utilizará

$$\sigma_d = \frac{s_u}{N}$$

con $N = 12$ para materiales dúctiles sometidos a cargas de impacto o choque.

Materiales frágiles. Como los materiales frágiles no exhiben cedencia, el esfuerzo de diseño se basará en la máxima resistencia. Es decir,

$$\sigma_d = \frac{s_u}{N}$$

con $N = 6$ para cargas estáticas, $N = 10$ para cargas repetidas y $N = 15$ para cargas de impacto o choque. Estos factores de diseño son más altos que aquellos para materiales dúctiles debido a la forma repentina de falla exhibida por los materiales frágiles.

Esfuerzos de diseño tomados de códigos seleccionados. La tabla 3–3 resume las especificaciones de esfuerzos de diseño para acero estructural tal como las define la AISC y la Asociación del Aluminio para aleaciones de aluminio. Estos datos pertenecen a miembros cargados a tensión bajo cargas estáticas, como las encontradas en estructuras de edificios. Consulte las referencias 1 y 2 para una discusión más detallada de estas especificaciones.

TABLA 3–3 Esfuerzo de diseño tomado de reglamentos seleccionados, esfuerzos normales directos, cargas estáticas en estructuras de construcción.

Acero estructural (AISC): Diseño por esfuerzo permisible (ASD)
$\sigma_d = s_y/1.67 = 0.60\, s_y$ o $\sigma_d = s_u/2.00 = 0.50\, s_u$
el que sea menor
Aluminio (Asociación del Aluminio)
$\sigma_d = s_y/1.65 = 0.61\, s_y$ o $\sigma_d = s_u/1.95 = 0.51\, s_u$
el que sea menor

Los esfuerzos de diseño para acero que aparecen en la tabla 3–3 están relacionados con el método de *diseño de esfuerzo permisible* (ASD, *allowable stress design*) que había sido el estándar por muchos años. En años recientes, el AISC completó la implementación de un método revisado para el diseño de miembros estructurales de puentes, edificios y otras estructuras, llamado *diseño por factor de carga y resistencia* (LRFD, *load and resistance factor design*). En la referencia 2 se incluye información completa sobre este método y los detalles se proporcionan en los cursos subsecuentes a uno de resistencia de materiales en programas de ingeniería civil, arquitectura y programas relacionados. Este libro continúa utilizando el ASD porque presenta los conceptos fundamentales de diseño sin la enorme cantidad de detalles requeridos para aplicar cabalmente el método LRFD. La filosofía básica del LRFD incluye la aplicación de factores, γ, a los varios tipos de cargas que pueden ocurrir individualmente o en combinación en edificios, puentes y otras estructuras semejantes. Los factores se desarrollaron después de una extensa investigación sobre cómo interactúan las cargas muertas (D), las cargas vivas (L), las cargas de viento (W), las cargas sísmicas (E) y la cargas de techo, nieve o lluvia (L_r, S, R) con base en estadísticas a lo largo de una vida de 50 años. También se incluye un conjunto de *factores de resistencia*, ϕ, para diferentes tipos de cargas tales como cedencia a tensión, fractura a tensión, compresión, flexión y cedencia a cortante. Éstos se acumulan y consideran en la desigualdad matemática

$$\sum \gamma i Q i \leq \phi R_n$$

donde R_n es la resistencia nominal provista por el miembro sometido a carga. El lado izquierdo de esta ecuación representa la suma de todos los efectos de carga (fuerzas, momentos, etc.) Q_i experimentados por el miembro, multiplicados por el factor correspondiente que depende de la combinación específica de cargas. Por consiguiente, la suma de las cargas factorizadas debe ser menor que o igual a la resistencia modificada por factores específicos definidos en el manual LRFD.

Asimismo, para programas de ingeniería mecánica y tecnología de ingeniería, ingeniería de manufactura, tecnología de ingeniería y tecnología industrial, en los cursos subsecuentes a uno de resistencia de materiales se incluyen detalles adicionales sobre metodología de diseño. Por ejemplo, consulte la referencia 7.

Problema de ejemplo 3–1

El soporte estructural de una máquina se someterá a una carga de tensión estática de 16.0 kN. Se planea fabricar el soporte con una varilla cuadrada de acero AISI 1020 laminado en caliente. Especifique dimensiones apropiadas para la sección transversal de la varilla.

Solución

Objetivo: Especificar las dimensiones de la sección transversal de la varilla

Datos: $F = 16.0$ kN $= 16\,000$ N de carga estática.
Material: AISI 1020 HR; $s_y = 331$ Mpa; 36% de alargamiento (dúctil). (Datos tomados del apéndice A–14)

Análisis: Utilizar el caso C de la sección 3–5.
Sea $\sigma = \sigma_d = s_y/2$ (tabla 3–2, material dúctil, carga estática).
Análisis de esfuerzo: $\sigma = F/A$; entonces el área requerida $= A = F/\sigma_d$.
Pero $A = a^2 =$ (a = dimensión del lado del cuadrado).
Dimensión mínima permisible $a = \sqrt{A}$.

Resultados: $\sigma_d = s_y/2 = 331$ MPa/2 $= 165.5$ MPa $= 165.5$ N/mm^2
Área requerida: $A = F/\sigma_d = (16\,000 \text{ N})/(165.5 \text{ N/mm}^2) = 96.7 \text{ mm}^2$.
Dimensión mínima a: $a = \sqrt{A} = \sqrt{96.7 \text{ mm}^2} = 9.83$ mm.
Especifique: $a = 10$ mm (apéndice A–2; tamaño preferido).

Problema de ejemplo 3–2

Un miembro de una armadura del techo de un edificio tiene que soportar una carga de tensión axial estática de 19 800 lb. Se ha propuesto que se utilice un ángulo de acero estructural ASTM A36 de alas iguales estándar para esta aplicación. Use el código AISC. Especifique un ángulo adecuado del apéndice A–5.

Solución

Objetivo: Especificar un ángulo de acero de alas iguales.

Datos: $F = 19\ 800$ lb de carga estática.
Material: ASTM A36; $s_y = 36\,000$ psi; $s_u = 58\,000$ psi.
(Datos tomados del apéndice A–16)

Análisis: Utilizar el caso C de la sección 3–5.
Sea $\sigma = \sigma_d = 0.60 s_y$ o $\sigma_d = 0.50\, s_u$ (tabla 3–3)
Análisis de esfuerzo: $\sigma = F/A$; entonces el área requerida $= A = F/\sigma_d$

Resultados: $\sigma_d = 0.60\, s_y = 0.60(36\,000 \text{ psi}) = 21\,600$ psi
o $\sigma_d = 0.50\, s_u = 0.50\,(58\,000 \text{ psi}) = 29\,000$ psi
Utilizar el valor más bajo; $\sigma_d = 21\,600$ psi.
Área requerida: $A = F/\sigma_d = (19\,800 \text{ lb})/(21\,600 \text{ lb/in}^2) = 0.917 \text{ in}^2$
Ésta es el área mínima permisible.
Especificar: un ángulo de acero L2 × 2 × ¼ (apéndice A–5; sección más liviana).
$A = 0.944 \text{ in}^2$; peso $= 3.21$ lb/ft.

Problema de ejemplo 3–3

Un elemento de una máquina embaladora se somete a una carga de tensión de 36.6 kN, que se repetirá varios miles de veces durante la vida de la máquina. La sección transversal del elemento es de 12 mm de espesor y 20 mm de ancho. Especifique un material adecuado del cual se deberá hacer el elemento.

Solución

Objetivo: Especificar un material para un elemento de máquina.

Datos: $F = 36.6 \text{ kN} = 36\,600$ N de carga repetida.
Sección transversal del elemento de la máquina: 12 mm × 20 mm

Analisis: Utilizar el Caso B de la sección 3–5.
Material dúctil deseable para realizar cargas repetidas.
Sea $\sigma = \sigma_d = s_u/8$ (tabla 3–2). Entonces s_u requerida $= 8\sigma$.
Análisis de esfuerzo: $\sigma = F/A$.

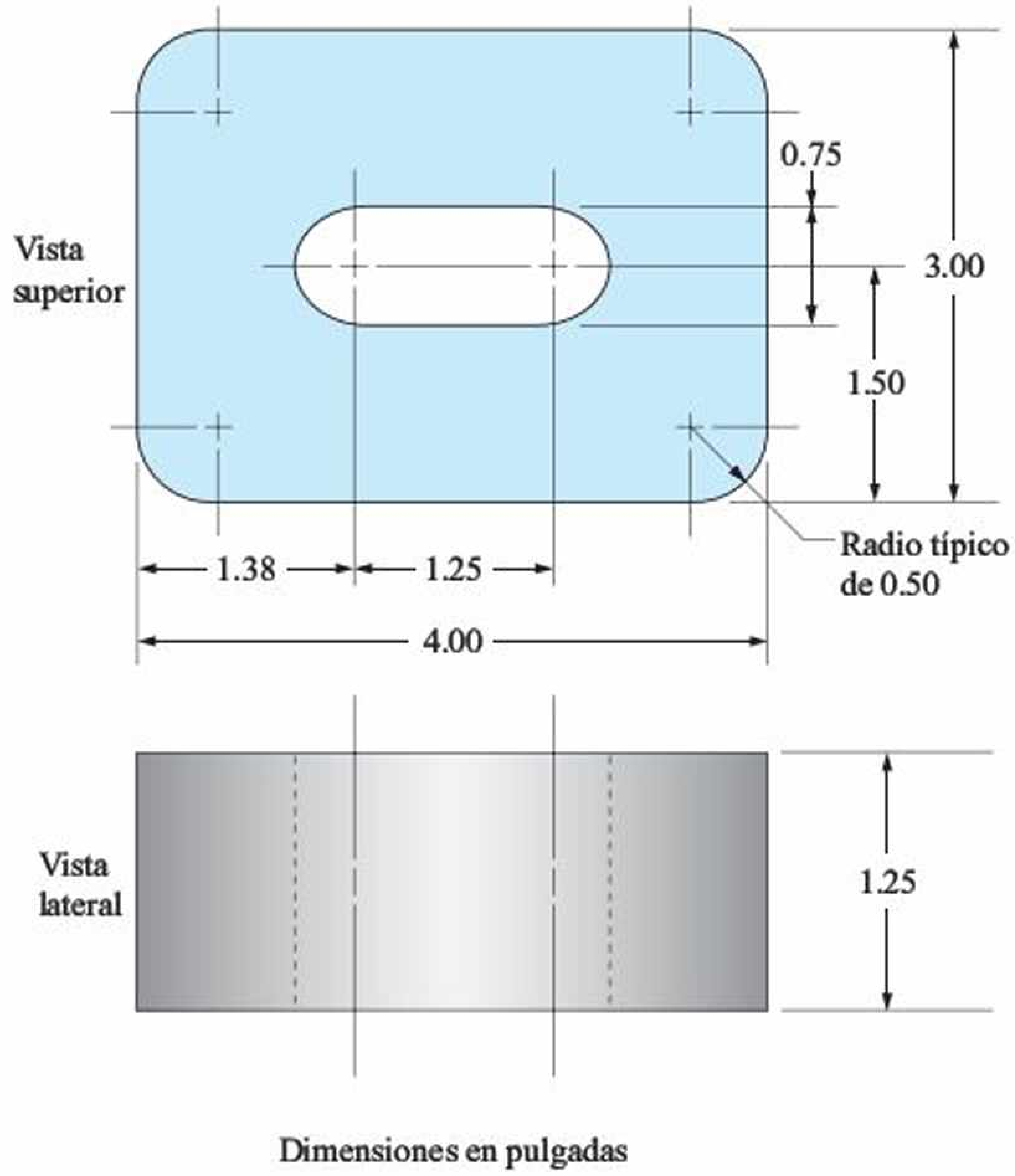
Resultados: Área $= A = (12 \text{ mm})(20 \text{ mm}) = 240 \text{ mm}^2$
$\sigma = F/A = (36\,600 \text{ N})(240 \text{ mm}^2) = 152.5 \text{ N/mm}^2 = 152.5$ MPa
Resistencia máxima requerida: $s_u = 8\sigma = 8(152.5 \text{ MPa}) = 1220$ MPa.
Especificar: acero AISI 4140 OQT 900 (apéndice A–14).
$s_u = 1289$ MPa; 15% de alargamiento; resistencia adecuada, buena ductilidad.

Comentario: Se podrían seleccionar otros materiales. La resistencia requerida indica que se requiere un acero aleado tratado térmicamente. El seleccionado tiene el porcentaje de alargamiento más alto de cualquiera de los que aparecen en el apéndice A–14. Si el tamaño del elemento se pudiera hacer un poco más grande, la resistencia requerida sería más baja y se podría encontrar un acero menos costoso.

Problema de ejemplo 3–4

La figura 3–2 muestra un diseño del soporte de una máquina pesada que se cargará a compresión axial. Se seleccionó hierro fundido gris, grado 20 para el soporte. Especifique la carga estática permisible aplicada al soporte.

FIGURA 3–2
Soporte de la máquina del problema de ejemplo 3–4.



Solución

Objetivo Especificar la carga de compresión axial estática permisible sobre el soporte.

Datos Material: Hierro fundido gris, grado 20; $s_u = 80$ ksi a compresión (tabla A–17); el material es frágil. Asumir que la carga será estática. La forma del soporte es la mostrada en la figura 3–2. El miembro sometido a compresión es *corto*, de modo que no ocurre pandeo.

Análisis Utilizar el caso D de la sección 3–5.
Análisis de esfuerzo: $\sigma = F/A$; área calculada con la figura 3–2.
Sea $\sigma = \sigma_d = s_u/N$; utilizar $N = 6$ (tabla 3–2).
Entonces, F permisible $= F = \sigma_d(\text{A})$

Resultados $\sigma_d = s_u/6 = 80\ 000 \text{ psi}/6 = 13\ 300 \text{ psi}$
La sección transversal del soporte es la misma de la vista superior. El área neta se calcula considerando el área de un rectángulo de 3.00 in por 4.00 in y restando el área de la ranura y los filetes de las cuatro esquinas.

$$\text{Rectángulo: } A_R = (3.00 \text{ in})(4.00 \text{ in}) = 12.00 \text{ in}^2$$

$$\text{Ranura: } A_S = (0.75)(1.25) + \frac{\pi(0.75)^2}{4} = 1.38 \text{ in}^2$$

El área de cada filete se calcula considerando la diferencia entre el área de un cuadrado de lados iguales al radio de la esquina (0.50 in) y un cuarto de círculo del mismo radio. Entonces

$$\text{Filete: } A_F = r^2 - \frac{1}{4}(\pi r^2)$$

$$A_F = (0.50)^2 - \frac{1}{4}[\pi(0.50)^2] = 0.0537 \text{ in}^2$$

Entonces el área total es

$$A = A_R - A_S - 4A_F = 12.00 - 1.38 - 4(0.0537) = 10.41 \text{ in}^2$$

Ahora tenemos los datos necesarios para calcular la carga permisible.

$$F = A\sigma_d = (10.41 \text{ in}^2)(13.300 \text{ lb/in}^2) = 138\ 500 \text{ lb}$$

Esto completa el problema de ejemplo.

3–7 DEFORMACIÓN ELÁSTICA EN MIEMBROS SOMETIDOS A TENSIÓN Y COMPRESIÓN

La deformación se refiere a un cambio en las dimensiones de un miembro que soporta carga. Ser capaz de calcular la magnitud de la deformación es importante en el diseño de mecanismos de precisión, máquinas herramienta, estructuras de edificios y estructuras de máquinas.

Un ejemplo donde la deformación es importante se muestra en la figura 3–3, en la que los tirantes de acero circulares están sujetos a un prensa punzonadora de bastidor en C. Los tirantes se someten a tensión cuando la prensa está en operación. Como contribuyen a la rigidez de la prensa, la cantidad que se deforman bajo carga es algo que el diseñador debe ser capaz de determinar.

Para desarrollar una relación a partir de la cual se pueda calcular la deformación de miembros sometidos a tensión o compresión axial, habrá que revisar algunos conceptos del capítulo 1. *Deformación unitaria* se define como la relación de la deformación total a la longitud original de un miembro (vea la figura 3–4.) Utilizando los símbolos ϵ para deformación, δ para la deformación total y L para la longitud, la fórmula de deformación se escribe

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} \tag{3-4}$$

FIGURA 3–3 Prensa de marco C del problema de ejemplo 3–5.

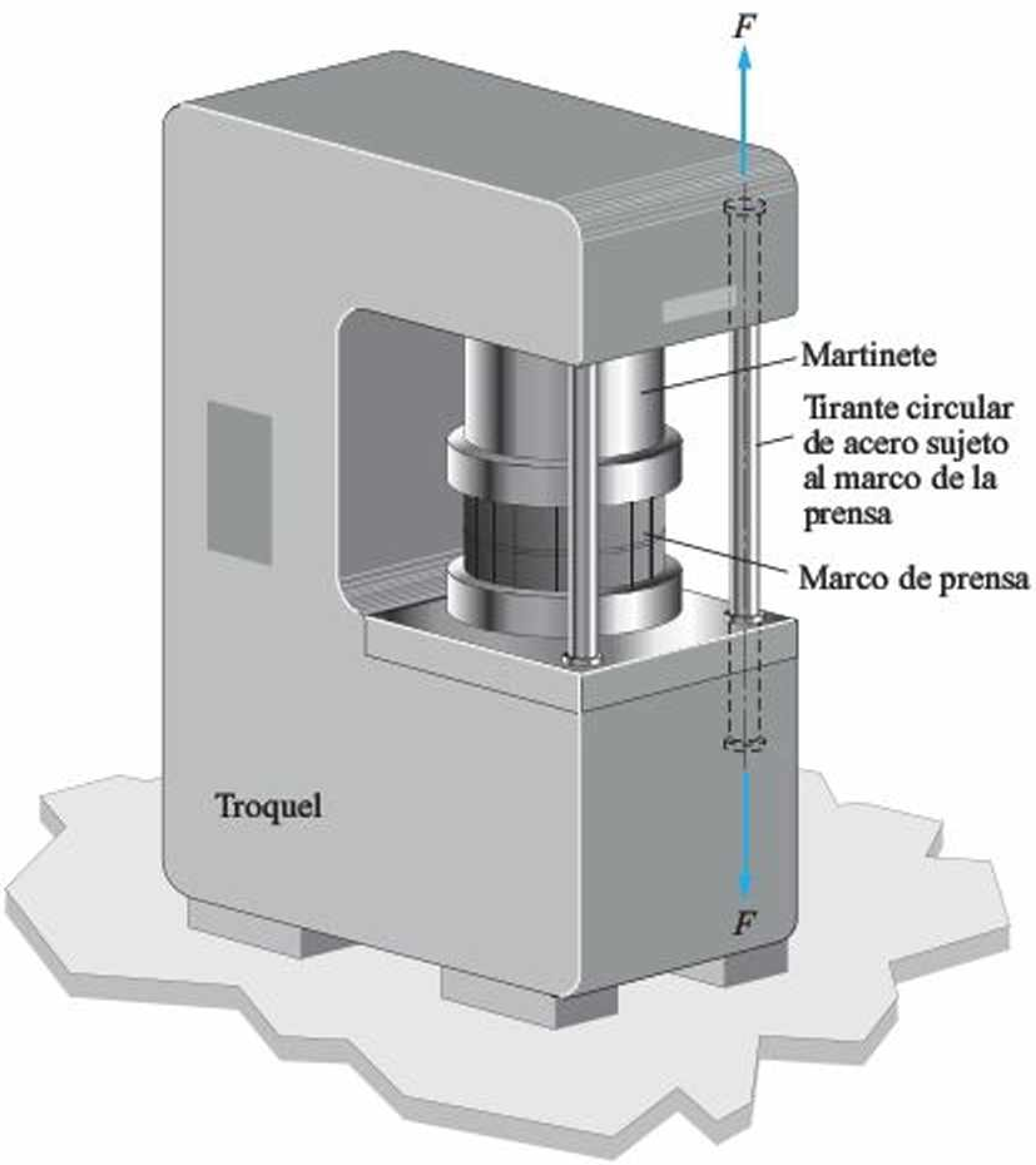
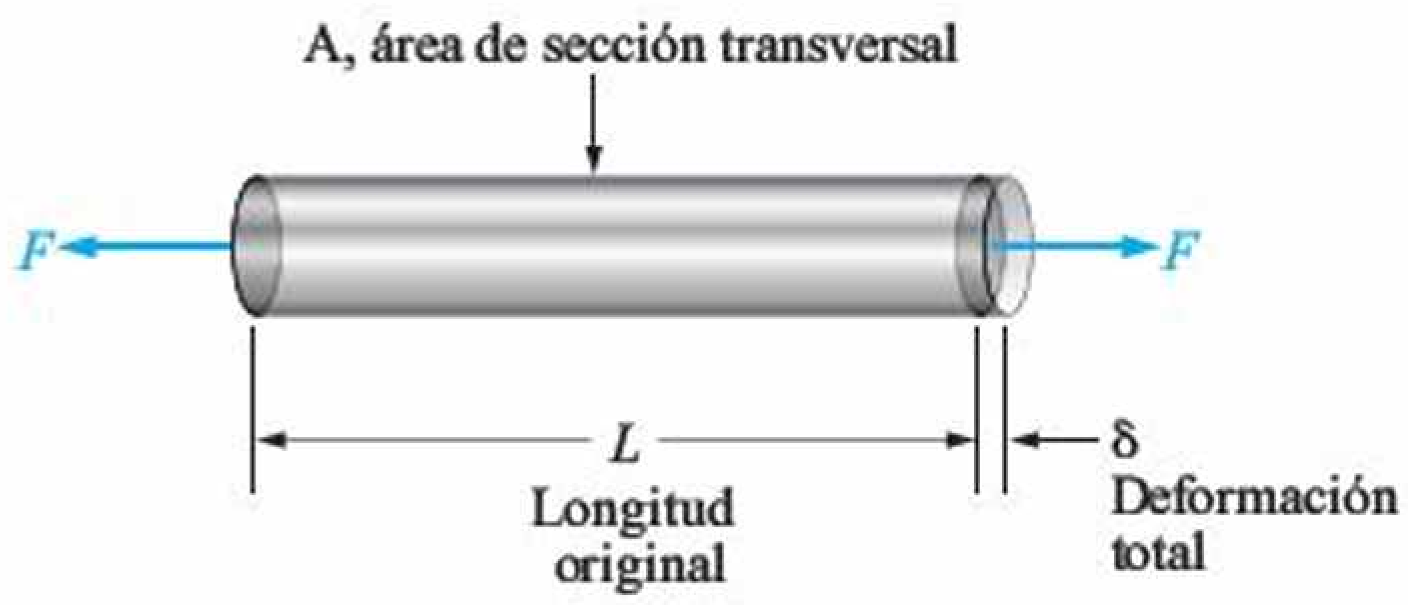


FIGURA 3–4
Ilustración de deformación.

$$\text{deformación} = \epsilon = \frac{\text{deformación axial}}{\text{longitud original}} = \frac{\delta}{L}$$



La rigidez de un material es una función de su módulo de elasticidad, E, definido como

$$E = \frac{\text{esfuerzo}}{\text{deformación}} = \frac{\sigma}{\epsilon} \tag{3–5}$$

Resolviendo para la deformación se obtiene

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} \tag{3–6}$$

Ahora las ecuaciones (3–4) y (3–6) se pueden igualar:

$$\frac{\delta}{L} = \frac{\sigma}{E} \tag{3–7}$$

Resolviendo para la deformación se obtiene

$$\delta = \frac{\sigma L}{E} \tag{3–8}$$

Como esta fórmula se aplica a miembros sometidos a fuerzas de tensión o fuerzas de compresión, puede emplearse la fórmula de esfuerzo directo para calcular el esfuerzo σ. Es decir, $\sigma = F/A$, donde F es la carga aplicada y A es el área de sección transversal del miembro. Al sustituir esto en la ecuación (3–8) se tiene

Deformación axial

$$\delta = \frac{\sigma L}{E} = \frac{FL}{AE} \tag{3–9}$$

La ecuación (3–9) puede usarse para calcular la deformación total de cualquier miembro de carga, siempre que se satisfagan las condiciones definidas para esfuerzo de tensión y compresión. Es decir,

- el miembro debe ser recto y de sección transversal constante
- el material debe ser homogéneo
- la carga debe ser directamente axial
- el esfuerzo debe estar por debajo del límite proporcional del material. Recuerde que el valor del límite proporcional se aproxima a la resistencia a la cedencia, s_y.

Problema de ejemplo 3–5 Los tirantes de la prensa de la figura 3–3 son de aleación de acero AISI 5160 OQT 900. Cada uno tiene un diámetro de 2.00 in y una longitud inicial de 68.5 in. Se ejerce una carga de tensión axial de 40 000 lb en cada tirante durante la operación de la prensa. Calcule la deformación de los tirantes. Verifique también si la resistencia del material es adecuada.

Solución

Objetivo: Calcular la deformación de los tirantes.

Datos: Los tirantes son de acero, AISI 5160 OQT 900; $s_y = 179$ ksi, $s_u = 196$ ksi, 12% de alargamiento Diámetro $= D = 2.00$ in. Longitud $= L = 68.5$ in. Fuerza axial $= F = 40\,000$ lb.

Análisis: Se utilizará la ecuación (3–9) para calcular la deformación. El esfuerzo en los tirantes debe ser verificado para asegurarse de que esté por debajo del límite proporcional y sea seguro bajo cargas de choque repetidas.

Resultados: ***Esfuerzo de tensión axial*:** $\sigma = F/A$.

$$\text{Área} = A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi(2.0\text{ in})^2}{4} = 3.14\text{ in}^2.$$

$$\text{Entonces, } \sigma = \frac{40\,000\text{ lb}}{3.14\text{ in}^2} = 12\,700\text{ psi}.$$

Por consiguiente, el esfuerzo está muy por debajo del límite proporcional.

Para cargas de choque en un material dúctil, la tabla 3–2 recomienda el siguiente esfuerzo de diseño. El porcentaje de alargamiento de 12% se encuentra dentro del intervalo dúctil.

$$\sigma_d = s_u/12 = 196\text{ ksi}/12 = 16.33\text{ ksi} = 16\,330\text{ psi}$$

Como el esfuerzo esperado real se encuentra por debajo del esfuerzo de diseño, los tirantes deberán ser seguros.

***Deformación axial*:** Use la ecuación (3–9). Todos los datos son conocidos excepto el módulo de elasticidad, E. Con las notas al pie de página del apéndice A–14 encontramos $E = 30 \times 10^6$ psi. Entonces,

$$\delta = \frac{FL}{AE} = \frac{(40\,000\text{ lb})(68.5\text{ in})}{(3.14\text{ in}^2)(30 \times 10^6\text{ lb/in}^2)} = 0.029\text{ in}$$

Comentario: Para una prensa mecánica de precisión, la deformación de 0.029 in (0.74 mm) puede ser alta. Sería conveniente realizar la prensa completa. Si se concluye que es excesiva, se podría incrementar el diámetro de los tirantes, sin olvidar que la deformación es inversamente proporcional al área de los tirantes.

Problema de ejemplo 3–6 Un gran péndulo se compone de una bola de 10.0 kg colgada de un alambre de aluminio de 1.00 mm de diámetro y 6.30 m de largo. El aluminio es la aleación 7075–T6. Calcule el alargamiento del alambre debido al peso de la bola de 10 kg.

Solución

Objetivo: Calcular el alargamiento del alambre.

Datos: El alambre es de aleación de aluminio 7075–T6; diámetro $= D = 1.00$ mm. Longitud $= L = 6.30$ m; la masa de la bola es de 10.0 kg.

Análisis: La fuerza en el alambre es igual al peso de la bola, la cual se calcula con $w = mg$. Entonces habrá que determinar el esfuerzo en el alambre para asegurarse de que está por debajo del límite proporcional. Por último, como de ese modo se conocerá el esfuerzo, se utilizará la ecuación (3–8) para calcular el alargamiento del alambre.

Resultados **Fuerza en el alambre:** $F = w = m \cdot g = (10.0 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 98.1 \text{ N}$.

Fuerza de tensión axial: $\sigma = F/A$

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi(1.00 \text{ mm})^2}{4} = 0.785 \text{ mm}^2$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{98.1 \text{ N}}{0.785 \text{ mm}^2} = 125 \text{ N/mm}^2 = 125 \text{ MPa}$$

En el apéndice A–18 se ve que la resistencia a la cedencia de la aleación de aluminio 7075–T6 es de 503 MPa. El esfuerzo está muy debajo del límite proporcional.

Se considera que el esfuerzo es constante durante una lenta oscilación del péndulo y que el aluminio es dúctil al tener 11% de alargamiento. Con la tabla 3–2, el esfuerzo de diseño se calcula como sigue

$$\sigma_d = s_y/2 = 503 \text{ MPa}/2 = 251 \text{ Mpa}$$

Por consiguiente, el alambre es seguro.

***Alargamiento*:** Como todos los datos son conocidos excepto el módulo de elasticidad, E, se utiliza la ecuación (3–8). La nota al pie de página del apéndice A–18 da el valor de $E = 72$ GPa $= 72 \times 10^9$ Pa. Entonces,

$$\delta = \frac{\sigma L}{E} = \frac{(125 \text{ MPa})(6.30 \text{ m})}{72 \text{ GPa}} = \frac{(125 \times 10^6 \text{ Pa})(6.30 \text{ m})}{72 \times 10^9 \text{ Pa}}$$

$$\delta = 10.9 \times 10^{-3} \text{ m} = 10.9 \text{ mm}$$

Comentario ¿Qué ve cerca de usted ahora mismo cuyas dimensiones sean similares a 10.9 mm (0.429 in)? Mida el espesor de unos de sus dedos. Ciertamente el diseño del sistema que contiene el péndulo en este ejemplo tendría que tomar en cuenta esta deflexión.

Problema de ejemplo 3–7

Un eslabón de una máquina de 610 mm de largo se someterá a una carga axial repetida de 3000 N. Se ha propuesto que el eslabón sea de acero y que su sección transversal sea cuadrada. Determine las dimensiones requeridas del eslabón si el alargamiento bajo carga no debe ser de más de 0.05 mm.

Solución

Objetivo Determinar las dimensiones requeridas de la sección transversal cuadrada del eslabón para limitar el alargamiento, δ, a 0.05 mm o menos.

Datos Carga axial en el eslabón $= F = 3000$ N; longitud $= L = 610$ mm.
El eslabón será de acero; entonces $E = 207$ GPa $= 207 \times 10^9$ N/m^2 (apéndice A–14).

Análisis En la ecuación (3–9) para la deformación axial, sea $\delta = 0.05$ mm. Entonces todos los demás datos son conocidos excepto el área de sección transversal, A. Podemos resolver para A, la cual es el área de sección transversal mínima aceptable del eslabón. Sea d cada uno de los lados de la sección transversal cuadrada. Entonces $A = d^2$ y el valor mínimo aceptable de d se calcula con $d = \sqrt{A}$. Después de especificar un tamaño conveniente para d, tenemos que asegurarnos de que el esfuerzo sea seguro y que se encuentre por debajo del límite proporcional.

Resultados ***Área requerida*:** Resolviendo para A con la ecuación (3–9) y sustituyendo valores se obtiene

$$A = \frac{FL}{E\delta} = \frac{(3000 \text{ N})(610 \text{ mm})}{(207 \times 10^9 \text{ N/m}^2)(0.05 \text{ mm})} = 176.8 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

Convirtiendo a mm²

$$A = 176.8 \times 10^{-6}\ \text{m}^2 \times \frac{(10^3\text{mm})^2}{\text{m}^2} = 176.8\ \text{mm}^2$$

y

$$d = \sqrt{A} = \sqrt{176.8\ \text{mm}^2} = 13.3\ \text{mm}$$

El apéndice A–2 da el siguiente tamaño preferido más grande de 14.0 mm.
El área de sección transversal real es $A = d^2 = (14.0\ \text{mm})^2 = 196\ \text{mm}^2$.

Esfuerzo: $\sigma = F/A = 3000\ \text{N}/196\ \text{mm}^2 = 15.3\ \text{N/mm}^2 = 15.3\ \text{MPa}$.

Para una carga repetida, la tabla 3–2 recomienda que el esfuerzo de diseño sea $\sigma_d = s_u/8$. Con $\sigma_d = \sigma$, el valor requerido para la resistencia máxima es σ

$$s_u = 8(\sigma) = 8(15.3\ \text{Mpa}) = 123\ \text{Mpa}$$

Comentario En el apéndice A–14 podemos ver que la resistencia máxima de prácticamente cualquier acero es de más de 123 MPa. A menos que hubiera requerimientos de diseño adicionales, deberíamos especificar el acero menos costoso. En ese caso especificaremos:

$d = 14.0$ mm
el acero AISI 1020 laminado en caliente deberá ser de bajo costo, $s_u = 448$ MPa

Observe que el alargamiento permisible limitó este diseño y que el esfuerzo resultante es relativamente bajo.

Deformación en miembros que soportan múltiples cargas o que tienen propiedades diferentes. En los problemas de ejemplo 3–5 a 3–7, todo el miembro de interés era uniforme en cuanto a material y sección transversal y estaba sometido a la misma magnitud de carga axial en todo él. En semejantes condiciones, se puede utilizar la ecuación (3–9) directamente para calcular la deformación total. De hecho, podemos decir que esta ecuación puede ser utilizada *sólo* cuando todos los factores, F, L, E y A son constantes en toda la sección de interés.

LECCIÓN 6

Cuando cualquier factor en la ecuación (3–9) es diferente a todo lo largo de un miembro dado, éste se dividirá en segmentos donde todos los factores son iguales. Entonces se puede utilizar *superposición* para determinar la deformación total del miembro. El principio de superposición establece que el efecto total de múltiples acciones en un miembro es la suma algebraica de los efectos de los componentes individuales de dichas acciones.

El problema de ejemplo 3−8 ilustra la forma de resolver dichos problemas.

Problema de ejemplo 3−8 La figura 3–5 muestra un tubo de acero utilizado para soportar un equipo mediante cables sujetos, como se muestra. Seleccione el tubo de acero cédula 40 más pequeño que limitará el esfuerzo a no más de 18 000 psi. Entonces, para el tubo seleccionado, determine la deflexión hacia abajo en el punto C en la parte inferior del tubo conforme se aplican las cargas.

Solución Objetivo Especificar el tamaño de un tubo de acero cédula 40 estándar adecuado y determinar su alargamiento.

Datos La carga mostrada en la figura 3–5; $F_1 = F_2 = 8000$ lb (dos fuerzas); $F_3 = 2500$ lb.
Longitud del tubo de A a B: $L_{A-B} = 4.00$ ft (12 in/ft) = 48.0 in.
Longitud del tubo de B a C: $L_{B-C} = 3.00$ ft (12 in/ft) = 36.0 in.
Esfuerzo máximo permisible = 18 000 psi; $E = 30 \times 10^6$ psi (acero).

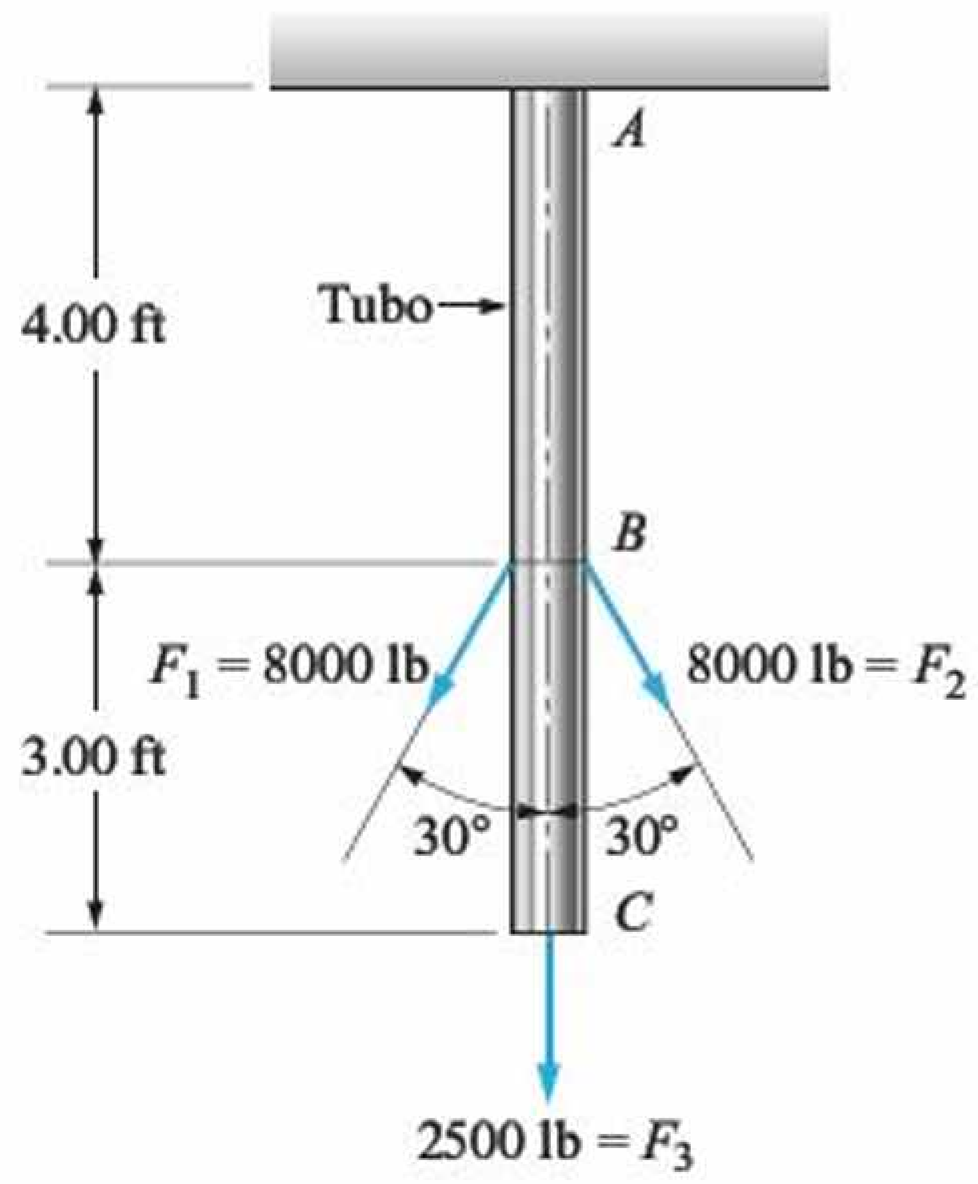


FIGURA 3–5
Tubo del problema de ejemplo 3–8.

Análisis La carga de tensión axial máxima en el tubo es la suma de F_3 más las componentes verticales de cada una de las fuerzas de 8000 lb. Esto ocurre a todo lo largo del tramo A a B del tubo. El tamaño del tubo y el área de sección transversal resultante producirán un esfuerzo en dicha sección de 18000 psi o menos. De B a C, la carga de tensión axial es $F_{B-C} = 2500$ lb. Como la carga es diferente en las dos secciones, el cálculo del alargamiento del tubo se hará con dos cálculos diferentes. Es decir,

$$\delta_C = \delta_{total} = \delta_{A-B} + \delta_{B-C}$$

Resultados ***Cargas axiales***:

$$F_{A-B} = F_3 + F_1 \cos 30° + F_2 \cos 30°$$

Pero

$$F_1 = F_2 = 8\,000 \text{ lb}$$

Entonces

$$F_{A-B} = 2500 \text{ Ib} + 2(8000 \text{ Ib}) \cos 30°$$
$$F_{A-B} = 16400 \text{ Ib}$$
$$F_{B-C} = F_3 = 2500 \text{ Ib}$$

Análisis del esfuerzo y cálculo del área de sección transversal requerida: Con $\sigma = 18\,000$ psi, el área de sección transversal requerida del metal en el tubo es

$$A = \frac{F_{A-B}}{\sigma} = \frac{16\,400 \text{ lb}}{18\,000 \text{ lb/in}^2} = 0.911 \text{ in}^2$$

En el apéndice A–12, que da las propiedades de tubo de acero, el tamaño estándar con la siguiente área de sección transversal más grande es el tubo cédula 40 de 2 in con $A = 1.075$ in². Como se vio en el capítulo 2, este mismo tubo se designaría PIPE2STD en la industria de la construcción, para indicar un tamaño de tubo nominal de 2 in y espesor de pared estándar.

Deflexión:

$$\delta_C = \delta_{total} = \delta_{A-B} + \delta_{B-C}$$

$$\delta_{A-B} = \left(\frac{F_{A-B}\,L_{A-B}}{AE}\right) = \frac{(16\,400 \text{ lb})(48 \text{ in})}{(1.075 \text{ in}^2)(30 \times 10^6 \text{ lb/in}^2)} = 0.024 \text{ in}$$

$$\delta_{B-C} = \left(\frac{F_{B-C}\,L_{B-C}}{AE}\right) = \frac{(2500 \text{ lb})(36 \text{ in})}{(1.075 \text{ in}^2)(30 \times 10^6 \text{ lb/in}^2)} = 0.003 \text{ in}$$

Entonces

$$\delta_C = \delta_{A-B} = \delta_{B-C} = 0.027 \text{ in}$$

Comentario En suma, cuando el soporte mostrado en la figura 3–5 se hace de tubo de acero cédula 40 estándar de 2 in, el punto C desciende 0.027 in por la influencia de las cargas aplicadas.

3–8 DEFORMACIÓN PROVOCADA POR CAMBIOS DE TEMPERATURA

Una máquina o estructura podría sufrir deformación o verse sometida a esfuerzo por cambios de temperatura además de la aplicación de cargas. Los miembros de un puente y otros componentes estructurales experimentan temperaturas tan bajas como −30ºF(−34ºC) y tan altas como 110ºF(43°C) en algunas regiones. Los vehículos y maquinaria que operan a la intemperie experimentan variaciones de temperatura similares. Con frecuencia, la parte de una máquina al inicio estará a temperatura ambiente y luego se calentará cada vez más conforme la máquina opere. Algunos ejemplos son partes de motores, hornos, máquinas de cortar metal, trenes de laminación, dispositivos hidráulicos y neumáticos, y equipo automático de alta velocidad.

Cuando una parte metálica se calienta tiende a dilatarse. Si la dilatación no está restringida, las dimensiones de la parte crecerán pero no se desarrollará esfuerzo en el metal. Sin embargo, en algunos casos la parte está restringida y así se evita el cambio de las dimensiones. En tales circunstancias ocurren esfuerzos.

Las dimensiones cambian en los diferentes materiales a tasas diferentes cuando se someten a cambios de temperatura. La mayoría de los materiales se dilatan conforme la temperatura se incrementa, aunque unos cuantos se contraen y algunos prácticamente permanecen del mismo tamaño. El *coeficiente de dilatación térmica* rige la deformación térmica y el esfuerzo térmico experimentados por un material.

> ***El coeficiente de dilatación térmica, α, es la propiedad de un material que indica la cantidad de cambio unitario de una dimensión con un cambio unitario de temperatura.***

La letra griega α minúscula se utiliza como símbolo del coeficiente de dilatación térmica.

Las unidades para α se derivan de su definición. Expresado de una manera un poco diferente, α es la medida del cambio de longitud de un material por unidad de longitud con un cambio de temperatura de 1.0 grado. Las unidades, entonces, para α en el sistema inglés serían

$$\text{in/(in}\cdot{}^\circ\text{F)} \quad \text{o} \quad 1/{}^\circ\text{F} \quad \text{o} \quad {}^\circ\text{F}^{-1}$$

En unidades SI, α sería

$$\text{m/(m}\cdot{}^\circ\text{C)} \quad \text{o} \quad \text{mm/(mm}\cdot{}^\circ\text{C) o } 1\,/\,{}^\circ\text{C} \quad \text{o} \quad {}^\circ\text{C}^{-1}$$

Para usarse en cálculos, la máxima forma de cada tipo de unidad es la más conveniente. Sin embargo, la primera forma ayudará a recordar el significado físico del término.

De la definición del coeficiente de dilatación térmica se desprende que el cambio de longitud δ de un miembro se puede calcular con la ecuación

Dilatación térmica

$$\delta = \alpha \cdot L \cdot \Delta t \tag{3-10}$$

donde L = longitud original del miembro
Δt = cambio de temperatura

TABLA 3–4 Coeficientes de dilatación térmica, α, de algunos metales, vidrio cilindrado, madera y concreto.

Material	α °F⁻¹	α °C⁻¹
Acero AISI		
1020	6.5×10^{-6}	11.7×10^{-6}
1040	6.3×10^{-6}	11.3×10^{-6}
4140	6.2×10^{-6}	11.2×10^{-6}
Acero estructural	6.5×10^{-6}	11.7×10^{-6}
Hierro fundido gris	6.0×10^{-6}	10.8×10^{-6}
Acero inoxidable		
AISI 301	9.4×10^{-6}	16.9×10^{-6}
AISI 430	5.8×10^{-6}	10.4×10^{-6}
AISI 501	6.2×10^{-6}	11.2×10^{-6}
Aleaciones de aluminio		
2014	12.8×10^{-6}	23.0×10^{-6}
6061	13.0×10^{-6}	23.4×10^{-6}
7075	12.9×10^{-6}	23.2×10^{-6}
Latón, C36000	11.4×10^{-6}	20.5×10^{-6}
Bronce, C22000	10.2×10^{-6}	18.4×10^{-6}
Cobre, C14500	9.9×10^{-6}	17.8×10^{-6}
Magnesio, ASTM AZ63A-T6	14.0×10^{-6}	25.2×10^{-6}
Titanio, Ti-6 A1-4V	5.3×10^{-6}	9.5×10^{-6}
Vidrio cilindrado	5.0×10^{-6}	9.0×10^{-6}
Madera (pino)	3.0×10^{-6}	5.4×10^{-6}
Concreto	6.0×10^{-6}	10.8×10^{-6}

La tabla 3–4 da valores representativos del coeficiente de dilatación térmica de varios metales, vidrio cilindrado, madera de pino y concreto. El valor real de cualquier material varía un poco con la temperatura. Los valores reportados en la tabla 3–4 son valores aproximadamente promedio en el intervalo de temperaturas de 32°F (0°C) a 212°F (100°C).

La tabla 3–5 da valores de α para materiales plásticos. Observe que los valores reales dependen en gran medida de la temperatura y de la inclusión de algún material de relleno

TABLA 3–5 Coeficientes de dilatación térmica, α, de plásticos seleccionados.

Material	α °F⁻¹	α °C⁻¹
Resina ABS	53×10^{-6}	95.4×10^{-6}
Vidrio ABS	16×10^{-6}	28.8×10^{-6}
Resina de acetal	45×10^{-6}	81.0×10^{-6}
Acetal/vidrio	22×10^{-6}	39.6×10^{-6}
Resina de nylon 66	45×10^{-6}	81.0×10^{-6}
Nylon 66/vidrio	13×10^{-6}	23.4×10^{-6}
Resina de policarbonato	37×10^{-6}	66.6×10^{-6}
Policarbonato/vidrio	13×10^{-6}	23.4×10^{-6}
Resina de poliéster	53×10^{-6}	95.4×10^{-6}
Poliéster/vidrio	12×10^{-6}	21.6×10^{-6}
Resina de poliestireno	36×10^{-6}	64.8×10^{-6}
Poliestireno/vidrio	19×10^{-6}	34.2×10^{-6}

TABLA 3–6 Coeficientes de dilatación térmica, α, de compuestos seleccionados.

Material	α Longitudinal °F⁻¹	α Longitudinal °C⁻¹	α Transversal °F⁻¹	α Transversal °C⁻¹
Vidrio E/epoxy, unidireccional	3.5×10^{-6}	6.30×10^{-6}	11.0×10^{-6}	19.8×10^{-6}
Aramida/epoxy, unidireccional	-1.1×10^{-6}	-1.98×10^{-6}	38.0×10^{-6}	68.4×10^{-6}
Carbón/epoxy, unidireccional	0.05×10^{-6}	0.09×10^{-6}	9.0×10^{-6}	16.2×10^{-6}
Carbón/epoxy, casi isotrópico	1.6×10^{-6}	2.88×10^{-6}	1.6×10^{-6}	2.88×10^{-6}

presente en la resina plástica. Para cada uno de los plásticos listados, se dan valores aproximados de α para la resina sin relleno y para una con 30% de vidrio.

En el capítulo 2 se describieron los compuestos, como materiales que combinan una matriz con fibras de refuerzo hechas de varios materiales, tales como vidrio, polímero de aramida, carbón o grafito. Los materiales de la matriz pueden ser polímeros tales como poliéster o epoxicos, cerámicos o algunos metales tales como aluminio. El valor de α para las fibras en general es mucho más pequeño que para la matriz. Además existen numerosas formas de colocar las fibras en la matriz. El coeficiente de dilatación térmica para compuestos, por consiguiente, es muy difícil de generalizar.

La tabla 3–6 da valores representativos de algunos compuestos. Consulte en el capítulo 2 la descripción de los términos *unidireccional* y *casi isotrópico*. En particular con la colocación unidireccional de las fibras en la matriz, hay una dramática diferencia en el valor del coeficiente de dilatación térmica en función de la orientación del material. En la dirección longitudinal, alineada con las fibras, el bajo valor de α para éstas tiende a producir un valor bajo total. Sin embargo, en la dirección transversal, las fibras no son muy efectivas y el valor total de α es mucho más alto. Observe también que, para el compuesto de aramida/epoxy unidireccional particular listado, el valor de α en realidad es negativo, lo que significa que este compuesto se hace *más pequeño* conforme la temperatura se incrementa.

Problema de ejemplo 3–9 Una varilla de acero AISI 1040 se utiliza como eslabón en un mecanismo de dirección de un gran camión. Si su longitud nominal es de 56 in, calcule su cambio de longitud cuando la temperatura cambia de −30°F a 110°F.

Solución

Objetivo Calcular el cambio de longitud del eslabón.

Datos El eslabón es de acero AISI 1040; longitud $= L = 56$ in

Temperatura original $= t_1 = -30$°F

Temperatura final $= t_2 = 110$°F.

Análisis Utilizar la ecuación (3–10): En la tabla 3–4, $\alpha = 6.3 \times 10^{-6}\,°F^{-1}$.

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 110°F - (-30°F) = 140°F$$

Resultados $\delta = \alpha \cdot L \cdot \Delta t = (6.3 \times 10^{-6}\,°F^{-1})(56\text{ in})(140°F) = 0.049\text{ in}$

Comentario El significado de esta cantidad de deformación tendría que ser evaluado dentro del diseño completo del mecanismo de dirección del camión. Aproximadamente, doce hojas de papel bond apiladas tienen un espesor de 0.049 in.

Problema de ejemplo 3–10

Una varilla de empuje del mecanismo de válvulas de un motor automotriz tiene una longitud nominal de 203 mm. Si la varilla es de acero AISI 4140, calcule el alargamiento provocado por un cambio de temperatura de $-20°C$ a $140°C$.

Solución

Objetivo: Calcular el cambio de longitud de la varilla de empuje.

Datos: El eslabón es de acero AISI 4140; longitud $= L = 203$ mm.
Temperatura original $= t_1 = -20°C$.
Temperatura final: $= t_2 = 140°C$.

Análisis: Utilizar la ecuación (3–10). En la tabla 3–4, $\alpha = 11.2 \times 10^{-6}\,°C^{-1}$.

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 140°C - (-20°C) = 160°C$$

Resultados: $\delta = \alpha \cdot L \cdot \Delta T = (11.2 \times 10^{-6}\,°C^{-1})(203\text{ mm})(160°C) = 0.364\text{ mm}$

Comentario: Sería importante tomar en cuenta esta dilatación en el diseño del mecanismo de válvulas. Podría provocar ruido debido al ajuste flojo de las partes o a altos esfuerzos si la dilatación se restringe.

Problema de ejemplo 3–11

El marco de aleación de aluminio 6061 de una ventana es de 4.350 m de largo y sostiene una hoja de vidrio cilindrado de 4.347 m de largo cuando la temperatura es de 35°C. ¿A qué temperatura el aluminio y el vidrio serían de la misma longitud?

Solución

Objetivo: Calcular la temperatura a la cual el marco de aluminio y el vidrio serían de la misma longitud.

Datos: El aluminio es una aleación 6061; en la tabla 3–4 se encuentra que $\alpha_a = 23.4 \times 10^{-6}°C^{-1}$.
Para vidrio cilindrado, $\alpha_g = 9.0 \times 10^{-6}°C^{-1}$.
A $t_1 = 35°C$; $L_{a1} = 4.350$ m; $L_{g1} = 4.347$ m.

Análisis: La temperatura tendría que reducirse para que el aluminio y el vidrio fueran de la misma longitud, puesto que el aluminio se contrae más que el vidrio. Conforme la temperatura se reduce, el cambio de temperatura Δt sería la misma tanto para el aluminio como para el vidrio. Después del cambio de temperatura, la longitud del aluminio sería

$$L_{a2} = L_{a1} - \alpha_a \cdot L_{a1} \cdot \Delta t$$

donde el subíndice a se refiere al aluminio, 1 se refiere a la condición inicial y 2 a la condición final. La longitud del vidrio sería

$$L_{g2} = L_{g1} - \alpha_g \cdot L_{g1} \cdot \Delta t$$

Pero cuando el vidrio y el aluminio tienen la misma longitud,

$$L_{a2} = L_{g2}$$

Entonces

$$L_{a1} - \alpha_a \cdot L_{a1} \cdot \Delta t = L_{g1} - \alpha_g \cdot L_{g1} \cdot \Delta t$$

Resolviendo para Δt se obtiene

$$\Delta t = \frac{L_{a1} - L_{g1}}{\alpha_a \cdot L_{a1} - \alpha_g \cdot L_{g1}}$$

Resultados

$$\Delta t = \frac{4.350\text{ m} - 4.347\text{ m}}{(23.4 \times 10^{-6}\,°\text{C}^{-1})(4.350\text{ m}) - (9.0 \times 10^{-6}\,°\text{C}^{-1})(4.347\text{ m})}$$

$$\Delta t = \frac{0.003}{(0.000102) - (0.000039)}°\text{C} = 48°\text{C}$$

Entonces, $t_2 = t_1 - \Delta t = 35°\text{C} - 48°\text{C} = -13°\text{C}$

Comentario Como esta temperatura se encuentra muy bien dentro de la posible temperatura ambiente para un edificio, esta ventana podría provocar una condición peligrosa. El marco de la ventana y el vidrio se acortarían sin esfuerzo hasta una temperatura de −13°C. Si la temperatura continuara reduciéndose, el marco se contraería más rápido que el vidrio y provocaría esfuerzo en el vidrio. Desde luego, si el esfuerzo fuera suficientemente grande, el vidrio se rompería y posiblemente provocaría lesiones. La ventana deberá rediseñarse de modo que haya una mayor diferencia en el tamaño entre el vidrio y el marco de aluminio.

3–9 ESFUERZO TÉRMICO

En la sección precedente, las partes que estuvieron sometidas a cambios de temperatura no estaban restringidas, de modo que podían crecer o contraerse libremente. Si las partes están sujetas de tal modo que opongan resistencia a la deformación, se desarrollan esfuerzos.

Considere el miembro de una estructura de acero de un horno que se calienta, en tanto que los miembros a los cuales está sujeto se mantiene a una temperatura más baja. Suponiendo el caso ideal, los soportes se considerarían rígidos e inmóviles. Por lo tanto, se evitaría la dilatación del miembro de acero.

Si se permitiera que la partes de acero se dilatara, se alargaría en una cantidad $\delta = \alpha \cdot L \cdot \Delta t$. Pero como está restringida, ésta representa la deformación total aparente en el acero. Entonces la deformación unitaria sería

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{\alpha \cdot L \cdot \Delta t}{L} = \alpha(\Delta t) \qquad \textbf{(3–11)}$$

Los esfuerzos resultantes en la parte se determinan con

$$\sigma = E\epsilon$$

o

Esfuerzo térmico

$$\sigma = E\alpha(\Delta t) \qquad \textbf{(3–12)}$$

Este esfuerzo ocurre sin la adición de fuerzas externas. Debe asegurarse de que el nivel de esfuerzo resultante no provocará cedencia o fractura del material. También, en el caso de miembros relativamente largos y esbeltos sometidos a compresión, la restricción de la dilatación puede hacer que los miembros se pandeen debido a la acción de columna (consulte el capítulo 11).

Problema de ejemplo 3–12 El miembro estructural de acero AISI 1020 de un horno se somete a un incremento de temperatura de 95°F mientras se mantiene rígido en sus extremos. Calcule el esfuerzo resultante en el acero.

Solución Objetivo Calcular el esfuerzo térmico en el acero.

Datos El acero es AISI 1020; en la tabla 3–4, $\alpha = 6.5 \times 10^{-6}\,°\text{F}^{-1}$.
$E = 30 \times 10^6$ psi; $\Delta t = 95°\text{F}$.

Análisis Utilizar la ecuación (3 − 12); $\sigma = E\alpha(\Delta t)$.

Resultados $\sigma = (30 \times 10^6 \text{ psi})(6.5 \times 10^{-6}\,°\text{F}^{-1})(95°\text{F}) = 18\,500$ psi.

Comentario El apéndice A–14 muestra que la resistencia a la cedencia del acero 1020 recocido, su forma más débil, es de 43 000 psi. Por consiguiente, el miembro estructural sería seguro en cuanto a cedencia. Pero el pandeo de columna también tiene que ser verificado porque el esfuerzo es de compresión.

Problema de ejemplo 3–13 Una barra de aleación de aluminio 2014–T6 de una máquina se mantiene sujeta por sus extremos mientras se enfría desde 95°C. ¿A qué temperatura el esfuerzo de tensión en la barra sería igual a la mitad de la resistencia a la cedencia del aluminio si originalmente se encontraba a cero esfuerzo?

Solución Objetivo Calcular la temperatura cuando $\sigma = s_y/2$.

Datos El aluminio es de aleación 2014–T6; en la tabla 3–4, $\alpha = 23.0 \times 10^{-6}\,°\text{C}^{-1}$.
En el apéndice A–18, $s_y = 414$ MPa; $E = 73$ GPa; $t_1 = 95°\text{C}$.

Análisis Utilizar la ecuación (3–12) y resolver para Δt.

$$\sigma = E\alpha(\Delta t)$$

$$\Delta t = \frac{\sigma}{E\alpha}$$

Sea el esfuerzo

$$\sigma = \frac{s_y}{2} = \frac{414 \text{ MPa}}{2} = 207 \text{ MPa}$$

Resultados

$$\Delta t = \frac{\sigma}{E\alpha} = \frac{207 \text{ MPa}}{(73 \text{ GPa})(23.0 \times 10^{-6}\,°\text{C}^{-1})}$$

$$\Delta t = \frac{207 \times 10^6 \text{ Pa}}{(73 \times 10^9 \text{ Pa})(23.0 \times 10^{-6}\,°\text{C}^{-1})} = 123°\text{C}$$

Como el esfuerzo en la barra era cero cuando su temperatura era de 95°C, la temperatura a la cual el esfuerzo sería de 207 MPa sería

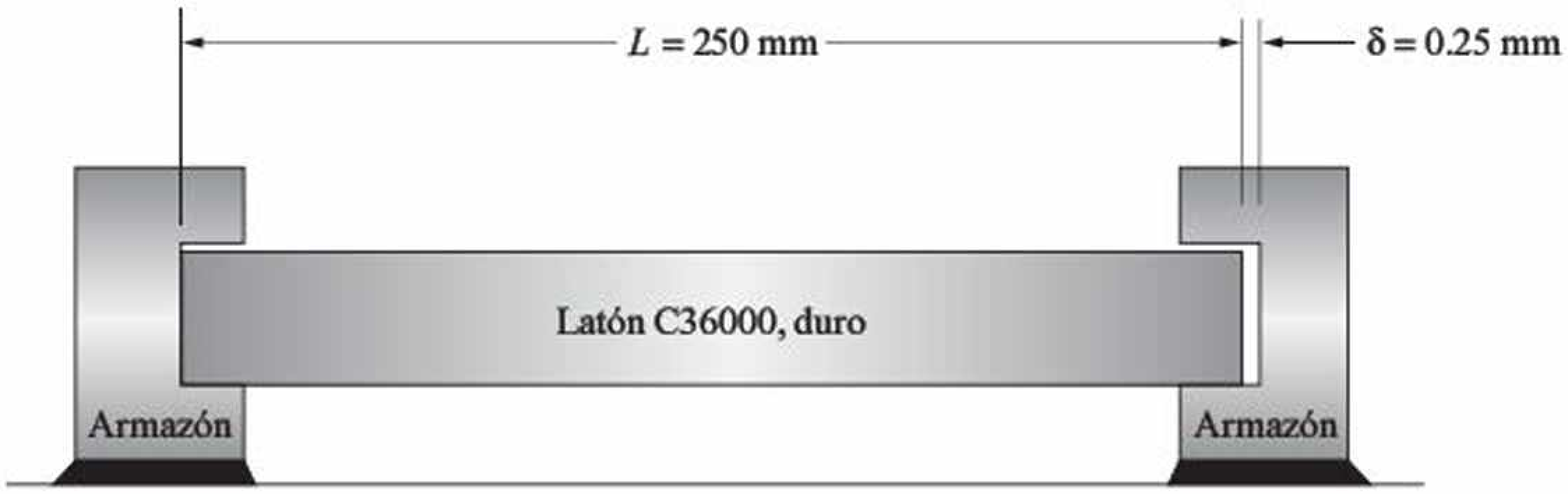
$$t = 95°\text{C} - 123°\text{C} = -28°\text{C}$$

Comentario El nivel de esfuerzo de la mitad de la resistencia a la cedencia es un esfuerzo de diseño razonable para un miembro estáticamente cargado. Por lo tanto, si la temperatura fuera a ser de −28°C, la seguridad de la barra se pondría en riesgo.

Deformación térmica y esfuerzo bajo restricción parcial. Existen muchos casos prácticos en los que un miembro originalmente tiene la libertad de dilatarse debido a cambios de temperatura, pero después de un cierto incremento de temperatura, se comienza a aplicar restricciones externas.

Considere la situación mostrada en la figura 3–6. Una barra hecha de latón C36000, duro, inicialmente se instala en un armazón rígido con una pequeña tolerancia. Cuando se incrementa la temperatura ocurren dos acciones. Primero, la barra se dilatará conforme se incremente la temperatura, hasta que la barra apenas toque la parte interna del armazón. En esta parte del proceso, no se produce esfuerzo en la barra. Conforme la barra va siendo restringida por el armazón, ya no puede haber más dilatación y se desarrollan esfuerzos térmicos durante la parte final de la elevación de la temperatura.

FIGURA 3–6 Barra de latón del problema de ejemplo 3–14.



El problema de ejemplo 3–14 ilustra cómo se puede abordar ese problema.

Problema de ejemplo 3–14 La barra de latón mostrada en la figura 3–6 forma parte de una banda transportadora que conduce componentes a un horno. Inicialmente, cuando la temperatura es de 15°C, existe una tolerancia u holgura total de 0.25 mm entre el extremo de la barra y el interior de los armazones en ambos lados. Describa qué sucede cuando la temperatura se incrementa de 15°C a 90°C. Considere que los armazones son rígidos y que sus dimensiones no cambian cuando se eleva la temperatura.

Solución

Objetivo: Describir el comportamiento de la barra conforme se eleva la temperatura.

Datos: Longitud inicial de la barra: $L = 250$ mm

Brecha inicial: $\delta = 0.25$ mm

Material de la barra: Latón C36000, duro. $\alpha = 20.5 \times 10^{-6}\,°\text{C}^{-1}$ (tabla 3–4).

$$s_y = 310 \text{ MPa}, E = 110 \text{ GPa (apéndice A–15)}$$

Análisis: ***Paso 1.*** Determinar primero que elevación de temperatura hará que la barra se dilate 0.25 mm y que su extremo apenas se ponga en contacto con el armazón. Se puede utilizar la ecuación (3–10).

Paso 2. Determinar entonces qué tanta elevación de temperatura ocurre desde ese punto hasta que la temperatura es de 90°C.

Paso 3. Se puede utilizar entonces la ecuación (3–12) para calcular el esfuerzo desarrollado en la barra durante la elevación final de la temperatura. La seguridad de este esfuerzo debe ser evaluada.

Resultados: ***Paso 1.*** La cantidad de elevación de la temperatura para alargar la barra 0.25 mm:

$$\delta = \alpha L(\Delta t_1)$$

Resolviendo para Δt_1 se obtiene

$$\Delta t_1 = \frac{\delta}{\alpha L} = \frac{0.25 \text{ mm}}{(20.5 \times 10^{-6}\,°\text{C}^{-1})(250 \text{ mm})} = 48.8°\text{C}$$

Paso 2. La temperatura a la cual ocurre esto es

$$t_2 = t_1 + \Delta t_1 = 15°\text{C} + 48.8°\text{C} = 63.8°\text{C}$$

Entonces la elevación de la temperatura adicional hasta la temperatura máxima es

$$\Delta t_2 = 90°\text{C} - 63.8°\text{C} = 26.2°\text{C}$$

Paso 3. Para esta elevación de temperatura final, se considera que la barra está totalmente restringida. Por consiguiente, en la barra se induce un esfuerzo de compresión. Utilizando la ecuación (3–12),

$$\sigma = E\alpha(\Delta t)\ (110 \times 10^9\text{Pa})(20.5 \times 10^{-6}\,°\text{C}^{-1})\ (26.2°\text{C}) = 59.08\ \text{MPa}$$

Verifiquemos este esfuerzo contra la cedencia. Sea $\sigma = \sigma_d = s_y/N$. Entonces,

$$N = s_y/\sigma = 310\ \text{MPa}/59.08\ \text{MPa} = 5.25$$

LECCIÓN 7

Este es un factor de diseño suficientemente alto para asegurarse de que no ocurrirá cedencia. Sin embargo, se deberá verificar el pandeo de columna (vea el capítulo 11).

3–10 MIEMBROS HECHOS DE MÁS DE UN MATERIAL

Cuando dos o más materiales en un miembro comparten la carga a la que está sometido, se requiere un análisis especial para determinar qué porción de la carga soporta cada material. Es necesario considerar las propiedades elásticas de los materiales.

La figura 3−7 muestra un tubo de acero relleno de concreto utilizado para soportar parte de una gran estructura. La carga está distribuida uniformemente en la parte superior del soporte. Deseamos determinar el esfuerzo tanto en el acero como en el concreto.

Es necesario entender dos conceptos al derivar la solución a este problema.

1. La carga total F es compartida por el acero y el concreto de modo que $F = F_s + F_c$.
2. Bajo la carga de compresión F, el soporte compuesto se deforma y los dos materiales también lo hacen en cantidades iguales. Es decir, $\delta_s = \delta_c$.

Ahora como el acero y el concreto originalmente eran de la misma longitud,

$$\frac{\delta_s}{L} = \frac{\delta_c}{L}$$

Pero

$$\frac{\delta_s}{L} = \epsilon_s \quad \text{y} \quad \frac{\delta_c}{L} = \epsilon_c$$

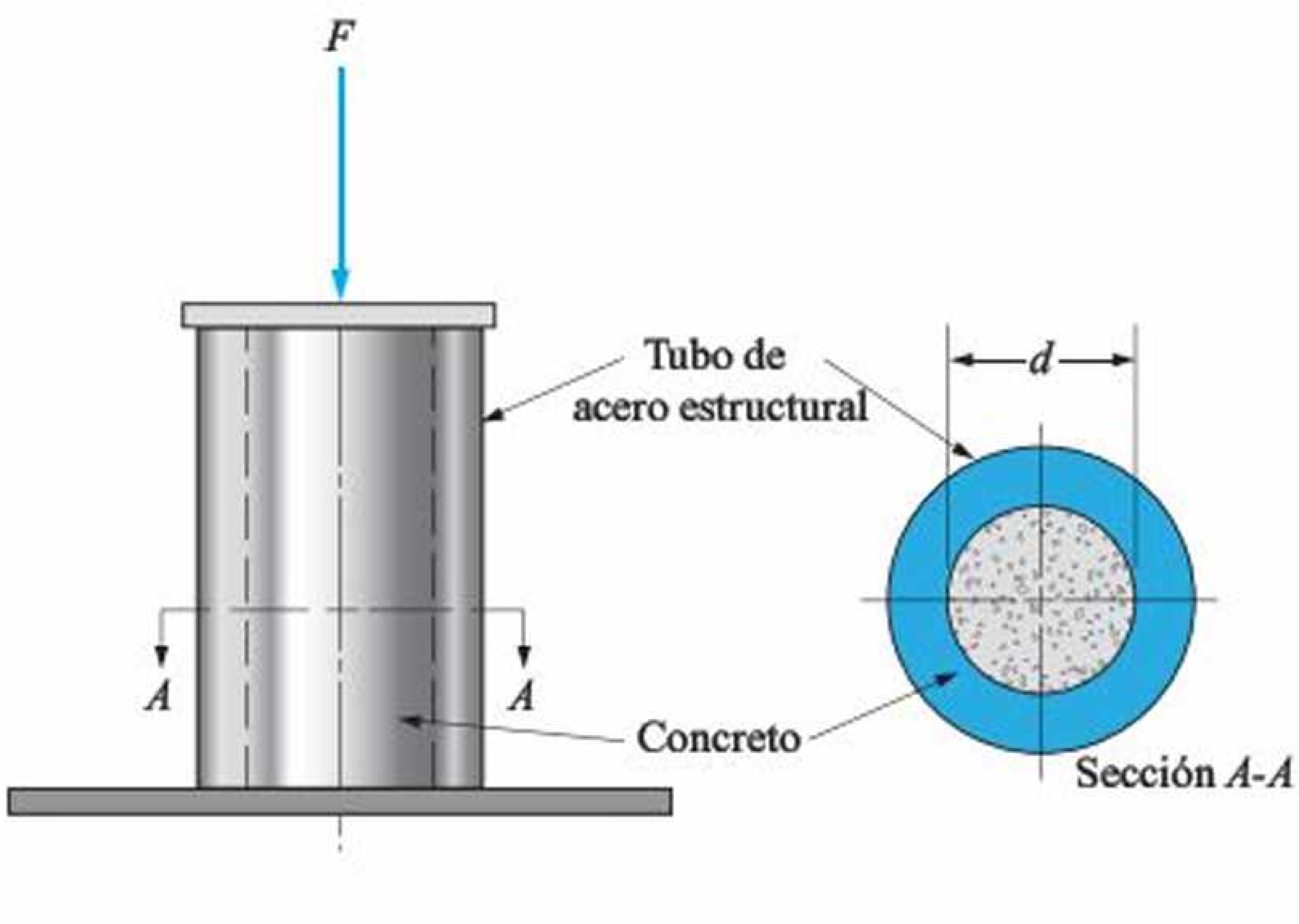


FIGURA 3–7 Poste de acero y concreto.

Entonces las deformaciones en los dos materiales son iguales.

$$\epsilon_s = \epsilon_c$$

Además, según la definición de módulo de elasticidad,

$$\epsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s} \quad \text{y} \quad \epsilon_c = \frac{\sigma_c}{E_c}$$

Entonces

$$\frac{\sigma_s}{E_s} = \frac{\sigma_c}{E_c}$$

Resolviendo para σ_s se obtiene

$$\sigma_s = \frac{\sigma_c E_s}{E_c} \tag{3–13}$$

Esta ecuación da la relación entre los dos esfuerzos.

Ahora considere las cargas,

$$F_s + F_c = F$$

Como ambos materiales están sometidos a esfuerzo axial,

$$\sigma_s = F_s/A_s \qquad \text{y} \qquad \sigma_c = F_c/A_c$$

o

$$F_s = \sigma_s A_s \qquad \text{y} \qquad F_c = \sigma_c A_c$$

donde A_s y A_c son las áreas del acero y concreto, respectivamente. Por consiguiente,

$$\sigma_s A_s + \sigma_c A_c = F_c \tag{3–14}$$

Sustituyendo la ecuación (3 – 13) en la ecuación (3 – 14) se obtiene

$$\frac{A_s \sigma_c E_s}{E_c} + \sigma_c A_c = F$$

Ahora, resolviendo para σ_c se obtiene

$$\sigma_c = \frac{FE_c}{A_s E_s + A_c E_c} \tag{3–15}$$

Ahora se pueden utilizar las ecuaciones (3 – 13) y (3 – 15) para calcular los esfuerzos en el acero y el concreto.

Problema de ejemplo 3–15 El soporte mostrado en la figura 3–7 es un tubo de acero cédula 40 estándar de 6 in completamente relleno de concreto. Si la carga F es de 155 000 lb, calcule el esfuerzo en el concreto y el acero. Para acero use $E = 30 \times 10^6$ psi. Para concreto use $E = 3.3 \times 10^6$ psi para una fuerza nominal de $s_c = 3000$ psi (vea la sección 2–10).

Solución Objetivo Calcular el esfuerzo en el concreto y el acero.

Datos Carga $= F = 155\,000$ lb; $E_s = 30 \times 10^6$ psi; $E_c = 3.3 \times 10^6$ psi.
Según el apéndice A–12, para un tubo cédula 40 de 6 in:
$A_s = 5.581$ in²; diámetro interno $= d = 6.065$ in.

Análisis Utilizar la ecuación (3–15) para calcular el esfuerzo en el concreto, σ_c. Utilizar en seguida la ecuación (3–13) para comparar σ_s. Todos los datos son conocidos, excepto A_c. Pero,

$$A_c = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi(6.065\text{ in})^2}{4} = 28.89\text{ in}^2$$

Resultados Entonces en la ecuación (3–15),

$$\sigma_c = \frac{(155\,000\text{ lb})(3.3 \times 10^6\text{ psi})}{(5.581\text{ in}^2)(30 \times 10^6\text{ psi}) + (28.89\text{ in}^2)(3.3 \times 10^6\text{ psi})} = 1946\text{ psi}$$

Con la ecuación (3–13) se obtiene

$$\sigma_s = \frac{\sigma_c E_s}{E_c} = \frac{(1946\text{ psi})(30 \times 10^6\text{ psi})}{3.3 \times 10^6\text{ psi}} = 17\,696\text{ psi}$$

Comentario Estos esfuerzos son bastante altos. Si se hubiera deseado tener por lo menos un factor de diseño de 2.0 basado en la resistencia a la cedencia del acero y 4.0 en la resistencia nominal del concreto, las resistencias requeridas serían,

Acero: $s_y = 2(17\,696\text{ psi}) = 35\,392$ psi
Concreto: σ_c nominal $= 4(1946\text{ psi}) = 7784$ psi

El acero podría ser similar al AISI 1020 recocido o a cualquier condición más fuerte. Una resistencia nominal de 3000 psi para el concreto no sería satisfactoria.

Resumen y generalización El análisis presentado en el ejemplo 3–14 puede generalizarse para cualquier situación en la que dos o más miembros de dos materiales diferentes comparten las cargas siempre que todos los miembros experimenten deformaciones iguales. Reemplazando los subíndices s y c en el análisis precedente por los subíndices más generales 1 y 2, podemos expresar las ecuaciones (3–15) y (3–13) en las formas,

$$\sigma_2 = \frac{FE_2}{A_1E_1 + A_2E_2} \tag{3–16}$$

LECCIÓN 8

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_2 E_1}{E_2} \tag{3–17}$$

Miembros compuestos sometidos a compresión en la construcción. El uso de miembros HSS rellenos de concreto o secciones de columna embutidas en concreto es común en la construcción de edificios.

Los manuales de referencia del AISC dan en tablas extensas la resistencia de diseño a compresión axial (en kips) de dichos miembros como una función de su longitud efectiva. Se considera tanto el esfuerzo de compresión directo como el comportamiento de columna (discutidos más adelante en este libro). Aquí se abordan:

- Perfiles HSS de acero cuadrados y rectangulares desde $2\frac{1}{2}$ in $\times$ $2\frac{1}{2}$ in hasta 20 in $\times$ 12 in (63.5 mm $\times$ 63.5 mm hasta 508 mm $\times$ 304.8 mm) y todos los espesores de pared comunes. Se incluyen cuatro combinaciones de la resistencia de acero (ASTM A500, Grado B) y la resistencia nominal de concreto:
  - Resistencia a la cedencia de acero = 42 ksi (290 MPa) y $f'_c = 4$ ksi (27.6 MPa)
  - Resistencia a la cedencia de acero = 42 ksi (290 MPa) y $f'_c = 5$ ksi (34.5 MPa)
  - Resistencia a la cedencia de acero = 46 ksi (317 MPa) y $f'_c = 4$ ksi (27.6 MPa)
  - Resistencia a la cedencia de acero = 46 ksi (317 MPa) y $f'_c = 5$ ksi (34.5 MPa)
- Perfiles HSS de acero redondos (ASTM A500, grado B) desde 4.00 in hasta 20.00 in de diámetro externo (101.6 mm hasta 508 mm) y todos los espesores de pared. Se incluyen dos combinaciones resistencia de acero y concreto.
  - Resistencia a la cedencia de acero = 42 ksi (290 MPa) y $f'_c = 4$ ksi (27.6 MPa)
  - Resistencia a la cedencia de acero = 42 ksi (290 MPa) y $f'_c = 5$ ksi (34.5 MPa)
- Tubo de acero (ASTM A53, grado B) desde 3 in hasta 12 in de tamaño nominal (75 mm hasta 310 mm) y todos los espesores de pared comunes; estándar, XS y XXS. Éstos se combinan con dos resistencias de concreto nominales:
  - Resistencia a la cedencia de acero = 35 ksi (241 MPa) y $f'_c = 4$ ksi (27.6 MPa)
  - Resistencia a la cedencia de acero = 35 ksi (241 MPa) y $f'_c = 5$ ksi (34.5 MPa)

3–11 FACTORES DE CONCENTRACIÓN DE ESFUERZO CON ESFUERZOS AXIALES DIRECTOS

Al definir el método de calcular esfuerzo provocado por una carga de compresión o tensión directa aplicada a un miembro, se recalcó que la sección transversal de éste debe ser uniforme para que la ecuación $\sigma = F/A$ sea válida. La razón de esta restricción es que donde cambia la geometría de un miembro cargado, el esfuerzo real desarrollado es mayor que el que se predeciría mediante la ecuación estándar. Este fenómeno se conoce como *concentración de esfuerzo,* porque estudios detallados revelan que los elevados esfuerzos localizados parecen concentrarse alrededor de secciones donde cambia la geometría.

La figura 3–8 ilustra el caso de concentración de esfuerzos en el ejemplo de una barra redonda axialmente cargada a tensión que tiene dos diámetros con un escalón entre ellos. Observe que en la base del escalón hay un pequeño filete. Su importancia se analizará más adelante. Bajo el dibujo de la barra escalonada hay una gráfica de esfuerzo contra posición en la barra. En la sección 1, donde el diámetro de la barra es D y lejos del escalón, el esfuerzo se calcula con

$$\sigma_1 = F/A_1 = F/(\pi D^2/4)$$

En la sección 2, donde el diámetro de la barra tiene el valor menor de d, es esfuerzo es

$$\sigma_2 = F/A_2 = F/(\pi d^2/4)$$

Entonces es de esperarse que la curva esfuerzo contra posición aparezca como líneas rectas con un salto abrupto donde cambia el diámetro. Pero pruebas realizadas comprobaron que la distribución del esfuerzo real se asemeja más a la línea curva: fundida con las dos líneas rectas lejos del escalón, pero con una elevación mucho más fuerte cerca de éste.

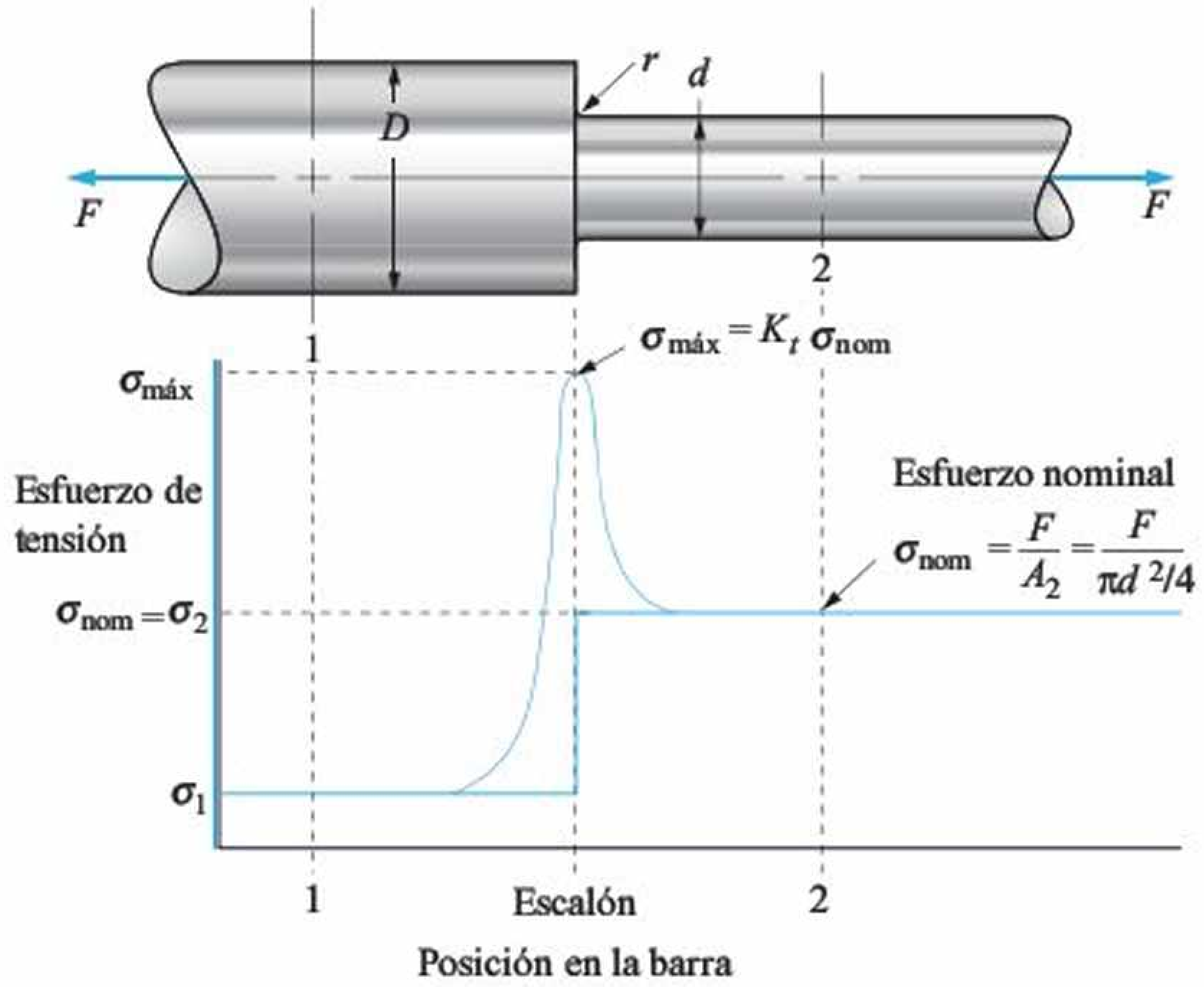


FIGURA 3–8 Distribución del esfuerzo cerca de un cambio de geometría.

Para tomar en cuenta el esfuerzo mayor que el previsto en el escalón, modificamos la fórmula de esfuerzo directo con la inclusión de un *factor de concentración de esfuerzo*, K_t, para producir la forma mostrada en la ecuación (3–18).

$$\sigma_{máx} = K_t\sigma_{nom} \tag{3–18}$$

donde, en este caso, el esfuerzo nominal está basado en la sección menor 2. Es decir,

$$\sigma_{nom} = \sigma_2 = F/A_2 = (\pi d^2/4)$$

En ese caso, el valor de K_t representa el factor por el cual el esfuerzo real es mayor que el esfuerzo nominal calculado con la fórmula estándar.

La figura 3–9 muestra un modelo fotoelástico de otro caso que demuestra el fenómeno de concentración de esfuerzo. El modelo de plástico transparente es una barra rectangular recta de espesor constante que soporta una carga axial. Cerca de la mitad de la barra hay un barreno sobre el eje del miembro. El esfuerzo nominal cerca del barreno naturalmente se incrementa a causa del material removido. Pero el esfuerzo real máximo cerca del barreno es más elevado que el esfuerzo nominal, tal como lo indica la concentración de franjas oscuras. El apéndice A–22–4, curva A, proporciona datos de la magnitud de K_t para este caso. El valor depende de la relación del diámetro del barreno entre el ancho total de la barra.

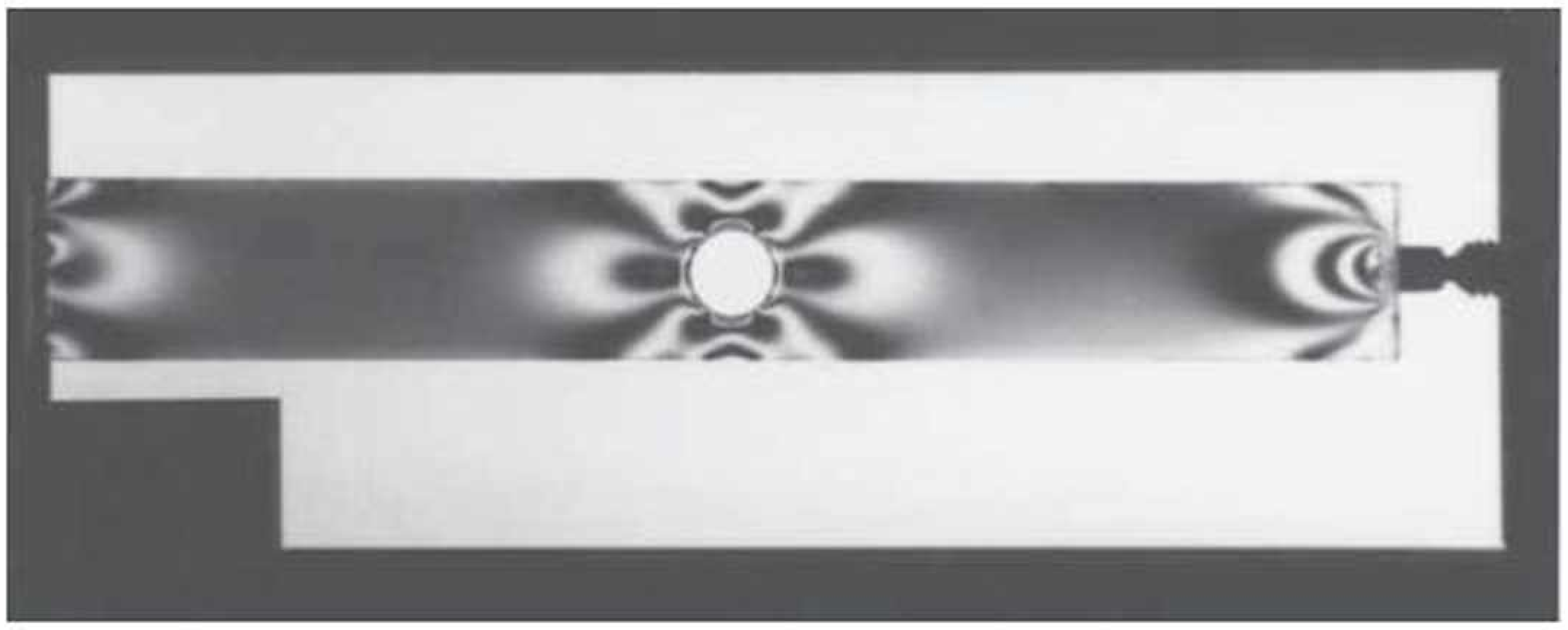


FIGURA 3–9 Modelo fotoelástico que muestra la concentración de esfuerzo en un barreno de una barra plana axialmente cargada (Fuente: Measurements Group, Inc., Raleigh, NC).

Las concentraciones de esfuerzo son más dañinas con cargas dinámicas tales como cargas repetidas, de impacto o choque. De hecho, las fallas por fatiga ocurren con mayor frecuencia cerca de los lugares donde se concentran los esfuerzos con pequeñas grietas locales que crecen con el tiempo hasta que el resto de la sección no es capaz de soportar la carga. Con cargas estáticas, el elevado esfuerzo cerca de la discontinuidad puede provocar cedencia local que redistribuiría el esfuerzo a un valor promedio menor que la resistencia a la cedencia y, consecuentemente, la pieza seguiría siendo segura.

Valores de factores de concentración de esfuerzo. La magnitud de la concentración de esfuerzo, K_g, depende de la geometría del miembro cerca de la discontinuidad. La mayoría de los datos se obtuvieron experimentalmente mediante una cuidadosa medición del esfuerzo máximo, $\sigma_{máx}$, en la que se utilizaron técnicas de análisis experimental de esfuerzos tales como medición de deformación o fotoelasticidad (consulte la sección 1–13 en el capítulo 1). También se podría utilizar métodos computarizados basados en el análisis de elemento finito. Consecuentemente, el valor de K_t se calcula con

Factor de concentración de esfuerzo

$$K_t = \sigma_{máx}/\sigma_{nom} \tag{3–19}$$

donde σ_{nom} es el esfuerzo que se calcularía en la sección de interés sin considerar la concentración de esfuerzo. En el caso que se está analizando, esfuerzo de tensión directo, $\sigma_{nom} = F/A$.

El apéndice A–22 contiene varias gráficas que pueden utilizarse para determinar el valor de K_t para varias geometrías. Consulte las referencias 8 y 10 para muchos más casos.

A−22−1: Barra redonda axialmente cargada a tensión con una ranura circular
A−22−2: Barra redonda axialmente cargada a tensión con un escalón y un filete
A−22−3: Placa plana axialmente cargada a tensión con un escalón y un filete
A−22−4: Placa plana con un barreno en el centro
A−22−5: Barra redonda con un barreno transversal

La gráfica en el apéndice A–22–1 muestra la forma típica de presentar valores de factores de concentración de esfuerzo. El eje vertical da el valor de K_t. Los factores geométricos pertinentes son el diámetro de toda la sección redonda, D, el diámetro en la base de la ranura, d_g, y el radio de la ranura circular, r. Con estos datos se calculan *dos* parámetros. El eje horizontal es la relación de r/d_g. La familia de curvas que aparece en la gráfica es para valores diferentes de la relación D/d_g. El uso normal de esta gráfica, cuando se conoce la geometría completa, es localizar el valor de r/d_g en la gráfica, trazar una línea vertical hasta la curva de D/d_g y luego una horizontal hasta el eje vertical para leer K_t. Con frecuencia es necesario interpolar entre las curvas de la gráfica. Observe que el esfuerzo nominal para la barra redonda ranurada está basado en el esfuerzo en la *parte inferior de la ranura*, el área menor en la cercanía. Aunque esto es típico, es importante que sepa en qué está basado el esfuerzo nominal en cualquier gráfica de concentración de esfuerzo dada. Con frecuencia se utilizan ranuras de fondo circular para distribuir aceite u otros lubricantes hacia un eje.

La gráfica del apéndice A–22–2 para la barra redonda escalonada tiene tres factores geométricos: el diámetro mayor, D, el diámetro menor, d, y el radio del filete, r, en el escalón donde cambia el diámetro. Observe que el valor de K_t se eleva rápidamente con valores pequeños del radio del filete. Como diseñador, deberá considerar el mayor radio práctico para el filete con el objeto de mantener un esfuerzo máximo relativamente bajo en el escalón.

Un uso importante de la gráfica del apéndice A–22–2 es el análisis de factores de concentración de esfuerzo en barras redondas con ranuras para anillos de retención, como se muestra en la figura 3–10. La geometría típica de la ranura, especificada por el fabricante de los anillos, se muestra en la figura 3–11. El fondo de la ranura es plano y el filete en cada extremo es bastante pequeño para que haya una superficie vertical suficiente para asentar el anillo.

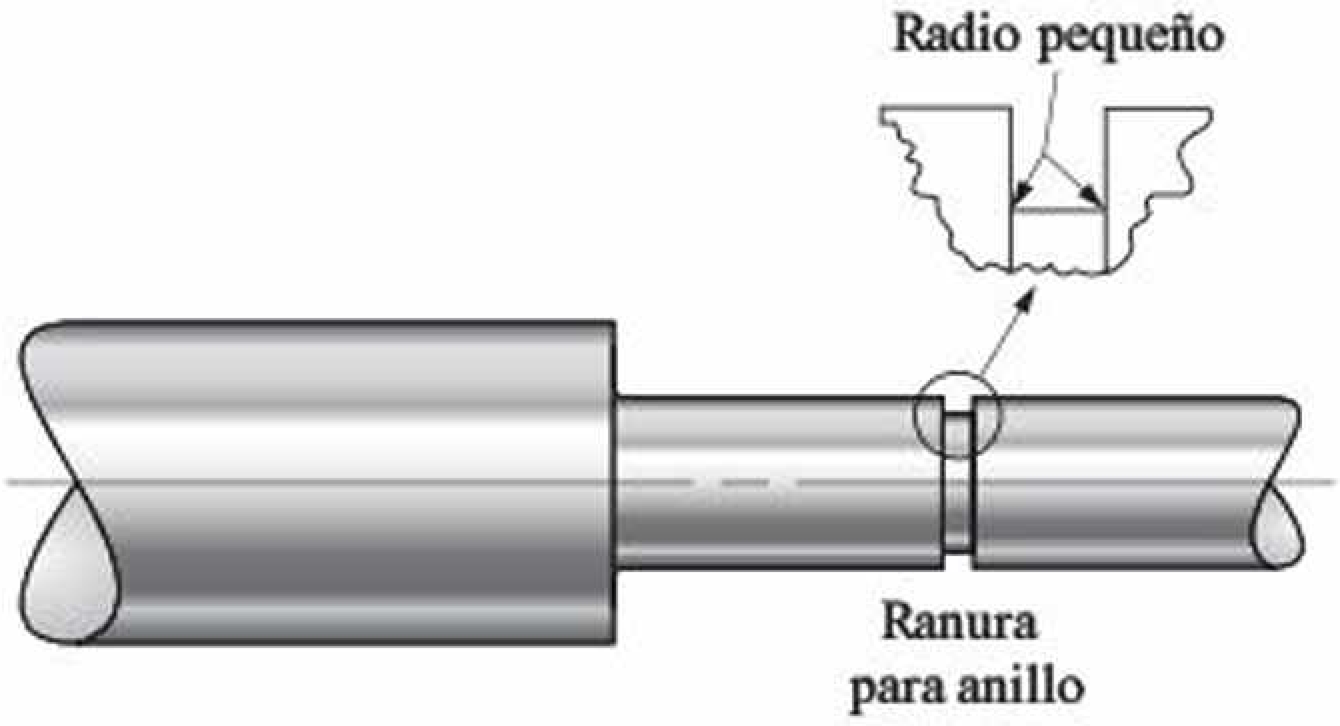


FIGURA 3–10
Flecha escalonada con una ranura para anillo.

El resultado es que la ranura actúa como dos escalones muy cercanos entre sí. Consecuentemente, el apéndice A–22–2 puede utilizarse para determinar el valor de K_t. En ocasiones la geometría de la ranura produce valores de K_t que quedan fuera de la parte superior de la gráfica. En esos casos, es razonable un valor estimado de $K_t = 3.0$ pero será necesario buscar datos adicionales.

La gráfica del apéndice A–22–4 contiene tres curvas, todas relacionadas con una placa plana con un barreno en el centro. La curva A es para el caso en que la placa se somete a un esfuerzo de tensión directo a través de la totalidad de su sección transversal cerca del barreno (vea la figura 3–9). La curva B es para el caso en que se inserta un pasador de ajuste en el barreno y la carga de tensión se aplica a través de él. Los factores de concentración de esfuerzo resultantes son ligeramente mayores a causa de la carga más concentrada. La curva C es para el caso de la placa sometida a flexión y esto se analizará en el capítulo 7. En cada caso, sin embargo, observe que el esfuerzo nominal está basado en la *sección neta* a través de la placa en el lugar del barreno. Con carga de tensión, se utiliza el *área neta* para σ_{nom}. Es decir,

$$\sigma_{nom} = F/A_{neta} = F/(w - d)t$$

donde w = ancho de la placa
t = espesor
d = diámetro del barreno

La gráfica del apéndice A–22–5 para la barra redonda con un barreno transversal contiene varios datos para diferentes patrones de carga: tensión, flexión y torsión. Por ahora nos interesa sólo la curva A para el caso de tensión axial. La torsión se analiza en el capítulo 4 y la flexión en el capítulo 7. Observe también que el factor de concentración de esfuerzo está basado en la *sección bruta*, no en la sección neta en el barreno. Esto significa que K_t incluye los efectos de la remoción de material y la discontinuidad, lo que produce valores muy elevados. Sin embargo, hace que el uso de la gráfica sea mucho más fácil para usted, el diseñador, porque no tiene que calcular el área de la sección neta.

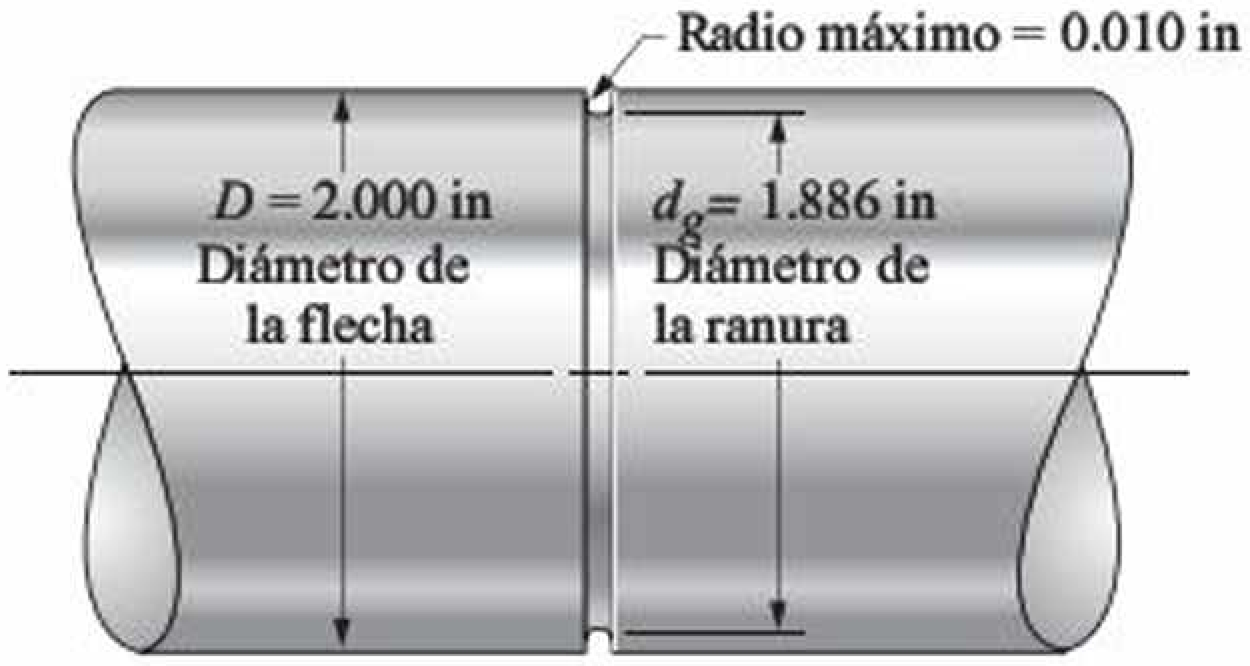


FIGURA 3–11
Geometría de muestra de una ranura de anillo de retención en una barra redonda.

Problema de ejemplo 3–16

La barra escalonada mostrada en la figura 3–8 se somete a una fuerza de tensión axial de 12 500 lb. Calcule el esfuerzo de tensión máximo en la barra con las siguientes dimensiones:

$$D = 1.50 \text{ in}; \qquad d = 0.75 \text{ in}; \qquad r = 0.060 \text{ in}$$

Solución

Objetivo: Calcular el esfuerzo de tensión máximo.

Datos: $F = 12500$ lb; $D = 1.50$ in; $d = 0.75$ in; $r = 0.060$ in

Análisis: Por el cambio de diámetro, utilice la ecuación (3–18).
Utilice la gráfica del apéndice A–22–2 para determinar el valor de K_t, con r/d y D/d como parámetros.

Resultados:
$\sigma_{máx} = K_t\sigma_{nom}$
$\sigma_{nom} = \sigma_2 = F/A_2 = F/(\pi d^2/4) = (12\,500 \text{ lb})/[\pi(0.75 \text{ in})^2/4]$
$\sigma_{nom} = 28\,294 \text{ lb/in}^2$
$r/d = 0.06/0.75 = 0.080$ y $D/d = 1.50/0.75 = 2.00$
Lea $K_t = 2.12$ en el apéndice A–22–2.
Entonces $\sigma_{máx} = K_t\sigma_{nom} = 2.12\,(28\,294 \text{ psi}) = 59\,983$ psi.

LECCIÓN 5

Comentario: El esfuerzo máximo real de aproximadamente 60 000 psi es más del doble del valor que podría predecirse con la fórmula estándar.

3–12 ESFUERZO DE APOYO

Cuando un cuerpo sólido está apoyado en otro y transfiere una carga a él, en la superficie de contacto se desarrolla la forma de esfuerzo conocida como *esfuerzo de apoyo*. Similar a esfuerzo de compresión directo, el esfuerzo de apoyo, llamado σ_b, mide la tendencia de la fuerza aplicada de aplastar el miembro sustentante.

El esfuerzo de apoyo se calcula de una manera similar a los esfuerzos normales directos:

Esfuerzo de apoyo

$$\sigma_b = \frac{\text{carga aplicada}}{\text{área de apoyo}} = \frac{F}{A_b} \qquad \textbf{(3–20)}$$

Para superficies planas, el área de apoyo es simplemente el área sobre la cual la carga se transfiere de un miembro al otro. Si las dos partes tienen áreas diferentes, se utiliza el área menor. Otro requerimiento es que los materiales que transmiten las cargas deben permanecer casi rígidos y planos para que conserven su capacidad de soportar las cargas. La deflexión excesiva reducirá el área de apoyo efectiva.

La figura 3–12 muestra un ejemplo de la construcción de un edificio donde el esfuerzo de apoyo es importante. Una columna de acero hueca cuadrada de 4.00 in descansa sobre una gruesa placa de acero cuadrada de 6.00 in. La placa descansa sobre una pila de concreto, la que a su vez descansa sobre una base de grava. Estas áreas sucesivamente más grandes son necesarias para limitar los esfuerzos de apoyo a niveles razonables para los materiales implicados.

Problema de ejemplo 3–17

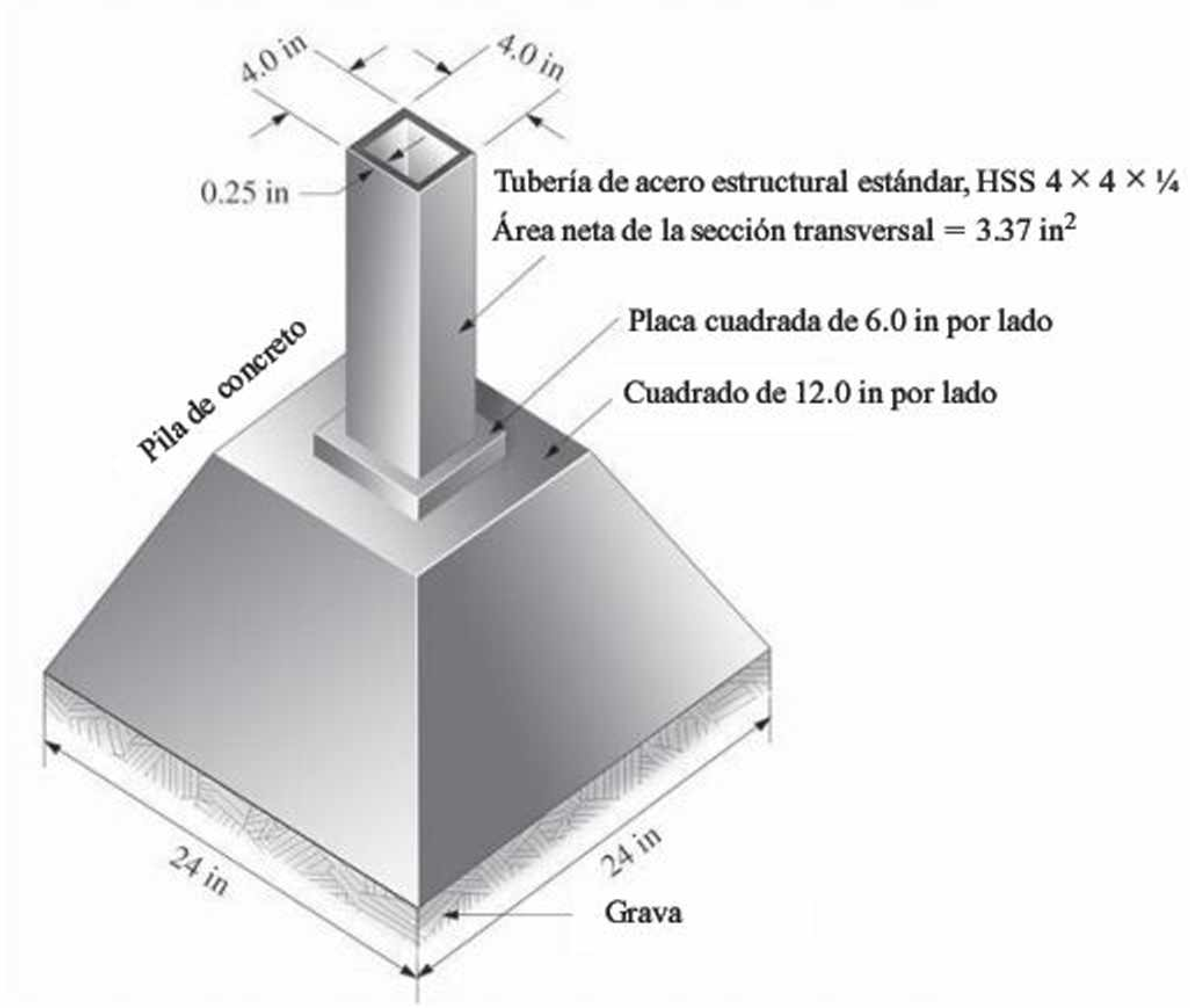
Refiérase a la figura 3–12. El tubo de acero cuadrado soporta una fuerza de compresión axial de 30 000 lb. Calcule el esfuerzo de compresión en el tubo y el esfuerzo de apoyo entre cada superficie en contacto. Considere que la pila de concreto pesa 338 lb.

Solución

Objetivo: Calcular el esfuerzo de compresión en el tubo. Calcular el esfuerzo de apoyo en cada superficie.

Datos: Carga $F = 30\,000$ lb de compresión. Peso de la pila = 338 lb. La geometría de los miembros se observa en la figura 3–12.

FIGURA 3–12
Ejemplo de esfuerzo de apoyo.



Análisis Tubo: Utilice la fórmula del esfuerzo de compresión directo. Esfuerzos de apoyo: Utilice la ecuación (3–20) para cada par de superficies en contacto.

Resultados *Esfuerzo de compresión en el tubo*: (área = A = 3.37 in²)

$$\sigma = F/A = 30\,000 \text{ lb}/3.37 \text{ in}^2 = 8902 \text{ psi}$$

Esfuerzo de apoyo entre el tubo y la placa cuadrada. Éste será igual en magnitud al esfuerzo de compresión en el tubo porque el área de sección transversal del tubo es el área menor en contacto con la placa. Entonces,

$$\sigma_b = 8902 \text{ psi}$$

Esfuerzo de apoyo entre la placa y la cara superior de la pila de concreto. El área de apoyo es la de la placa cuadrada porque es el área menor en la superficie.

$$\sigma_b = F/A_b = 30\,000 \text{ lb}/(6.00 \text{ in})^2 = 833 \text{ psi}$$

Esfuerzo de apoyo entre la pila y la grava. El área de apoyo es la de un cuadrado de 24 in por lado. Agregue 338 lb por el peso de la pila.

$$\sigma_b = F/A_b = 30\,338 \text{ lb}/(24.00 \text{ in})^2 = 52.7 \text{ psi}$$

Comentario Más adelante se analizarán los esfuerzos de apoyo permisibles.

Esfuerzos de apoyo en juntas de pasador. Frecuentemente, en diseño mecánico y estructural se utilizan pasadores cilíndricos para conectar componentes entre sí. En la figura 3–13 se muestra el diseño de una conexión como ésa. Cuando se transfiere una carga a través del pasador, se deberá calcular el esfuerzo de apoyo entre el pasador y cada uno de los miembros en contacto con él.

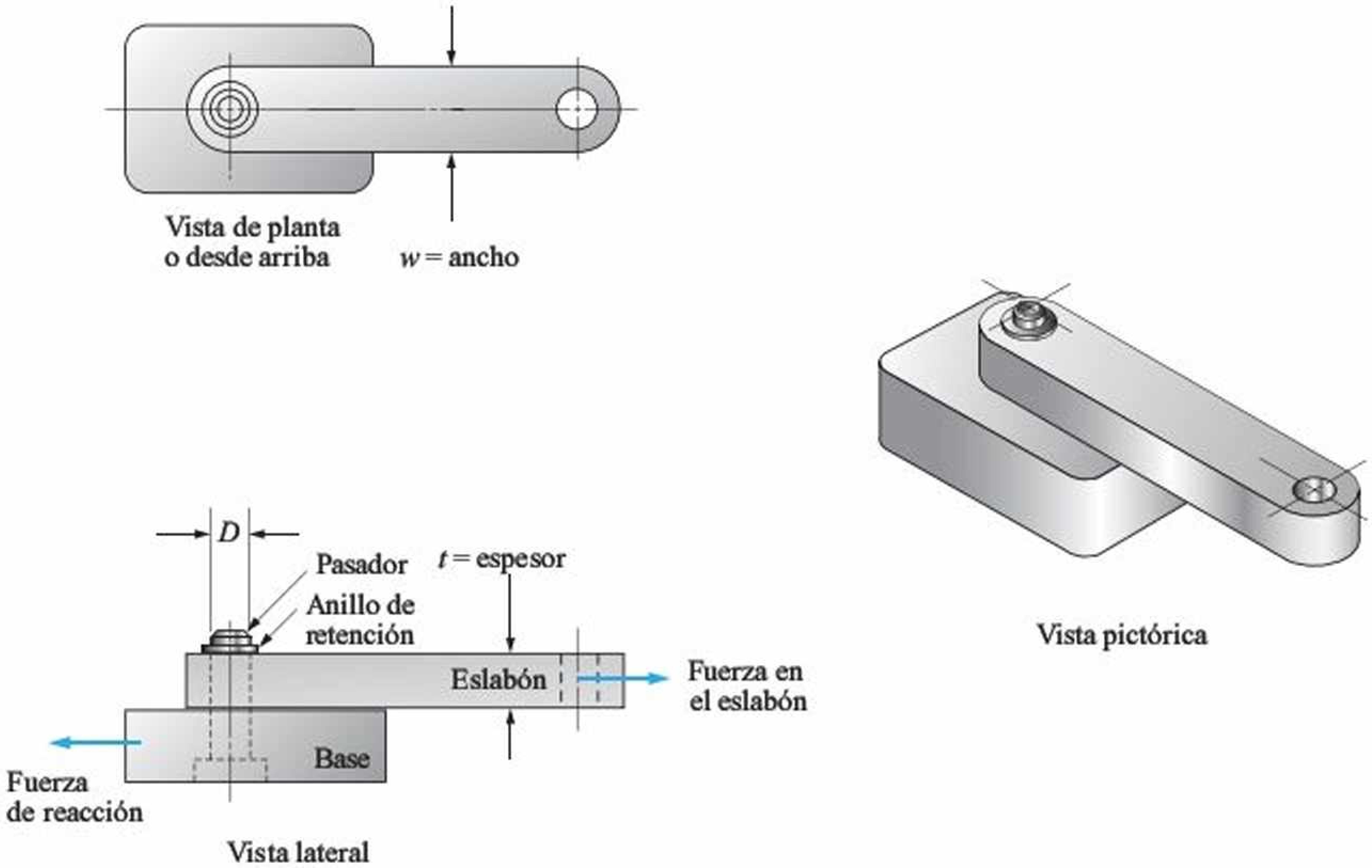


FIGURA 3–13 Conexión de pasador.

El área de apoyo efectiva para el pasador cilíndrico en un barreno ajustado requiere que se utilice el *área proyectada*, calculada como el producto del diámetro (D) del pasador por la longitud (L) de la superficie en contacto. Es decir,

Área de apoyo para una junta de pasador

$$A_b = D \times L \tag{3–21}$$

Problema de ejemplo 3–18 Referirse a la figura 3–13. Calcule el esfuerzo de apoyo entre el pasador de 10.0 mm de diámetro y el barreno en el eslabón. La fuerza aplicada al eslabón es de 3550 N. El espesor del eslabón es de 15.0 mm y su ancho de 25.0 mm.

Solución

Objetivo: Calcular el esfuerzo de apoyo entre las superficies en contacto del pasador y el interior del barreno en el eslabón.

Datos: Carga = F = 3550 N. t = 15.0 mm; w = 25.0 mm; D = 10.0 mm. La geometría de los miembros se observa en la figura 3–13.

Análisis: Esfuerzos de apoyo: Utilice la ecuación (3–20) para cada par de superficies en contacto. Use el área proyectada del barreno como área de apoyo.

Resultados: *Entre el pasador y el eslabón*: $L = t$ = espesor del eslabón. Con la ecuación (3–21),

$$A_b = D \times t = (10.0 \text{ mm})(15.0 \text{ mm}) = 150 \text{ mm}^2$$

Por consiguiente, el esfuerzo de apoyo es

$$\sigma_b = \frac{3550 \text{ N}}{150 \text{ mm}^2} = 23.7 \text{ N/mm}^2 = 23.7 \text{ MPa}$$

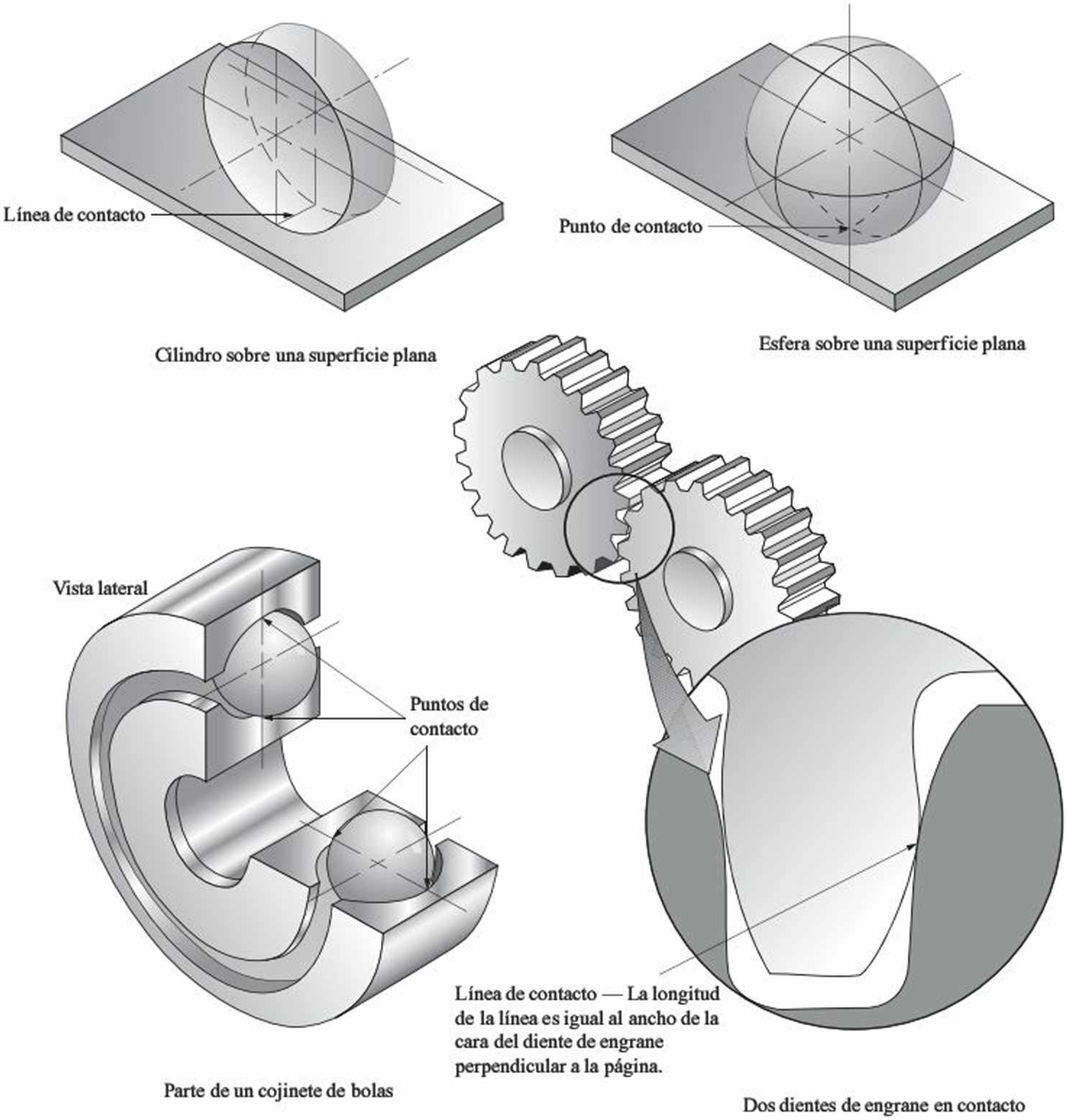


FIGURA 3–14 Ejemplos de miembros que soportan carga sometidos a esfuerzo de contacto.

Esfuerzos de contacto. Los casos de esfuerzo de apoyo considerados al principio de esta sección son aquellos en los que las *superficies* están en contacto y la fuerza aplicada se distribuye sobre un área relativamente grande. Cuando la carga se aplica sobre un área muy pequeña, se debe utilizar el concepto de *esfuerzo de contacto*.

En la figura 3–14 se muestran ejemplos de situaciones de esfuerzo de contacto e incluyen los siguientes ejemplos.

- rodillo cilíndrico sobre una placa plana tal como una rueda de ferrocarril de acero sobre una vía.
- bola cilíndrica sobre una placa plana tal como un dispositivo de transferencia de bola para mover cargas pesadas.

- bola esférica sobre una placa curva tal como un cojinete de bolas que se desliza en su ranura externa.
- dos superficies curvas convexas tal como dientes de engrane en contacto.

Los análisis detallados de los esfuerzos de contacto, en ocasiones llamados *esfuerzos de Hertz*, no se desarrollan en este libro, pero es importante reconocer que la magnitud de los esfuerzos de contacto puede ser muy elevada.

Considere el caso de una bola esférica sobre una placa plana que soporta una carga dirigida hacia abajo. Una superficie perfectamente esférica se pondrá en contacto con una superficie plana en sólo un punto único infinitesimalmente pequeño. Entonces, cuando se aplica la relación del esfuerzo de contacto, $\sigma_b = F/A_b$, la magnitud del área tiende a *cero*. Entonces el esfuerzo tiende a *infinito*. En realidad, por la elasticidad de los materiales en contacto, habrá alguna deformación y el área de contacto se convierte en un área circular finita, aunque pequeña. Pero el esfuerzo local seguirá siendo muy grande. Por esta razón, los miembros que soportan carga sometidos a esfuerzos de contacto típicamente se hacen de materiales muy duros y de alta resistencia.

Asimismo, cuando un rodillo cilíndrico se pone en contacto con una placa plana, el contacto es teóricamente una línea de ancho cero. Por consiguiente, el área de apoyo es teóricamente cero. La elasticidad de los materiales producirá un área de apoyo real que es un rectángulo angosto, por lo que de nueva cuenta se produce un esfuerzo de contacto finito, pero grande. El caso especial de rodillos de acero sobre placas de acero se analiza a continuación. Consulte en la referencia 10 un análisis más detallado.

3–13 ESFUERZO DE APOYO DE DISEÑO

El esfuerzo de apoyo, definido en la sección 3–12, es un fenómeno localizado que se genera cuando dos partes que soportan carga se ponen en contacto. Esta sección describe varios casos especiales que implican diferentes materiales y diferentes geometrías de las superficies en contacto. Se analiza el acero, aluminio, concreto, mampostería y suelos.

En algunas aplicaciones se utiliza un *esfuerzo de apoyo de diseño*, σ_{bd}, definido como

$$\sigma_{bd} = s_y/N \qquad \text{o} \qquad \sigma_{bd} = Cs_y$$

donde N es un factor de diseño y C es un coeficiente especificado. Observe que $C = 1/N$. Si las partes en contacto tienen resistencias diferentes, se utilizará la resistencia a la cadencia más baja. El esfuerzo de apoyo real debe ser menor que el esfuerzo de apoyo de diseño.

En algunas aplicaciones es más conveniente especificar una *carga de apoyo permisible*, R_a. En tal caso la carga de contacto real debe ser más baja que la carga de apoyo permisible.

Acero. De acuerdo con el AISC (vea la referencia 2), el esfuerzo de apoyo permisible en acero para superficies planas o sobre el área proyectada de pasadores insertados en barrenos fresados, taladrados o perforados es

Esfuerzo de apoyo de diseño para acero

$$\sigma_{bd} = 0.90s_y \tag{3–22}$$

Cuando se utilizan rodillos o balancines para soportar una viga u otro miembro que soporta carga para permitir que se dilate el miembro, el esfuerzo de apoyo depende del diámetro del rodillo o balancín, d, y de su longitud, L. El esfuerzo es inherentemente muy elevado porque la carga es soportada por sólo un área rectangular pequeña. Teóricamente, el contacto entre la superficie plana y el rodillo es simplemente una línea, pero por la elasticidad de los materiales, el área real es rectangular.

En lugar de especificar un esfuerzo de apoyo permisible, el estándar AISC (vea la referencia 2) exige calcular la carga de apoyo permisible, R_a, con

Carga de apoyo permisible para rodillos de acero

$$R_a = (s_y - 13)(0.03)(d)(L) \tag{3–23}$$

donde s_y está en ksi
d y L están en pulgadas y $d \leq 25$ in
R_a está en kips

Cuando se utilizan unidades del sistema métrico SI, la ecuación (3–23) se escribe,

$$R_a = (s_y - 90)(3.0 \times 10^{-5})(d)(L) \qquad \textbf{(3–24)}$$

donde s_y está en MPa
d y L están en mm y $d \leq 635$ mm
R_a está en KN

Problema de ejemplo 3–19

Una viga corta, mostrada en la figura 3–15, se fabricó con una barra de acero rectangular de 1.25 in de espesor y 4.50 in de altura. En cada extremo, la longitud apoyada sobre una placa de acero es de 2.00 in. Si tanto la barra como la placa son de acero estructural ASTM A36, calcular la carga máxima permisible, W, que podría ser soportada por la viga, basándose sólo en el esfuerzo de apoyo en los extremos. La carga está centrada entre los apoyos.

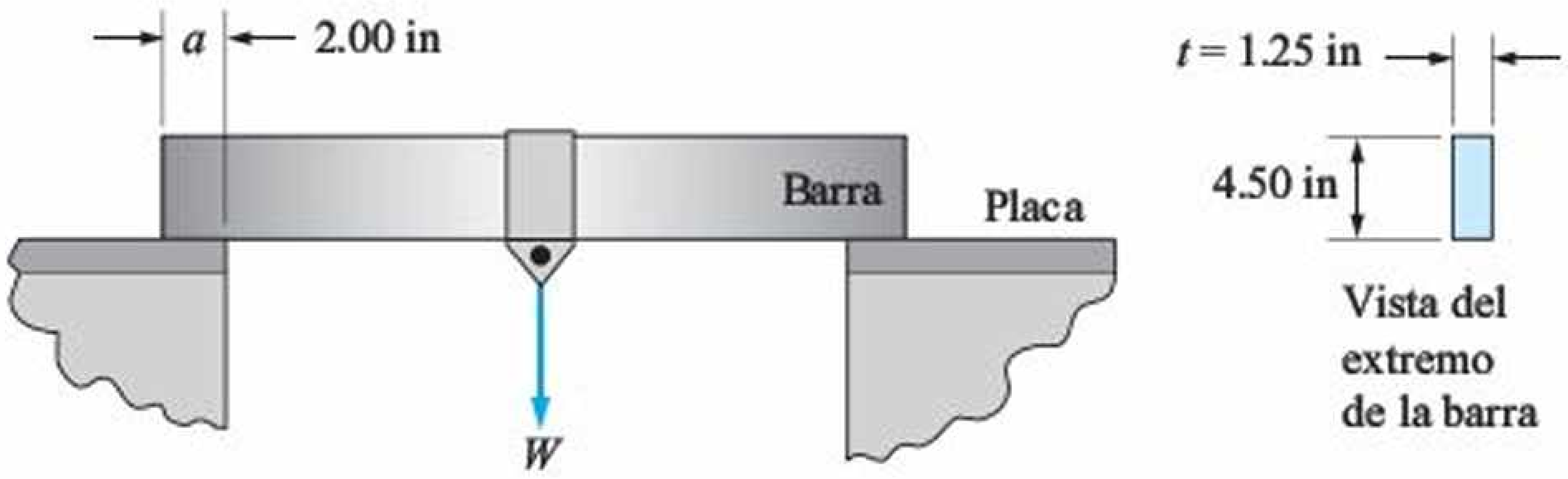


FIGURA 3–15 Viga del problema de ejemplo 3–19.

Solución

Objetivo Calcular la carga permisible, W, con base en sólo el esfuerzo de apoyo.

Datos La carga mostrada en la figura 3–15.
Área de apoyo en cada extremo: 2.00 in por 1.25 in (es decir, $A_b = ta$).
Material: acero estructural ASTM A36 ($s_y = 36\ 000$ psi).

Análisis Esfuerzo de apoyo de diseño: $\sigma_{bd} = R_a/A_b$
Donde R_a es la reacción permisible en el apoyo y $R_a = W/2$.
Ecuación de esfuerzo de diseño (3−22):

$$\sigma_{bd} = 0.90 s_y = 0.90\ (36\ 000 \text{ psi}) = 32\ 400 \text{ psi}$$

Entonces, $R_a = A_b\sigma_{bd}$ y $W = 2R_a$.

Resultados Área de apoyo: $A_b = ta = (1.25 \text{ in})(2.00 \text{ in}) = 2.50 \text{ in}^2$.
$R_a = A_b\sigma_{bd} = (2.50 \text{ in}^2)\ (32\ 400 \text{ lb/in}^2) = 81\ 000$ lb.
$W = 2R_a = 2(81\ 000 \text{ lb}) = 162\ 000 \text{ lb} = 162$ kip

Comentario Ésta es una carga muy grande, por lo que es improbable que el apoyo sea el modo de falla de esta viga.

Problema de ejemplo 3–20

Una propuesta alternativa para soportar la barra descrita en el ejemplo 3–19 se muestra en la figura 3–16. Para permitir la dilatación de la viga, el extremo izquierdo está apoyado sobre un rodillo de 2.00 in de diámetro hecho de acero CD AISI 1040. Calcule la carga permisible, W, para esta configuración.

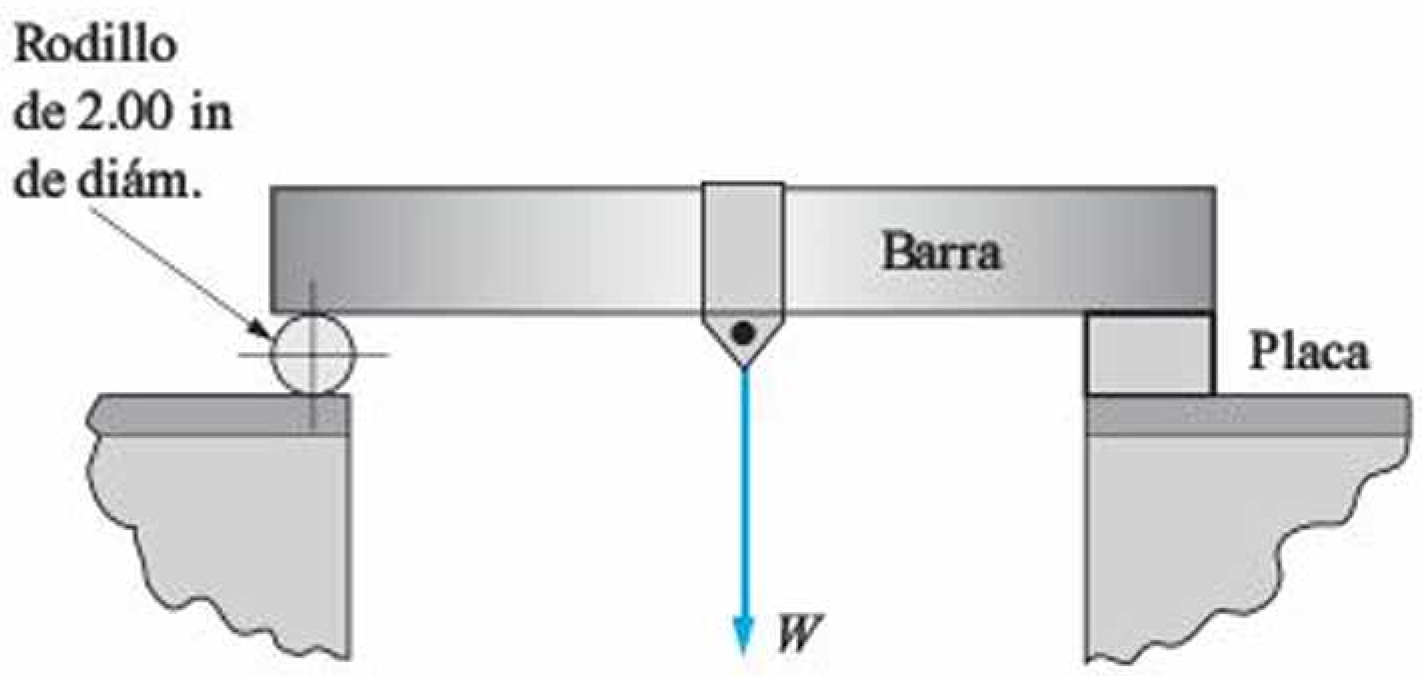


FIGURA 3–16 Viga del problema de ejemplo 3–20.

Solución

Objetivo Calcular la carga permisible sobre la viga.

Datos La carga mostrada en la figura 3–16.
Ancho de la viga (t = 1.25 in) descansa en el rodillo (d = 2.00 in).
Material de la viga: acero estructural ASTM A36 (s_y = 36 ksi).
Material del rodillo: AISI 1040 CD (s_y = 71 ksi).

Análisis En el apoyo de rodillo, se aplica la ecuación (3–23) para determinar la carga permisible. Observe que $W = 2R_a$. Utilice s_y = 36 ksi, el más débil de los dos materiales en contacto.

Resultados La carga de apoyo permisible es

$$R_a = (36 - 13)\,(0.03)\,(2.00)\,(1.25) = 1.73 \text{ kip.}$$

Ésta sería la reacción permisible en cada apoyo. La carga total es

$$W = 2R_a = 2(1.73 \text{ kip}) = 3.45 \text{ kip.}$$

Comentario Observe que ésta es significativamente más baja que la carga permisible para las superficies encontradas en el ejemplo 3–19. El esfuerzo de apoyo en el rodillo, ciertamente, puede limitar la carga que podría ser soportada con seguridad.

Aluminio. La Asociación del Aluminio (vea la referencia 1) basa los esfuerzos de apoyo permisibles en aleaciones de aluminio para superficies planas y paseadores en la *resistencia a la cedencia de apoyo*.

$$\sigma_{bd} = \frac{\sigma_{by}}{2.48} \tag{3–25}$$

Los valores mínimos de resistencia a la cedencia de apoyo se enlistan en la referencia 1. Pero muchas referencias, incluidas las tablas de apéndice en este libro, no incluyen estos datos. Un análisis de los datos muestra que para la mayoría de las aleaciones de aluminio, la resistencia a la cedencia de apoyo es aproximadamente 1.60 veces más grande que la resistencia a la cedencia a la tensión. En ese caso la ecuación (3–25) puede ser reformulada como

Esfuerzo de apoyo de diseño para aluminio

$$\sigma_{bd} = \frac{1.60\,s_y}{2.48} = 0.65\,s_y \tag{3–26}$$

Utilizaremos esta forma para el esfuerzo de apoyo de diseño para aluminio en este libro.

Problema de ejemplo 3–21 Se utiliza una barra rectangular como soporte colgante, como se muestra en la figura 3–17. Calcule la carga permisible basada en el esfuerzo de apoyo en la conexión de pasador si la barra y la horquilla son de aluminio 6061–T4. El pasador se tiene que hacer de un material más resistente.

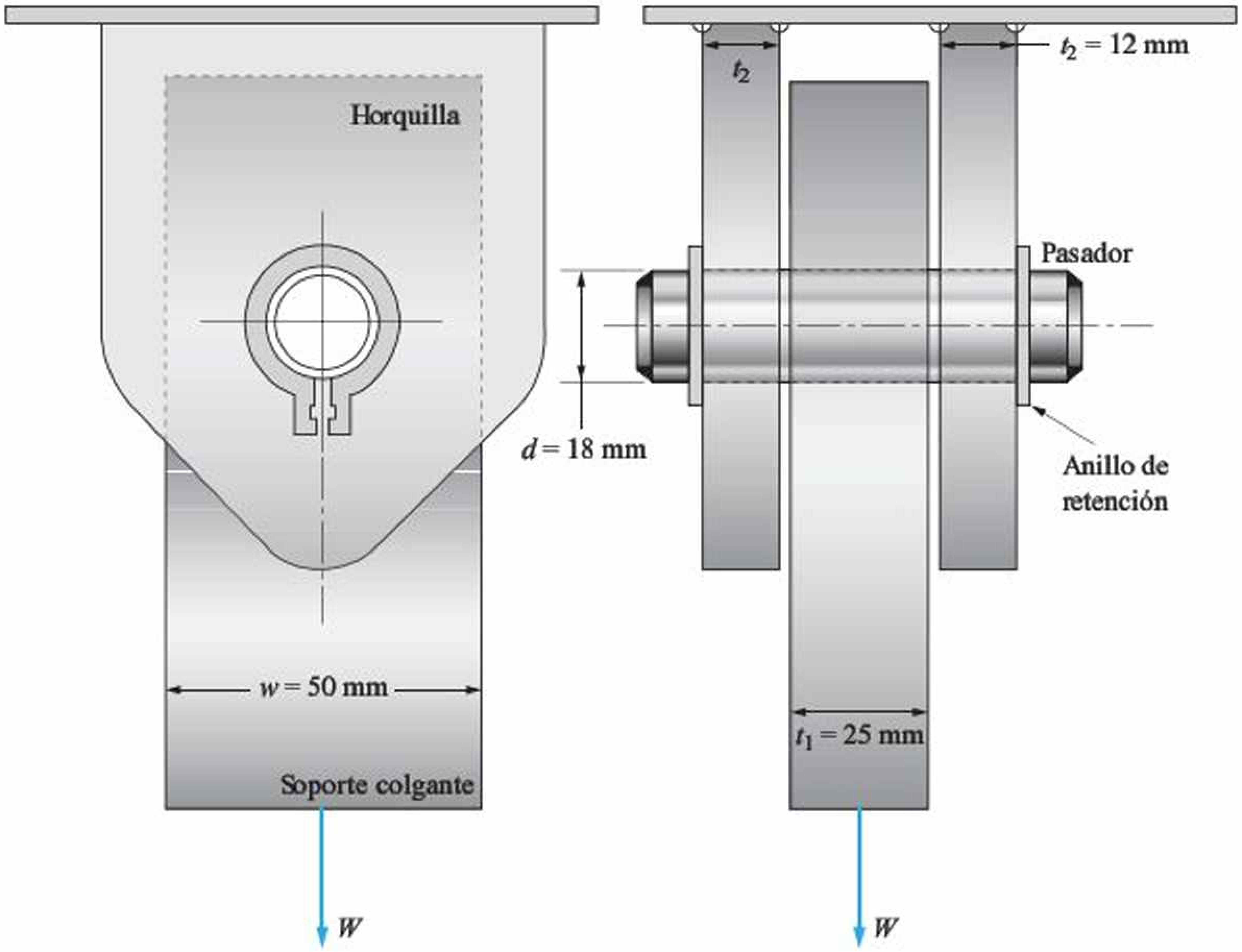


FIGURA 3–17 Soporte colgante del problema de ejemplo 3–21.

Solución

Objetivo Calcular la carga permisible en el soporte colgante.

Datos La carga mostrada en la figura 3–17. Diámetro del pasador = d = 18 mm.
Espesor del soporte colgante = t_1 = 25 mm; ancho = w = 50 mm.
Espesor de cada una de las partes de la horquilla = t_2 = 12 mm.
Material del soporte y horquilla: aluminio 6061–T4 (s_y = 145 MPa).
El pasador es más resistente que el soporte u horquilla.

Análisis Para pasadores cilíndricos insertados en barrenos ajustados, el esfuerzo de apoyo se basa en el área *proyectada* sometida a esfuerzo de apoyo, obtenida con el diámetro del pasador multiplicado por la longitud sobre la cual la carga está distribuida.

$$\sigma_b = \frac{F}{A_b} = \frac{F}{dL}$$

Sea $\sigma_b = \sigma_{bd} = 0.65s_y$ para aluminio 6061 − T4.
Área de apoyo del soporte colgante: $A_{b1} = t_1d = (25 \text{ mm})(18 \text{ mm}) = 450 \text{ mm}^2$.
Esta área soporta toda la carga, W.
Para cada lado de la horquilla: $A_{b2} = t_2d = (12 \text{ mm})(18 \text{ mm}) = 216 \text{ mm}^2$.
Esta área soporta la mitad de la carga aplicada, $W/2$.
Como A_{b2} es menor que ½ de A_{b1}, el apoyo en la horquilla prevalece.

Resultados $\sigma_{bd} = 0.65\, s_y = 0.65\,(145 \text{ MPa}) = 94.3 \text{ MPa} = 94.3 \text{ N/mm}^2$
$\sigma_b = \sigma_{bd} = (W/2)/A_{b2}$
Entonces, $W = 2(A_{b2})(\sigma_{bd}) = 2(216 \text{ mm}^2)(94.3 \text{ N/mm}^2) = 40\,740$ N.

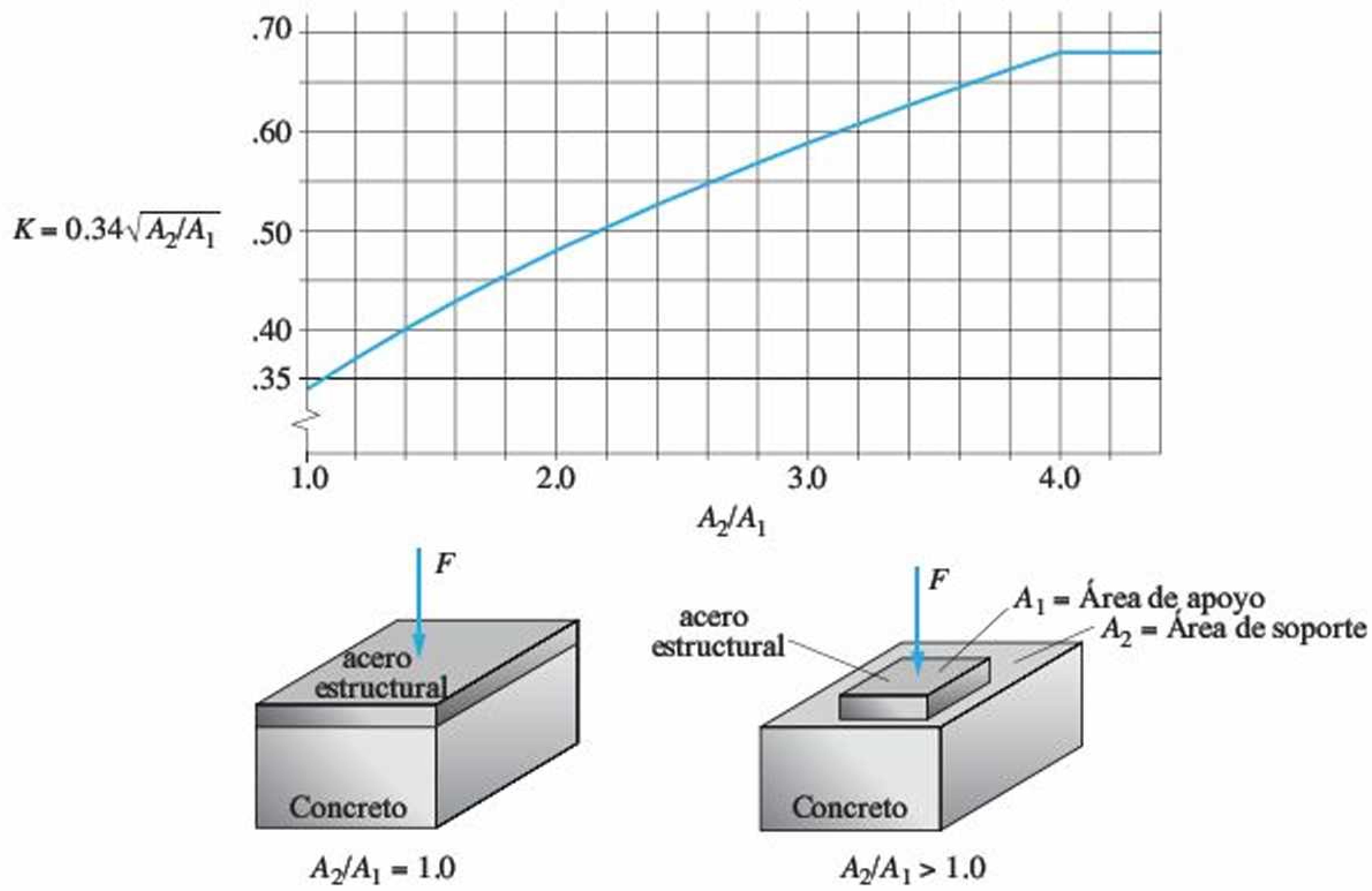
Comentario Esta es una fuerza muy grande y habrá que analizar otros modos de falla del soporte colgante. La falla podría ocurrir por corte en el pasador o por falla de tensión del soporte colgante o la horquilla.

TABLA 3–7 Esfuerzos de apoyo permisibles en mampostería y suelos utilizados en este libro.

Material	Esfuerzo de apoyo permisible, σ_{bd} psi	MPa
Arenisca y piedra caliza	400	2.76
Ladrillo en mortero de cemento	250	1.72
Roca dura sólida	350	2.41
Pizarra o roca mediana	140	0.96
Roca blanda	70	0.48
Arcilla dura o grava compacta	55	0.38
Arcilla blanda o arena suelta	15	0.10

Concreto: $\sigma_{bd} = K f'_c = (0.34\sqrt{A_2/A_1} f'_c$ (Pero σ_{bd} máximo $= 0.68\, f'_c$)

Donde: f'_c = Resistencia nominal del concreto
A_1 = Área de apoyo
A_2 = Área completa de apoyo



Mampostería. La parte inferior de un sistema de sustentación de un edificio con frecuencia es de concreto, ladrillo o piedra. Las cargas transferidas a estos sistemas de sustentación casi siempre requieren que se consideren los esfuerzos de apoyo porque las resistencias de estos materiales son relativamente bajas comparadas con las de los metales. Debe hacerse énfasis en que se deberán utilizar las resistencias reales de los materiales siempre que sea posible por la gran variación de las propiedades. Además, algunos reglamentos de construcción incluyen esfuerzos de apoyo permisibles para ciertas clases de mampostería.

Sin datos específicos, este libro utiliza los esfuerzos de apoyo permisibles mostrados en la tabla 3–7.

Observe que el esfuerzo de apoyo permisible en concreto depende de la resistencia nominal del concreto y de cómo se aplica la carga. Se considera que el área de apoyo es exactamente el área de la placa de acero, A_1, que transfiere la carga al concreto. El área del concreto es A_2 y puede ser igual a o mayor que A_1. La relación de A_2/A_1 es un factor al calcular el esfuerzo de apoyo permisible, como se muestra en la tabla 3–7.

Cuando el apoyo es sobre toda el área del concreto (A_2/A_1 es 1.0), el esfuerzo de apoyo permisible es

$$\sigma_{bd} = 0.34\, f'_c$$

donde f'_c = resistencia nominal del concreto por lo general de 2000 psi a 7000 psi (14 MPa a 48 MPa).

Se puede utilizar un esfuerzo de apoyo permisible más elevado si el área del concreto es mayor que el área de la placa de apoyo de acero. Esto se debe a que el concreto a una distancia moderada después de la placa experimenta esfuerzo y resiste algo de la carga. Cuando A_2/A_1 > 1.0.

$$\sigma_{bd} = 0.34\sqrt{A_2/A_1}\, f'_c = Kf'_c$$

La tabla 3–7 muestra una gráfica de K contra la relación A_2/A_1. Observe que el esfuerzo de apoyo máximo permisible es $0.68 f'_c$. Éste corresponde a la relación de área A_2/A_1 = 4.0. El área de apoyo A_2 debe ser simétrica alrededor de la placa.

Suelos. Los apoyos de mampostería o concreto con frecuencia se colocan sobre suelos para transferir las cargas directamente a la tierra. El *Marks' Standard Handbook for Mechanical Engineers* (vea la referencia 3) da los valores de la capacidad de apoyo seguro de suelos, como se muestra en la tabla 3–7. Es de esperarse que ocurran variaciones y siempre que sea posible se deberán obtener datos de prueba.

Problema de ejemplo 3–22

La figura 3 – 18 muestra una columna apoyada en un cimiento y soporta una carga de 26 000 lb. Determine si los esfuerzos de apoyo son aceptables para el concreto y el suelo. El concreto tiene una resistencia nominal especificada de 2000 psi y el suelo es grava compactada.

Solución

Objetivo: Determinar si los esfuerzos de apoyo en el concreto y el suelo son seguros.

Datos: La cimentación mostrada en la figura 3 – 18: Carga = F = 26 000 lb.
Para el concreto: f'_c = 2000 psi.
Para el suelo (grava compactada): σ_{bd} = 55 psi (tabla 3–7).

Análisis y resultados: Para concreto: La carga se transfiere de la columna al concreto a través de la placa de acero cuadrada (A_1 = 144 in²). Pero la pila de concreto es cuadrada de 18 in por lado (A_2 = 324 in²). Por tanto, la carga de apoyo es menor que el área total del concreto. Entonces, según la tabla 3 – 7,

$$\sigma_{bd} = Kf'_c = 0.34\sqrt{\frac{A_2}{A_1}}f'_c = 0.34\sqrt{\frac{324}{144}}f'_c = 0.510 f'_c$$

Observe que $K < 0.70$. Entonces,

$$\sigma_{bd} = 0.510(2000 \text{ psi}) = 1020 \text{ psi}$$

El esfuerzo ejercido en el concreto por la placa de acero en la base de la columna es

$$\sigma_b = \frac{F}{A_b} = \frac{26\,000 \text{ lb}}{(12 \text{ in})^2} = 180 \text{ psi} < \sigma_{bd}$$

Así, el esfuerzo de apoyo en el concreto es aceptable.

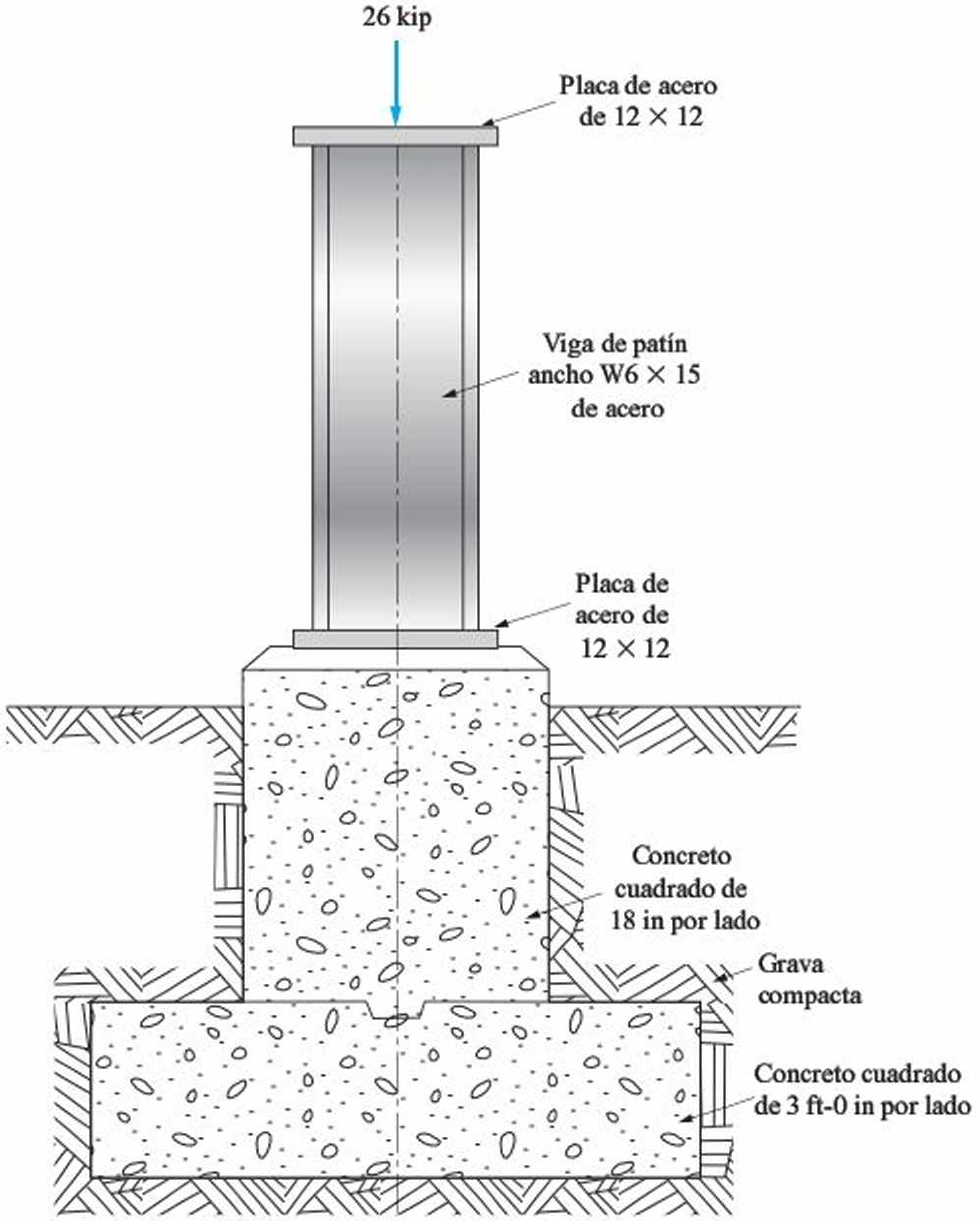


FIGURA 3–18
Cimiento de la columna del problema del ejemplo 3–22.

Para el suelo (grava) en la base de la cimentación:

$$\sigma_b = \frac{F}{A_b} = \frac{26\,000 \text{ lb}}{(36 \text{ in})^2} = 20.1 \text{ psi}$$

Este valor es aceptable porque el esfuerzo de apoyo permisible para grava compactada es de 55 psi como se muestra en la tabla 3−7.

3–14 ESFUERZO CORTANTE DE DISEÑO

Cuando los miembros se someten a esfuerzos cortantes, como se analizó en el capítulo 1, sección 1−10, el diseño debe basarse en el *esfuerzo cortante de diseño*, τ_d.

Esfuerzo cortante de diseño

$$\tau_d = \frac{S_{ys}}{N} \quad \text{basado en la resistencia a la cedencia en cortante} \tag{3–27}$$

TABLA 3–8 Criterios de esfuerzo de diseño a cortante.

Forma de carga	Esfuerzo de diseño, materiales dúctiles	
	$\tau_d = s_{ys}/N = 0.5\, s_y/N = s_y/2N$	
Estática	Use $N = 2$	$\tau_d = s_y/4$
Repetida	Use $N = 4$	$\tau_d = s_y/8$
Impacto	Use $N = 6$	$\tau_d = s_y/12$

Resistencia a la cedencia en cortante

La resistencia a la cedencia en cortante, s_{ys}, ***es el nivel de esfuerzo cortante al cual el material exhibiría el fenómeno de cedencia. Esto es, sufriría una significativa cantidad de deformación por cortante con poco o ningún incremento de la carga de cortante.***

Prácticamente todos los diseños de miembros sometidos a cortante requerirían que el esfuerzo cortante estuviera muy por debajo del valor de s_{ys}, como lo indica la ecuación (3–27). La selección del factor de diseño se toma de la tabla 3–8. Consulte también la sección 3–4 para otras consideraciones en la selección de un factor de diseño. Las condiciones más severas que las que normalmente se presentan o los casos en que existe una significativa cantidad de incertidumbre sobre la magnitud de las cargas o las propiedades de material justificarían factores de diseño más elevados.

Desde luego, si los valores de resistencia a la cedencia a cortante están disponibles, pueden ser utilizados en las ecuaciones de esfuerzo de diseño. Desafortunadamente, esos valores con frecuencia no se reportan y es necesario recurrir a estimaciones. Para la resistencia a la cedencia a cortante, una estimación frecuentemente utilizada es

Estimación de la resistencia a la cedencia a cortante

$$s_{ys} = \frac{s_y}{2} = 0.5\, s_y \tag{3–28}$$

Este valor se deriva de la observación de una prueba de tensión típica en la cual el esfuerzo cortante es la mitad del esfuerzo de tensión directo. Este fenómeno, relacionado con la *teoría de falla por esfuerzo cortante máximo*, es un poco conservador y se analizará más a fondo en el capítulo 10.

Resistencia máxima a cortante

La resistencia máxima a cortante, s_{us}, ***es el nivel de esfuerzo cortante al cual el material se fracturaría.***

Existen algunas aplicaciones prácticas del esfuerzo cortante en las que se *pretende* que el miembro cargado a cortante se fracture y, en consecuencia, se requiere una estimación de s_{us}. Algunos ejemplos incluyen el *perno cortable* con frecuencia utilizado como un elemento en el tren de propulsión de máquinas con componentes costosos. La figura 3–19 muestra el eje de propulsión de la hélice de un bote donde el par de torsión del eje de mando se transmite a través del perno a la maza de la hélice. El perno debe diseñarse para que transmita un nivel de par de torsión que típicamente se genera al moverse el bote por el agua. Sin embargo, si la hélice se topa con una obstrucción tal como un tronco sumergido, lo deseable es que sea el perno barato lo que falle en lugar de la costosa hélice. Vea el ejemplo 3–23.

Otro ejemplo donde se requiere una estimación de la resistencia máxima a cortante es el caso de la operación de perforación descrita en el capítulo 1 y mostrada en la sección 1–9. En este caso, se espera que el punzón corte por completo (cizalle) la parte deseada de la hoja de material más grande. Por consiguiente, los lados cortados de la parte deben someterse a esfuerzo hasta la resistencia máxima a cortante.

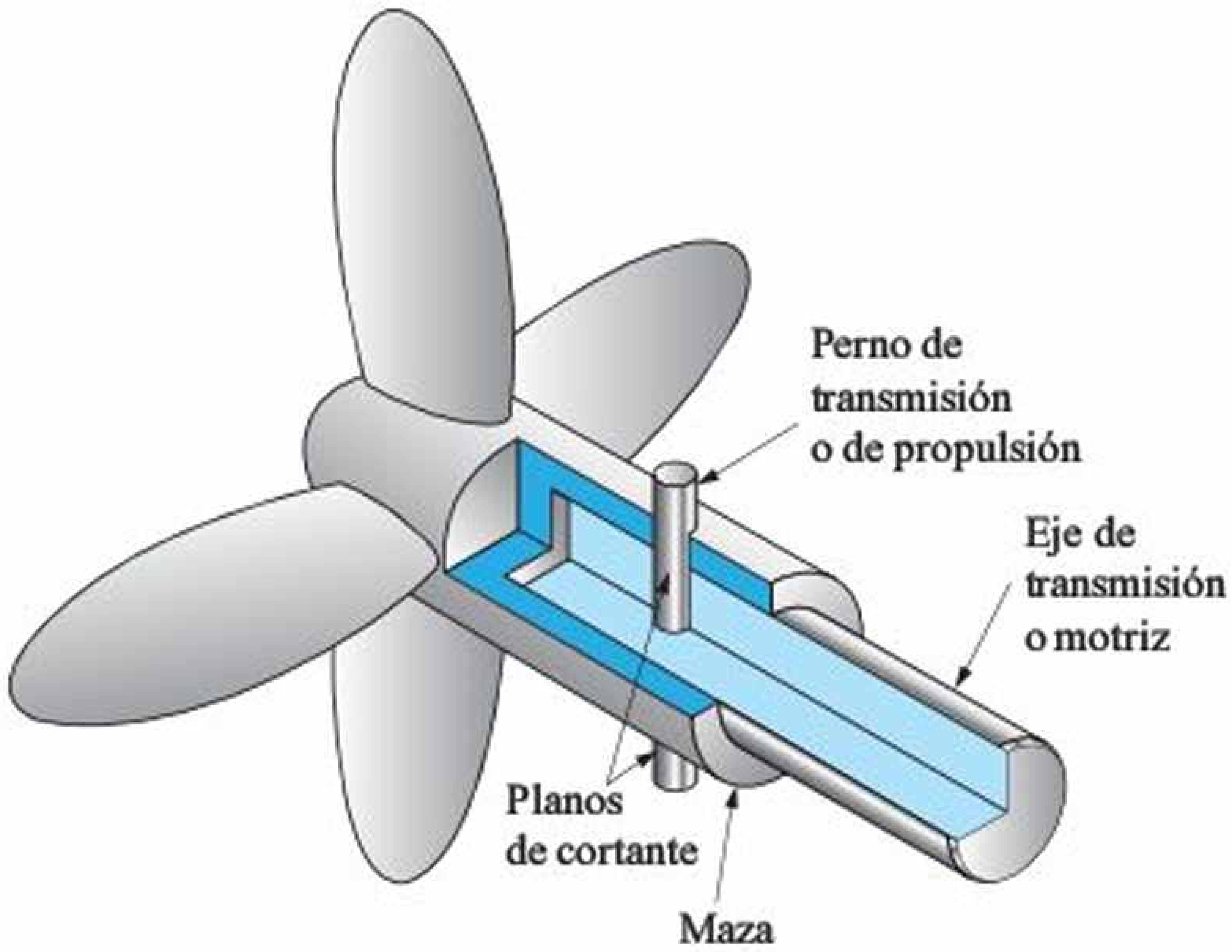


FIGURA 3–19 Perno de transmisión o de propulsión de la hélice del problema de ejemplo 3–23.

Cuando se tengan valores de resistencia máxima, deberán utilizarse. Por ejemplo, el apéndice A–17 da algunos valores para hierros fundidos y el apéndice A–18 proporciona datos para aleaciones de aluminio. Pero para las ocasiones en que no se cuenta con datos publicados, es posible calcular estimaciones con las relaciones dadas en la tabla 3–9, tomadas de la referencia 5.

Materiales frágiles. Los esfuerzos cortantes de diseño para materiales frágiles están basados en la resistencia máxima a cortante porque no exhiben cedencia. Se deberá utilizar un factor de diseño más elevado que para materiales dúctiles, porque con frecuencia los materiales son de estructura menos consistente. Sin embargo, se carece de datos publicados sobre factores de diseño aceptables. Se recomienda realizar pruebas con prototipos reales de miembros cargados a cortante hechos de materiales frágiles.

Métodos de diseño. Los métodos de diseño generales de componentes sometidos a esfuerzos cortantes son muy similares a los descritos en los casos A–D de la sección 3–5. Pero el esfuerzo de diseño a cortante, τ_d, deberá utilizarse en lugar del esfuerzo normal de diseño, σ_d. Deberá adaptar los métodos de diseño de la sección 3–5 para delinear el procedimiento de solución según si su objetivo es:

- **a.** evaluar la seguridad de un diseño dado
- **b.** especificar un material para un componente sometido a cortante
- **c.** especificar la forma y el tamaño del componente para que resista fuerzas cortantes aplicadas
- **d.** determinar la fuerza cortante permisible en un componente

Consulte la tabla 3–8 por lo que se refiere a factores de diseño cuando se utilizan materiales dúctiles.

TABLA 3–9 Estimaciones de la resistencia máxima a cortante.

Fórmula	Material
$s_{us} = 0.65\ s_u$	Aleaciones de aluminio
$s_{us} = 0.82\ s_u$	Acero estructural
$s_{us} = 0.90\ s_u$	Hierro maleable y aleaciones de cobre
$s_{us} = 1.30\ s_u$	Hierro fundido gris

Cuando se realiza un análisis para determinar la fuerza cortante que en realidad provocará la falla a cortante, se considera que el factor de diseño es 1.0. Esto es válido para el caso de entresacar un trozo de material de una lámina más grande (vea la sección 1–9) o para el caso de un perno cortable como el del ejemplo 3–24.

Problema de ejemplo 3–23

La figura 3–19 muestra una hélice de bote montada en un eje con un perno impulsor cilíndrico insertado a través de la maza y el eje. El par de torsión requerido para impulsar la hélice es de 1575 lb·in y el diámetro del eje en el interior de la maza es de 3.00 in. Por lo general, el par de torsión es constante y se desea diseñar el perno para que sea seguro en esta condición. Especifique un material apropiado y el diámetro del perno.

Solución

Objetivo: Especificar un material y el diámetro del perno.

Datos: Par de torsión $= T = 1575$ lb·in (constante)
Diámetro del eje $= D = 3.00$ in

Análisis:

1. El perno se someterá a cortante directo en la cara de contacto entre el eje y la cara interna de la maza, como se muestra en la figura 3−20. El par de torsión aplicado por el eje produce dos fuerzas iguales que actúan perpendiculares al eje del perno en lados opuestos del eje, por lo que forma un par motor. Es decir,

$$T = FD$$

Entonces, $F = T/D$.

2. Es deseable un material con resistencia de moderada a elevada de modo que el perno no sea demasiado grande. También, deberá tener buena ductilidad por la probabilidad de cargas de choque leves de vez en cuando. Se podrían elegir varios materiales.
3. Análisis de esfuerzo: $\tau_d = F/A$ donde $A = \pi d^2/4$. Es un área de sección transversal para el perno.
4. Esfuerzo cortante de diseño: $\tau = s_y/4$ (tabla 3−8).
5. Sea $\tau = \tau_d$. Entonces el área requerida sería $A = F/\tau_d$ y el diámetro d requerido es

$$d = \sqrt{4\,A/\pi}$$

6. Especifique un tamaño estándar conveniente para el perno.

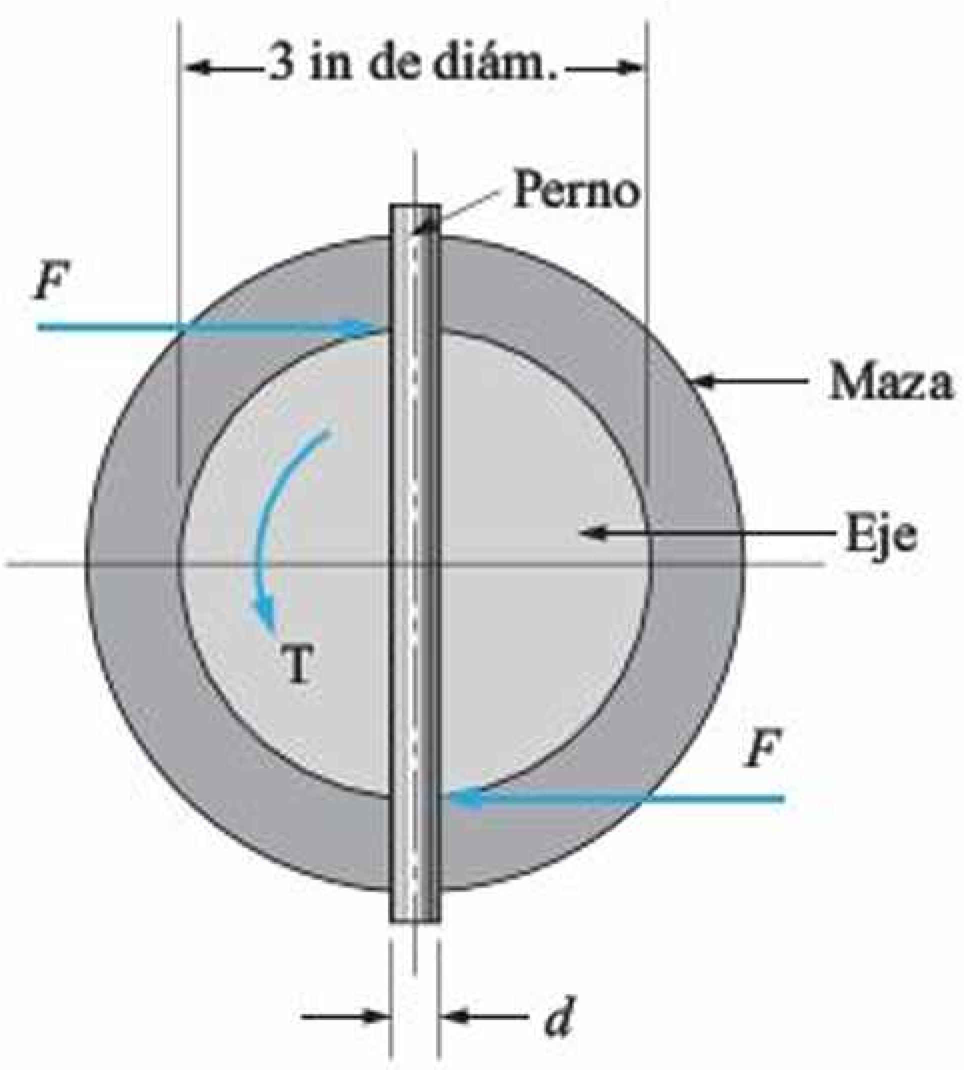


FIGURA 3–20 Sección transversal a través de la maza de la hélice y el eje de la hélice.

Resultados

1. $F = T/D = (1575 \text{ lb·in})/(3.00 \text{ in}) = 525 \text{ lb}$
2. Especificar acero AISI 1020 estirado en frío como prueba) ($s_y = 51\,000$ psi; 15% de alargamiento). Observar que el perno tendría que estar protegido contra corrosión.

3, 4, 5. $\tau_d = s_y/4 = 51\,000 \text{ psi}/4 = 12\,750 \text{ psi}$

$A = F/\tau_d = (525 \text{ lb})(12\,750 \text{ lb/in}^2) = 0.0412 \text{ in}^2$

$$d = \sqrt{4\,A/\pi} = \sqrt{4(0.0412 \text{ in}^2)/\pi} = 0.229 \text{ in}$$

6. Del apéndice A–2, especificar $d = 0.250$ in ($\frac{1}{4}$ in).
   Material: acero AISI 1020 estirado en frío.

Comentario El tamaño parece razonable comparado con el diámetro del eje.

Cuando el perno de transmisión diseñado en el ejemplo 3–23 se sobrecarga, tal como sucedería al chocar contra un tronco, es deseable que el perno se rompa en lugar de que se dañe la hélice. El siguiente ejemplo considera esta situación.

Problema de ejemplo 3–24 Calcule el par de torsión requerido para romper el perno diseñado en el ejemplo 3–23 y mostrado en las figuras 3–19 y 3–20.

Solución

Objetivo Calcular el par de torsión requerido para romper el perno.

Datos El diseño mostrado en las figuras 3–19 y 3–20.
$D = 3.00$ in; $d = 0.250$ in.
Material: acero AISI 1020 estirado en frío, $s_u = 75\,000$ psi.

Análisis El análisis sería similar al inverso del análisis del ejemplo 3–23, como se resume a continuación.

1. El material del perno fallaría cuando $\tau = s_{us} = 0.82\, s_u$ (tabla 3–9)
2. $\tau = F/A$. Entonces $F = \tau A = (0.82\, s_u)A$.
   Además, $A = \pi d^2/4$.
3. $T = FD$

Resultados

1. $s_{us} = 0.82\, s_u = 0.82\,(61\,500 \text{ psi}) = 61\,500 \text{ psi}$
2. $A = \pi d^2/4 = A = \pi\,(0.250 \text{ in})^2/4 = 0.0491 \text{ in}^2$
   $F = \tau A = (50\,000 \text{ lb/in}^2)(0.0491 \text{ in}^2) = 3019 \text{ lb}$
3. $T = FD = (2450 \text{ lb})\,(3.00 \text{ in}) = 9057 \text{ lb·in}$

Comentario Comparado con el par de torsión normalmente aplicado, este valor es bastante elevado. La razón del par de torsión normal al requerido para romper el perno es

$$\text{Razón} = 7350/1575 = 4.67$$

Este valor indica que no es probable que el perno se rompa en las condiciones anticipadas, lo que puede ser demasiado elevado para proteger la hélice. La hélice debe someterse a pruebas.

REFERENCIAS

1. Aluminum Association, *Aluminum Design Manual*, Washington, DC, 2005.
2. American Insitute of Steel Construction, *Steel Construction Manual*, 13ª ed., Chicago, IL., 2005.
3. Avallone, E.A. y T. Baumeister III, eds. *Marks' Standard Handbook for Mechanical Engineers*, 10ª ed., 1996.
4. Budynas, R.G. y J.K: Nisbett, *Shigley's Mechanical Engineering Design*, 8ª ed., McGraw-Hill, Nueva York, 2007.
5. Deutschman, A.D., W.J. Michaels y C.E. Wilson, *Machine Design Theory and Practice*, Macmillan, Nueva York, 1975.
6. Juvinall, R.C. y K.M. Marshek, *Fundamentals of Machine Components Design*, 4ª d., Wiley, Nueva York, 2005.
7. Mott. R.L., *Machine Elements in Mechanical Design*, 4ª ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2004.
8. Pilkey, W. *Peterson's Stress Concentration Factors*, Wiley, Nueva York, 1997.
9. Spotts, M.F., T.E. Shoup y L.E. Hornberger, *Design of Machine Elements*, 8ª ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2004.
10. Young, W.C. y R.G. Budynas, *Roark's Formulas for Stress and Strain*, 7ª ed., McGraw-Hill, Nueva York, 2002.

PROBLEMAS

Tensión o compresión directa

3–1.M Especifique una aleación de aluminio apropiada para una barra redonda de 10 mm de diámetro sometida a fuerza de tensión directa estática de 8.50 kN.

3–2.M Una barra rectangular con sección transversal de 10 mm por 30 mm se somete a una fuerza de tensión directa de 20.0 kN. Si la fuerza tiene que repetirse varias veces, especifique un acero apropiado.

3–3.E El eslabón de un mecanismo de una máquina embaladora automática se somete a una fuerza de tensión directa de 1720 lb, repetida muchas veces. El eslabón es cuadrado, de 0.40 in por lado. Especifique un acero adecuado para el eslabón.

3–4.E Una barra circular de acero de 3/8 in de diámetro soporta un calentador y experimenta una carga de tensión estática de 1850 lb. Especifique un acero estructural adecuado para la barra.

3–5.E Un tirante de una armadura de techo de madera tiene que soportar una fuerza de tensión estática de 5200 lb. Se propuso utilizar un tablón estándar de 2 × 4 de pino del sur, grado núm. 2. ¿Sería éste aceptable?

3–6.E Con los datos del problema 3–5 sugiera un diseño alternativo que sea seguro con la carga dada. Se puede especificar un miembro de tamaño diferente o un material diferente.

3–7.E El cable tensor de una torre de antena tiene que ser de aluminio con un esfuerzo permisible de 12000 psi. Si la carga máxima esperada en el tensor es de 6400 lb, determine el diámetro del cable requerido.

3–8.M Se diseña una tolva de 1150 kg de masa para contener una carga de sal a granel de 6350 kg de masa. La tolva tiene que estar suspendida de cuatro flejes rectangulares y cada uno soporta un cuarto de la carga. Se tiene que utilizar una placa de acero de 8.0 mm de espesor para hacer los flejes. ¿Cuál deberá ser el ancho para limitar el esfuerzo a 70 Mpa?

3–9.M Se va a diseñar una repisa para sostener cajas de madera cuya masa total es de 1840 kg. Dos varillas como las mostradas en la figura P3–9 sostendrán la repisa. Suponga que el centro de gravedad de las cajas está en la parte media de la repisa. Especifique el diámetro requerido de las varillas circulares para limitar el esfuerzo a 110 MPa.

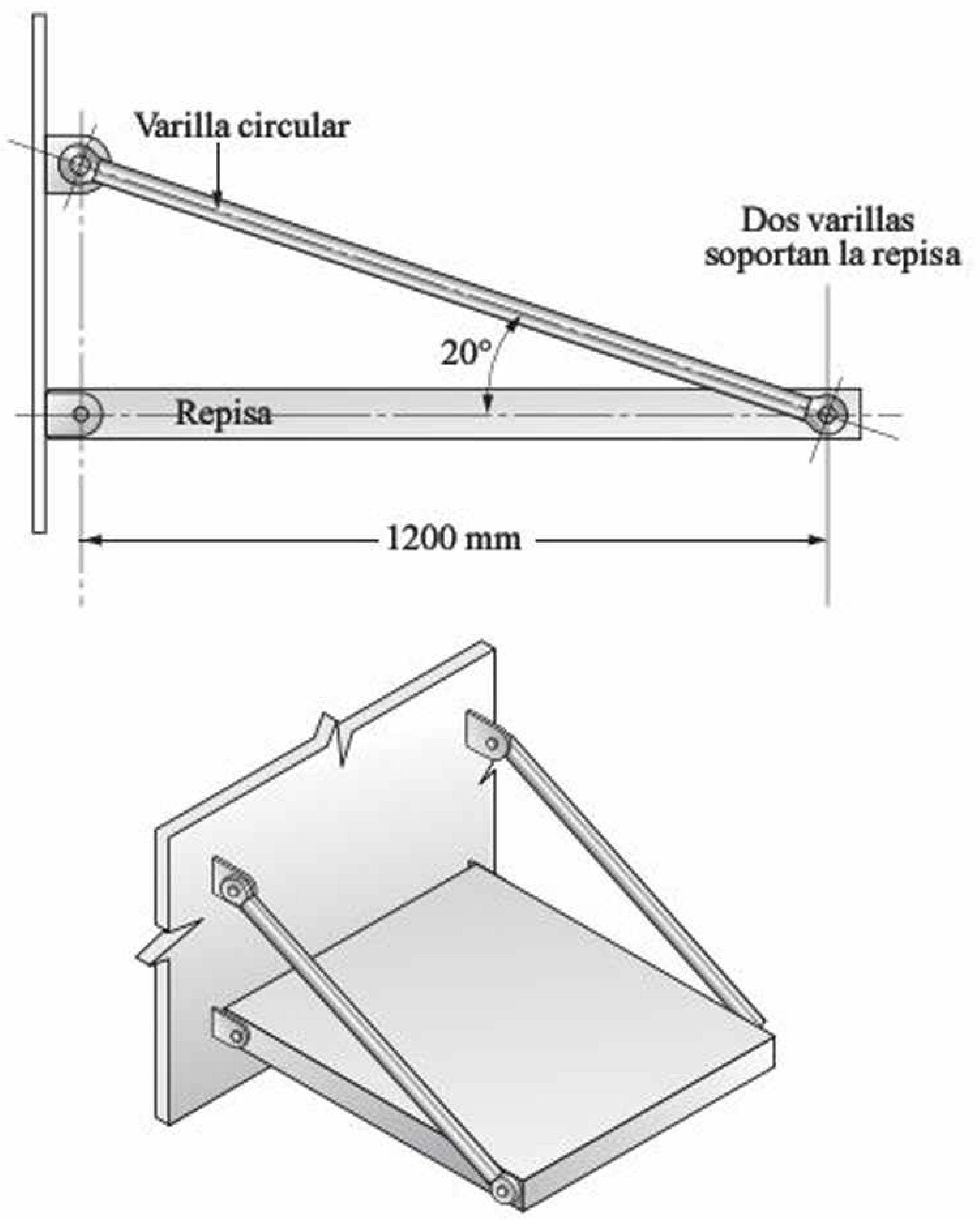


FIGURA P3–9 Varillas de soporte de la repisa del problema 3–9.

3–10.E La base de una columna de concreto es circular, de 8.0 in de diámetro, y soporta una carga de compresión directa de 70 000 lb. Especifique la resistencia nominal requerida del concreto de acuerdo con las recomendaciones de la sección 2–10.

3–11.E Tres bloques cortos de madera hechos de postes estándar de 4 × 4 soportan una máquina que pesa 29 500 lb y comparten la carga por igual. Especifique un tipo conveniente de madera para los bloques.

3–12.M Una pila circular para soportar una columna tiene que ser de concreto con resistencia nominal de 3000 psi (20.7 MPa). Especifique un diámetro adecuado para la pila si tiene que soportar una carga de compresión directa de 1.50 MN.

3–13.E El diámetro externo de un anillo de aluminio es de 12.0 mm y el interno de 10 mm. El anillo es corto y es de aluminio 2014–T6; calcule la fuerza requerida para producir una falla máxima por compresión en el anillo. Suponga que s_u es igual tanto a tensión como a compresión.

3–14.M Un cubo de 40 mm por lado está hecho de madera de abeto núm. 2. Calcule la fuerza de compresión permisible que se podría aplicar al cubo ya sea paralela o perpendicular al grano.

3–15.E Se tiene que utilizar una barra redonda de acero estructural ASTM A242 para tensar un marco. Si se espera una carga estática máxima de 4000 lb, especifique un diámetro adecuado de la varilla.

3–16.E Una parte de una pieza hecha de hierro fundido gris grado 20 tiene la forma mostrada en la figura P3–16 y se somete a una fuerza de compresión alineada con su eje centroidal. El miembro es corto y soporta una carga de 52000 lb; calcule el esfuerzo en la sección y el factor de diseño.

3–17.M Una pieza del sistema de suspensión de un camión tiene que soportar una carga de 135 kN con la posibilidad de cargas de choque. Se tiene que usar hierro maleable ASTM A220 grado 45008. La sección transversal tiene que ser rectangular con la dimensión larga del doble de la dimensión corta. Especifique dimensiones adecuadas para la pieza.

3–18.E Un eslabón rectangular plástico de una impresora de oficina tiene que hacerse de copolímero de acetal relleno de fibra de vidrio (vea el apéndice A–20). Tiene que soportar una fuerza de tensión de 110 lb. Las limitaciones de espacio permiten un espesor máximo para el eslabón de 0.20 in. Especifique un ancho adecuado del eslabón contando con que se espera un factor de diseño de 8 basado en la resistencia a la tensión.

3–19.M La figura P3–19 muestra la sección transversal de un miembro corto sometido a compresión que ha de soportar una carga estática de 640 kN. Especifique un material conveniente para el miembro.

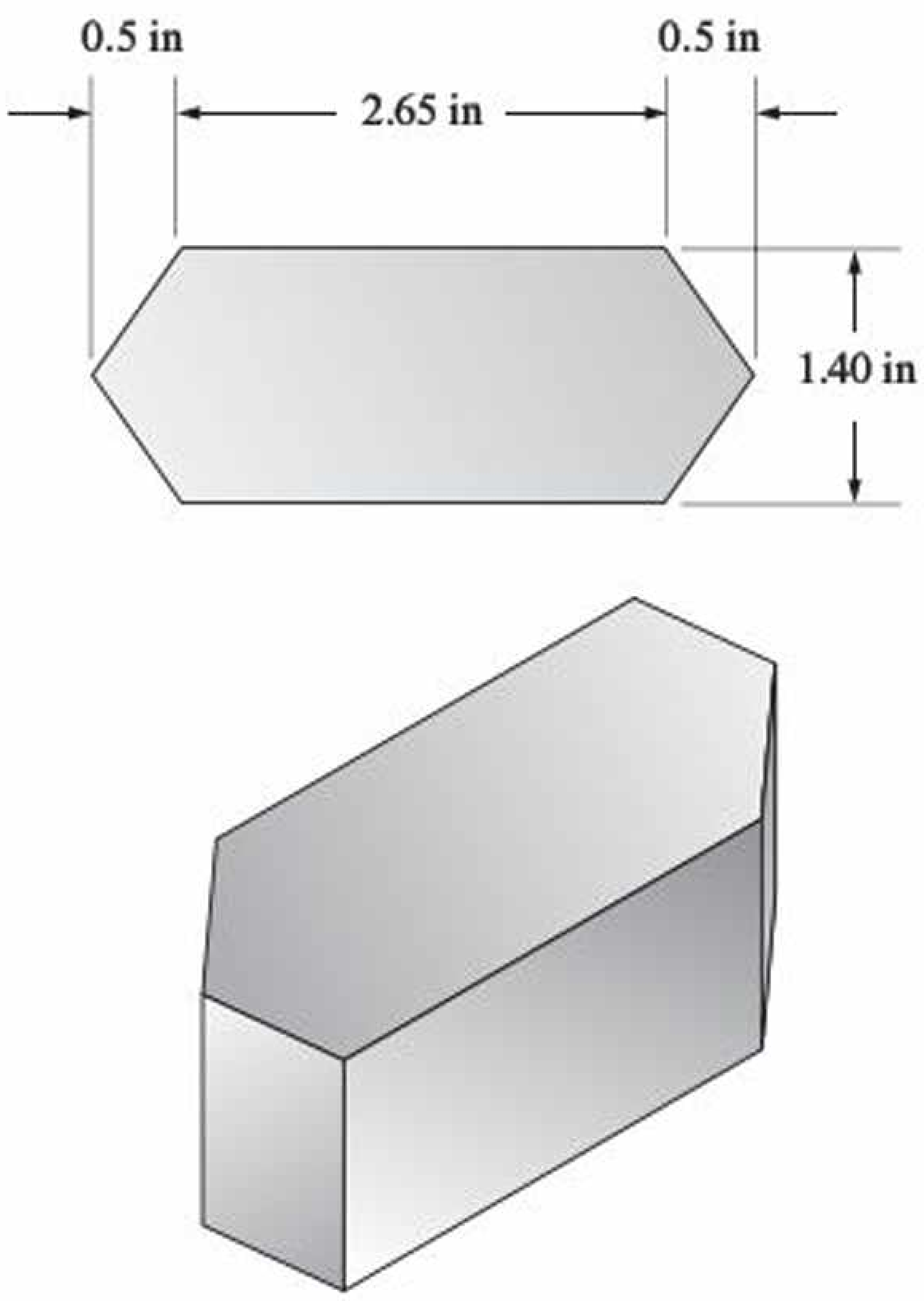


FIGURA P3–16 Miembro corto sometido a compresión del problema 3–16.

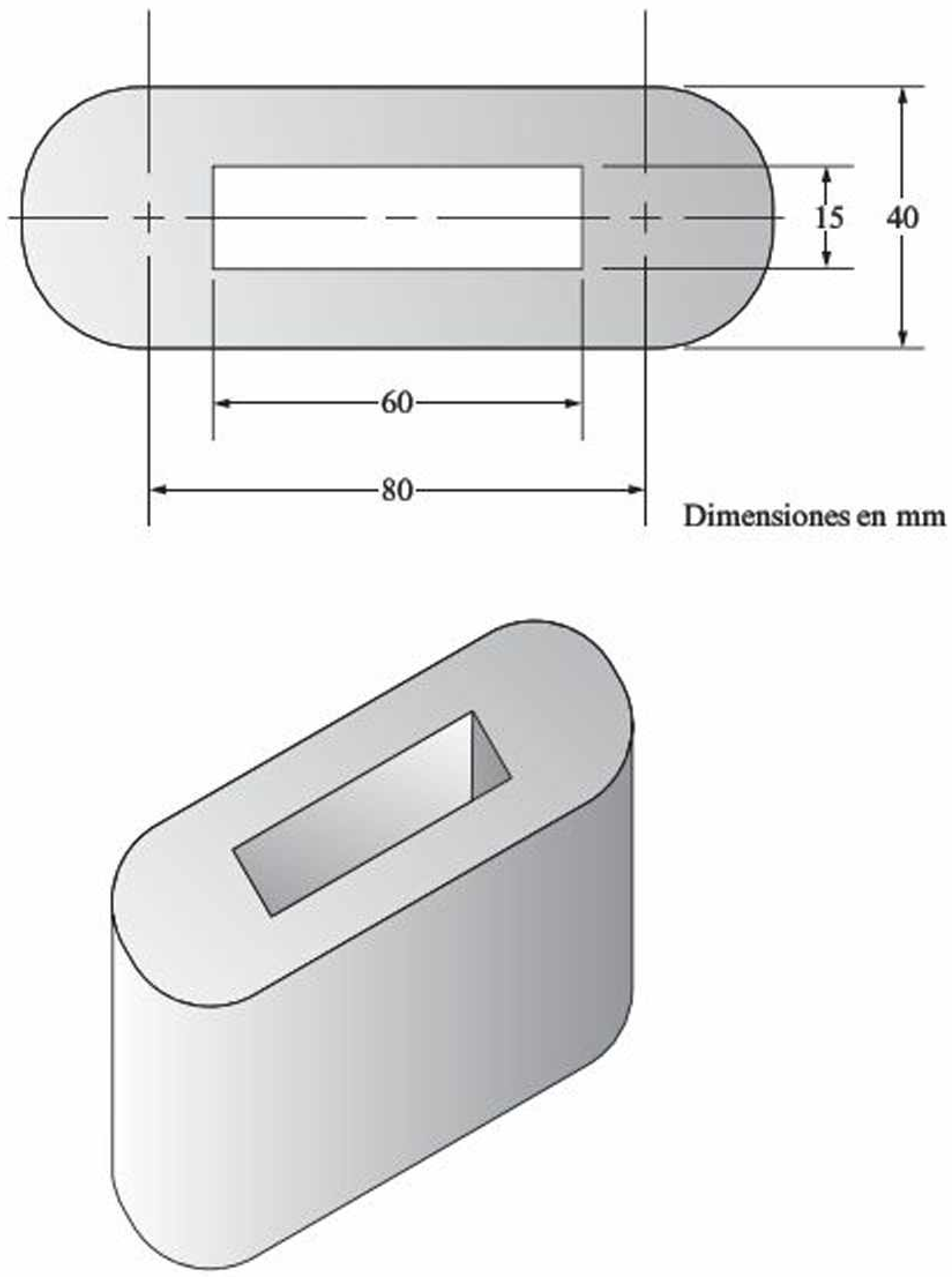


FIGURA P3–19 Miembro corto sometido a compresión del problema 3–19.

3–20.M La figura P3–20 muestra una barra que soporta varias cargas estáticas. Si la barra es de acero estructural ASTM A36, ¿es segura?

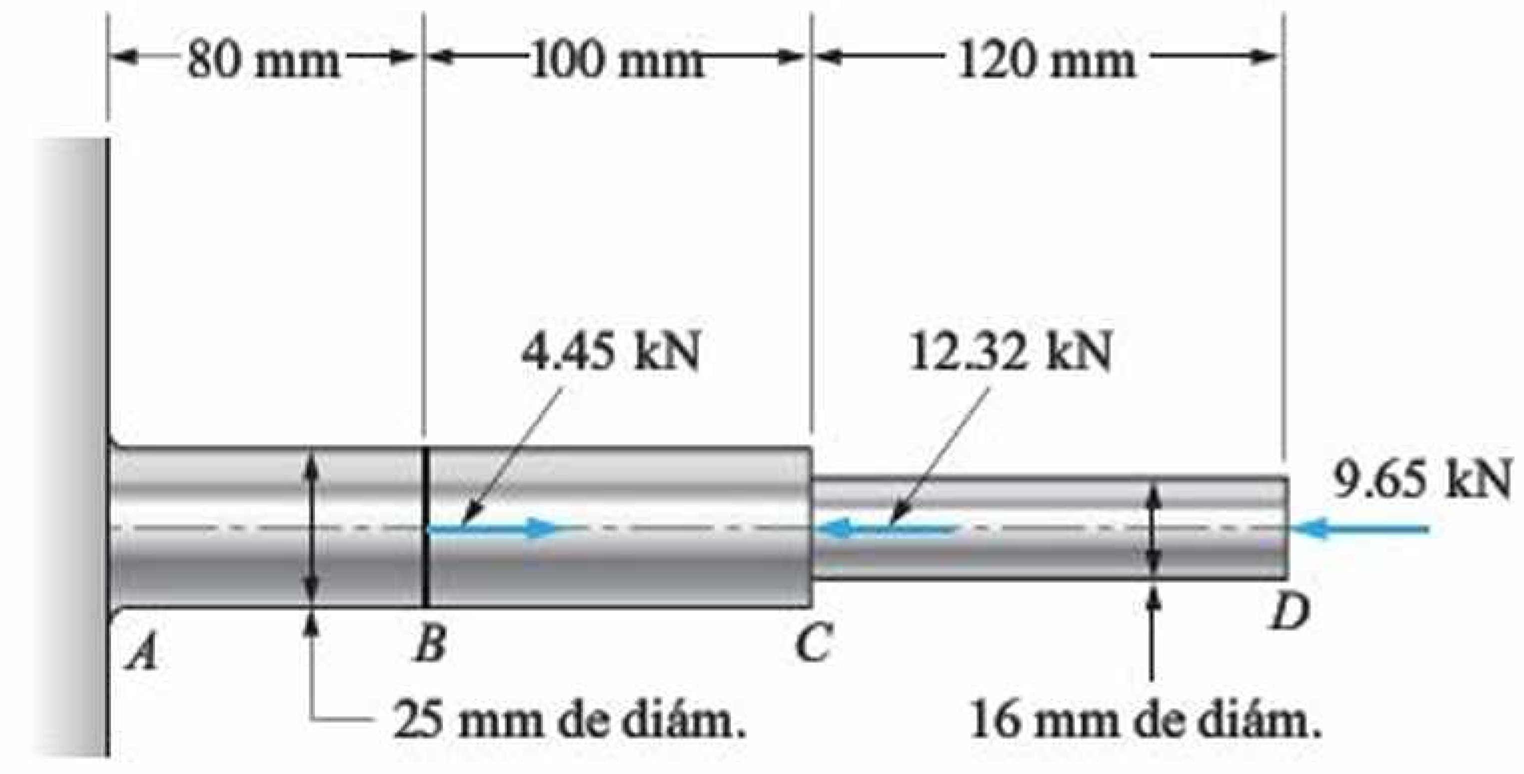


FIGURA P3–20 Barra que soporta cargas axiales en el problema 3–20.

3–21.M En la figura P3–21, especifique una aleación de aluminio apropiada para el miembro *AB* si la carga debe repetirse muchas veces. Considere sólo la parte cuadrada cerca de la parte media del miembro.

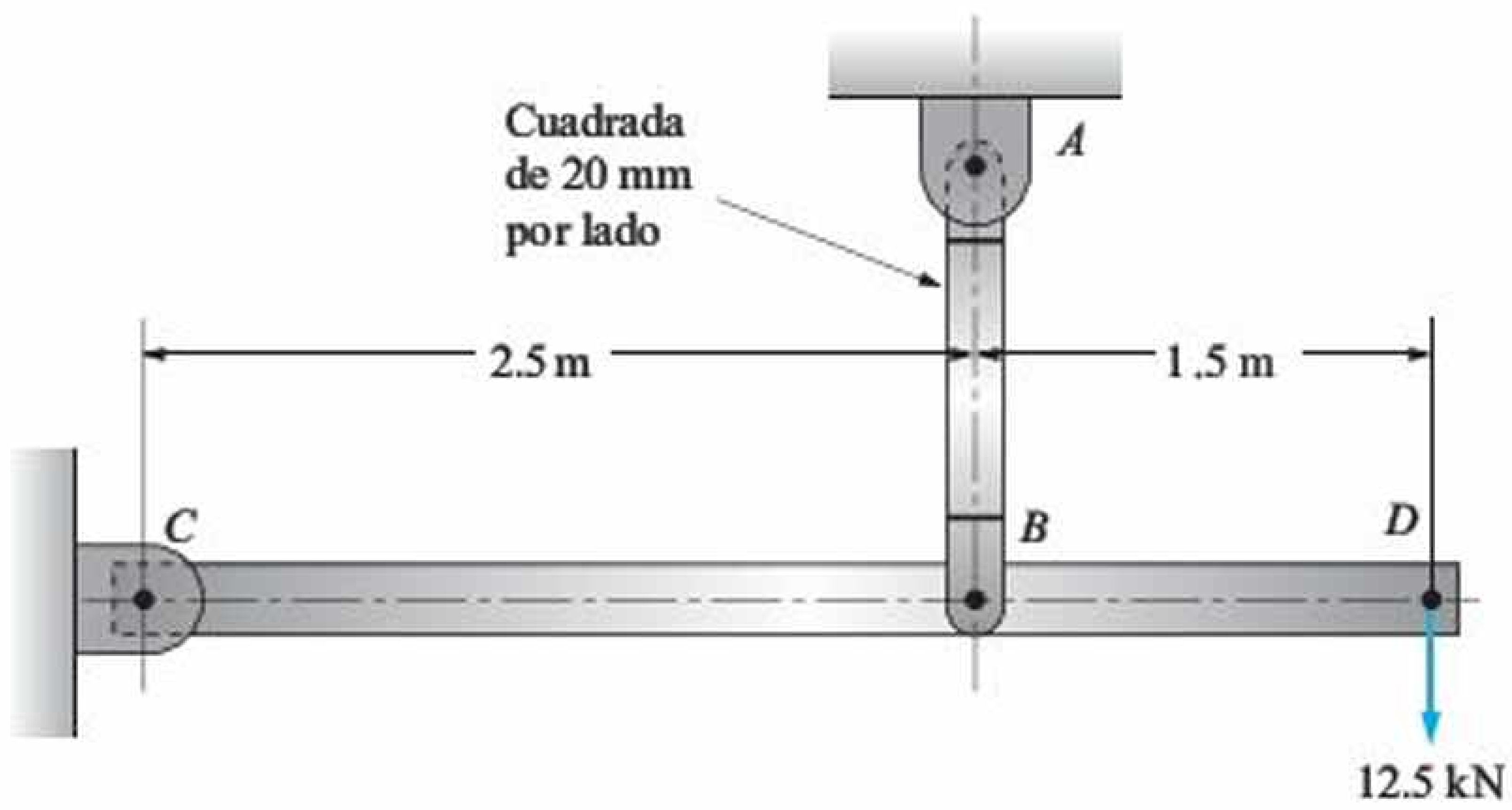


FIGURA P3–21 Soporte del problema 3–21.

3–22.E Un ángulo de acero estándar, L2 × 2 × $\frac{1}{4}$, funciona como tirante en una armadura que soporta una carga estática. El ángulo es de acero estructural ASTM A36; calcule la carga de tensión permisible basado en las especificaciones del AISC.

Deformación elástica

3–23.E Un poste de abeto grado núm. 2 es de 6.0 ft de largo y su sección transversal es cuadrada, de 3.50 in por lado. ¿Qué tanto se acortaría cuando se cargue a compresión hasta su carga permisible paralela al grano?

3–24.M Determine el alargamiento de una tira de plástico de 0.75 mm de espesor por 12 mm de ancho por 375 mm de largo si se somete a una carga de 90 N y es de (a) ABS para mediano impacto o (b) fenólico (vea el apéndice A–20).

3–25.E Un cilindro de aluminio hueco de aleación de aluminio 2014–T4 tiene un diámetro externo de 2.50 in y un espesor de pared de 0.085 in. Su longitud es de 14.5 in. ¿Qué fuerza de compresión axial haría que el cilindro se acorte 0.005 in? ¿Cuál es el esfuerzo resultante en el aluminio?

3–26.E Se encuentra una barra de metal en un arcón de existencias y aparentemente es de aluminio o de magnesio. Su sección transversal es cuadrada de 0.25 in por lado. Discuta dos formas en las que podría determinar de qué material se trata.

3–27.M Se va a diseñar un tensor para un automóvil. Debe soportar una carga repetida de 3500 N sin que su longitud de 630 mm se alargue más de 0.12 mm. Use un factor de diseño de 8 basado en la resistencia máxima y calcule el diámetro requerido de una varilla redonda para satisfacer estos requerimientos utilizando (a) acero laminado en caliente, (b) acero AISI 4140 OQT 700 y (c) aleación de aluminio 6061–T6. Compare la masa de las tres opciones.

3–28.M El diámetro de un perno de acero en la parte no roscada es de 12.0 mm. Determine el alargamiento en una longitud de 220 mm si se aplica una fuerza de 17.0 kN.

3–29.M Para la estructura de un avión se diseña varilla de 1.25 m de largo y sección transversal cuadrada de 8.0 mm por lado. Determine la cantidad de alargamiento que ocurriría si se hace de (a) titanio Ti6A1–4V y (b) acero inoxidable AISI 501 OQT 1000. La carga es de 5000 N.

3–30.E Un tensor en una armadura de acero soldada es de 13.0 ft de largo y se somete a una fuerza de 35000 lb. Elija un ángulo de alas iguales de acero ASTM A36 que limite el esfuerzo a 21600 psi. Luego calcule el alargamiento en el ángulo producido por la fuerza. Use $E = 29.0 \times 10^6$ psi para acero estructural.

3–31.E El eslabón de un mecanismo es una barra rectangular de acero que se somete alternadamente a una carga de tensión de 450 lb y a un carga de compresión de 50 lb. Sus dimensiones son: longitud = 8.40 in, ancho = 0.25 in, espesor = 0.125 in. Calcule el alargamiento y la compresión del eslabón.

3–32.E Una barra de acero cilíndrica está sujeta por su extremo superior y se somete a tres fuerzas axiales, como se muestra en la figura P3–32. El área de su sección transversal es de 0.50 in². Determine la deflexión del extremo libre.

3–33.E Un eslabón de una máquina embaladora automática es un tubo hueco de aluminio 6061–T6. Sus dimensiones son: diámetro externo = 1.250 in, diámetro interno = 1.126 in, longitud = 36.0 in. Calcule la fuerza requerida para producir una deflexión de la barra de 0.050 in. ¿Podría el esfuerzo producido por la fuerza que se acaba de determinar ser seguro si la carga se aplica repetidamente?

3–34.E Un tirante de una armadura se somete a una carga estática de 2500 lb. Sus dimensiones son: longitud = 8.75 ft, diámetro externo = 0.750 in, diámetro interno = 0.563 in. Primero especifique una aleación de aluminio apropiada que sería segura. Luego calcule el alargamiento del miembro.

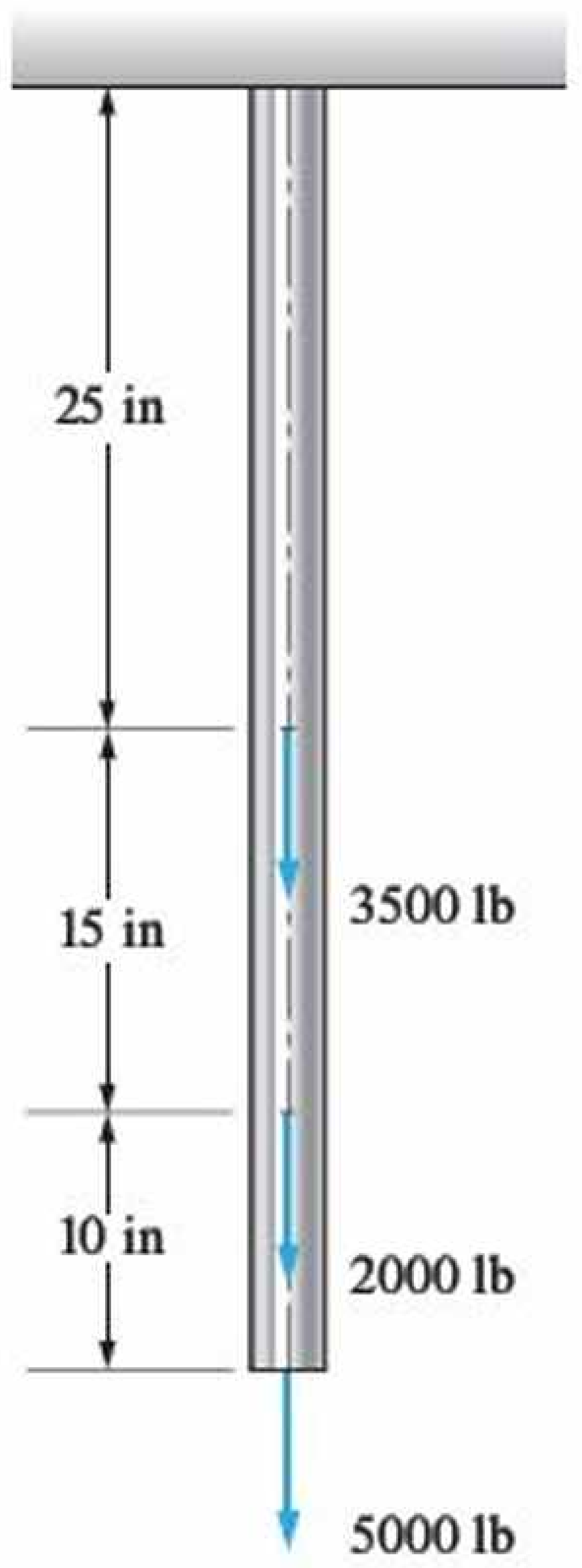


FIGURA P3–32 Barra sometida a tensión axial en el problema 3–32.

3–35.M Un tubo hueco de aluminio 6061–T4 de 40 mm de largo se utiliza como espaciador en una máquina y se somete a una fuerza de compresión axial de 18.2 kN. El diámetro externo del tubo es de 56.0 mm y el interno de 48.0 mm. Calcule la deflexión del tubo y el esfuerzo de compresión resultante.

3–36.E Un cable tensor es de acero AISI 1020 CD y su longitud es de 135.0 ft. Su diámetro es de 0.375 in. Calcule el esfuerzo en el cable y su deflexión cuando se somete a una fuerza de tensión de 1600 lb.

3–37.M Calcule el alargamiento total de la barra mostrada en la figura P3–37 si es de titanio Ti–6A1–4V.

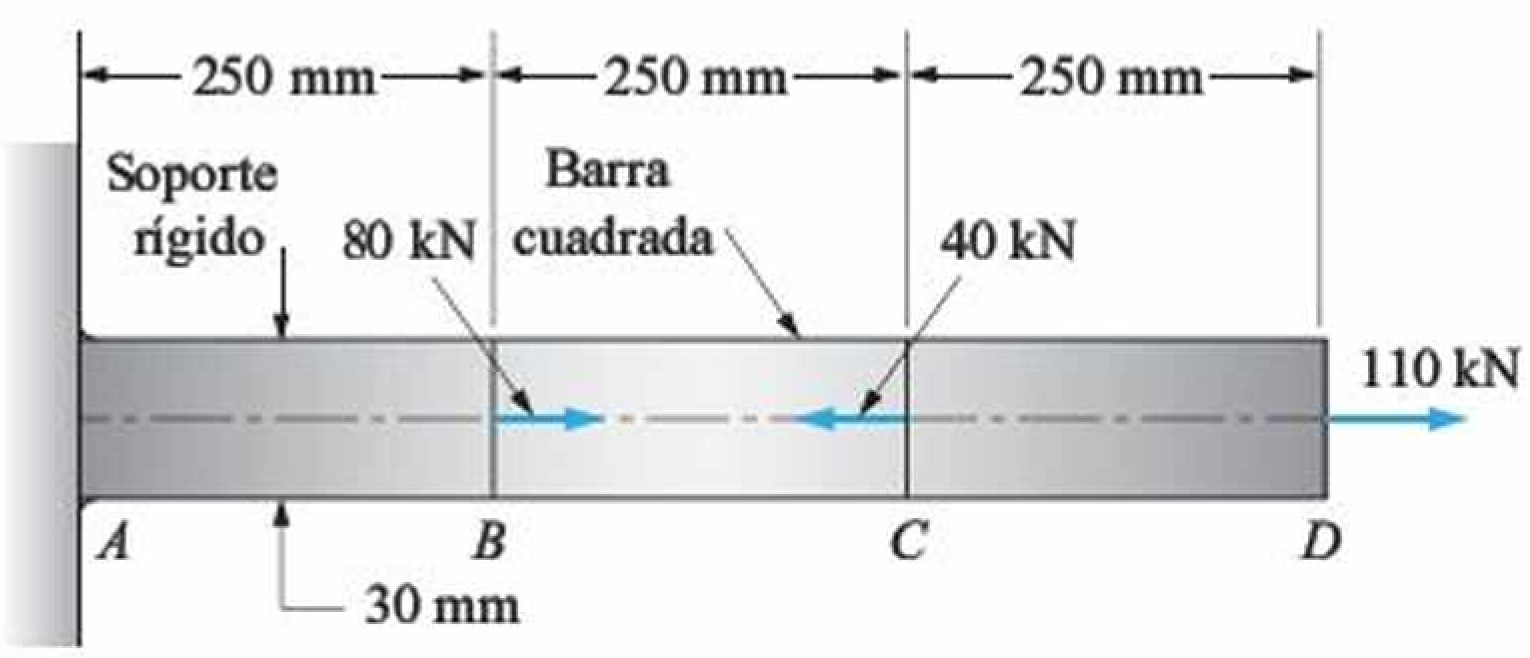


FIGURA P3–37 Barra que soporta cargas axiales en el problema 3–37.

3–38.E Durante una prueba de una barra de metal se encontró que una fuerza de tensión axial de 10 000 lb produjo un alargamiento de 0.023 in. Las dimensiones originales de la barra eran: longitud = 10.000 in, diámetro = 0.750 in. Calcule el módulo de elasticidad del metal. ¿De qué clase de metal probablemente estaba hecha?

3–39.M La barra mostrada en la figura P3−39 soporta tres cargas. Calcule la deflexión en el punto *D* con respecto al punto *A*. La barra es de plástico acrílico estándar.

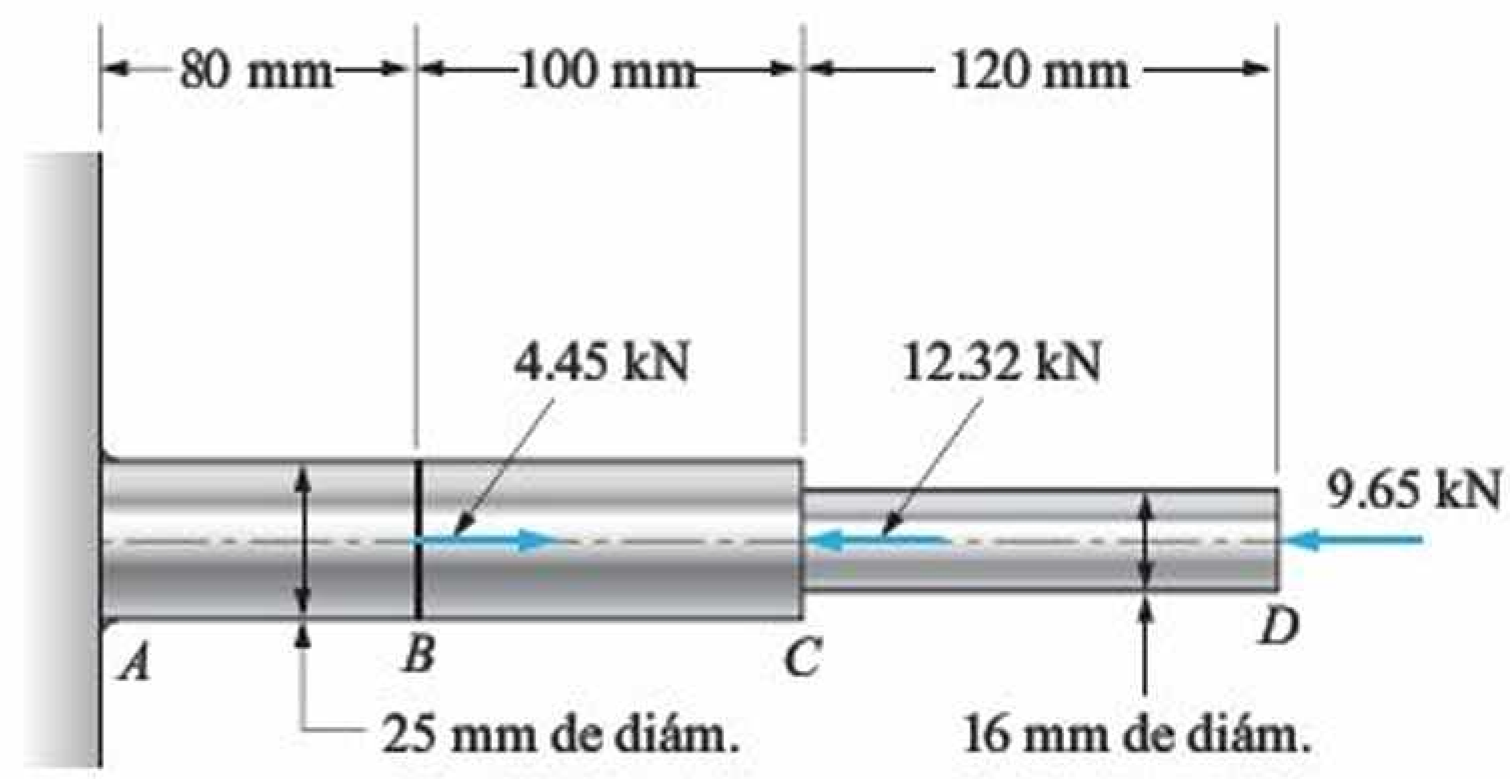


FIGURA P3–39 Barra que soporta cargas axiales en el problema 3–39.

3–40.E Una columna está conformada por una base de concreto cilíndrica que soporta un tubo de acero estándar HSS de 4 $\times 4 \times \frac{1}{2}$, de 8.60 ft de largo. La base es de 3.0 ft de largo y su diámetro es de 8.00 in. Primero, especifique el concreto según la sección 2–10 con una resistencia nominal adecuada para soportar una carga de compresión de 64 000 lb. Luego, suponiendo que ocurre pandeo, calcule la cantidad total que la columna se acortaría.

3–41.E Un alambre eléctrico de cobre calibre 14 (C14500, duro) de 10.5 ft de largo se sujeta firmemente a una viga por su extremo superior. El diámetro del alambre es de 0.064 in. ¿Cuánto se alargaría si una persona que pesa 120 lb cuelga del extremo inferior? ¿Cuánto se alargaría si la persona pesa 200 lb?

3–42.E Un flexómetro utilizado por los carpinteros es de 25.00 ft de largo y está hecho de un fleje de acero plano con estas dimensiones: ancho = 0.750 in, espesor = 0.006 in Calcule el alargamiento del flexómetro y el esfuerzo en el acero si se aplica una fuerza de tensión de 25.0 lb.

3–43.E Un poste es un perfil estándar de 4 × 4 (apéndice A–4) de pino del sur grado núm. 2, calcule la carga de compresión axial que podría soportar antes que alcance su esfuerzo permisible a compresión paralelo al grano. Luego, si el poste es de 10.75 ft de largo, calcule la cantidad que se acortaría bajo esa carga.

3–44.M Con hierro dúctil, ASTM A536, grado 60–40–18 se forma un perfil cuadrado hueco, con dimensión externa de 200 mm y dimensión interna de 150 mm. Calcule la carga que produciría un esfuerzo de compresión axial en el hierro de 200 MPa. Entonces, con esa carga, calcule la cantidad que el miembro se acortaría a partir de su longitud original de 1.80 m.

3–45.M Un alambre de latón (C36000, duro) tiene un diámetro de 3.00 mm e inicialmente es de 3.600 m de largo. En esta condición, el extremo inferior, con una placa para aplicar una carga, está a 6.0 mm del suelo. ¿Cuántos kilogramos

de plomo se tendrían que agregar a la placa para hacer que apenas toque el suelo? ¿Cuál sería el esfuerzo en el alambre en ese momento?

3–46.M Calcule el alargamiento de la barra cuadrada AB de aluminio 6061–T6 mostrada en la figura P3−46 si es de 1.25 in de largo.

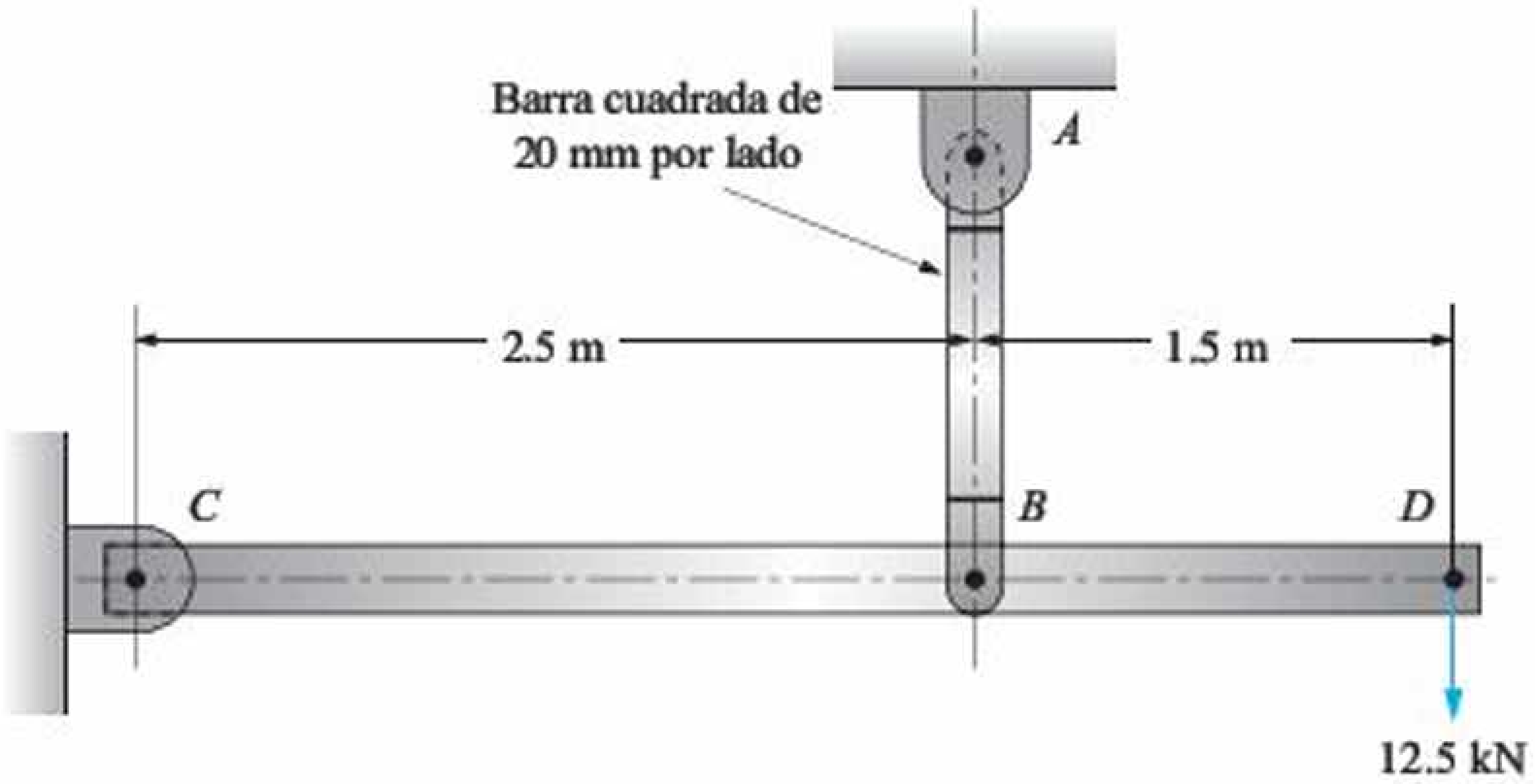


FIGURA P3–46 Soporte del problema 3–46.

Deformación térmica

3–47.E Una losa de concreto en una carretera es de 80 ft de largo. Determine el cambio de longitud de la losa si la temperatura cambia de −30°F a + 110°F

3–48.M Un riel de acero utilizado para reforzar los costados de vagones de ferrocarril es de 12.0 m de largo y es de acero AISI 1040 HR. Determine el cambio de longitud del riel si la temperatura cambia de −34°C a + 43°C.

3–49.M Determine el esfuerzo que aparecería en el riel descrito en el problema 3–48 si estuviera completamente restringido para que no se dilatara.

3–50.M Las varillas de empuje que accionan las válvulas en un motor de seis cilindros son de acero AISI 1040 y de 625 mm de largo y 8.0 mm de diámetro. Calcule el cambio de longitud de las varillas si su temperatura varía de −40°C a +116°C y la dilatación es restringida.

3–51.M Si las varillas descritas en el problema 3–50 se instalaron con holgura cero con respecto a otras partes del mecanismo de válvulas a 25°C, calcule lo siguiente:

(a) La holgura entre las partes a −40°C.

(b) El esfuerzo en la varilla producido por una elevación de la temperatura a 116°C.

Suponga que las partes en contacto son rígidas.

3–52.E La plataforma de un puente es una losa continua de concreto de 140 ft de largo a 30°F. Determine el ancho requerido de las juntas de expansión en los extremos del puente, considerando que no se debe desarrollar ningún esfuerzo cuando la temperatura varía de +30°F a +110°F.

3–53.E Cuando se instaló la plataforma del puente del problema 3–52, el ancho de la junta de expansión en cada extremo era de sólo 0.25 in. ¿Qué esfuerzo se desarrollaría si los apoyos son rígidos? Para el concreto use $f'_c = 4000$ psi y determine E conforme a la sección 2–10.

3–54.E Para la plataforma del puente del problema 3–52, suponga que la plataforma apenas debe tocar su apoyo a la temperatura de 110°F. Si la plataforma tiene que ser instalada cuando la temperatura es de 60°F, ¿cuál deberá ser la separación entre la plataforma y sus apoyos?

3–55.M Se tiene que colocar un anillo de acero inoxidable AISI 301 sobre un eje que tiene una temperatura de 20°C y un diámetro de 55.200 mm. El diámetro interno del anillo es de 55.100 mm. ¿A qué temperatura se debe calentar el anillo para que su diámetro sea de 55.300 mm de modo que pueda ser deslizado sobre el eje?

3–56.M Cuando el anillo del problema 3–55 se coloca sobre el eje y luego se enfría de vuelta a 20°C, ¿qué esfuerzo de tensión se desarrollará en el anillo?

3–57.M Un intercambiador de calor se compone de varios tubos de latón (C36000) dispuestos en el interior de un casco de acero inoxidable (AISI 430). Inicialmente, cuando la temperatura es de 10°C, los tubos son de 4.20 m de largo y el casco es de 4.50 m de largo. Determine qué tanto se alargará cada uno cuando se calientan a 85°C.

3–58.E En Alaska, una sección de 40 ft de un tubo de acero AISI 1020 puede experimentar una variación de temperatura de −50°F cuando está a temperatura ambiente hasta +140°F cuando transporta petróleo caliente. Calcule el cambio de longitud del tubo en estas condiciones.

3–59.M Una barra cuadrada de magnesio es de 30 mm por lado y de 250.0 mm de largo a 20°C. Se coloca entre dos apoyos rígidos con una separación entre sí de 250.1 mm. La barra se calienta entonces a 70°C en tanto que los apoyos no se mueven. Calcule el esfuerzo resultante en la barra.

3–60.M Una varilla cuadrada, de 8.0 mm por lado, es de acero AISI 1040 estirado en frío y su longitud es de 175 mm. Se coloca sin holgura entre dos soportes inmóviles sin esfuerzo en la varilla. Entonces, la temperatura se incrementa en 90°C. ¿Cuál es el esfuerzo final en la varilla?

3–61 Un varilla cuadrada está hecha de aleación de aluminio 6061–T4. A 75°F, su longitud es de 10.500 in. Se coloca entre soportes rígidos con una distancia entre ellos de 10.505 in. Si los soportes no se mueven, describa qué le sucedería a la barra cuando la temperatura se eleva a 400°F.

3–62.E Un nivel recto de carpintero está apoyado en dos barras, una de resina de poliéster y la otra de titanio Ti–6A1–4V. La distancia entre las barras es de 24.00 in. A una temperatura de 65°F, el nivel está perfectamente nivelado y la longitud de cada barra es de 30.00 in. ¿Cuál sería el ángulo de inclinación del nivel cuando la temperatura se eleva a 212°F?

3–63.E Cuando se fabricó, un flexómetro de acero (AISI 1040) era exactamente de 25.000 ft de largo a una temperatura de 68°F. Calcule el error que resultaría si el flexómetro se utiliza a −15°F.

3–64.M La figura P3 – 64 muestra dos barras de materiales diferentes separadas 0.50 mm cuando la temperatura es de 20°C. ¿A qué temperatura se tocarían?

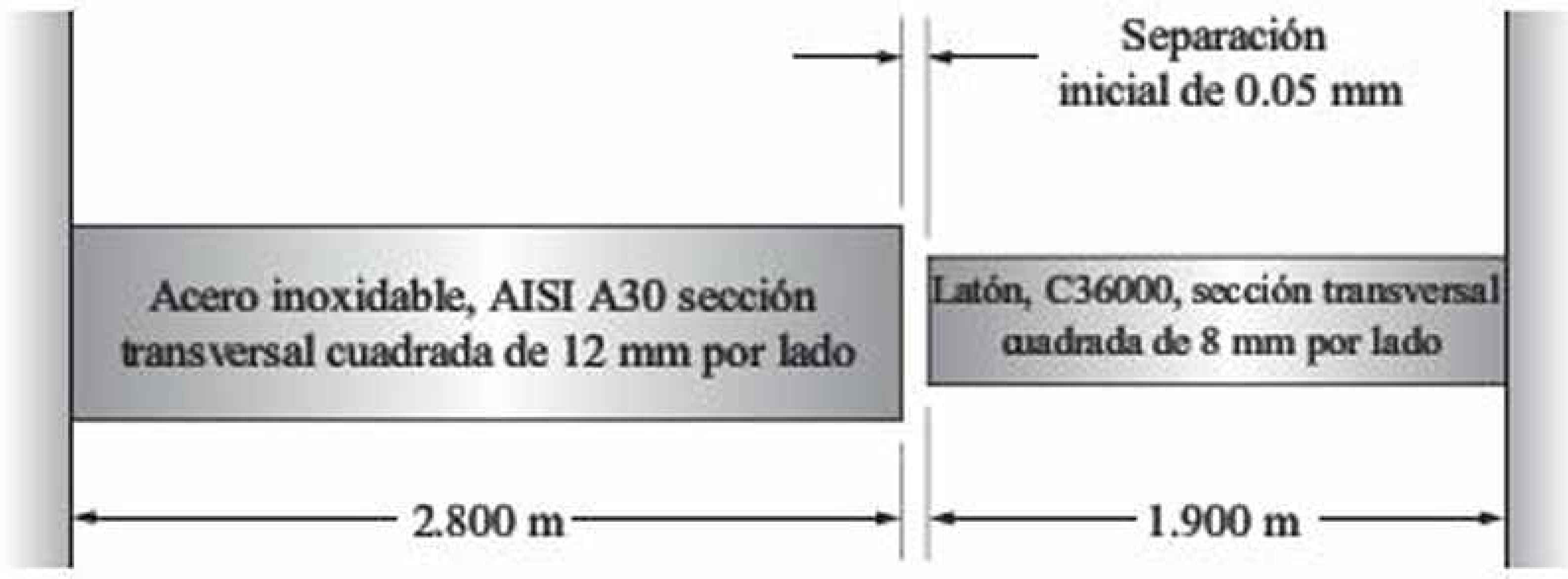


FIGURA P3–64 Problema 3–64.

3–65.M Un alambre de acero inoxidable (AISI 301) se tensa entre dos soportes rígidos de modo que se induce un esfuerzo de 40 MPa en él a una temperatura de 20°C. ¿Cuál sería el esfuerzo a una temperatura de − 15°C?

3–66.M En las condiciones descritas en el problema 3–65, ¿a qué temperatura el esfuerzo sería cero en el alambre?

Miembros hechos de dos materiales

3–67.M Un poste corto se forma soldando placas de acero en un cuadrado, como se muestra en la figura P3–67 y luego se rellena de concreto el área interna. Calcule el esfuerzo en el acero y en el concreto si $b = 150$ mm, $t = 10$ mm y el poste soporta una carga axial de 900 kN. Vea en la sección 2 – 10 las propiedades del concreto. Use $f'_c = 6000$ psi.

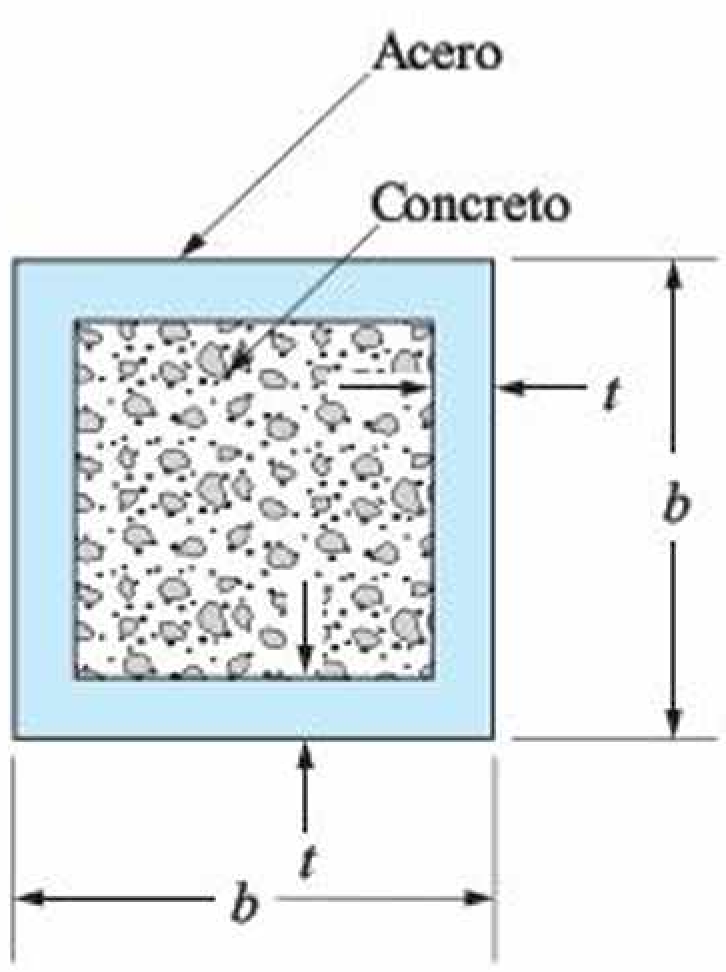


FIGURA P3–67 Poste de los problemas 3–67, 3–68 y 3–69.

3–68.E Un poste corto se forma rellenando de concreto un tubo de acero estándar de $6 \times 6 \times \frac{1}{2}$, como se muestra en la figura P3 – 67. El esfuerzo permisible del acero es de 21 600 psi. La resistencia nominal del concreto es de 6000 psi pero, en esta aplicación, el esfuerzo se tiene que limitar a 1500 psi. Consulte en la sección 2 – 10 el módulo de elasticidad del concreto. Calcule la carga permisible en el poste.

3–69.E Se va a diseñar un poste para que soporte una carga de compresión axial de 500 000 lb. Se tiene que hacer soldando placas de acero A36 de $\frac{1}{2}$ in de espesor en un cuadro y rellenando de concreto el área interna, como se muestra en la figura P3–67. Se requiere determinar las dimensiones del lado b del poste para limitar el esfuerzo en el acero a no más de 1500 psi. Vea la sección 2–10 para las propiedades del concreto. Use $f'_c = 6000$ psi.

3–70.M Se conectan dos discos mediante cuatro varillas, como se muestra en la figura P3–70. Las varillas son de 6.0 mm de diámetro y de la misma longitud. Dos varillas son de acero ($E = 207$ GPa) y dos son de aluminio ($E = 69$ GPa). Calcule el esfuerzo en cada varilla cuando se aplica una fuerza axial de 11.3 kN a los discos.

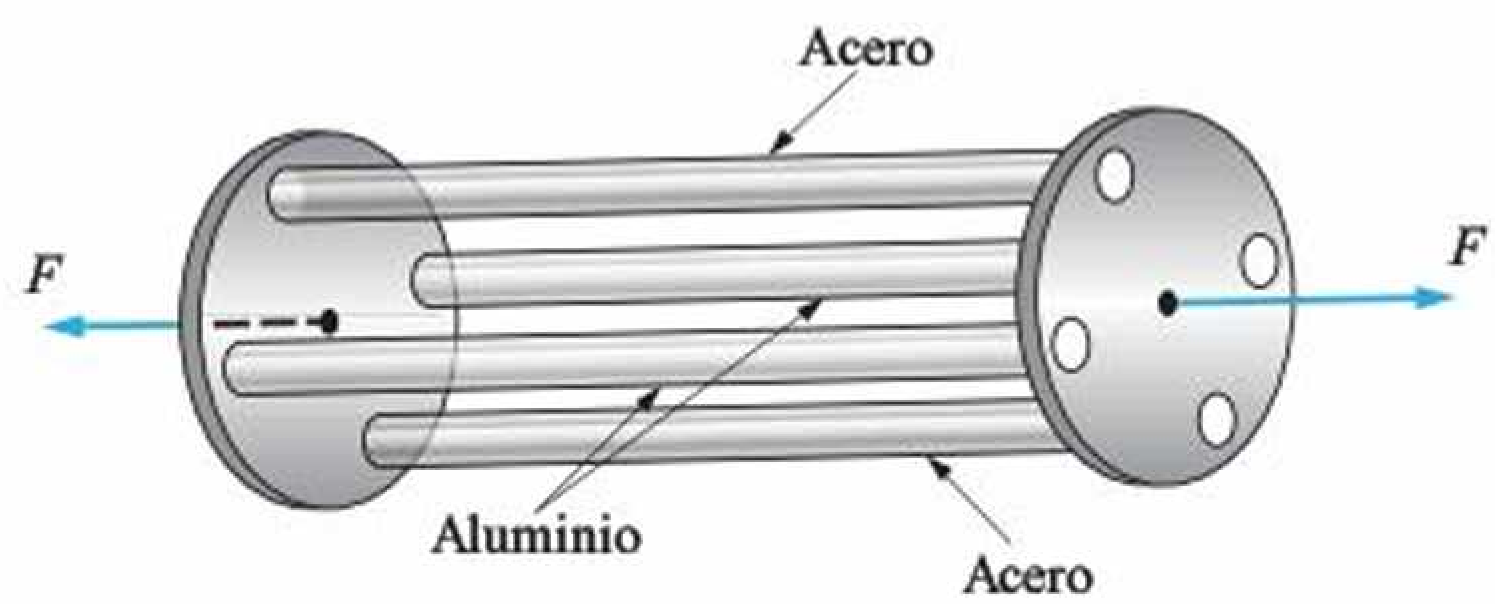


FIGURA P3–70 Problema 3–70.

3–71.M Se utilizan tres alambres para colgar una pieza fundida cuya masa es de 2265 kg, de modo que los alambres estén simétricamente cargados (vea la figura P3–71). Los dos alambres externos son de acero inoxidable AISI 430, totalmente duro. El cable intermedio es de cobre duro al berilio, C17200. Los tres alambres tienen el mismo diámetro y longitud. Determine el diámetro requerido de los alambres; ninguno debe experimentar un esfuerzo de más de la mitad de su resistencia a la cedencia.

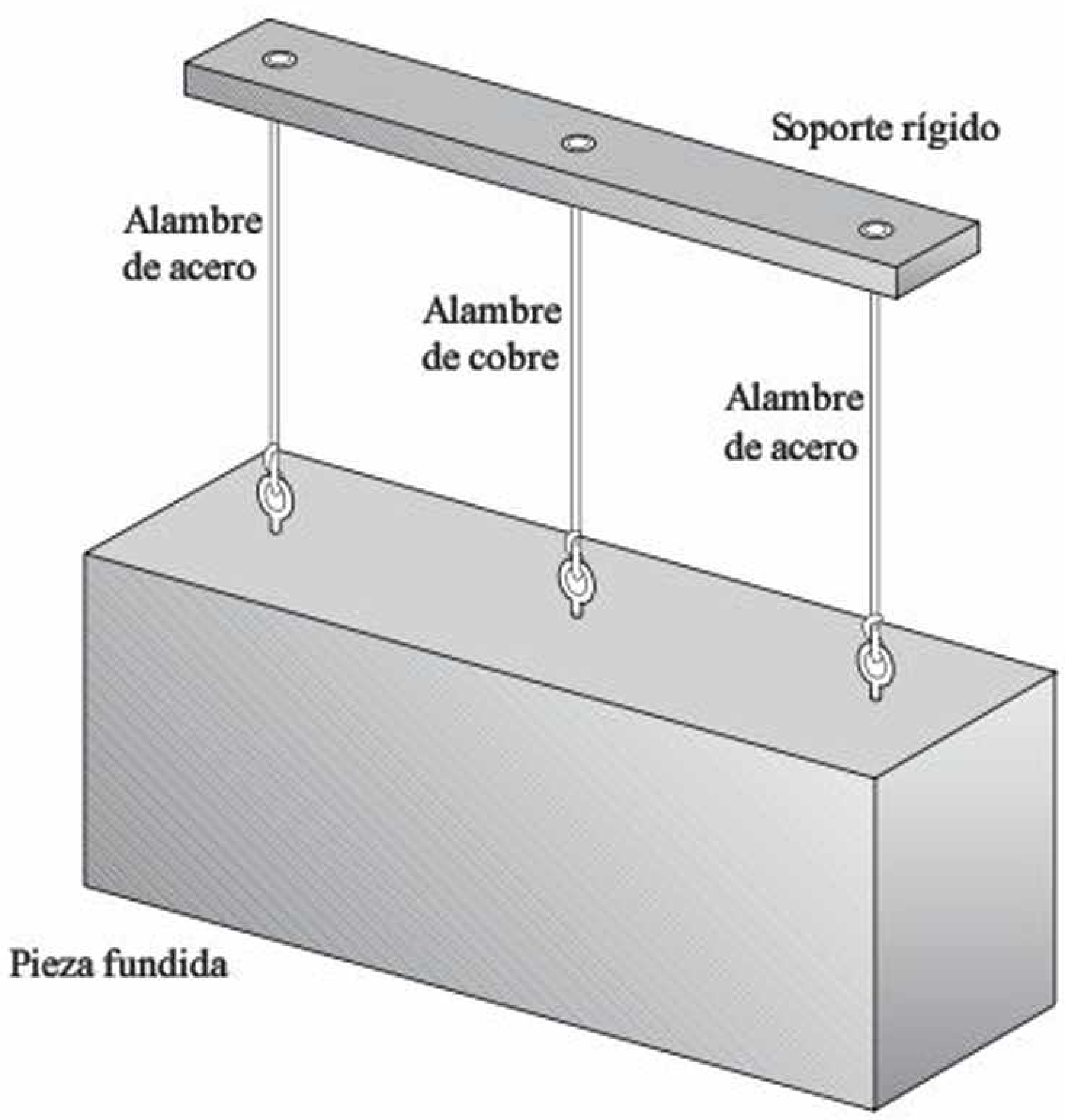


FIGURA P3–71 Problema 3–71.

3–72.M La figura P3–72 muestra una carga aplicada a un miembro cilíndrico interno que inicialmente es 0.12 mm más largo que un segundo tubo hueco concéntrico. ¿Cuál sería el esfuerzo en ambos miembros si se aplica una carga total de 350 kN?

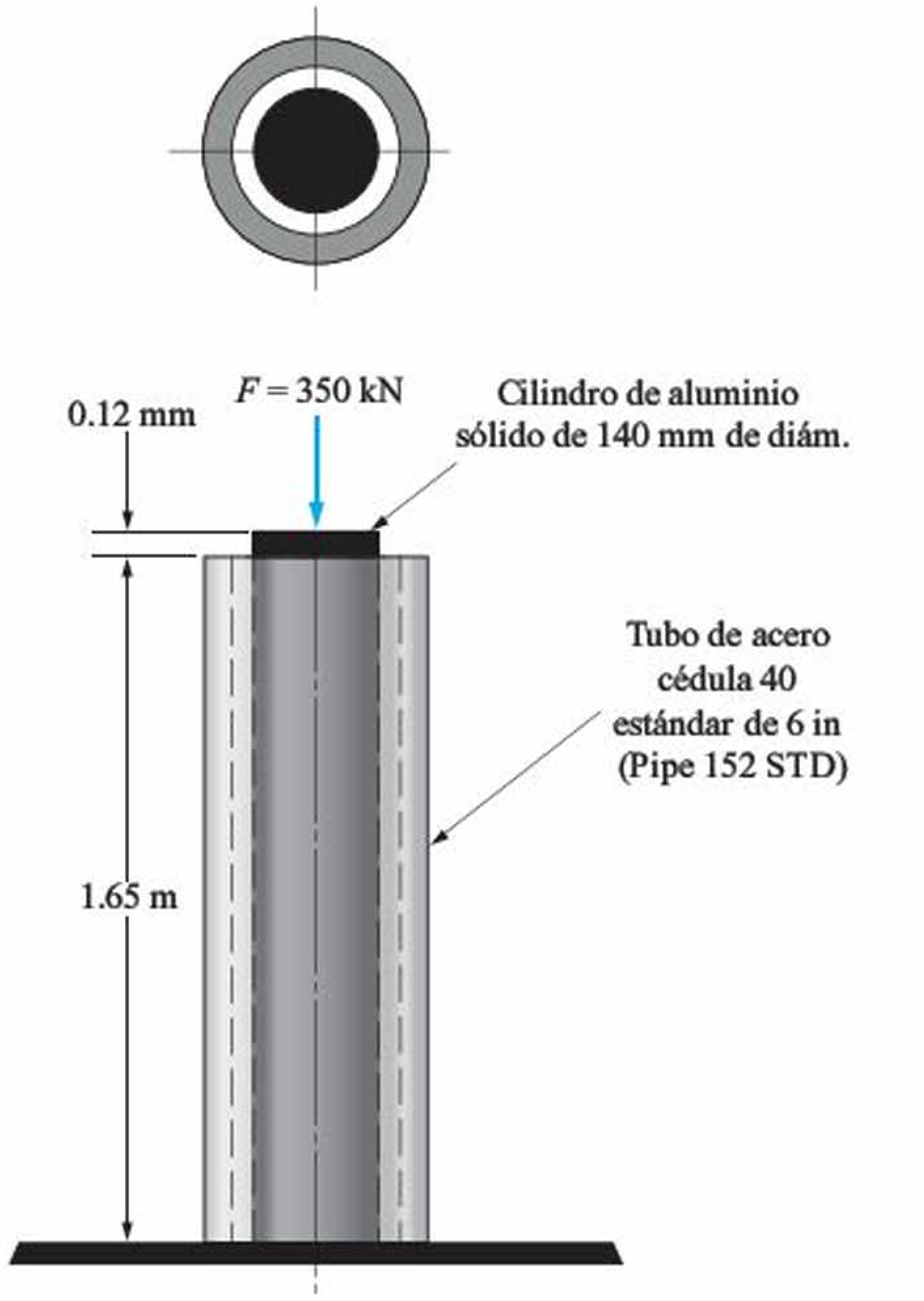


FIGURA P3–72 Barra de aluminio en un tubo de acero sometido a carga de compresión axial en el problema 3–72.

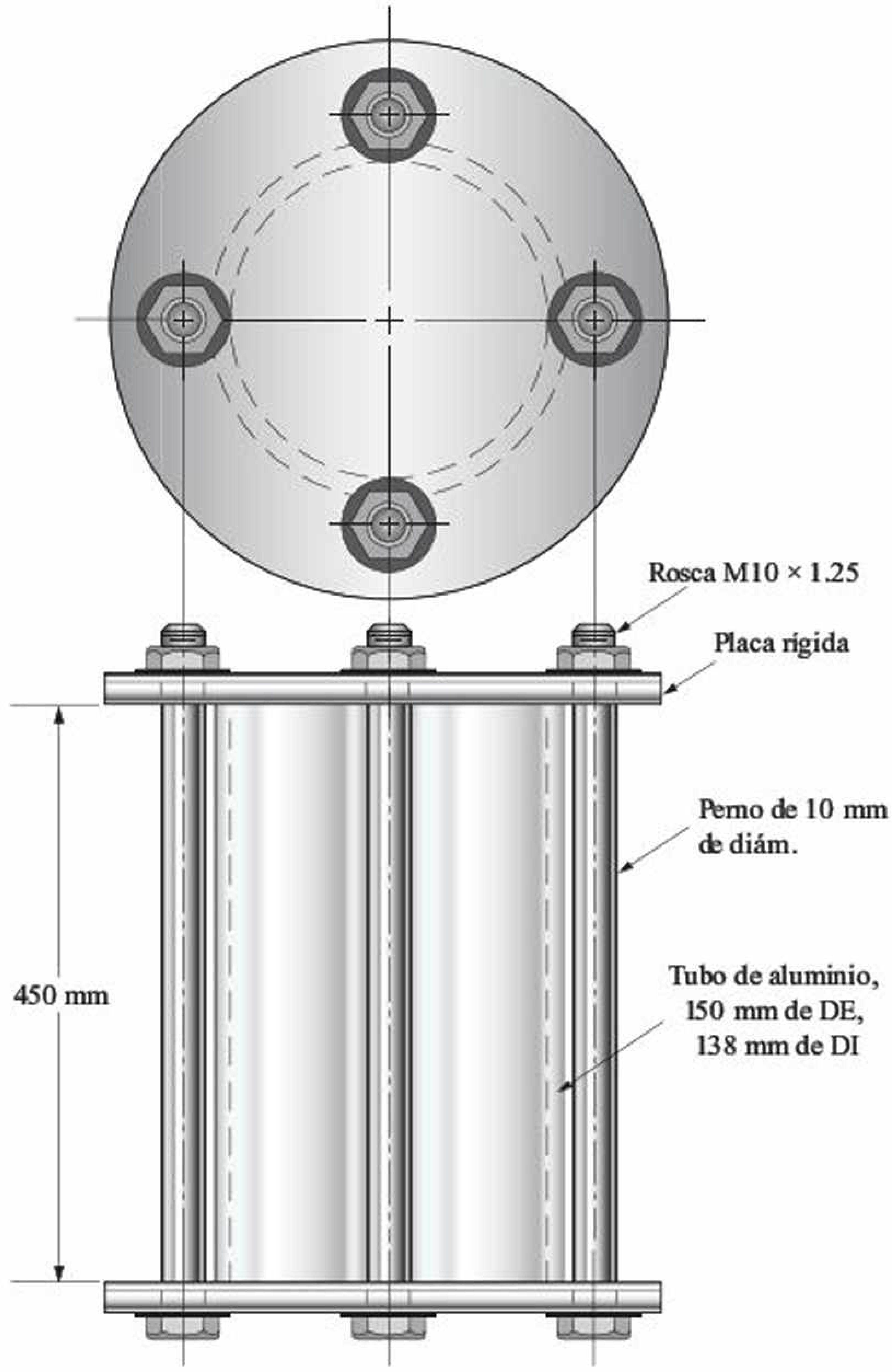


FIGURA P3–73 Tirantes en un cilindro del problema 3–73.

3–73.M La figura P3–73 muestra un cilindro de aluminio con dos tapas en sus extremos que se mantienen en su posición mediante cuatro tirantes de acero. Se produce una fuerza de sujeción apretando las tuercas en los extremos de los tirantes. Calcule el esfuerzo en el cilindro y los tirantes si las tuercas son apretadas una vuelta completa después del apriete máximo a mano.

3–74.E La columna de un edificio se forma embutiendo un perfil de patín ancho W6 × 15 en concreto, como se muestra en la figura P3–74. El concreto protege el acero del calor de un incendio y también comparte la carga. ¿Qué esfuerzo produciría en el acero y el concreto una carga total de 50 kip? Consulte en la sección 2–10 las propiedades del concreto. Use f_c = 2000 psi.

Deformación adicional y problemas de diseño

3–75 Un poste de 4 × 4 tiene una longitud de 4.25 m y es de madera de pino del sur grado núm. 2. Especifique la carga máxima en newtons que la columna soportaría y que no sobrepase el esfuerzo permisible a compresión paralelo al grano. Suponga que no ocurre pandeo. Luego calcule la deformación total del poste cuando se somete a esta magnitud de carga.

3–76 Una barra de aluminio (6061–T4) inicialmente es de 225.00 mm de largo a una temperatura de 20°C. Se coloca entre dos placas extremas inmóviles que están separadas 225.50 mm. Luego se calienta la barra a 205°C. Describa la secuencia de eventos que ocurren a medida que se calienta en función de la deformación y el esfuerzo. Evalúe la aceptabilidad de la condición final.

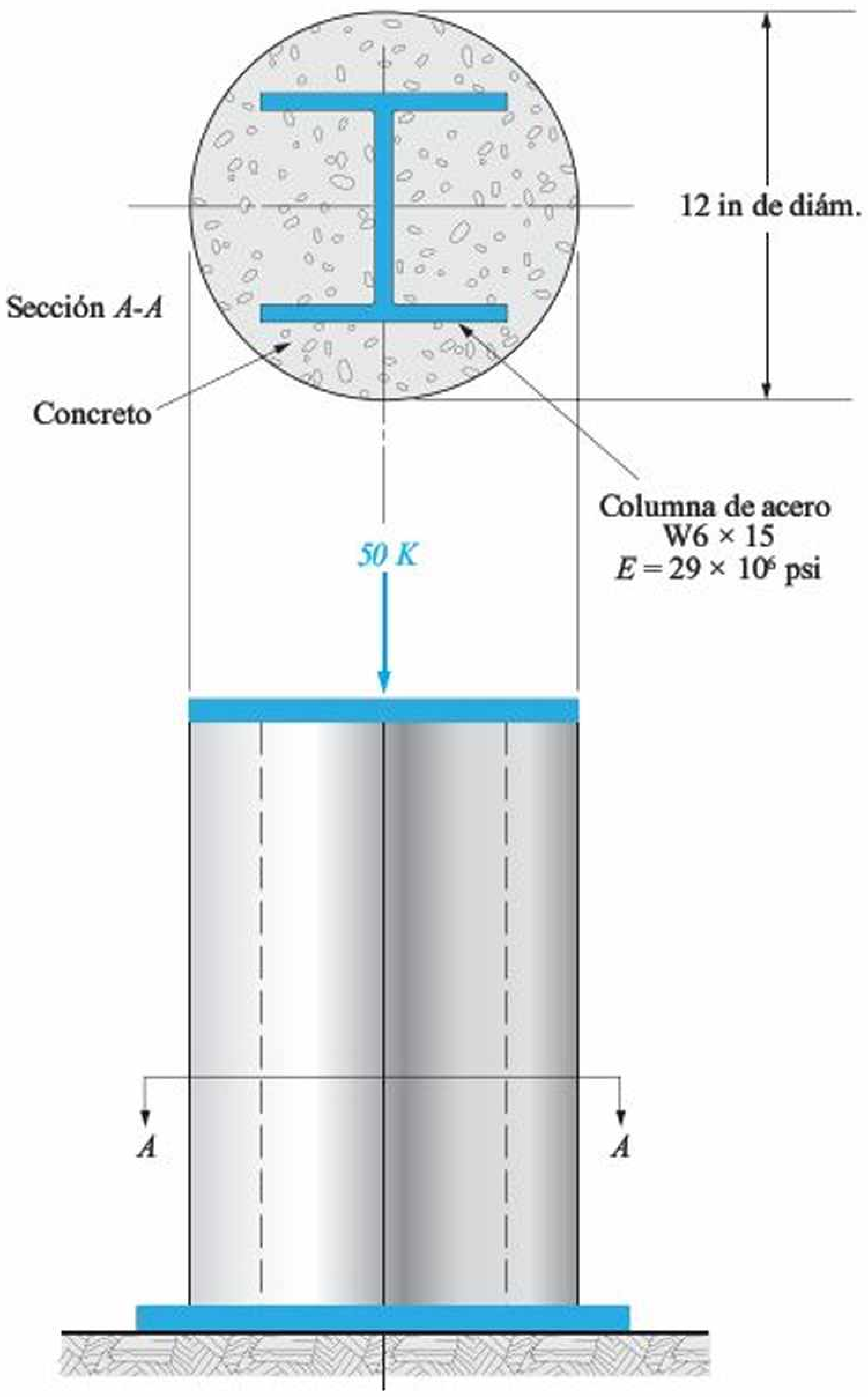


FIGURA P3–74 Columna de acero embutida en concreto del problema 3–74.

3–77. Una barra rectangular de aluminio (2014–T4) tiene una longitud de 2.400 m y dimensiones de sección transversal de 25 mm por 50 mm cuando la temperatura es de 20°C.

a) ¿A qué temperatura la longitud sería de 2.405 m si la barra no está restringida?

b) Si la temperatura se incrementa 30°C más se restringe para que no se alargue longitudinalmente, calcule el esfuerzo resultante en la barra.

c) ¿Es seguro el nivel de esfuerzo?

3–78. Un tirante de un mecanismo es de acero AISI 4140 OQT 1300. Su sección transversal es rectangular de 30 mm × 20 mm y su longitud es de 700 mm. Se tiene que utilizar de la siguiente manera: *a*) no se debe alargar más de 0.50 mm bajo carga y *b*) debe ser seguro cuando se someta a una carga de tensión axial repetida. Especifique la carga máxima permisible en la varilla.

3–79. Remítase a la figura P3–79. Calcule el alargamiento total de la barra si es de aleación de aluminio 2014–T6.

3–80. La figura P3–80 muestra dos varillas, AC y BC que soportan una carga en C. Cada varilla es de acero y su diámetro es de 8.00 mm. Calcule el alargamiento de las varillas AC y BC cuando una carga que tiene una masa de 680 kg se suspende de C.

3–81. La figura P3–81 muestra dos varillas AB y BC, que soportan una carga en B. Las varillas son de acero y su diámetro es de 10.00 mm. Calcule el alargamiento de las varillas AB y BC cuando se suspende de B una carga cuya masa es de 4200 kg.

3–82 a 3–90. Una probeta para prueba de tensión estándar tiene una sección central cilíndrica recta con diámetro de 0.505 in. Se graban marcas de calibración separadas 2.000 in cuando la probeta está en la condición descargada. Calcule la distancia entre las marcas de calibración cuando el material dado se somete a un esfuerzo axial igual al 90% de la resistencia a la cedencia listada en las tablas de apéndice. Suponga que estos esfuerzos están por debajo del límite proporcional de los materiales. También calcule la fuerza requerida para crear este nivel de esfuerzo y la deformación en el área situada entre las marcas de calibración.

3–82. Acero AISI 1040 estirado en frío.

3–83. Acero AISI 5160 OQT 700.

3–84. Acero inoxidable AISI 501 OQT 1000.

3–85. Cobre al berilio duro C17200.

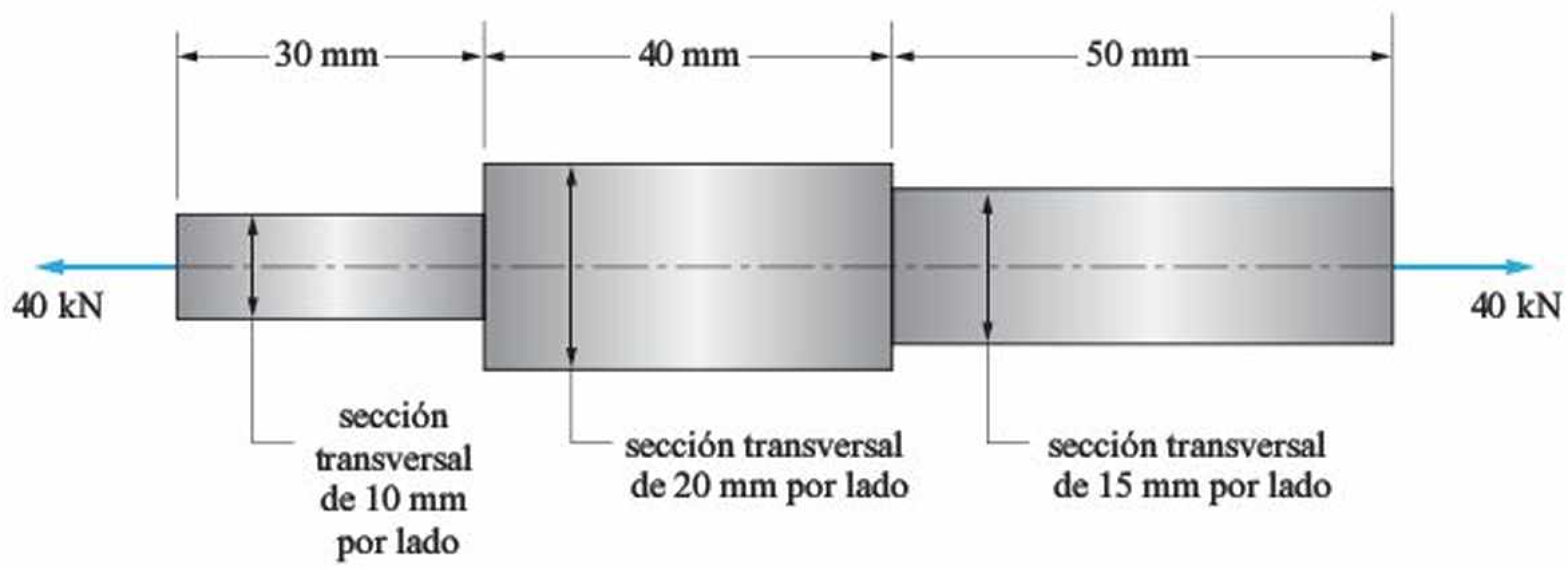


FIGURA P3–79 Barra del problema 3–79.

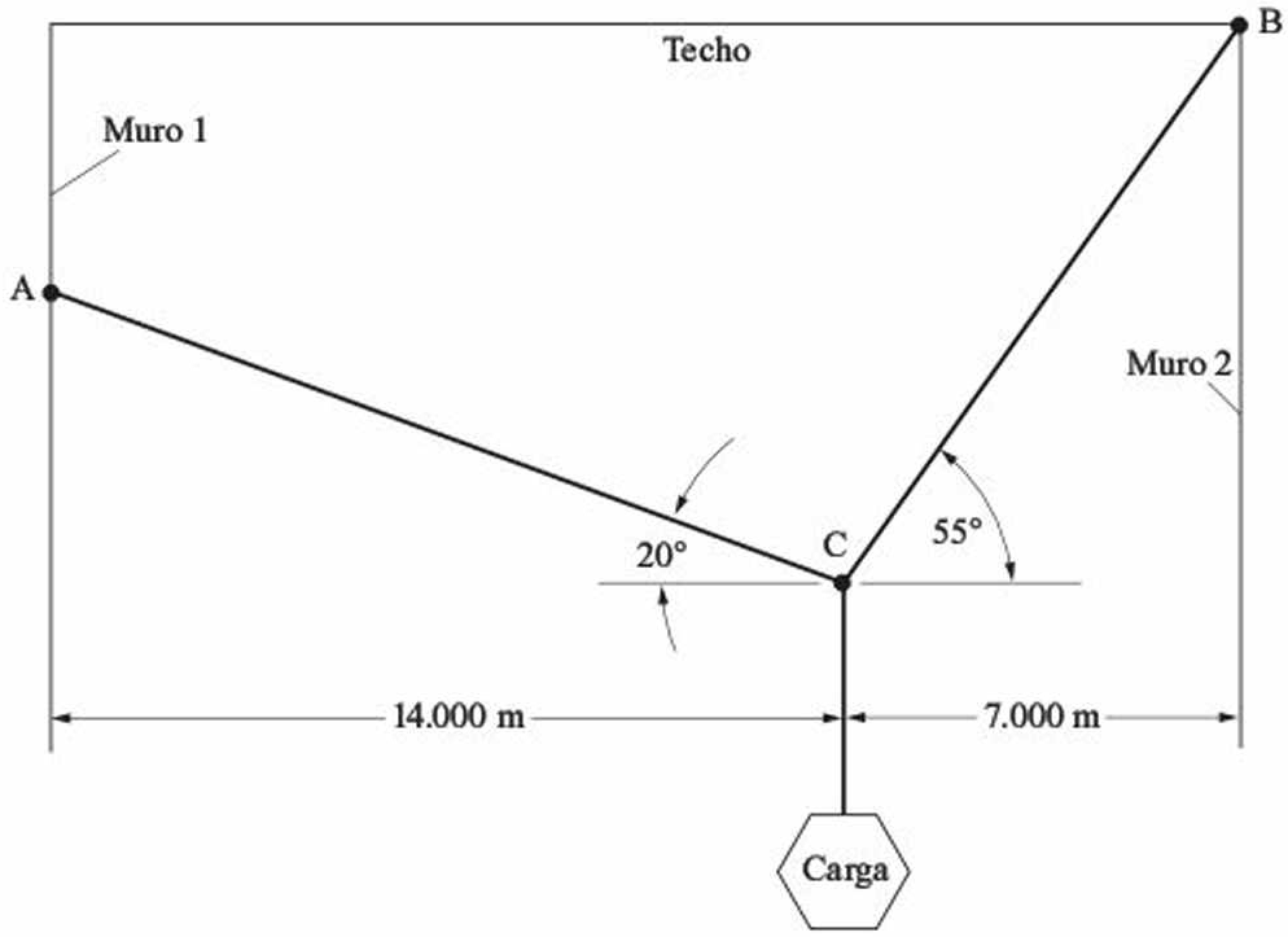


FIGURA P3–80 Sistema de soporte del problema 3–80.

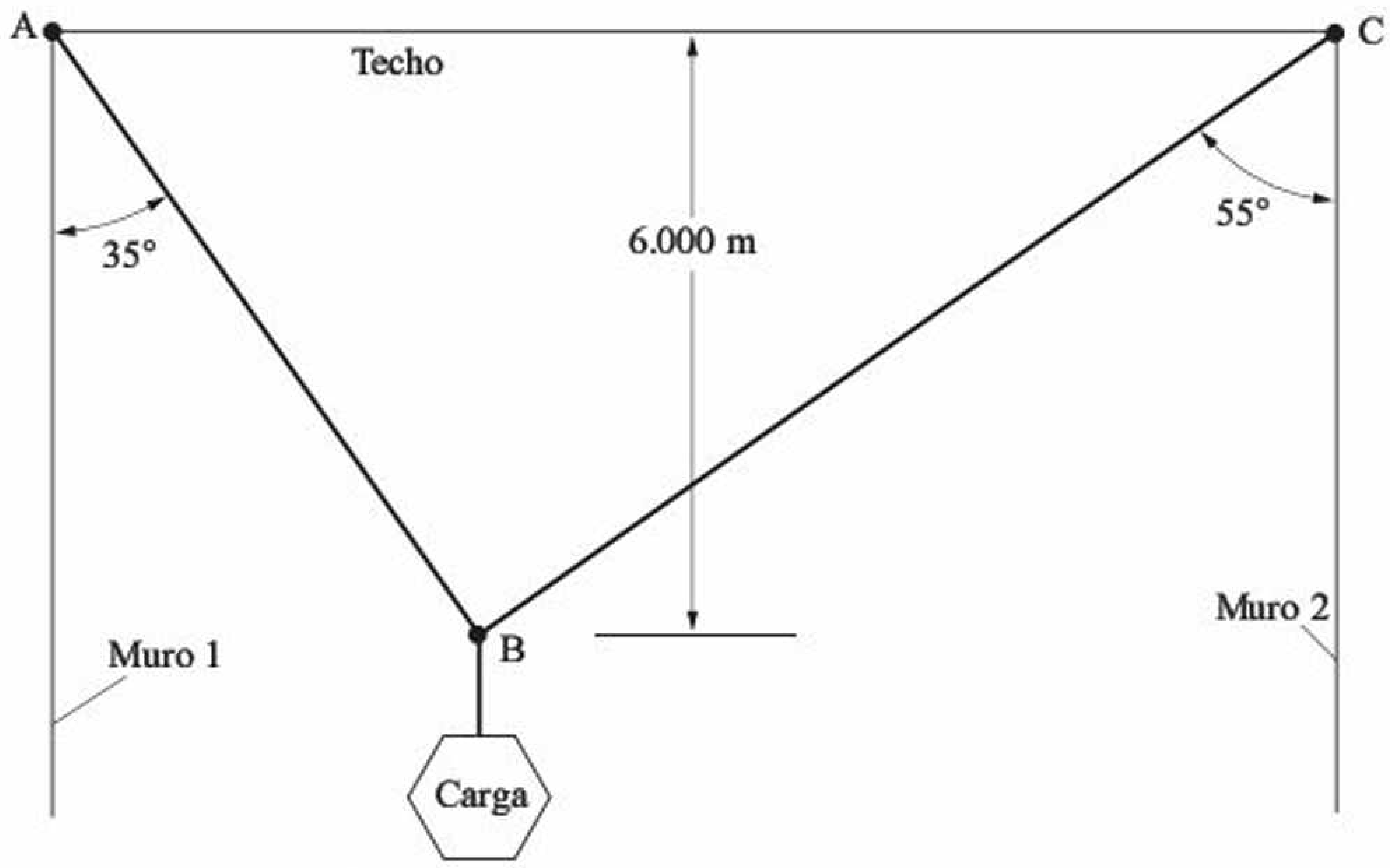


FIGURA P3–81 Sistema de soporte del problema 3–81.

3–86. Magnesio fundido ASTM AZ 63ª.

3–87. Zinc fundido ZA 12.

3–88. Acero estructural ASTM A 572 grado 65.

3–89. Hierro dúctil con templado austenítico grado 4.

3–90. Aleación de aluminio 5154–H38.

3–91 a 3–99. Una probeta para una prueba de tensión tiene una sección central recta con un espesor de 12.5 mm y un ancho de 16.0 mm. Se graban marcas de calibración a 50.0 mm una de otra cuando la probeta está en la condición descargada. Calcule la distancia entre las marcas de calibración cunando el material dado se somete a un esfuerzo de tensión axial igual al 60% de la resistencia a la cedencia listada en las tablas de apéndice o en las tablas del capítulo 2. Suponga que los materiales obedecen la ley de Hooke y que estos esfuerzos están por debajo del límite proporcional de los materiales. También calcule la fuerza requerida para crear este nivel de esfuerzo y la deformación en el área situada entre las marcas de calibración.

3–91. Plástico de nylon 66, day.

3–92. Plástico ABS de alto impacto.

3–93. Plástico de copolímero de acetal.

3–94 Elastómero de poliuretano.

3–95 Plástico fenólico.

3–96 Compuesto de vidrio/epoxy (tabla 2–13).

3–97 Compuesto de aramida/epoxy (tabla 2–13).

3–98 Grafito/epoxy, con 62% de fibra (tabla 2–13).

3–99 Compuesto de grafito/epoxy de módulo ultra alto (tabla 2–13).

Concentraciones de esfuerzo en el caso de esfuerzos axiales directos

3–100.M Una barra circular de 40.0 mm de diámetro tiene una ranura tallada a un diámetro de 35 mm. Se produce un radio completo de 3.0 mm en el fondo de la ranura. Calcule el esfuerzo máximo en la barra cuando se aplica una fuerza de tensión axial de 46 kN.

3–101.E Una barra circular de 1.50 in de diámetro tiene una ranura tallada a un diámetro de 1.25 in. Se produce un radio completo de 0.12 in en el fondo de la ranura. Calcule el esfuerzo máximo en la barra cuando se aplica una fuerza de tensión axial de 10 300 lb.

3–102.E Una barra circular de 0.40 in de diámetro tiene una ranura tallada a un diámetro de 0.35 in. Se produce un radio completo de 0.040 in en el fondo de la ranura. Calcule el esfuerzo máximo en la barra cuando se aplica una fuerza de tensión axial de 1250 lb.

3–103.M Una barra circular de 10.0 mm de diámetro tiene una ranura tallada a un diámetro de 8.0 mm. Se produce un radio completo de 1.20 mm en el fondo de la ranura. Calcule el esfuerzo máximo en la barra cuando se aplica una fuerza de tensión axial de 5500 N.

3–104.E Una chapa plana tiene un ancho de 2.50 in y un espesor de 0.400 in. Una parte de la chapa se maquinó a un ancho de 2.20 in con una fresa de 0.250 in de diámetro. Calcule el esfuerzo máximo en la chapa cuando se aplica una fuerza de tensión axial de 17 500 lb.

3–105.M Una chapa plana tiene un ancho de 60.0 mm y un espesor de 10.0 mm. Una parte de la chapa se maquinó a un ancho de 55 mm con una fresa de 6.0 mm de diámetro. Calcule el esfuerzo máximo en la chapa cuando se aplica una fuerza de tensión axial de 75 kN.

3–106.M Una chapa plana tiene un ancho de 25.0 mm y un espesor de 3.0 mm. Una parte de la chapa se maquinó a un ancho de 22.0 mm con una fresa de 5.00 mm de diámetro. Calcule el esfuerzo máximo en la chapa cuando se aplica una fuerza de tensión axial de 6800 N.

3–107.E Una chapa plana tiene un ancho de 0.80 in y un espesor de 0.120 in. Una parte de la chapa se maquinó a un ancho de 0.50 in con una fresa de 0.200 in de diámetro. Calcule el esfuerzo máximo en la chapa cuando se aplica una fuerza de tensión axial de 1800 lb.

3–108.M Una barra circular de 50.0 mm de diámetro se rebaja a un diámetro de 40 mm con una fresadora cuyo cortador tiene 6.0 mm de radio. Calcule el esfuerzo máximo en la barra cuando se aplica una fuerza axial de 230 kN.

3–109.E Una barra circular de 2.50 in de diámetro se rebaja a un diámetro de 1.75 in con una fresadora cuyo cortador tiene 0.25 in de radio. Calcule el esfuerzo máximo en la barra cuando se aplica una fuerza axial de 48 kips.

3–110.E Una barra circular de 0.38 in de diámetro se rebaja a un diámetro de 0.32 in con una fresadora cuyo cortador tiene 0.02 in de radio. Calcule el esfuerzo máximo en la barra cuando se aplica una fuerza axial de 375 lb.

3–111.M Una barra circular de 10.0 mm de diámetro se rebaja a un diámetro de 8.0 mm con una fresadora cuyo cortador tiene 0.50 mm de radio. Calcule el esfuerzo máximo en la barra cuando se aplica una fuerza axial de 1600 N.

3–112.E Una chapa plana tiene un ancho de 2.50 in y un espesor de 0.400 mm. A través de ella se perfora un barreno de 1.75 in de diámetro. Calcule el esfuerzo máximo en la chapa cuando se aplica una fuerza de tensión axial de 14 200 lb.

3–113.M Una chapa plana tiene un ancho de 60.0 mm y un espesor de 8.00 mm. A través de ella se perfora un barreno de 40.0 mm de diámetro. Calcule el esfuerzo máximo en la chapa cuando se aplica una fuerza de tensión axial de 65.0 kN.

3–114.M Una chapa plana tiene un ancho de 18.0 mm y un espesor de 2.50 mm. A través de ella se perfora un barreno de 8.00 mm de diámetro. Calcule el esfuerzo máximo en la chapa cuando se aplica una fuerza de tensión axial de 2250 N.

3–115.E Una chapa plana tiene un ancho de 0.60 in y un espesor de 0.088 in. A través de ella se perfora un barreno de 0.25 in de diámetro. Calcule el esfuerzo máximo en la chapa cuando se aplica una fuerza de tensión axial de 475 lb.

3–116.M Una barra circular de 50.0 mm de diámetro tiene un barreno de 20 mm de diámetro perforado transversalmente a través de ella. Calcule el esfuerzo máximo en la barra cuando se aplica una fuerza de tensión axial de 120 kN.

3–117.E Una barra circular de 2.0 in de diámetro tiene un barreno de 0.75 in de diámetro perforado transversalmente a través de ella. Calcule el esfuerzo máximo en la barra cuando se aplica una fuerza de tensión axial de 22 500 lb.

3–118.E Una barra circular de 0.63 in de diámetro tiene un barreno de 0.35 in de diámetro perforado transversalmente a través de ella. Calcule el esfuerzo máximo en la barra cuando se aplica una fuerza de tensión axial de 2800 lb.

3–119.M Una barra circular de 12.0 mm de diámetro tiene un barreno de 7.5 mm de diámetro perforado transversalmente a través de ella. Calcule el esfuerzo máximo en la barra cuando se aplica una fuerza de tensión axial de 7500 N.

3–120.M La figura P3–120 muestra un eje circular sometido a una carga de tensión axial repetida de 25 kN. El eje es de acero AISI 4140 OQT. Determine el factor de diseño en el barreno y el filete.

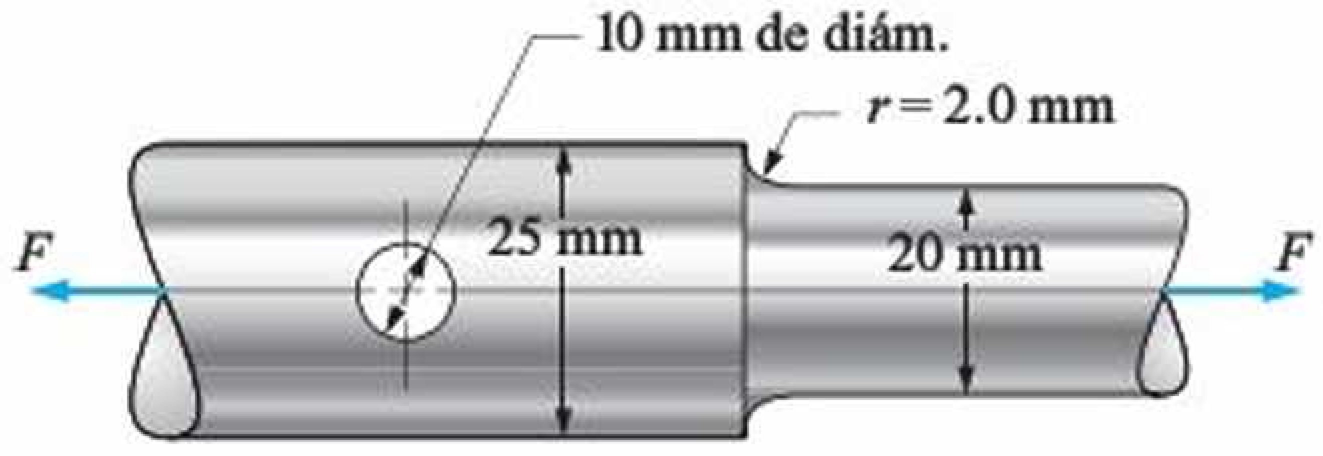


FIGURA P3–120 Eje del problema 3–120.

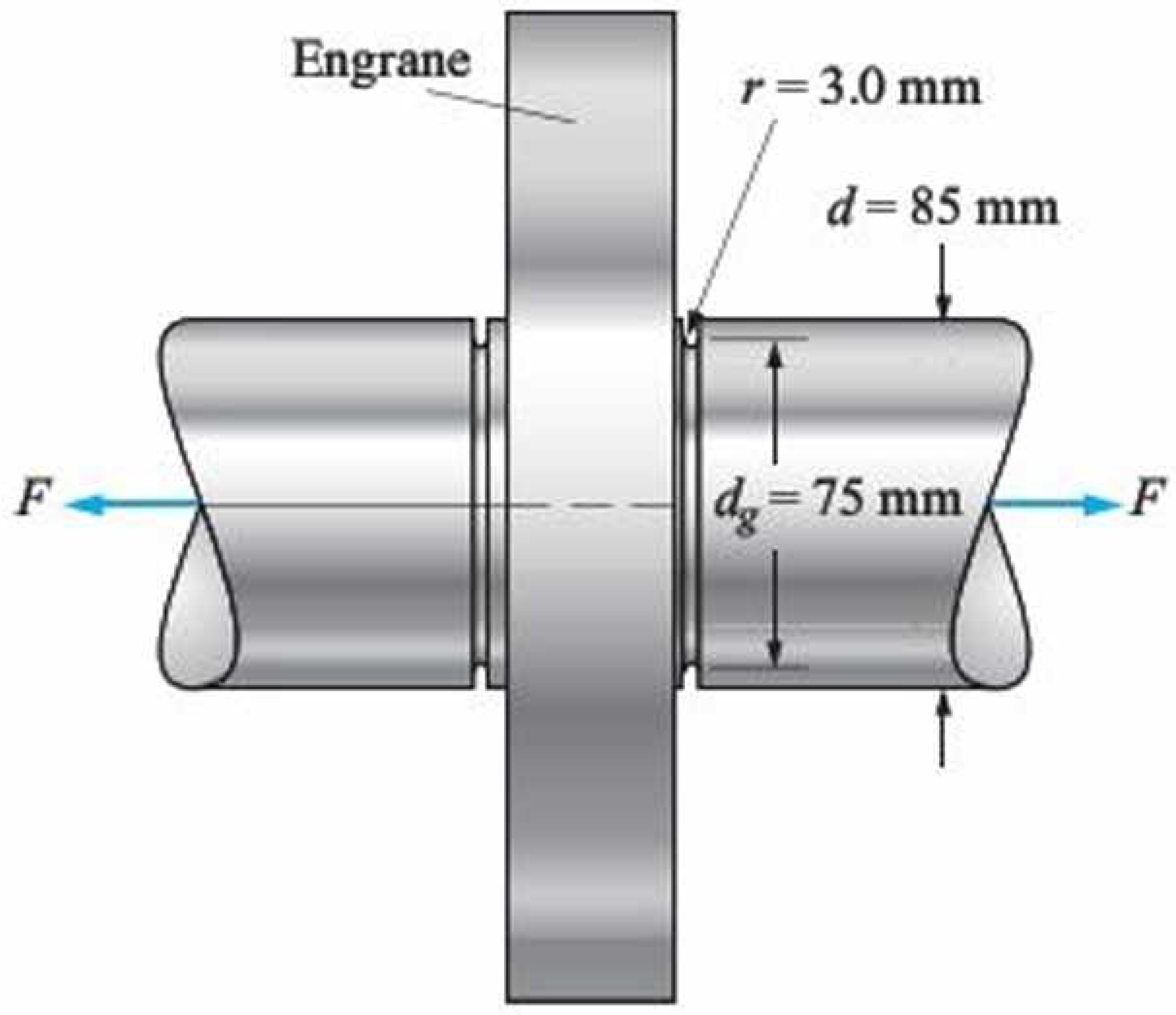


FIGURA P3–123 Eje del problema 3–123.

3–121.M El vástago de una válvula de un motor automotriz se somete a una carga de tensión axial de 900 N producida por su resorte, como se muestra en la figura P3–121. Calcule el esfuerzo máximo en el vástago donde la fuerza del resorte actúa contra el hombro.

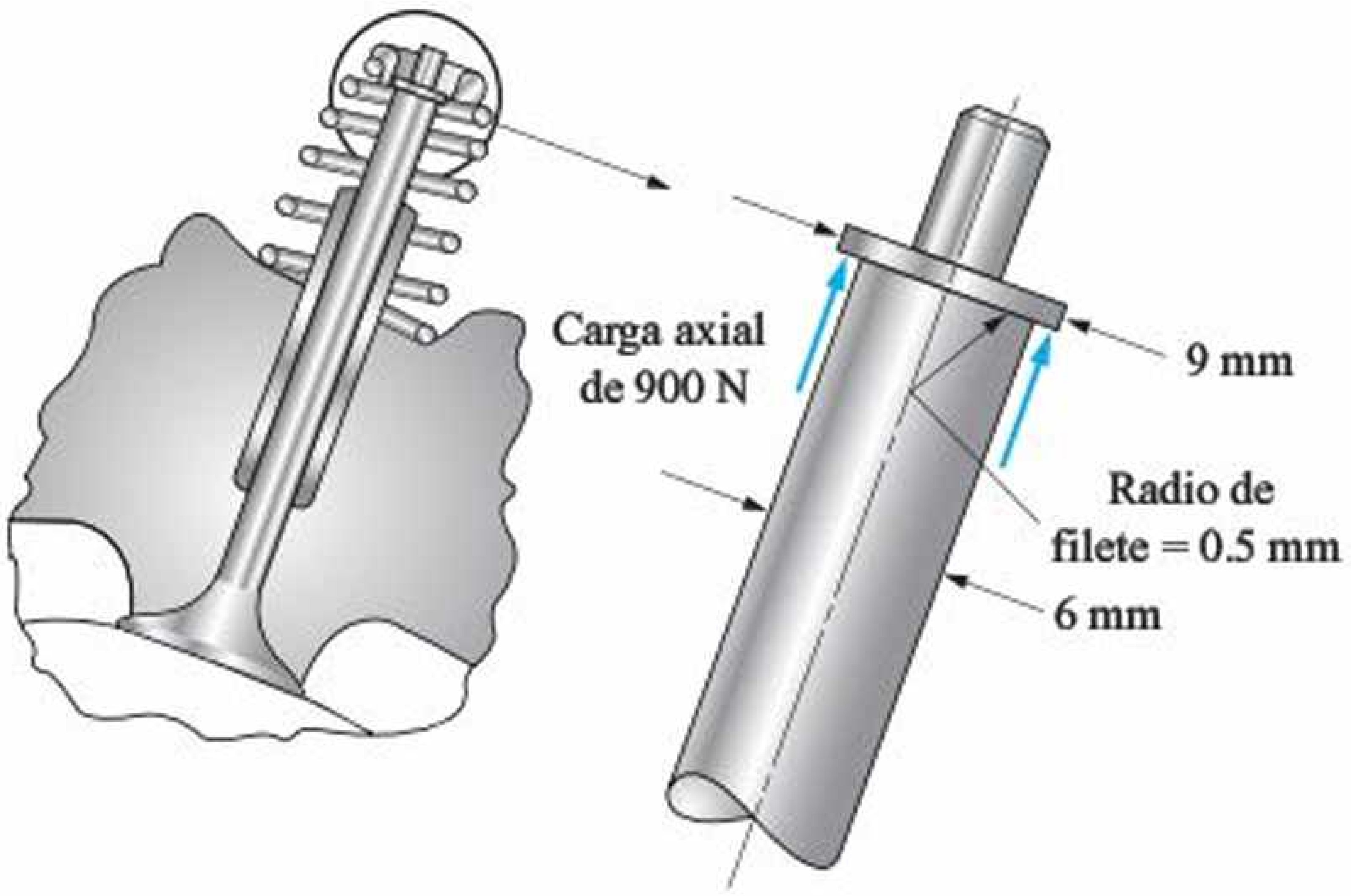


FIGURA P3–121 Vástago de válvula del problema 3–121.

3–122. Una parte de un tirante de un varillaje de dirección tiene la forma mostrada en la figura P3–122. Conforme la máquina funciona en ciclos, ejerce una carga de tensión directa repetida de 8.25 kN en el tirante. Calcule el esfuerzo de tensión máximo esperado en tirante y especifique un material conveniente del cual hacerlo.

3.123.M Un eje redondo tiene dos muescas en las cuales se insertan anillos para mantener un engrane en su posición, como se muestra en la figura P3–123. Si la flecha se somete a una fuerza de tensión axial de 36 kN, calcule el esfuerzo de tensión máximo en el eje.

3–124.E La figura P3–124 muestra el diseño propuesto para un tirante. Se conoce el diámetro mayor, $D = 1.00$ in, junto con el diámetro del barreno, $a = 0.50$ in. También se decidió que el factor de concentración de esfuerzo en el filete sea de 1.7. El diámetro menor, d, y el radio del filete, r, se tienen que especificar de modo que el esfuerzo en el filete sea igual a aquél en el barreno.

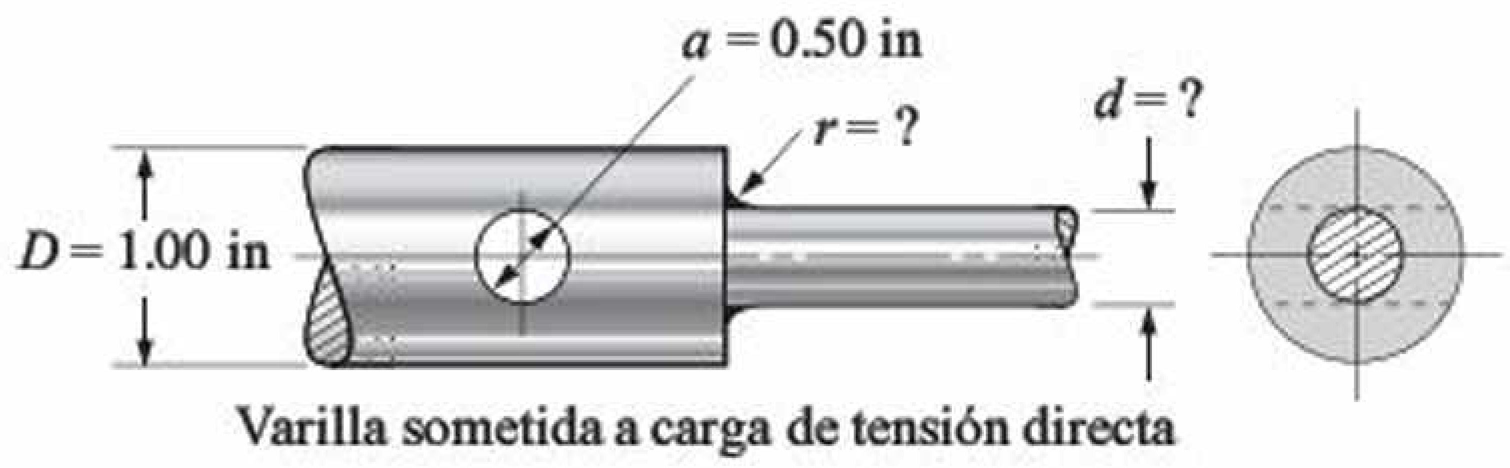


FIGURA P3–124 Varilla tensora del problema 3–124.

3–125. Un miembro de una máquina mostrado en la figura P3–125 es de acero AISI 1141 OQT 1100. Determine la fuerza de tensión axial repetida permisible que puede aplicarse. La fuerza se aplica por conducto de un pasador insertado en los barrenos extremos.

3–126. Refiérase a la figura P3−126. Especifique un material adecuado para la barra mostrada si la fuerza aplicada F es de 12.6 kN. Se espera un choque leve.

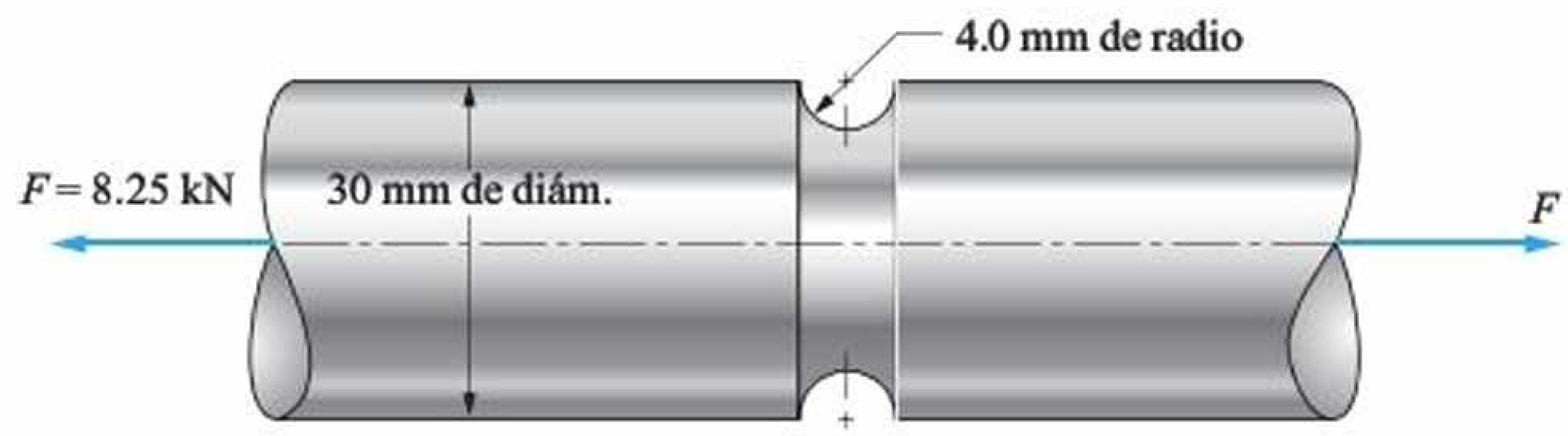


FIGURA P3–122 Parte del tirante del problema 3–122.

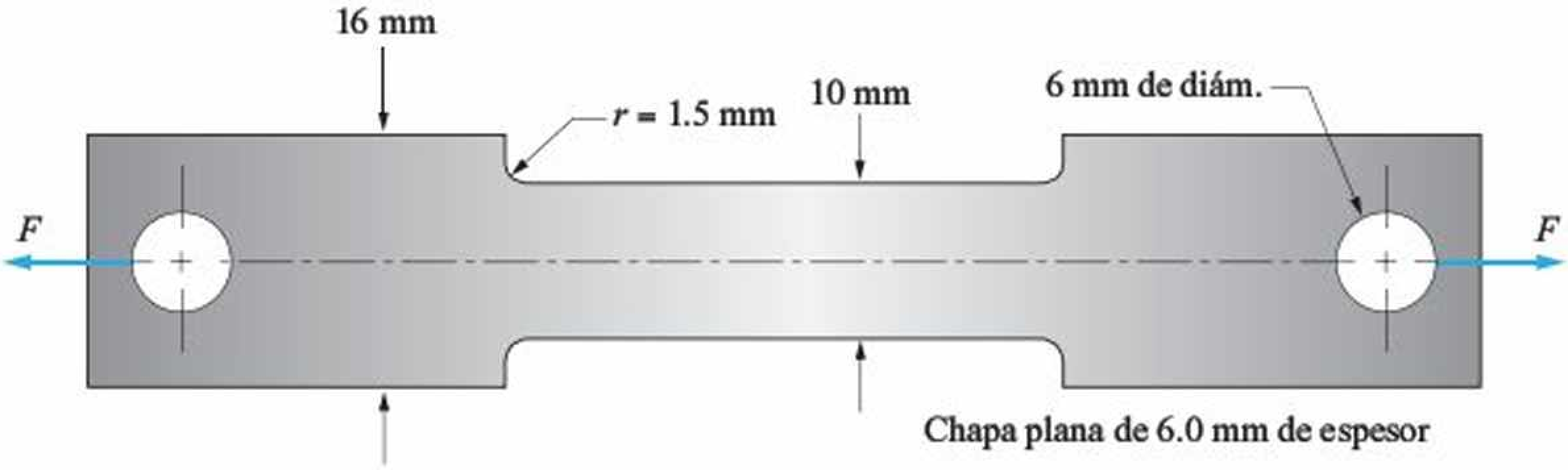


FIGURA P3–125 Miembro de la máquina del problema 3–125.

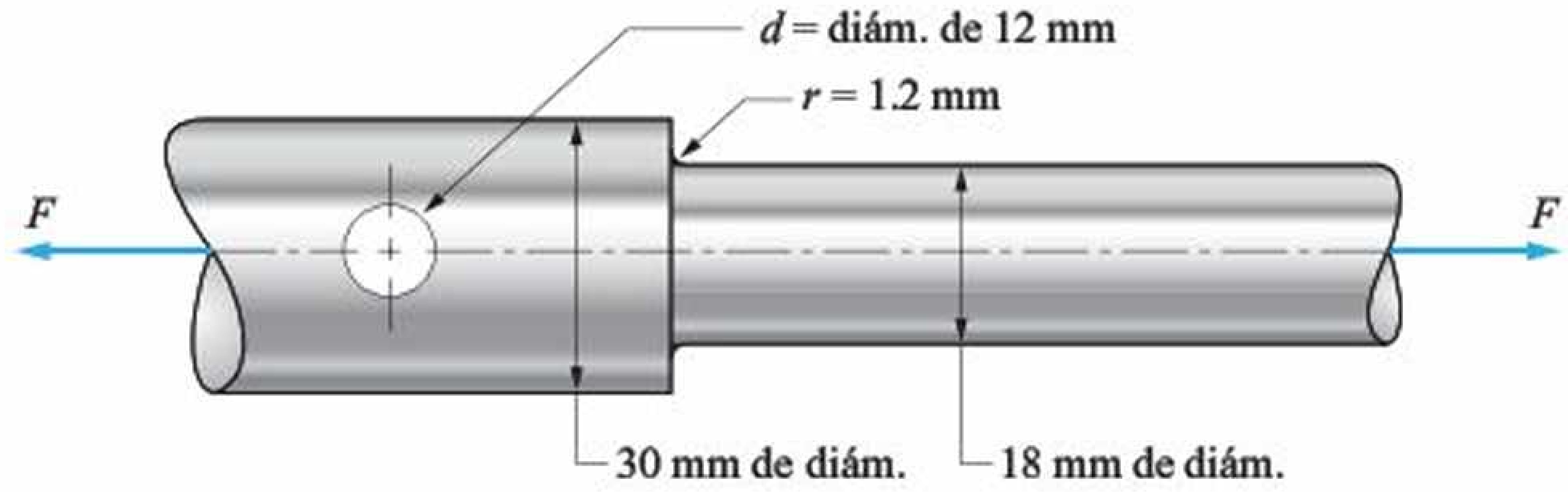


FIGURA 3–126 Barra del problema 3–126.

Esfuerzo de apoyo

3–127.E Calcule los esfuerzos de apoyo en la superficies en contacto *A*, *B*, *C* y *D* en la figura P3 − 127.

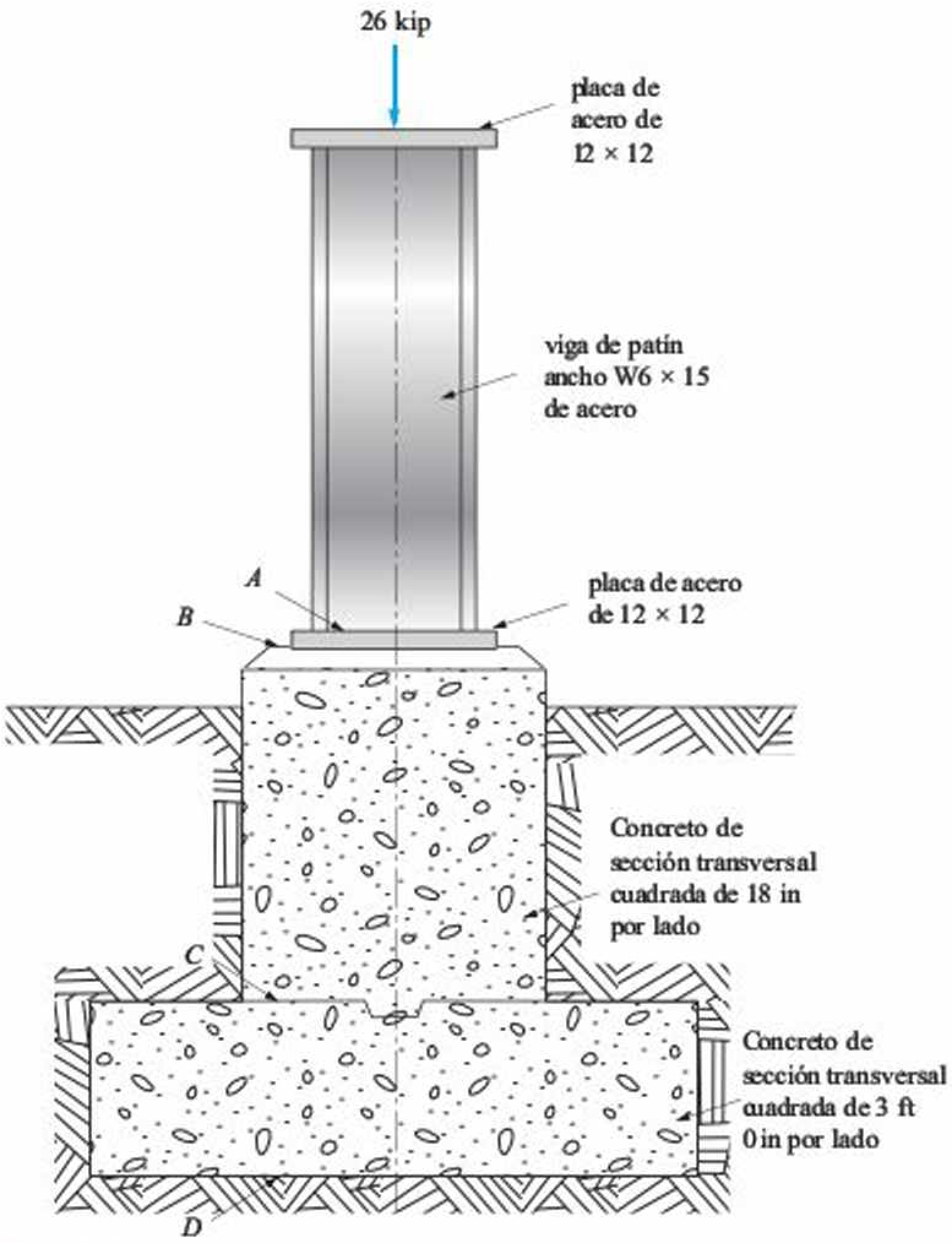


FIGURA P3–127 Cimentación de la columna del problema 3–127.

3–128. Se utiliza un tubo de acero cédula 40 de 2 in como pata de una máquina. La carga soportada por la pata es de 2350 lb.

a) Calcule el esfuerzo de apoyo en el suelo si el tubo se deja con el extremo abierto.

b) Calcule el esfuerzo de apoyo en el suelo si se suelda una placa plana en el extremo inferior del tubo con diámetro igual al diámetro externo del tubo.

3–129.E Un perno y una rondana se utilizan para fijar un tablón de madera en un cimiento de concreto como se muestra en la figura P3 − 129. En el perno se crea una fuerza de tensión

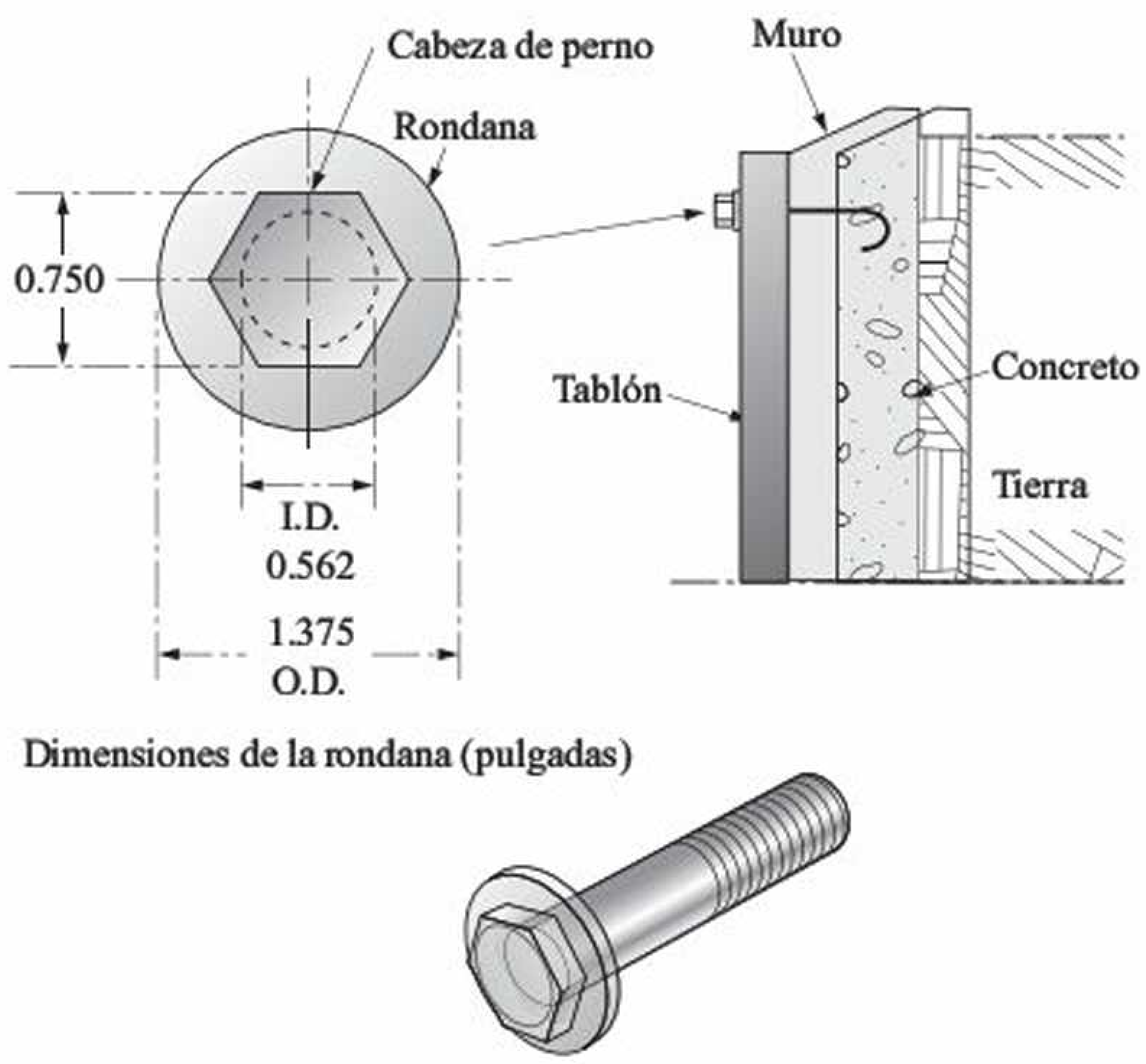


FIGURA P3–129 Perno y rondana del problema 3–129.

de 385 lb conforme se aprieta. Calcule el esfuerzo de apoyo *a*) entre la cabeza del perno y la rondana de acero y *b*) entre la rondana y el tablón.

3–130.E Con los datos del problema 3–64, calcule el esfuerzo de apoyo en el costado de la cuña.

3–131.E Con los datos del problema 3–65, calcule el esfuerzo de apoyo en el tubo en las caras de contacto con el pasador y el collar.

3–132.M Con los datos del problema 3–70, calcule el esfuerzo de apoyo en los remaches.

3–133.M Con los datos del problema 3–71, calcule el esfuerzo de apoyo en los remaches.

3–134.M El tacón del zapato de una mujer tiene la forma mostrada en la figura P3–134, si la fuerza en el tacón es de 535 N, calcule el esfuerzo de apoyo en el suelo.

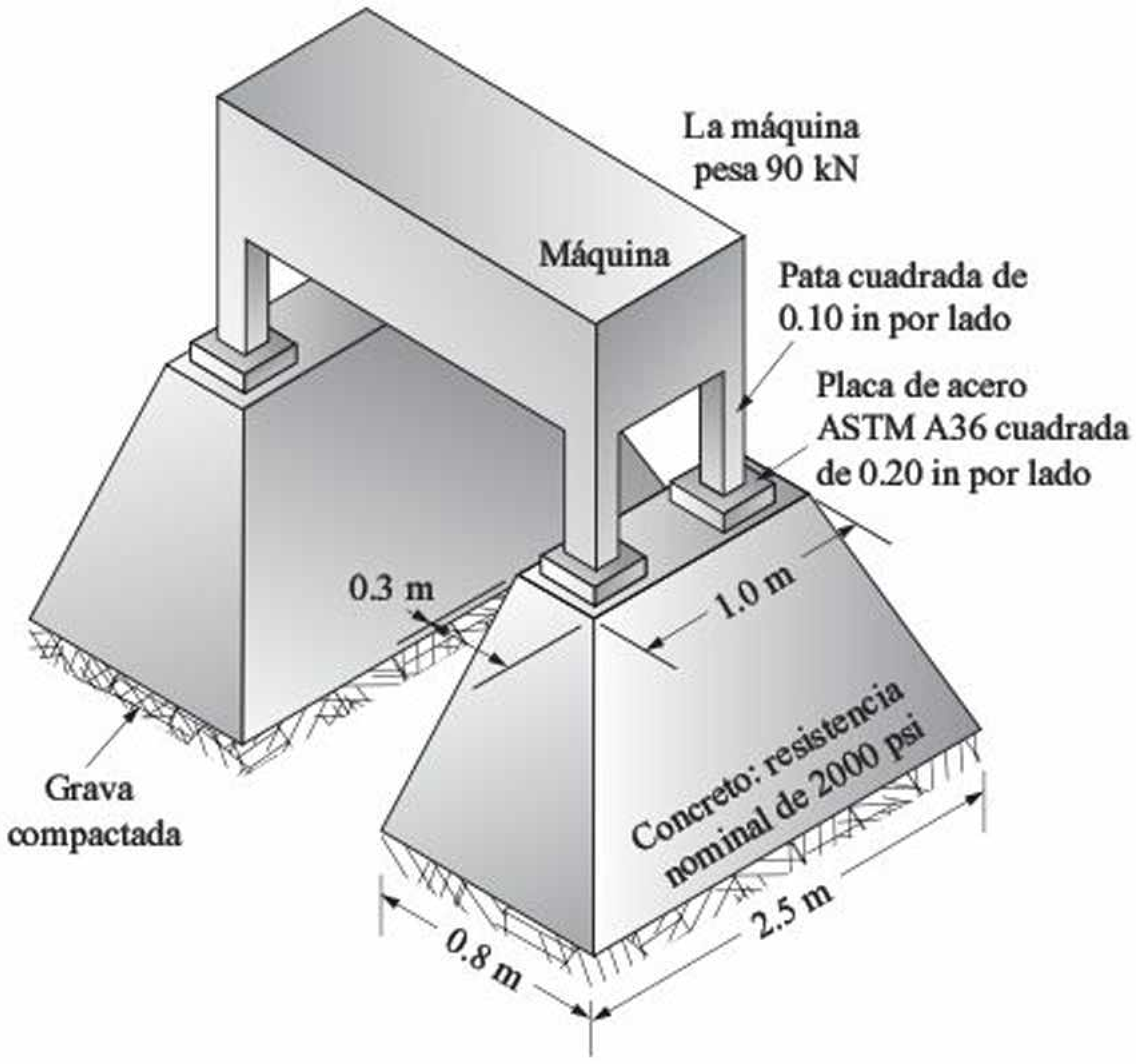


FIGURA P3–135 Apoyos de la máquina del problema 3–135.

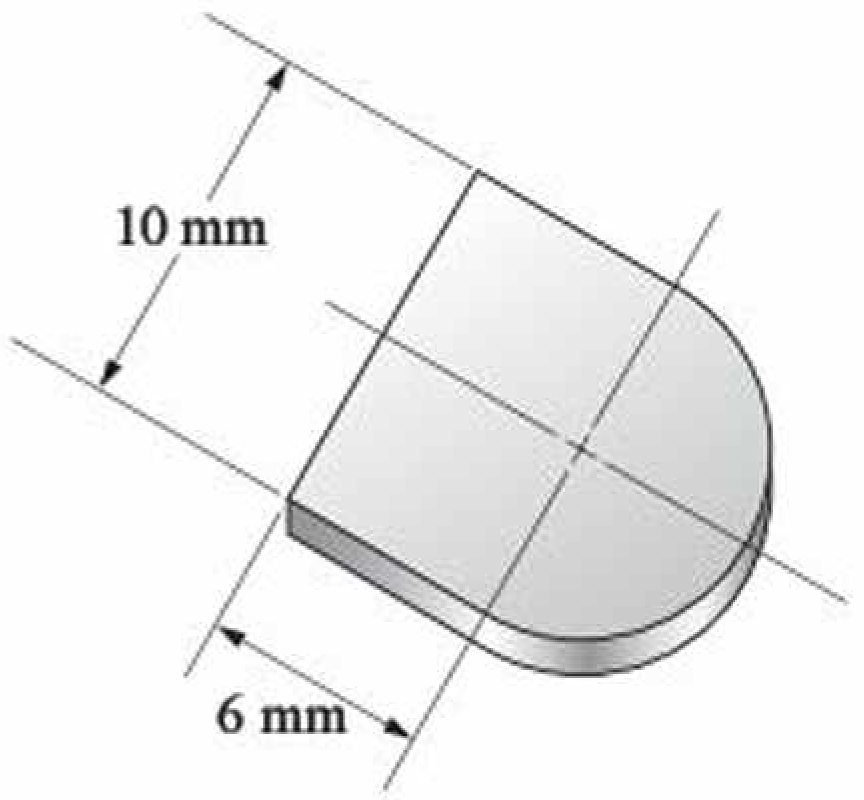


FIGURA P3–134 Tacón de zapato del problema 3–134.

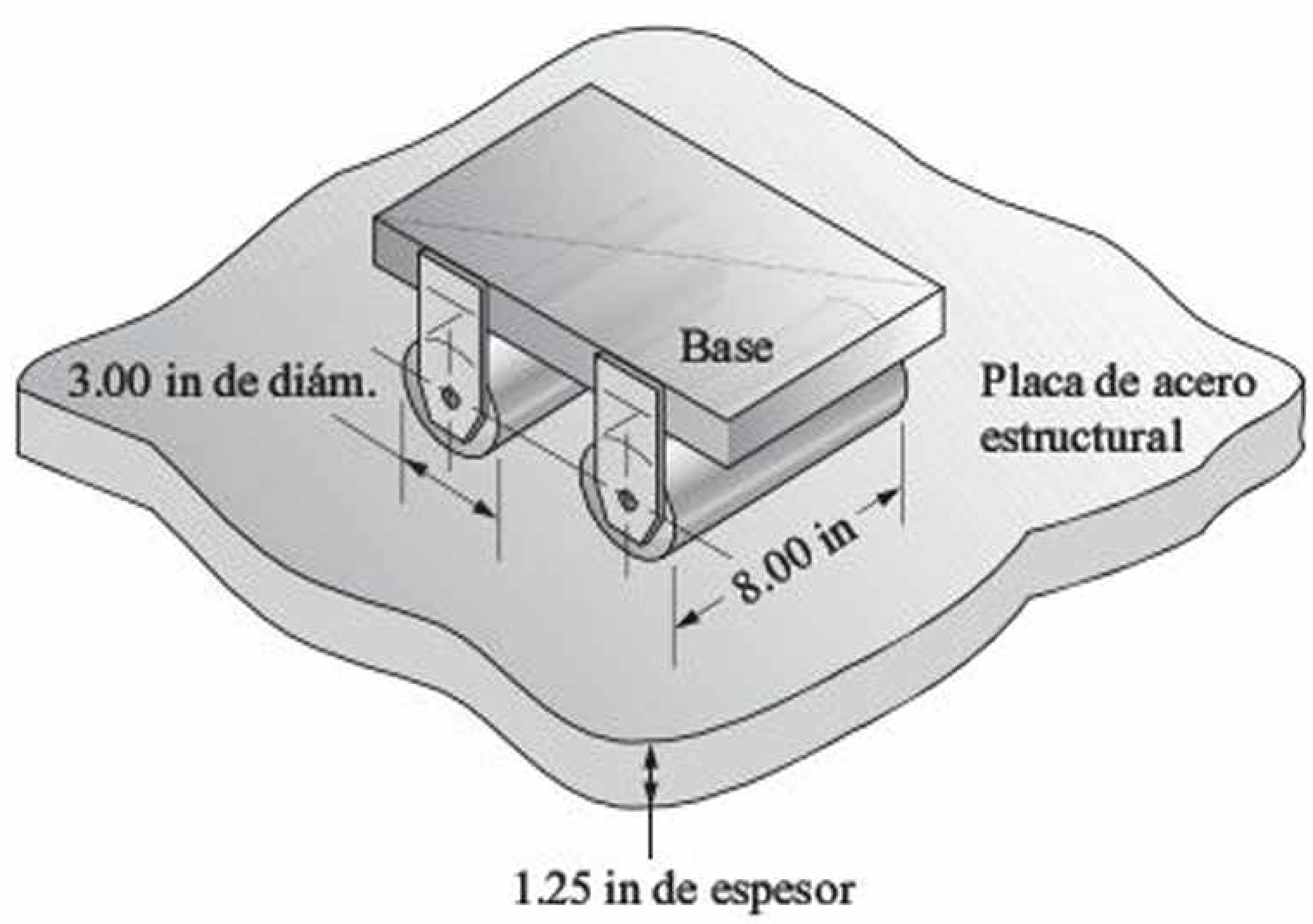


FIGURA P3–137 Base con rodillos para movimiento de maquinaria de los problemas 3–137 y 3–138.

3–135.M Una máquina pesa 90 kN y descansa en cuatro patas. Los apoyos de concreto funcionan como cimentación. La carga es simétrica, como se muestra en la figura P3–135. Evalúe el diseño propuesto con respecto a la seguridad de la placa de acero, la cimentación de concreto y el suelo de apoyo.

3–136.M La columna de un edificio tiene que soportar 160 kN. La columna tiene que estar apoyada en un cimiento de concreto cuadrado que descansa sobre roca suave; determine las dimensiones requeridas del bloque de cimentación.

3–137.E La base de una maquinaria pesada móvil se diseñó como se muestra en la figura P3–137. ¿Cuánta carga podría soportar la base apoyados en la capacidad de sustentación o apoyo de la placa de acero de 1.25 in de espesor hecha de acero estructural ASTM A36?

3–138.E Repita el problema 3 – 137 pero utilice una placa de acero de aleación de alta resistencia ASTM A242.

3–139.E La figura P3–139 muestra una diseño alternativo para la base de la maquinaria móvil descrita en el problema 3–137. Calcule la carga permisible para este diseño; descansa en *a*) acero ASTM A36 o *b*) acero ASTM A242.

3–140.E Una pesada mesa para uso industrial tiene cuatro patas hechas de tubo de acero cuadrado de $2 \times 2 \times \frac{1}{4}$. Calcule el esfuerzo de apoyo ejercido por cada pata en el suelo si se coloca una carga total de 10 000 lb sobre la mesa, de tal forma que la carga se reparta entre las cuatro patas. Sugiera entonces un rediseño para las patas si se desea mantener el esfuerzo de apoyo por debajo de 400 psi.

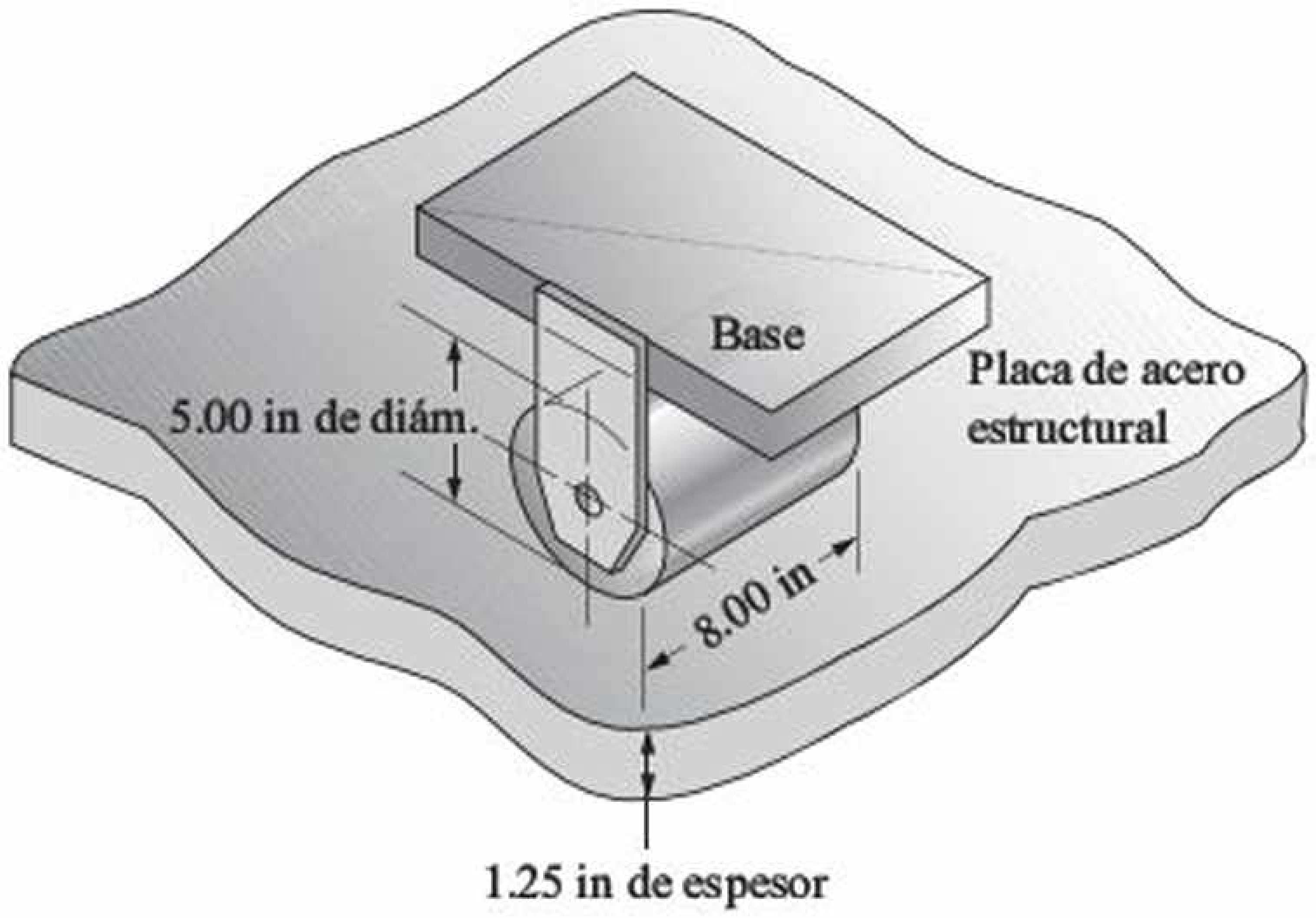


FIGURA P3–139 Base con rodillos para movimiento de maquinaria del problema 3–139.

3–141.C El extremo de una viga está apoyado en un balancín de 200 mm de radio y ancho de 150 mm. El balancín y la placa sobre la cual descansa son de acero estructural ASTM A36; especifique la reacción máxima permisible en ese extremo de la viga.

3–142 La base de una máquina especial tiene cuatro patas hechas de ángulos de acero L3 $\times$ 3 $\times$ $\frac{1}{4}$. Calcule el esfuerzo de apoyo ejercido por las patas en el suelo si el peso total de la máquina es de 28 500 lb y la carga se divide por igual entre las cuatro patas.

3–143 Rediseñe el extremo inferior de las patas de la máquina del problema 3–142 para permitirles que descansen en el suelo de concreto y para satisfacer los requerimientos de esfuerzo de apoyo mostrados en la tabla 3–7. La resistencia nominal del concreto es de 3 000 psi.

3–144 Un bloque de madera con sección transversal de 3.50 $\times$ 7.50 in se coloca sobre una cama de grava compacta. Calcule la carga de compresión máxima permisible que se puede aplicar al bloque de modo que no sobrepase la resistencia de apoyo de la grava.

3–145 Un tubo de acero cédula 40 de 4 in estándar se utiliza como columna. Calcule la carga de compresión axial máxima que puede soportar y que no sobrepase el esfuerzo de apoyo permisible sobre un piso de concreto. La resistencia nominal del concreto es de 4000 psi.

3–146 Agregue una placa de apoyo a la base de la columna descrita en el problema 3–145 para permitir una fuerza de compresión axial de por lo menos 10 veces la determinada para la columna sin placa.

Esfuerzo cortante

3–147.E El apoyo de una viga se hizo como se muestra en la figura P3–147. Determine el espesor requerido del resalto a si el esfuerzo cortante máximo tiene que ser de 6000 psi. La carga sobre el apoyo es de 21 000 lb.

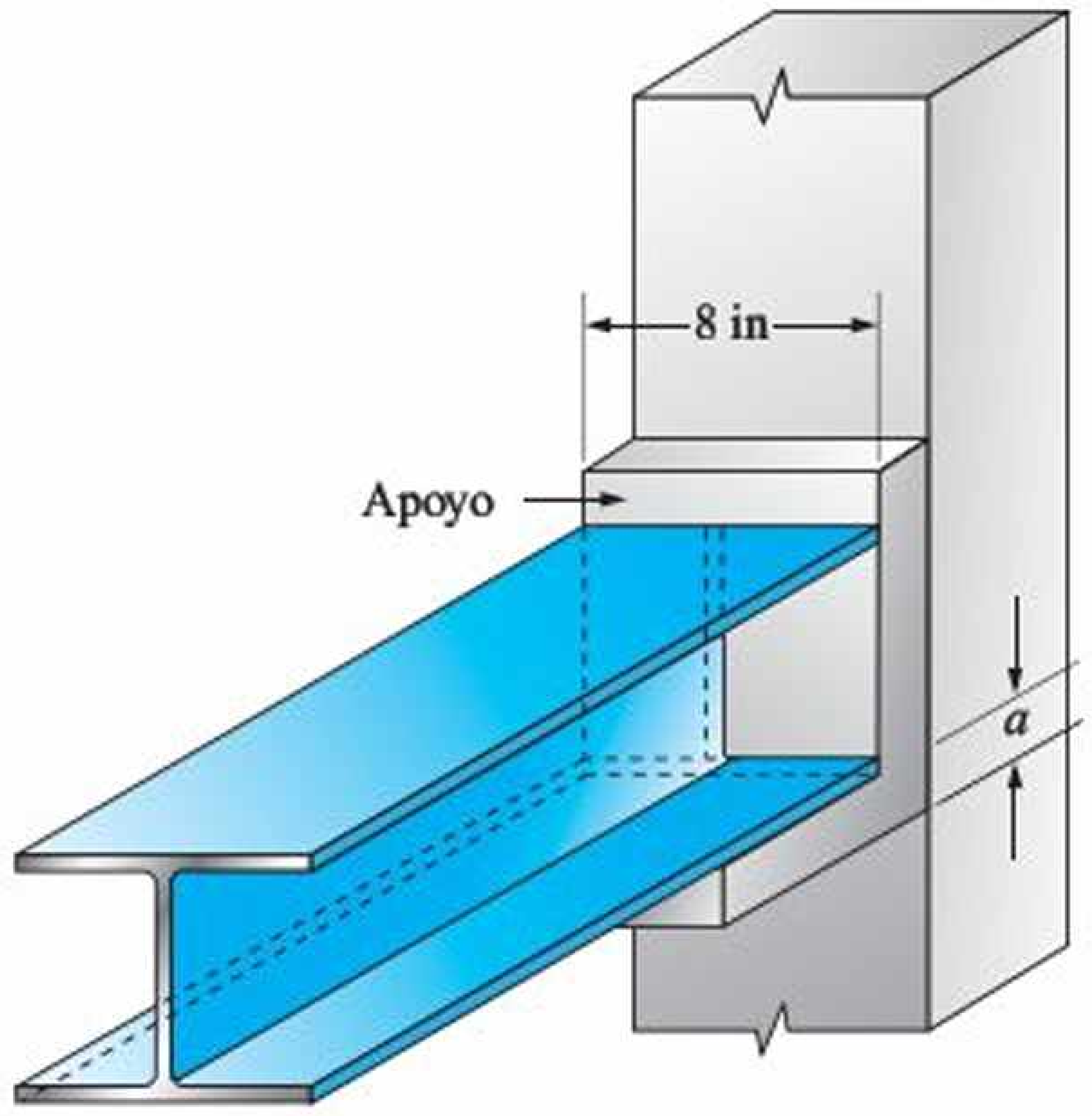


FIGURA P3–139 Base con rodillos para movimiento de maquinaria del problema 3–139.

3–148.M El brazo de control inferior de un sistema de suspensión automotriz está conectado al bastidor por medio de pasador redondo de acero de 16 mm de diámetro. Dos lados del brazo transfieren cargas del bastidor al brazo, como se ilustra en la figura P3–148. ¿Cuánta fuerza cortante podría soportar el pasador si se hace de acero AISI 1040 estirado en frío y se desea un factor de diseño de 6 basado en la resistencia a la cedencia?

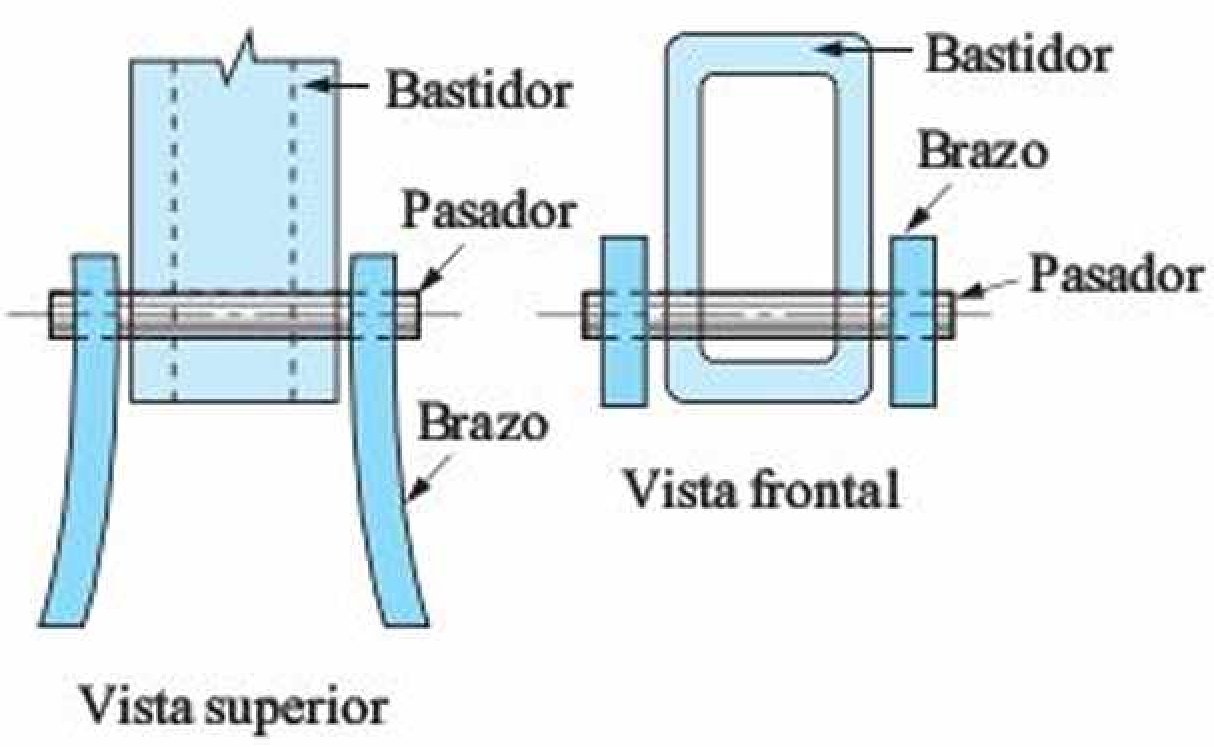


FIGURA P3–148 Pasador de sistema de suspensión automotriz del problema 3–148.

3–149.M Se utiliza una centrífuga para separar líquidos de acuerdo con sus densidades por medio de fuerza centrífuga. La figura P3–149 ilustra un brazo de la centrífuga con un cucharón en su extremo para contener el líquido. En operación, el cucharón y el líquido tienen una masa de 0.40 kg. La fuerza centrífuga tiene la magnitud en newtons de

$$F = 0.01097 \cdot m \cdot R \cdot n^2$$

donde m = masa rotatoria del cucharón y líquido (kg)
R = radio al centro de la masa (metros)
n = velocidad de rotación (rpm)

La fuerza centrífuga somete a cortante directo al pasador que sostiene el cucharón. Calcule el esfuerzo en el pasador generado por una velocidad de rotación de 3000 rpm. Luego, especifique un acero adecuado para el pasador, considerando que la carga se repite.

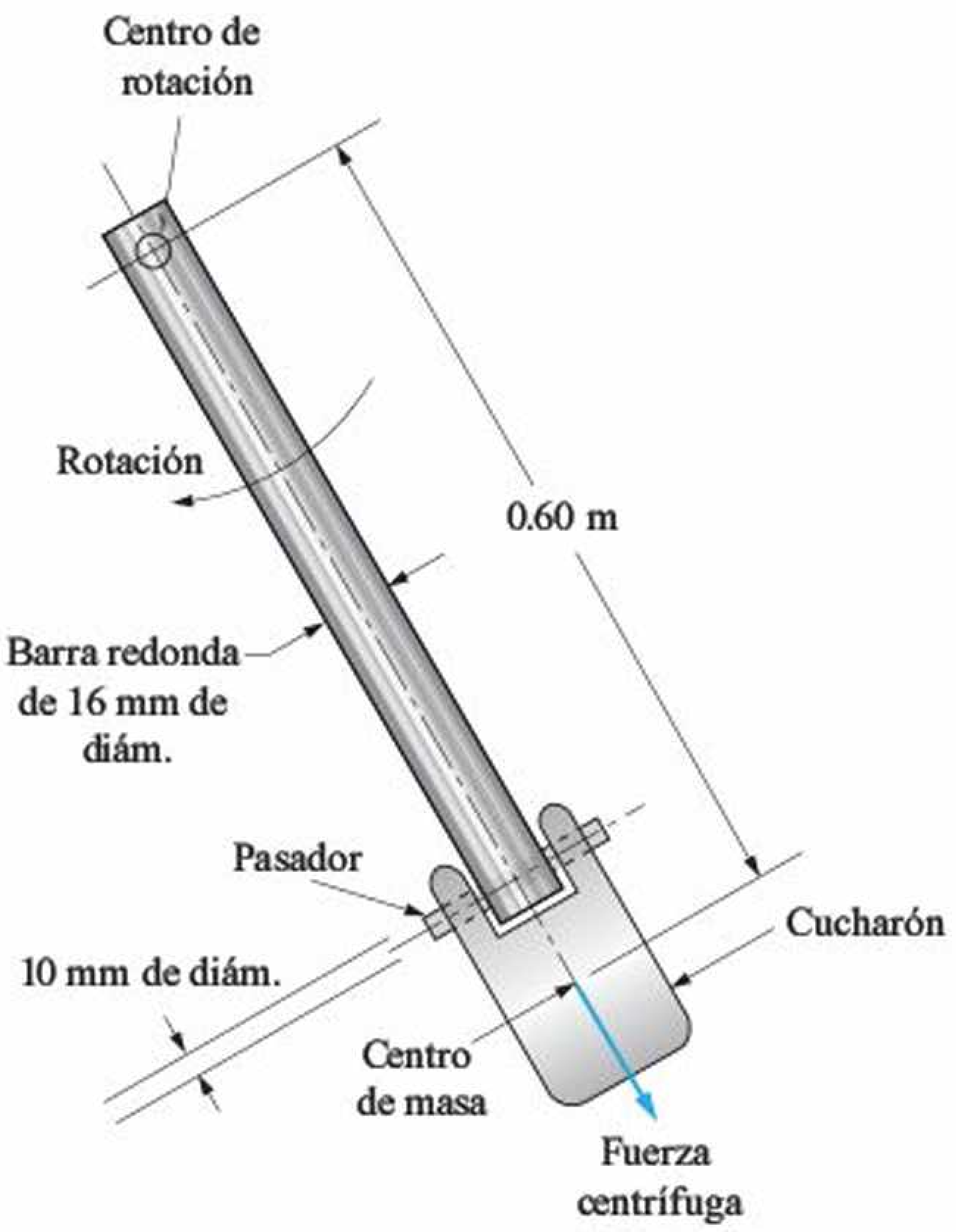


FIGURA P3–149 Centrífuga del problema 3–149.

3–150.M Se utiliza un punzón circular para perforar un agujero de 20.0 mm de diámetro en una lámina de acero AISI 1020 laminado en caliente con espesor de 8.0 mm. Calcule la fuerza requerida para sacar el bocado.

3–151.M Repita el problema 3–150, pero con aluminio 6061–T4.

3–152.M Repita el problema 3–150, pero con cobre C14500, duro.

3–153.M Repita el problema 3–150, pero con acero inoxidable AISI 430 totalmente duro.

3–154.M Determine la fuerza requerida para entresacar un bocado de la forma mostrada en la figura P3–154 de una lámina de acero AISI 1020 laminado en caliente de 5.0 mm de espesor.

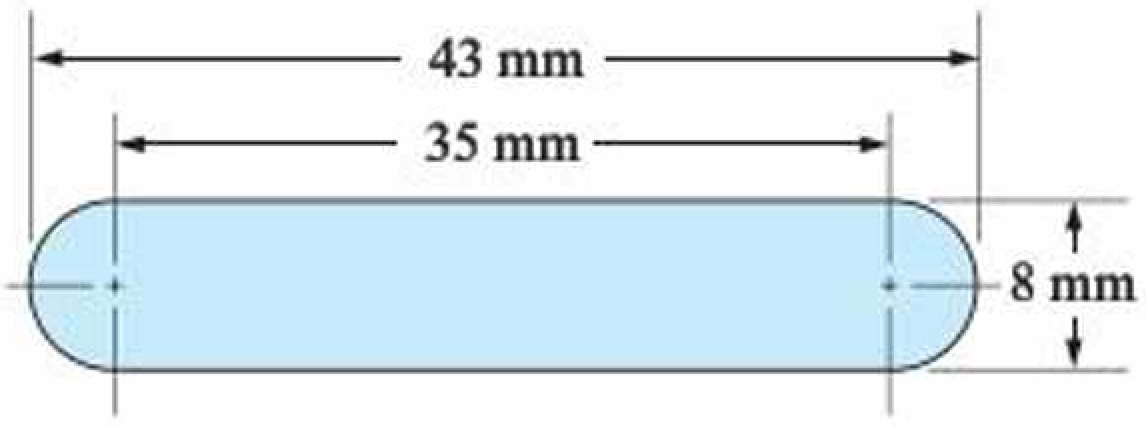


FIGURA P3–154 Forma del bocado del problema 3–154.

3–155.E Determine la fuerza requerida para entresacar un bocado de la forma mostrada en la figura P3–155 de una lámina de aluminio 3003−H18 de 0.194 in de espesor.

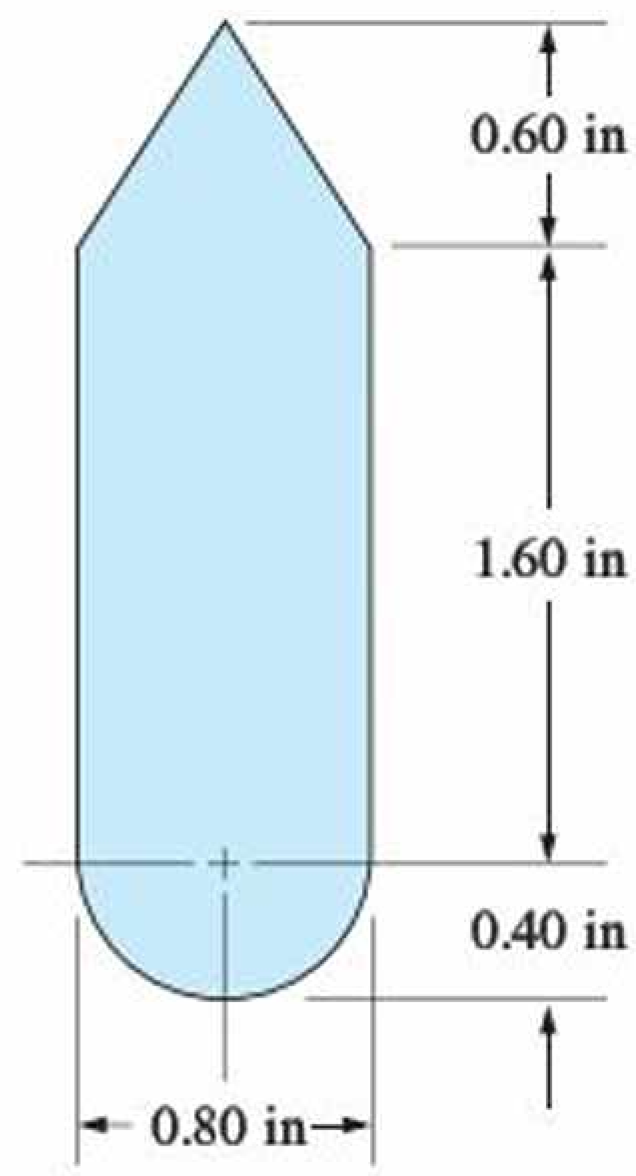


FIGURA P3–155 Centrífuga del problema 3–155.

3–156.E Se talla una muesca en una pieza de madera como se muestra en la figura P3–156 para soportar una carga externa de 1800 lb. Calcule el esfuerzo cortante en la madera. ¿Es segura la muesca? (Vea el apéndice A–19.)

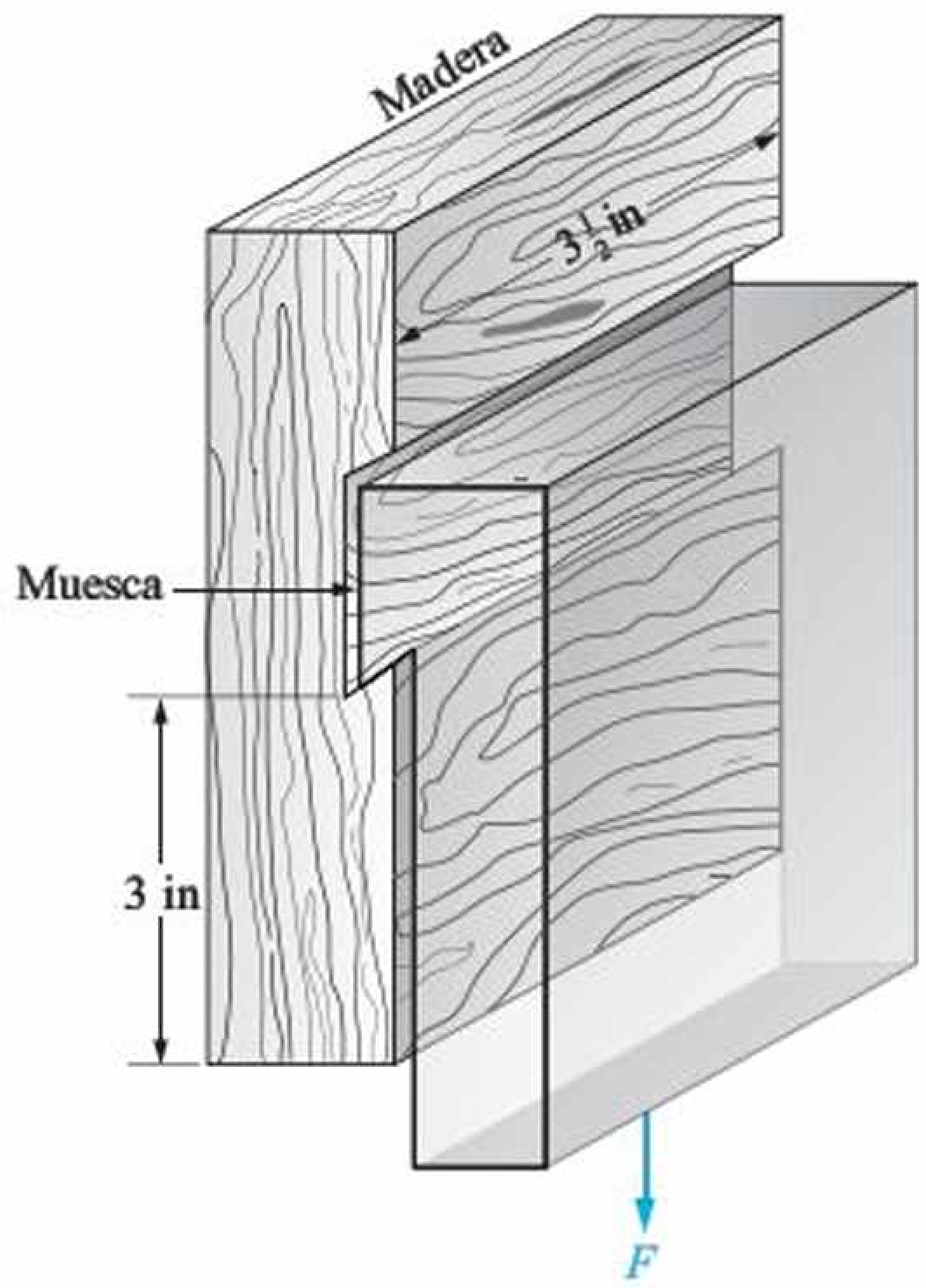


FIGURA P3–156 Bloque de madera muescado cargado a cortante en el problema 3–156.

3–157.E Calcule la fuerza requerida para recortar un borde recto de una lámina de acero AISI 1040 estirado en frío con espesor de 0.105 in. La longitud del borde es de 7.50 in.

3–158.E Repita el problema E–157 con acero AISI 5160 OQT 700.

3–159.E Repita el problema E–157 con acero inoxidable 301 totalmente duro.

3–160.E Repita el problema E–157 con latón C36000, duro.

3–161.E Repita el problema E–157 con aluminio 5154–H32.

3–162.M Para la palanca mostrada en la figura P3–162 llamado *mecanismo de campana*, calcule el diámetro requerido del pasador A si la carga se repite y el pasador es de cobre al berilio C17200, duro. Las cargas se repiten muchas veces.

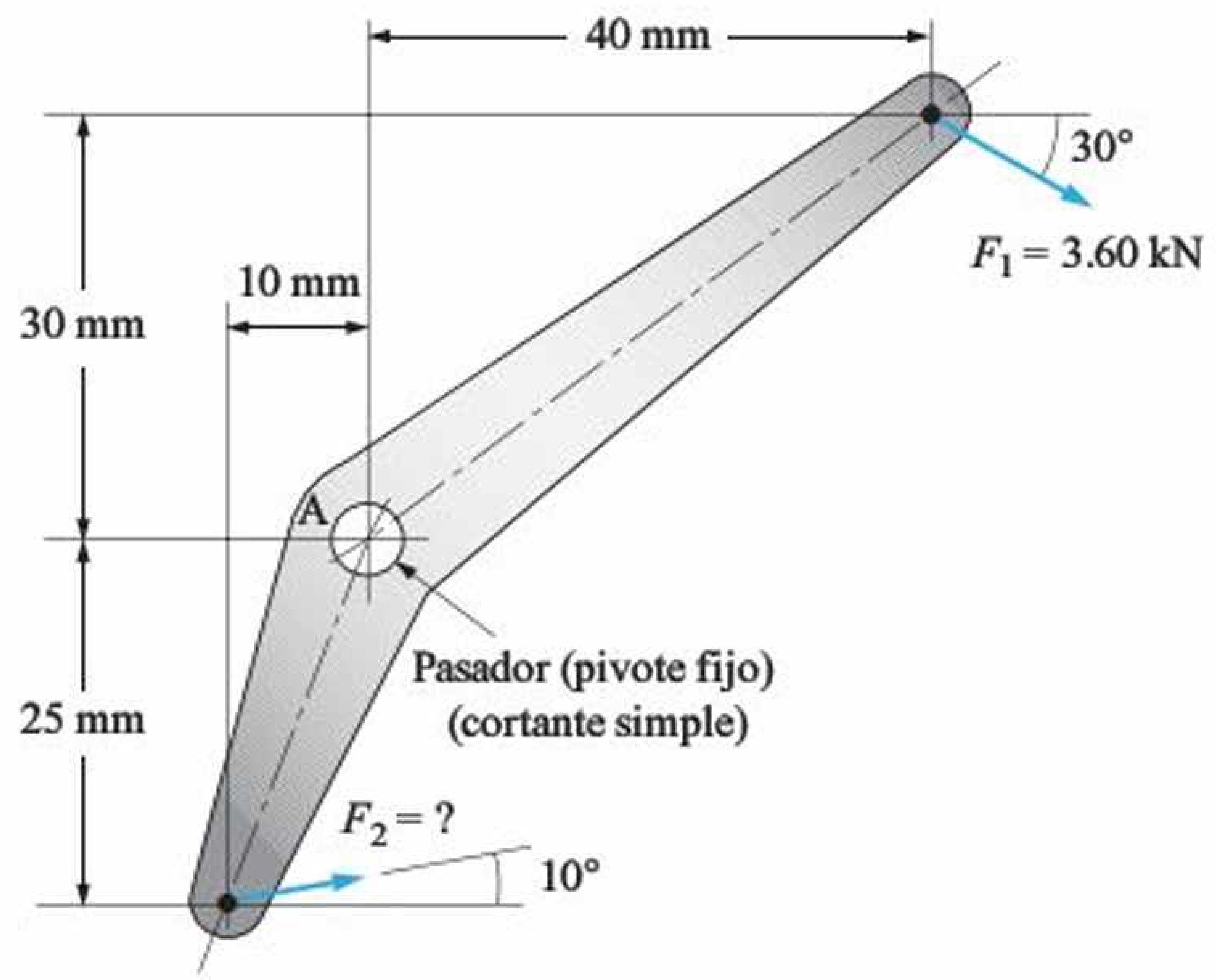


FIGURA P3–162 Mecanismo de campana del problema 3–162.

3–163.M Para la estructura mostrada en la figura P3–163, determine el diámetro requerido de cada pasador de acero AISI 1020 estirado en frío. Cada pasador está sometido a cortante doble y la carga es estática.

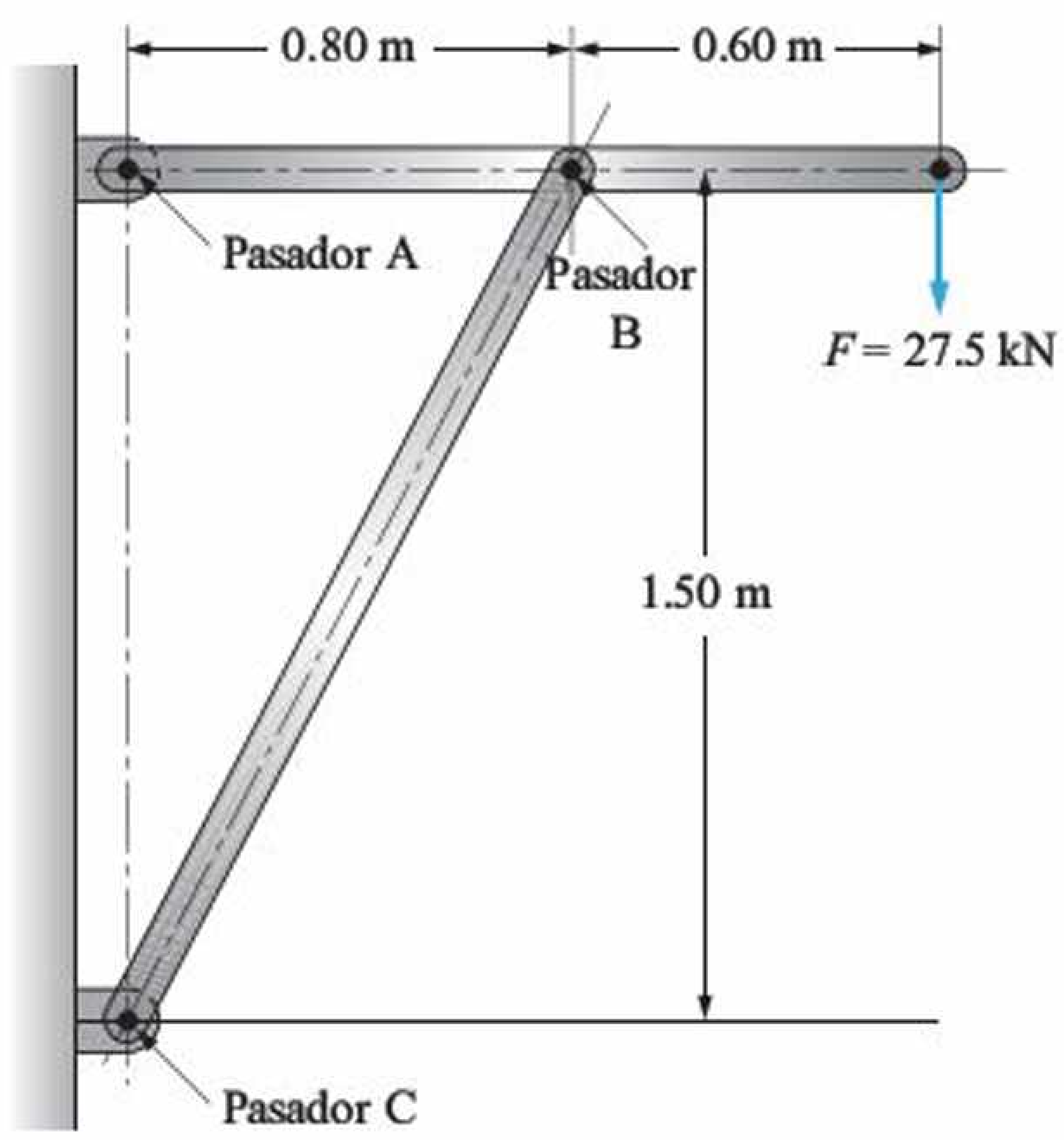


FIGURA P3–163 Estructura conectada mediante conexiones de pasador del problema 3–163.

3–164.M Para la estructura mostrada en la figura P3 164, determine el diámetro requerido de cada pasador de acero estructural de baja aleación de columbio–vanadio de alta resistencia ASTM A572, grado 50. Cada pasador está sometido a doble cortante y la carga es estática.

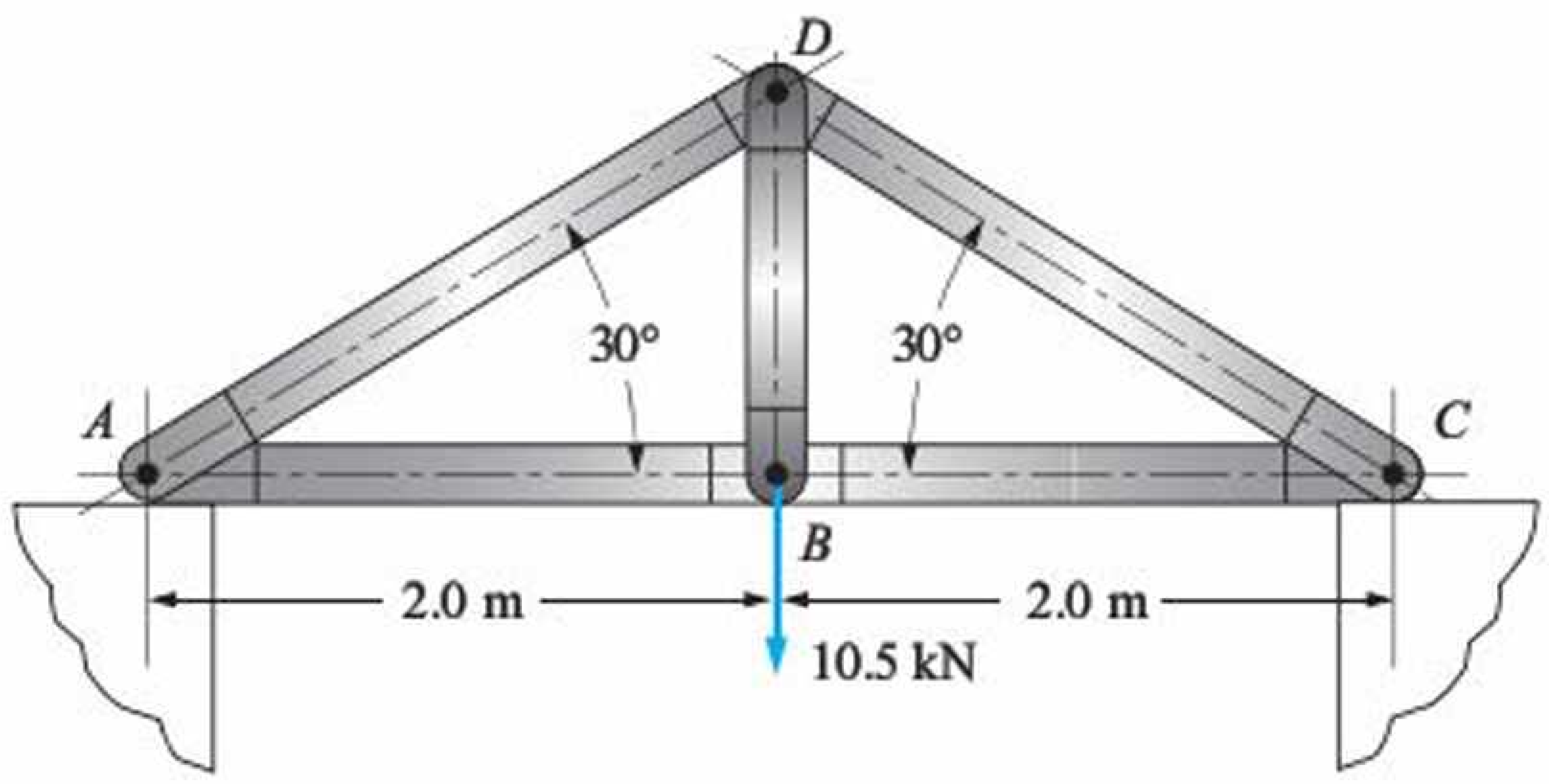


FIGURA P3–164 Armadura del problema 3–164.

3–165.E Una palanca alzaprima como la mostrada en la figura P3–165 se utiliza para generar una gran fuerza mecánica para alzar máquinas pesadas. Un operario puede ejercer una fuerza de 280 lb en el mango. Calcule la fuerza de levantamiento y el esfuerzo cortante en el eje de la rueda.

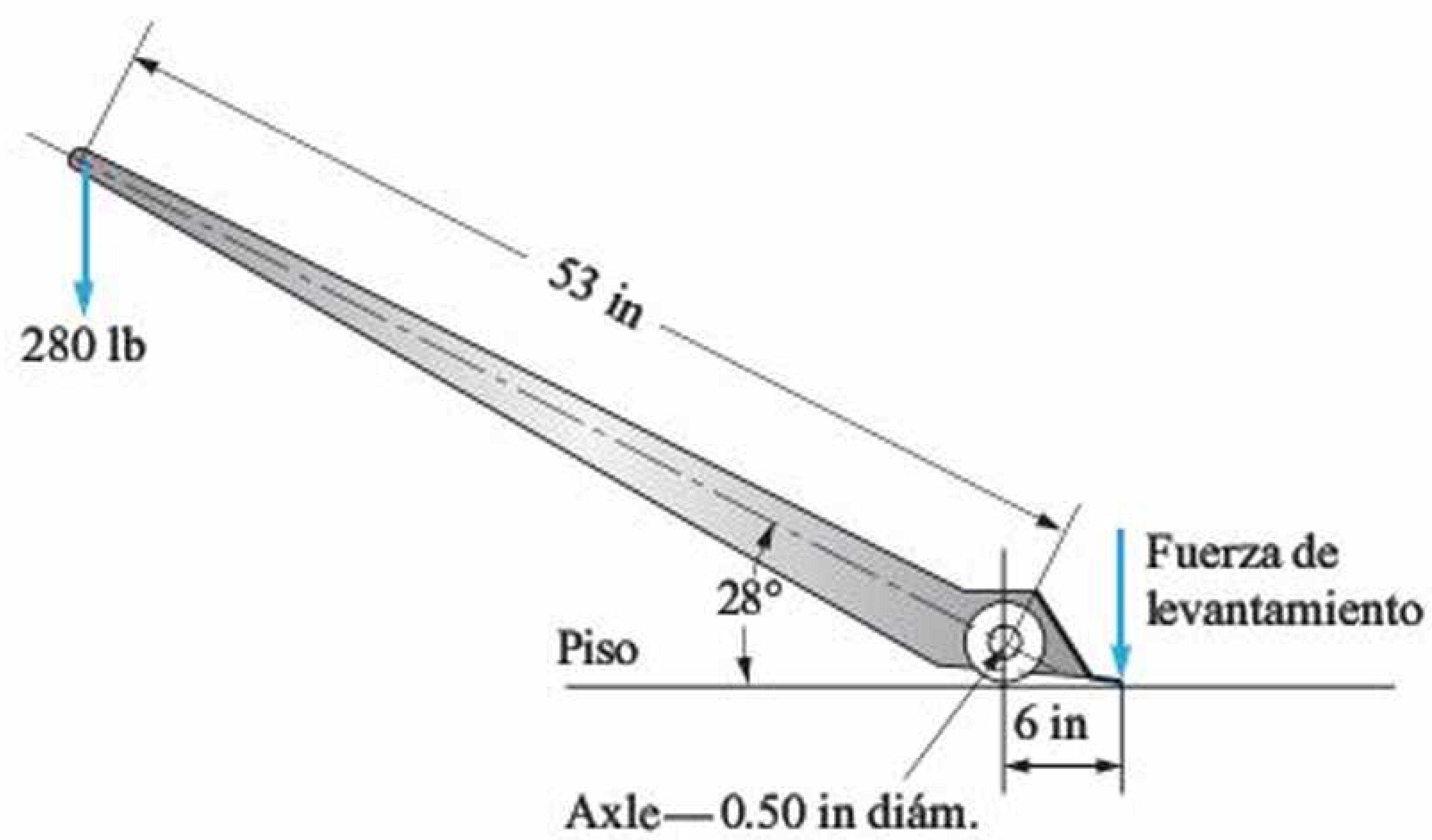


FIGURA P3–165 Palanca del problema 3–165.

3–166. La figura P3–166 muestra un fleje de acero con agujeros y ranuras entresacados de él. El fleje también se entresacó de una lámina más grande de aleación de aluminio 3003–H12, de 1.40 mm de espesor. Calcule la fuerza total requerida para producir la pieza si el recorte se realiza en un golpe.

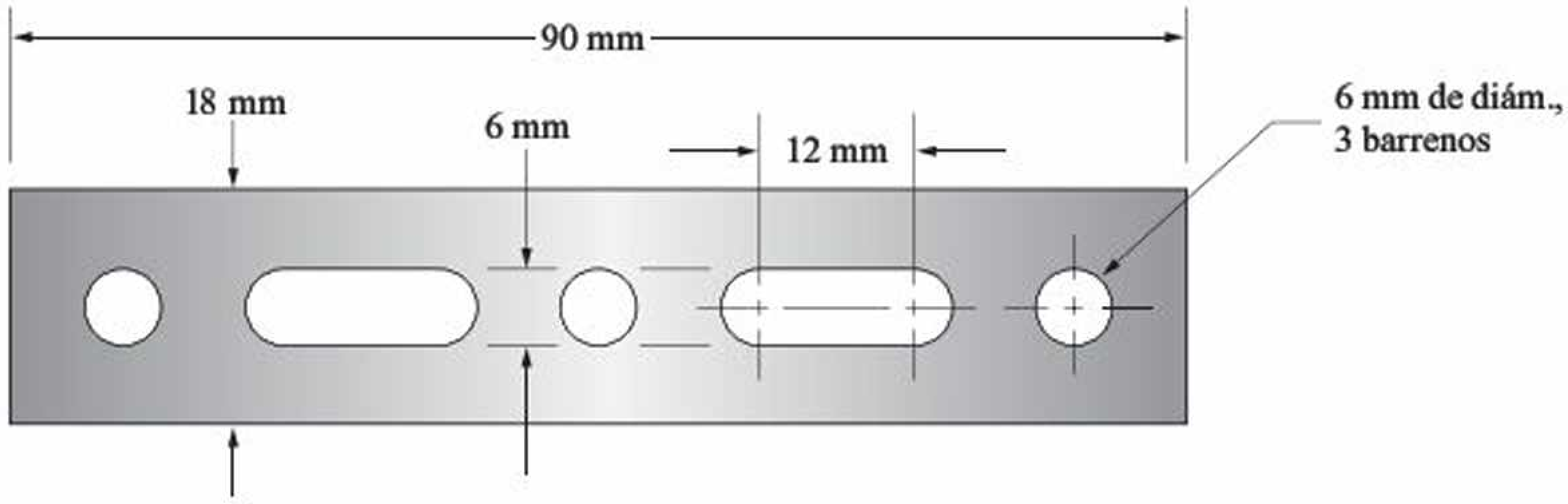


FIGURA P3–166 Fleje de acero del problema 3–166.

3–167.E La figura P3–167 muestra un yunque para un martillo de impacto retenido en un dispositivo por un pasador circular. Si la fuerza tiene que ser de 500 lb, especifique un diámetro adecuado para el pasador de acero AISI 1040 WQT 900.

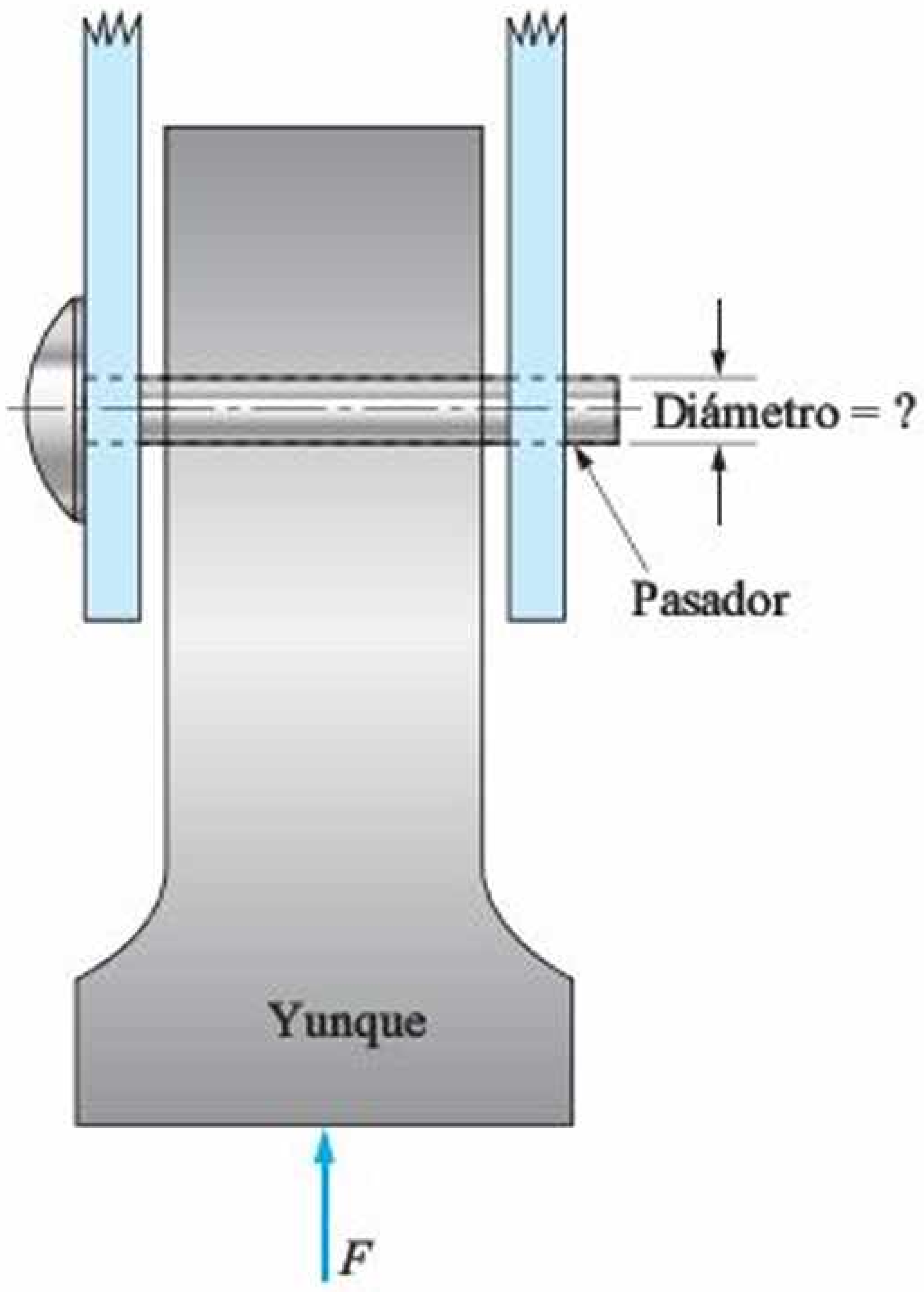


FIGURA P3–167 Martillo de impacto del problema 3–167.

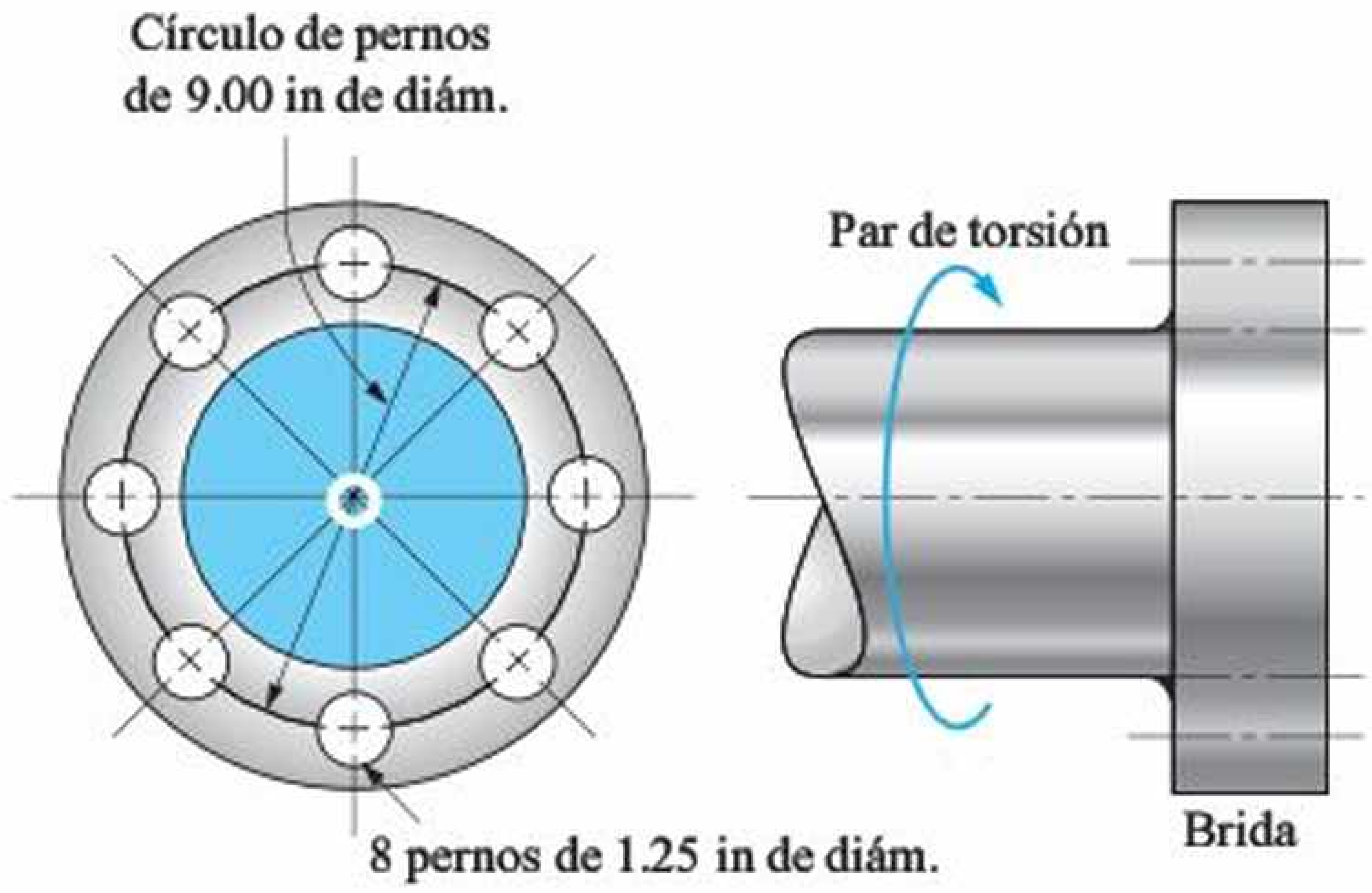


FIGURA P3–168 Acoplamiento mediante brida del problema 3–168.

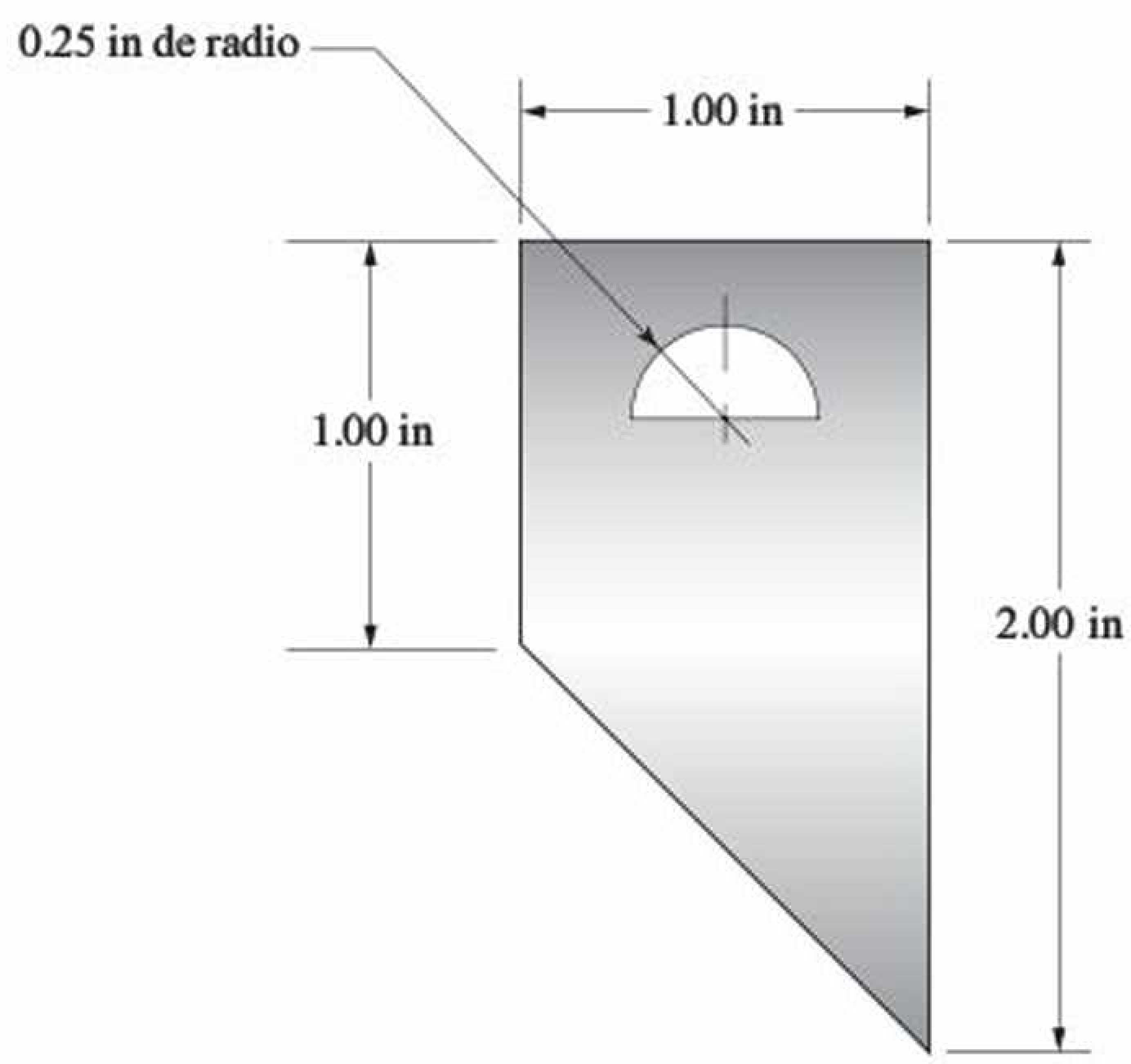


FIGURA P3–169 Sacabocados del punzón del problema 3–169.

3–168.E La figura P3–168 muestra una brida de acero forjada integralmente con el eje, el cual tiene que someterse a torsión. Se utilizan ocho pernos para acoplar la brida a otra. Suponga que cada perno soporta una carga igual. Calcule el par de torsión máximo permisible en el acoplamiento si el esfuerzo cortante en los pernos no debe exceder de 6000 psi.

3–169. Calcule la fuerza requerida para entresacar por completo la forma mostrada en la figura P3–169 de una gran lámina de acero de 0.085 in de espesor. El material es acero AISI 1020 estirado en frío.

3–170. Calcule la fuerza requerida para entresacar la forma mostrada en la figura P3–170 de una lámina más grande de aluminio 6061–T4 con espesor de 0.10 in.

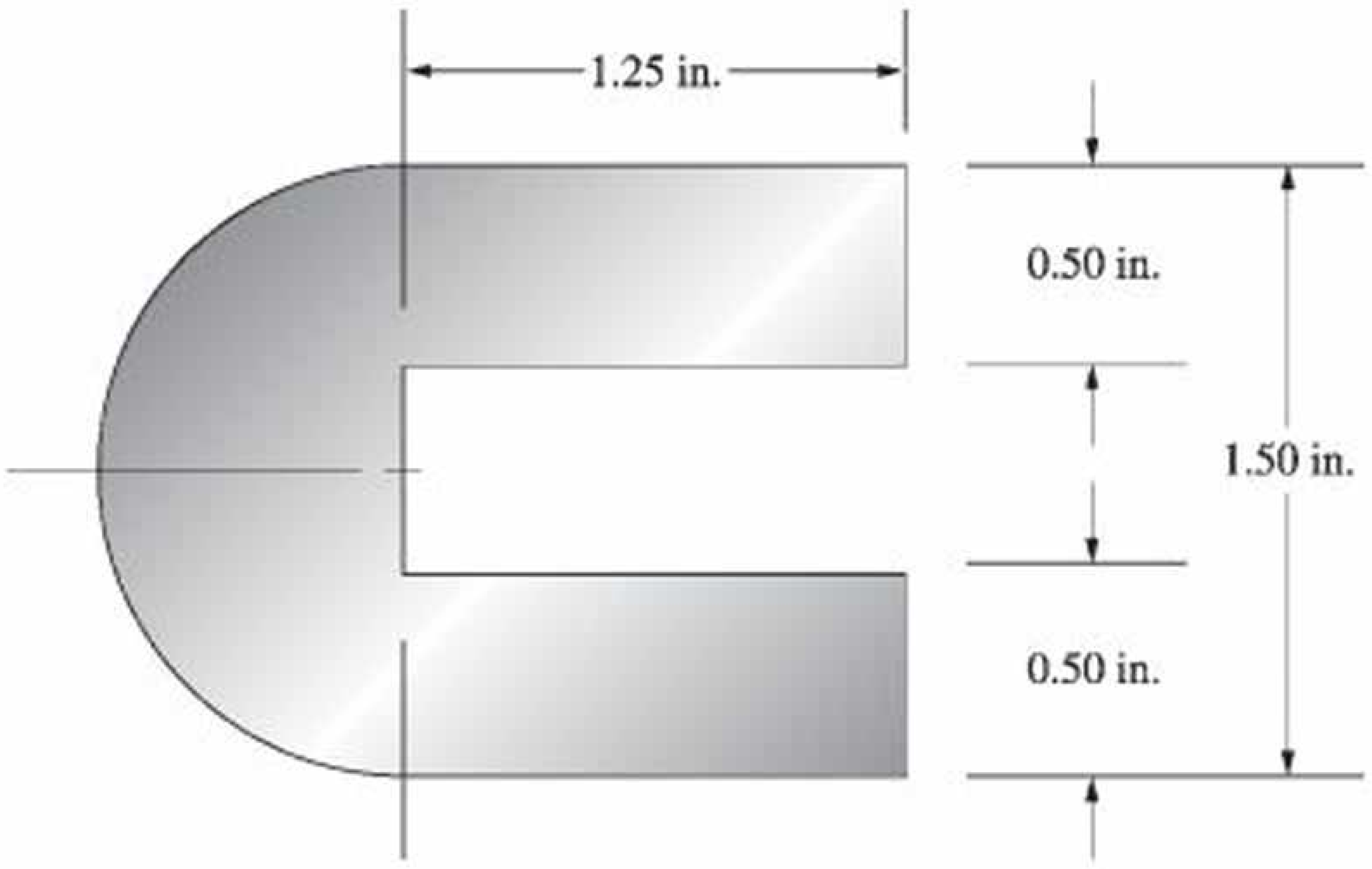


FIGURA P3–170 Sacabocados del punzón del problema 3–170.

3–171. Calcule la fuerza requerida para entresacar un bocado de la forma mostrada en la figura P3–171 de una lámina de aleación de aluminio 3003–H18. El espesor de la lámina es de 3.0 mm.

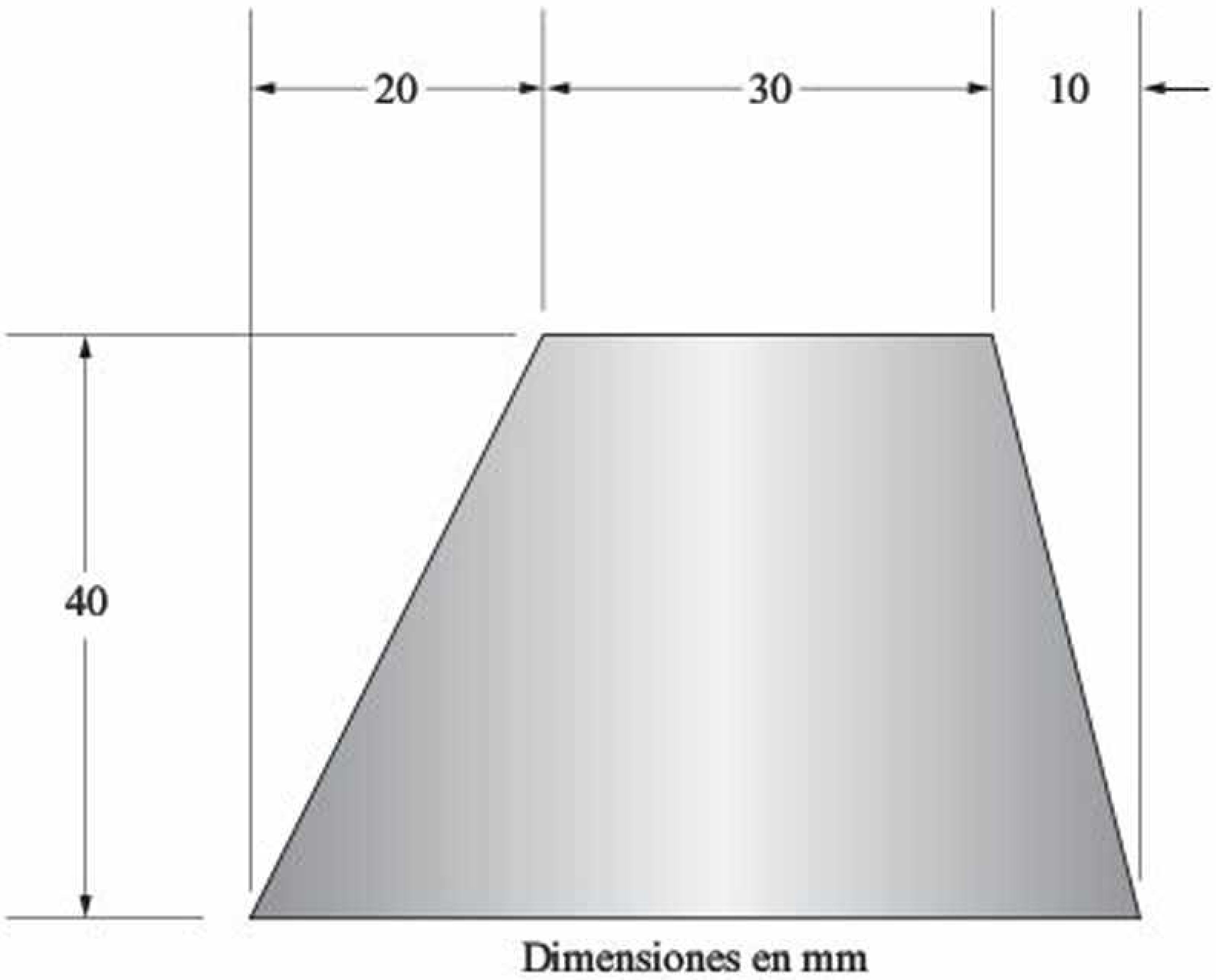


FIGURA P3–171 Sacabocados del punzón del problema 3–171.

3–172. Calcule la fuerza requerida para entresacar un bocado de la forma mostrada en la figura P3–172 de una lámina de acero AISI 1040 estirado en frío de 1.60 mm de espesor.

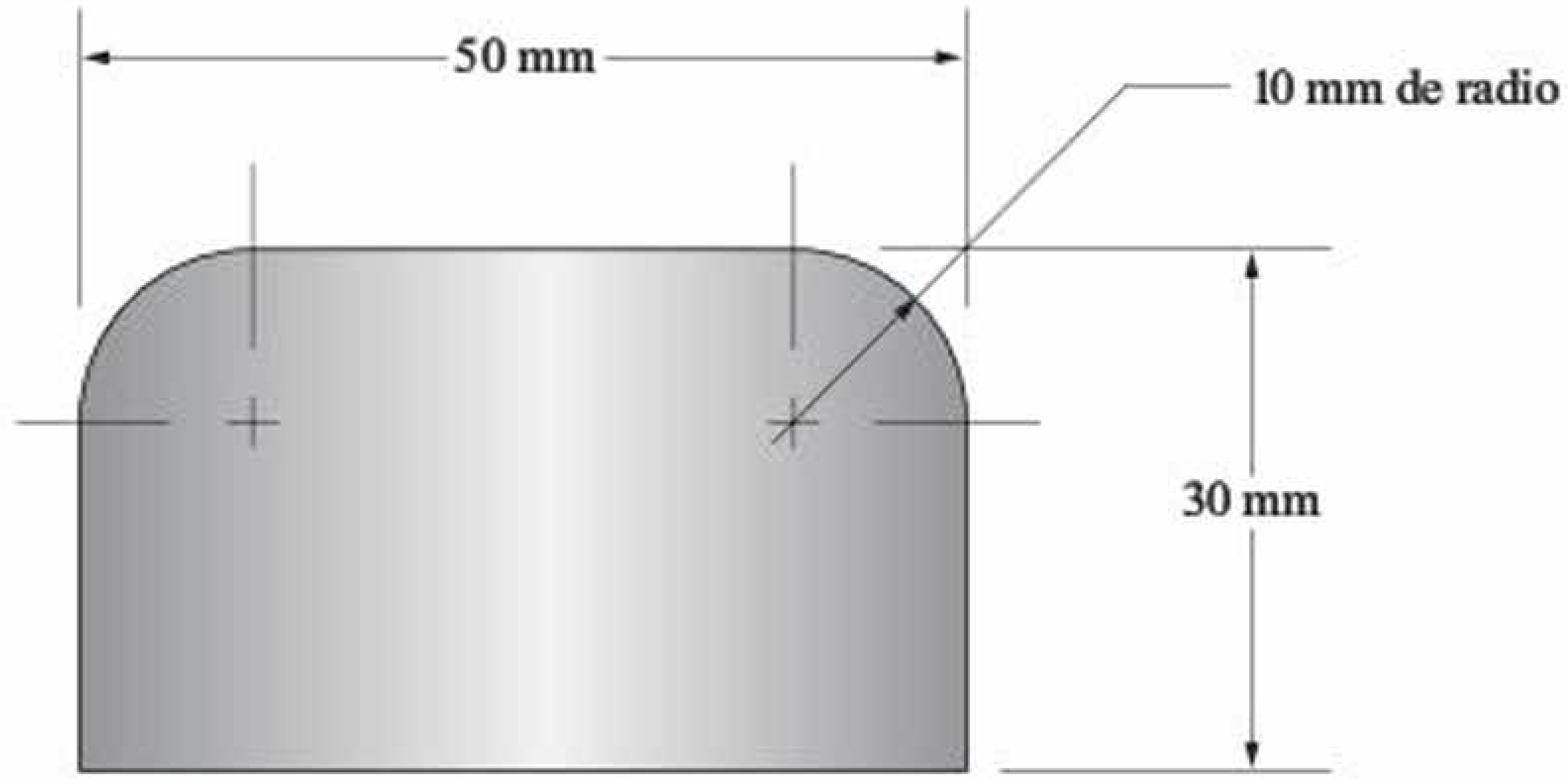


FIGURA P3–172 Sacabocados del punzón del problema 3–172.

3–173. La figura 3–173 muestra la forma de una hoja de un cuchillo de uso general que tiene que ser recortada de una lámina de acero AISI 1080 OQT 900. La hoja es de 0.80 mm de espesor. Calcule la fuerza requerida para entresacar la forma de la lámina.

3–174. Calcule la fuerza requerida para entresacar la figura sombreada en la figura P3–174 de una lámina más grande de aleación de aluminio 5154–H38 de 2.00 mm de espesor.

3–175. Use la figura mostrada en la figura P3–174 y los datos del problema 3–174. No obstante el procedimiento de horadación con punzón es diferente. Primero se horada el agujero central y las dos ranuras rectangulares. Luego se horadan los bordes externos de la figura. Determine la fuerza de presión requerida para producir la pieza con este procedimiento de horadación con punzón.

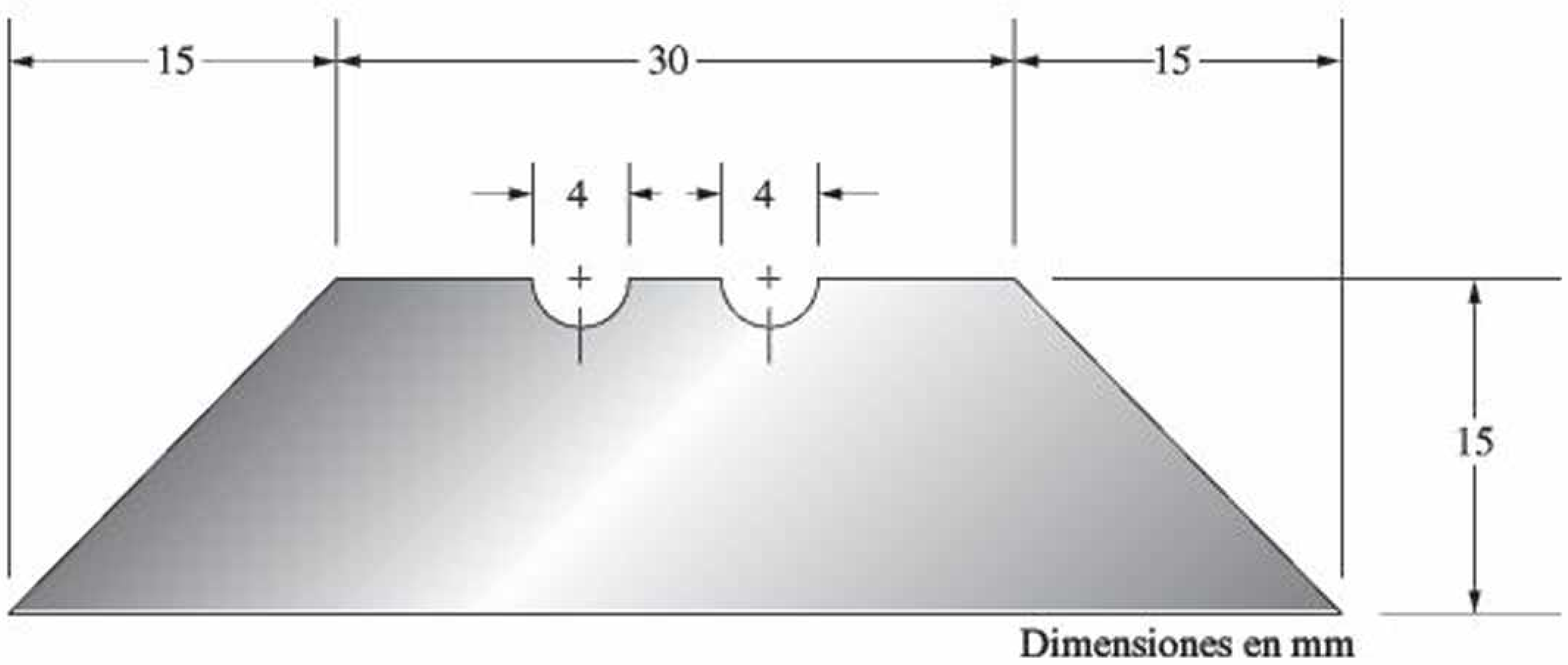


FIGURA P3–173 Hoja del cuchillo de uso general del problema 3–173.

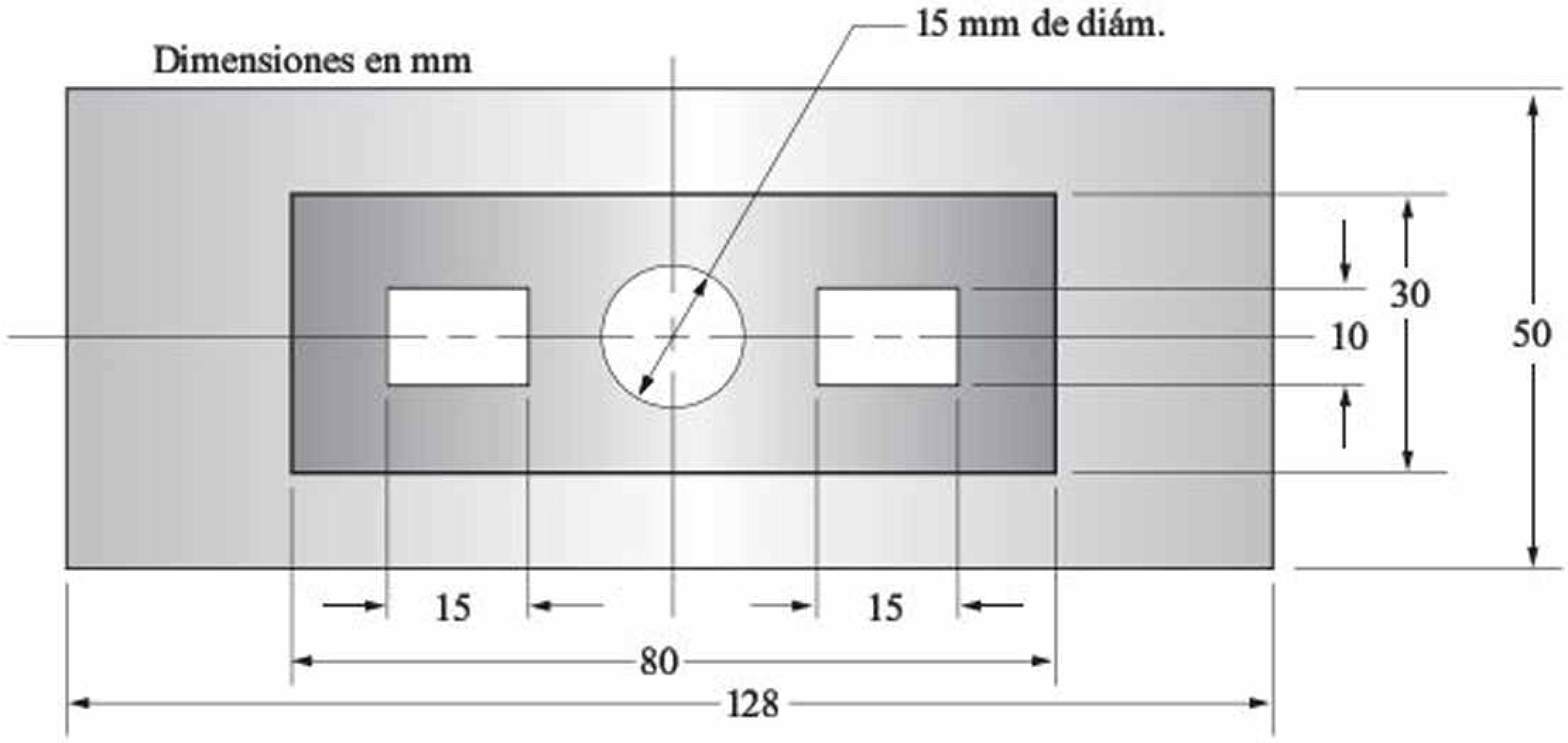


FIGURA P3–174 Sacabocados del punzón de los problemas 3-174 y 3–175.

Problemas con más de una clase de esfuerzo directo y problemas de diseño

3–176.E Un engrane transmite un par de torsión de 50 lb·in a un eje circular de 2.25 in de diámetro. Una cuña cuadrada de 0.50 in por lado conecta el eje a la maza del engrane, como se muestra en la figura P3–176. La cuña es de acero AISI 1020 estirado en frío. Determine la longitud requerida de la cuña, L, para que sea segura a esfuerzo cortante y a esfuerzo de apoyo. Use un factor de diseño de 2.0 basado en la cedencia a cortante y el esfuerzo de apoyo permisible del AISC.

3–177.E Una sección de un tubo está soportada por una estructura en forma de silla, la que, a su vez, está soportada por dos pasadores de acero, como se ilustra en la figura P3–177. Si la carga sobre la silla es de 42 000 lb, determine el diámetro requerido y la longitud de los pasadores. Use acero AISI 1040 estirado en frío. Considere tanto esfuerzo cortante como esfuerzo de apoyo.

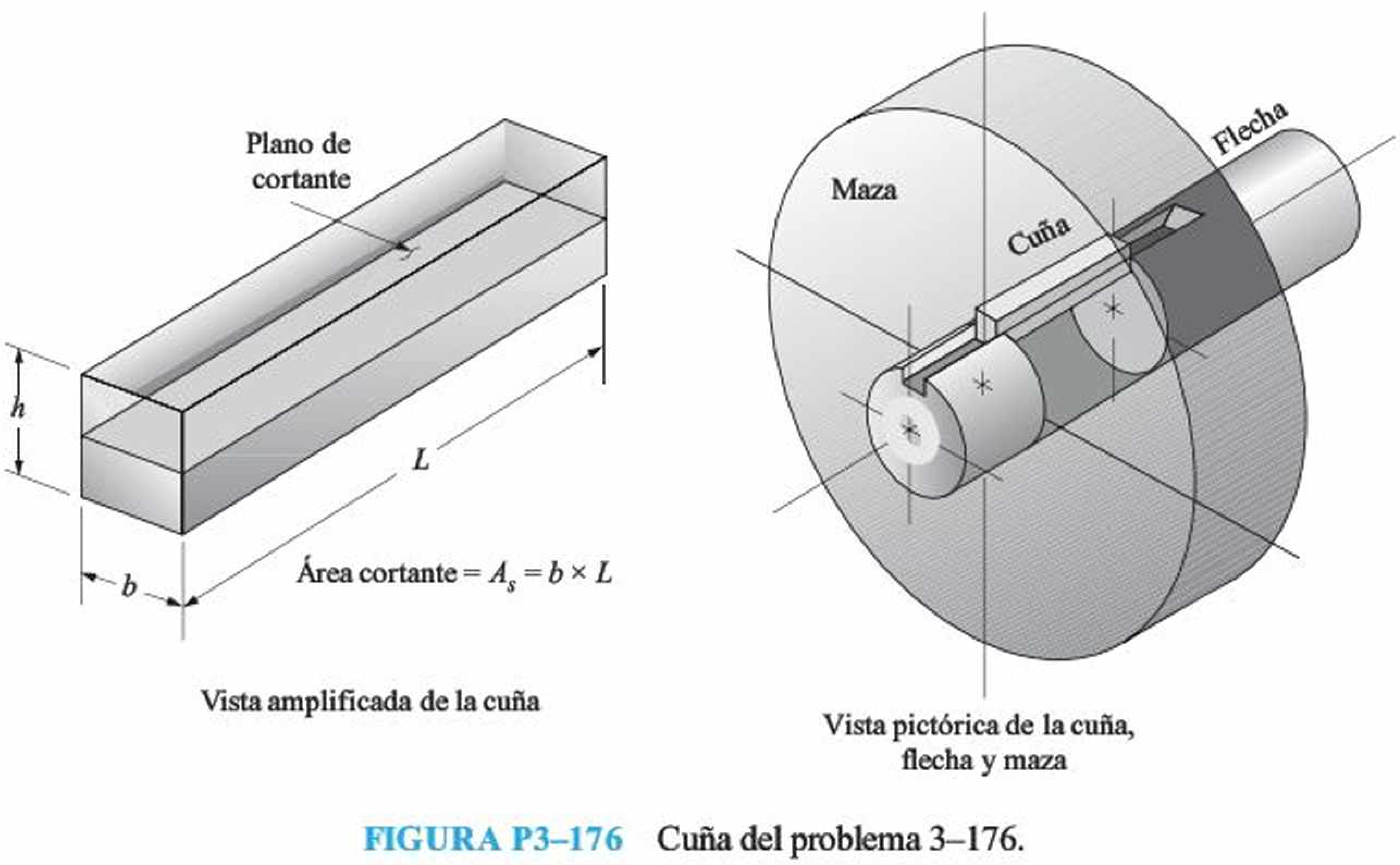


FIGURA P3–176 Cuña del problema 3–176.

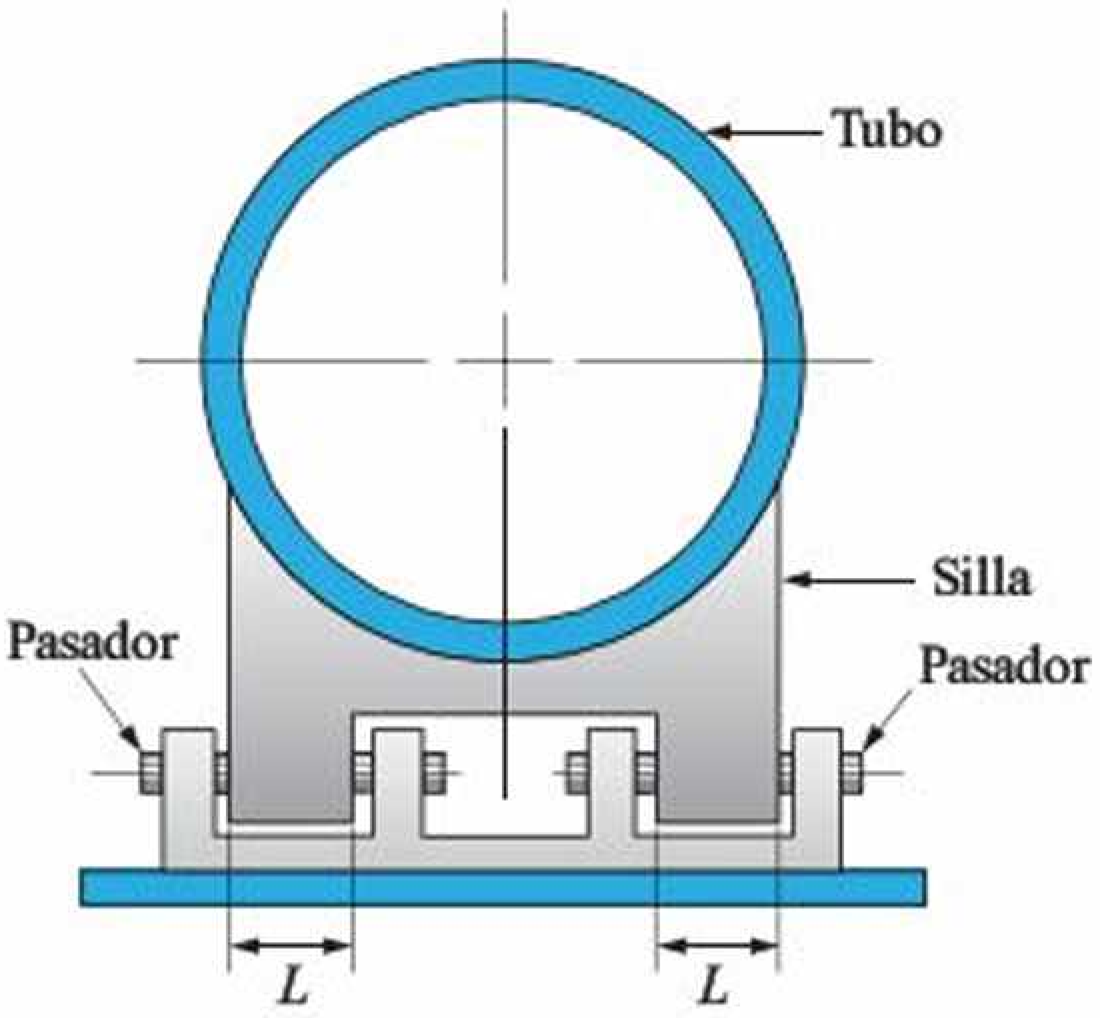


FIGURA P3–177 Silla para el tubo del problema 3–177.

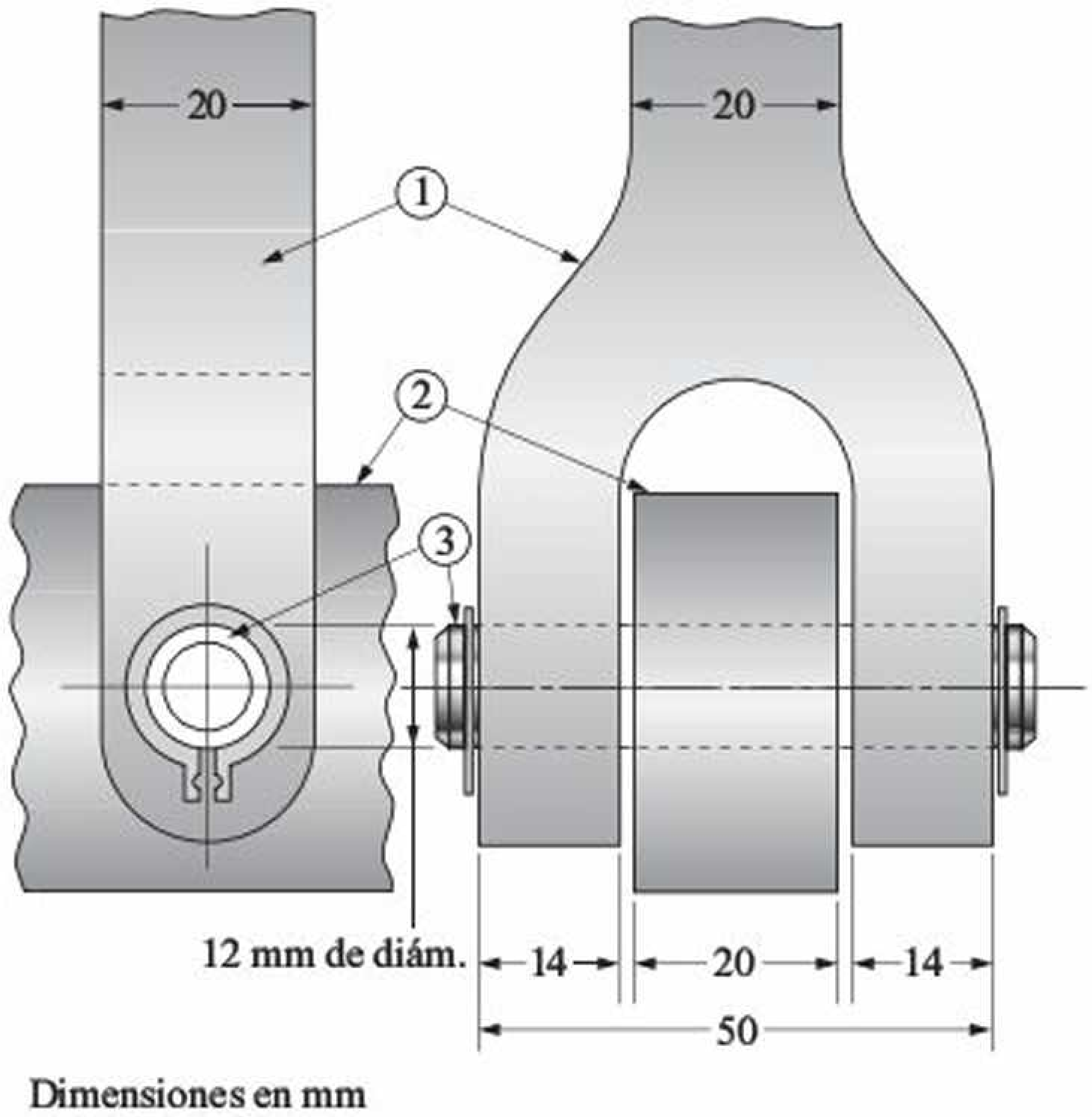


FIGURA P3–178 Silla para el tubo del problema 3–178.

3–178.M La figura P3–178 muestra el diseño del extremo inferior del miembro *AB* mostrado en la figura P3–21. Use la carga mostrada en la figura P3−21 y asuma que es estática. El miembro 1 es de aleación de aluminio 6061–T4; el miembro 2 es de aleación de aluminio 2014–T4, el pasador 3 es de aleación de aluminio 2014–T6. Realice los siguientes análisis.

a) Evalúe el miembro 1 en cuanto a seguridad a tensión en el área de los barrenos para pasador.

b) Evalúe el miembro 1 en cuanto a seguridad a esfuerzo de apoyo en el pasador.

c) Evalúe el miembro 2 en cuanto a seguridad a esfuerzo de apoyo en el pasador.

d) Evalúe el pasador 3 en cuanto a seguridad a esfuerzo de apoyo.

e) Evalúe el pasador 3 en cuanto a seguridad a esfuerzo cortante.

3–179.E La figura P3–179 ilustra un tipo de cadena utilizada en bandas transportadoras. Todos los componentes son de acero AISI 1040 estirado en frío. Evalúe la fuerza de tensión permisible en la cadena con respecto a:

a) Cortante del perno

b) Apoyo del pasador en las placas laterales

c) Tensión en las placas laterales

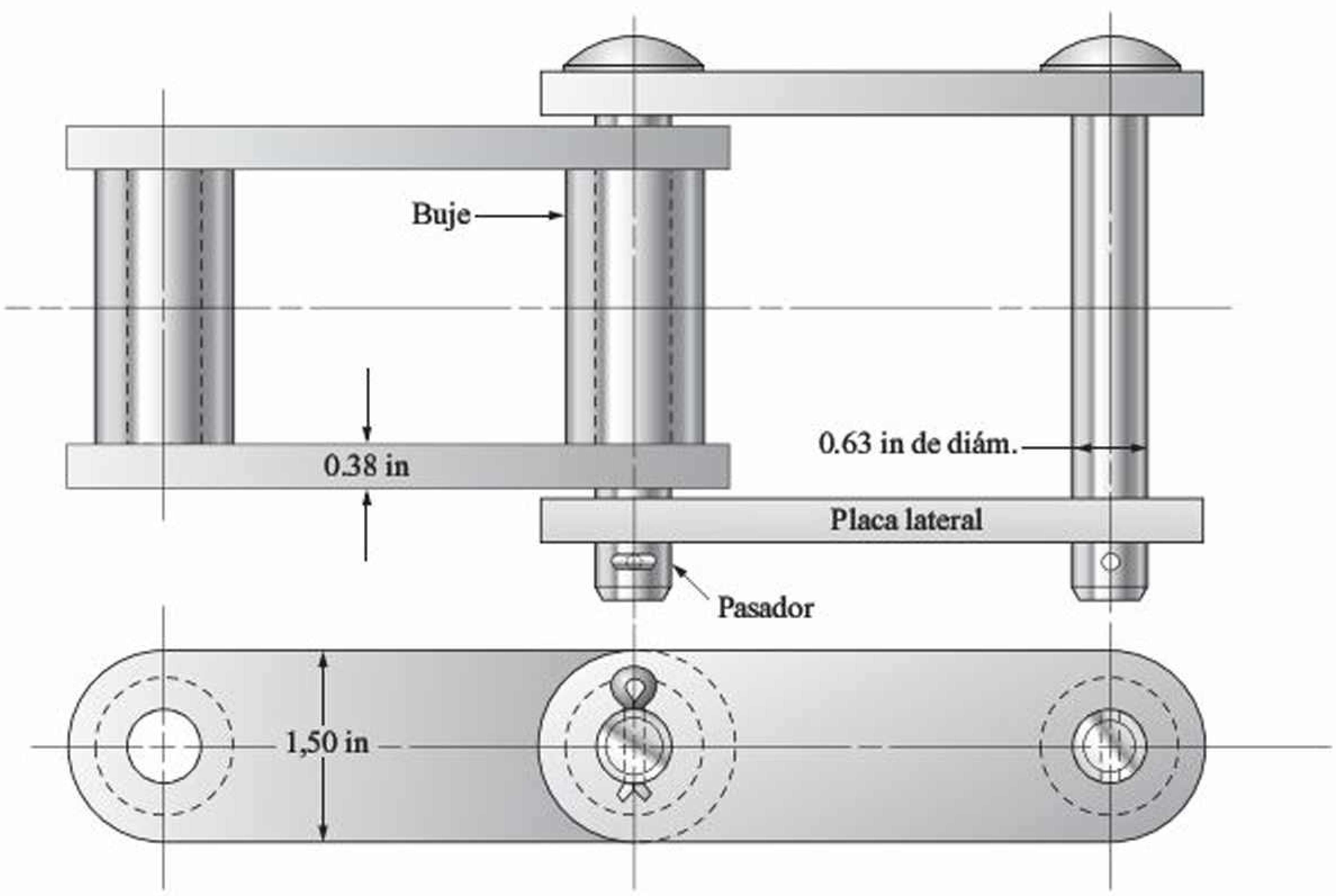


FIGURA P3–179 Cadena de la banda transportadora del problema 3–179.

3–180. La figura P3–180 muestra dos platos conectados por dos remaches. Los platos son de aluminio 6061–T6 y los remaches de aluminio 2014–T4. Evalúe la fuerza máxima permisible en la conexión para satisfacer los siguientes criterios de diseño:

a) El esfuerzo cortante en el remache no puede exceder de $\frac{1}{4}$ de la resistencia máxima a cortante.

b) El esfuerzo de tensión en los platos no puede exceder de $\frac{1}{3}$ de la resistencia a la cedencia.

c) El esfuerzo de apoyo en cualquiera de los platos o los remaches no puede exceder el esfuerzo de apoyo de diseño según la ecuación 3–26.

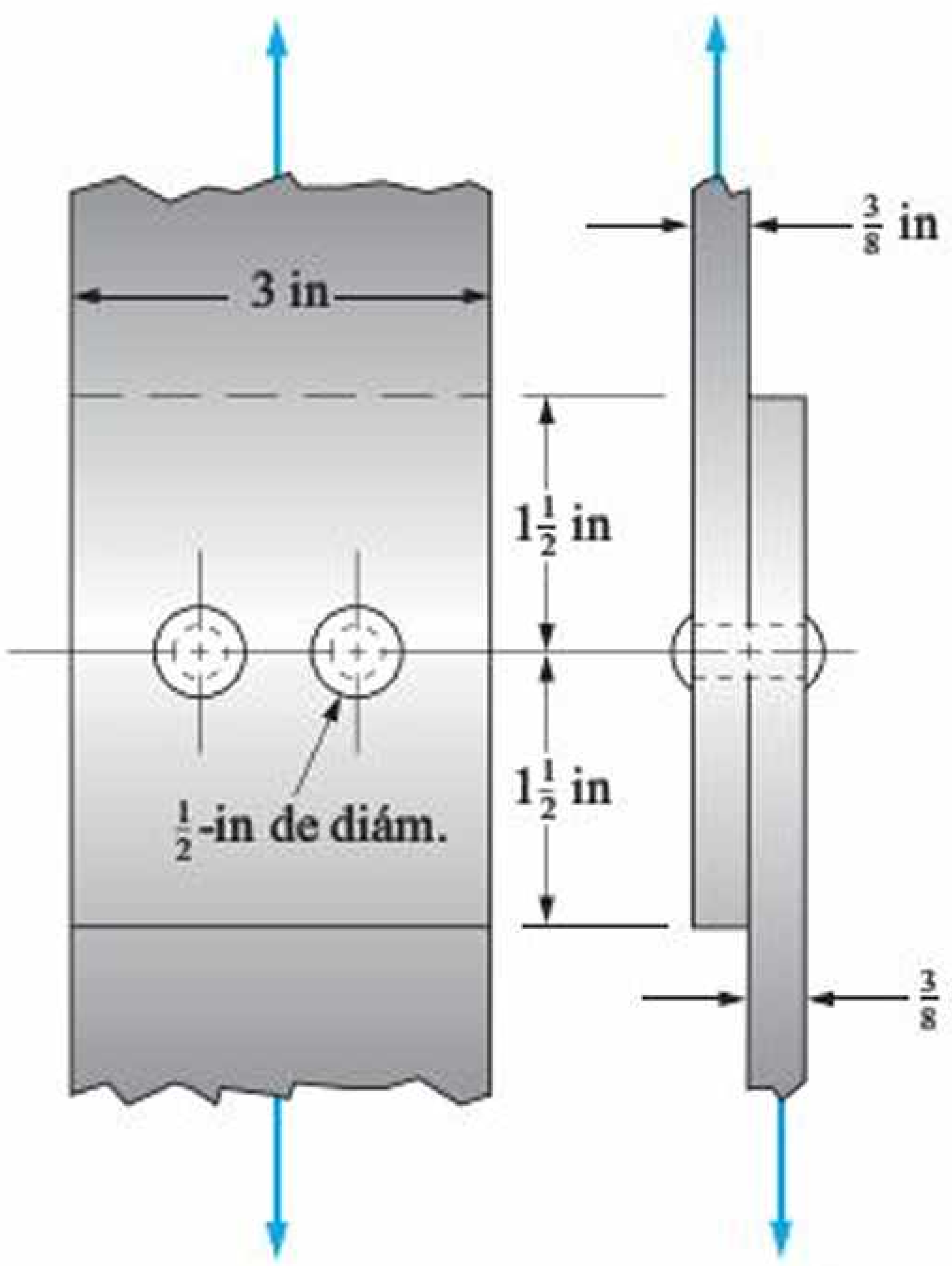


FIGURA P3–180 Platos remachados del problema 3–180.

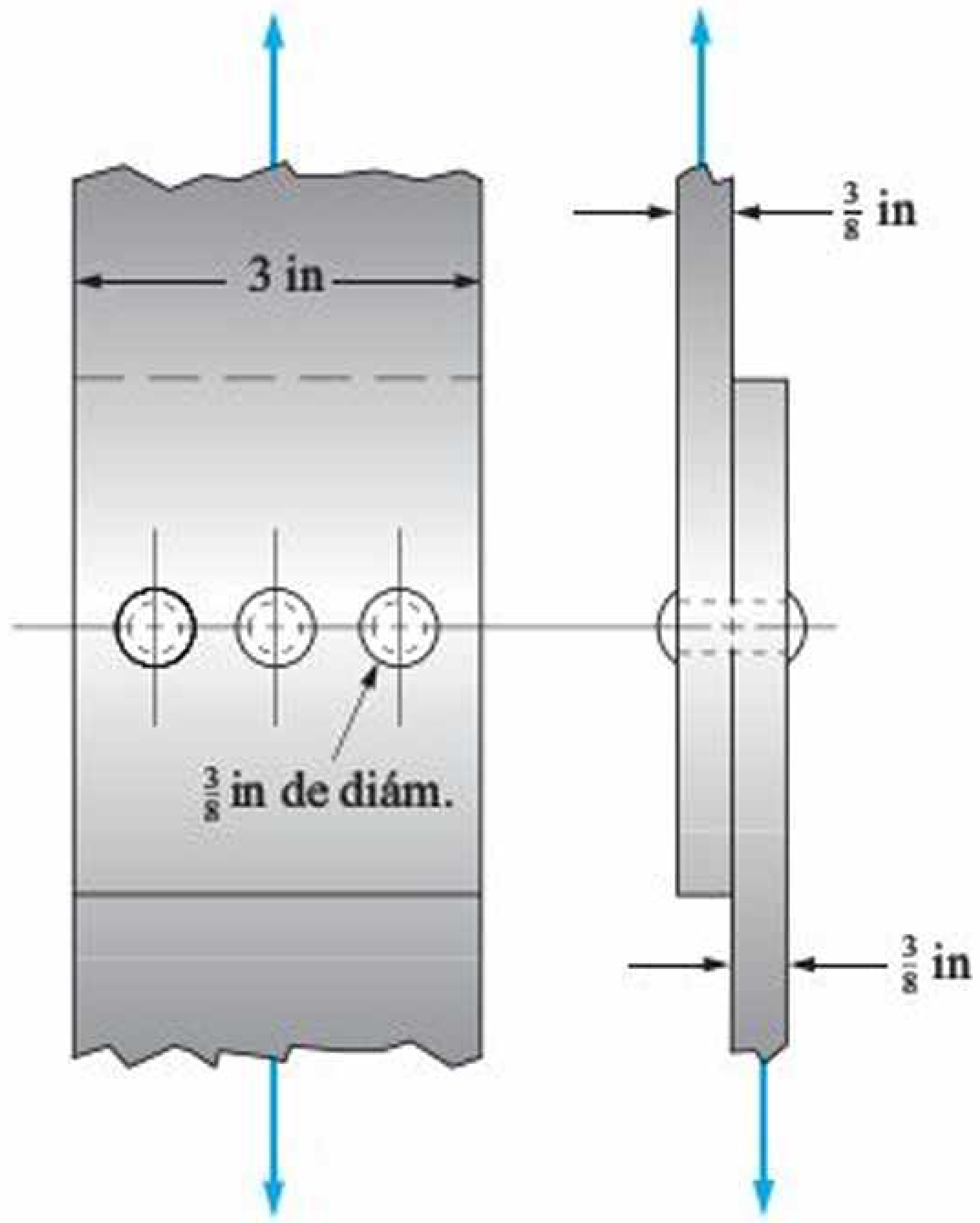


FIGURA P3–181 Platos remachados del problema 3–181.

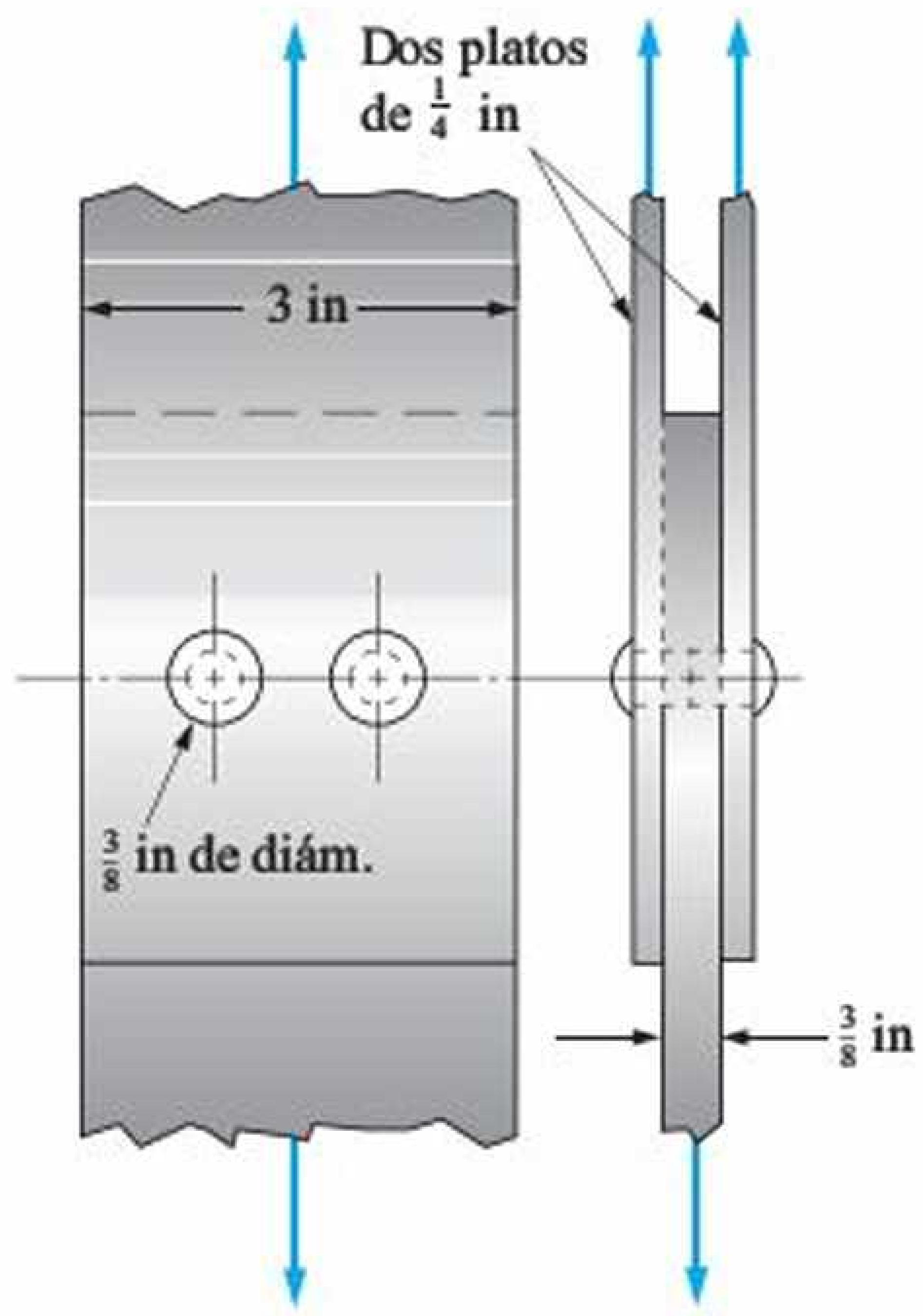


FIGURA P3–182 Platos remachados del problema 3–182.

3–181. Repita el problema 3–180 con la conexión mostrada en la figura P3–181. Los materiales y criterios de diseño son los mismos.

3–182. Repita el problema 3–180 con la conexión mostrada en la figura P3–182. Los materiales y criterios de diseño son los mismos.

3–183. El eslabón A en la figura P3–183 está conectado a otro similar mediante una junta de pasador. El eslabón A es de acero AISI 4140 OQT 1100. El diámetro del pasador es de 0.75 in y es de acero AISI 1141 OQT 1100. Calcule la fuerza de tensión repetida permisible F que se puede aplicar al eslabón A para que funcione con seguridad con respecto a esfuerzo de tensión en el eslabón, esfuerzo cortante en el pasador y esfuerzo de apoyo entre el pasador y el barreno en el eslabón A.

3–184. Para la armadura ilustrada en la figura P3–184, calcule las fuerzas en todos los miembros. A continuación, para los miembros sometidos a fuerzas de tensión proponga un diseño en cuanto a su material y forma y dimensiones de su sección transversal. Considere cómo se conectará cada miembro a miembros adyacentes en las juntas de pasados. También, considere cómo se pueden aplicar las cargas en las juntas C y E y cómo se pueden proporcionar apoyos en las juntas A y B.

3–185. Para la armadura ilustrada en la figura P3–185, calcule las fuerzas en todos los miembros. A continuación, para los miembros sometidos a fuerzas de tensión, proponga un diseño en cuanto a material, forma y dimensiones de su sección transversal. Considere cómo se conectará cada miembro a miembros adyacentes en las juntas de pasador. También, considere cómo se pueden aplicar las cargas en las juntas F y G y cómo se pueden proporcionar apoyos en las juntas A y D.

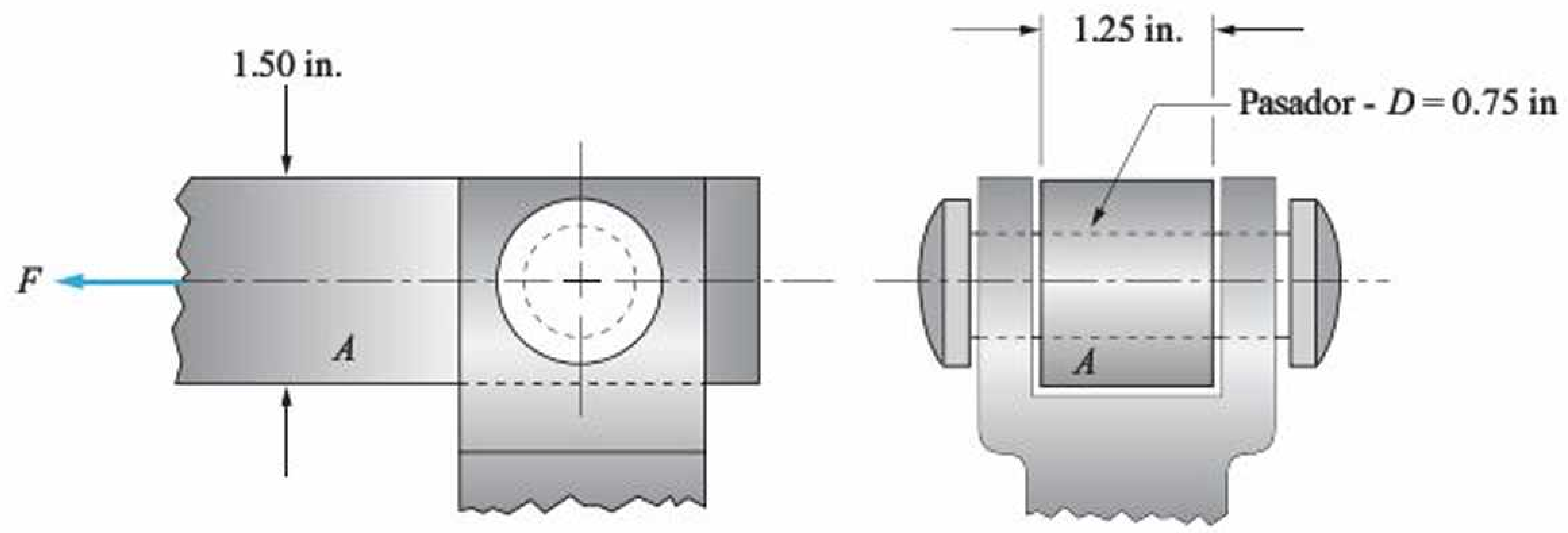


FIGURA P3–183 Conexión del problema 3–183.

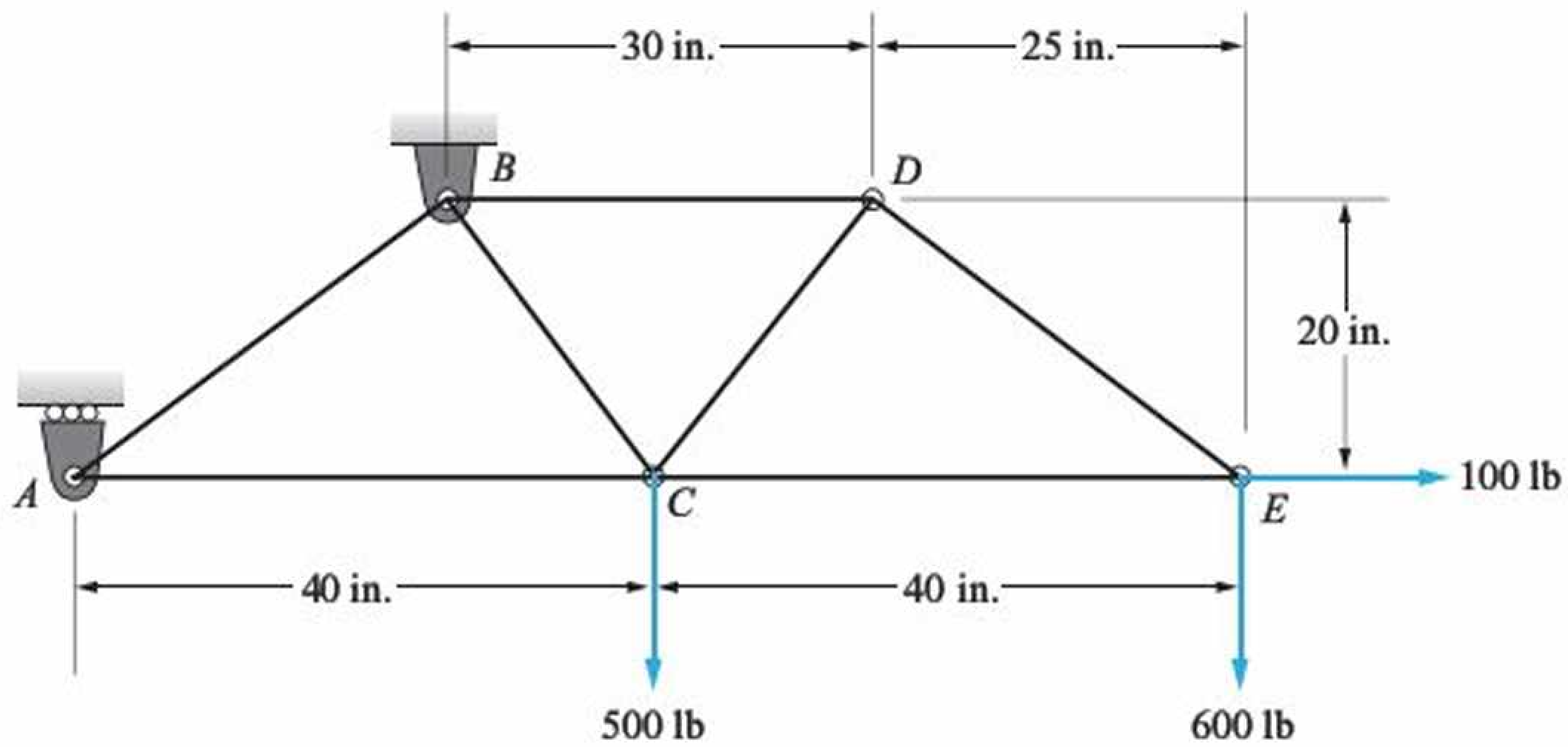


FIGURA P3–184 Armadura del problema 3–184.

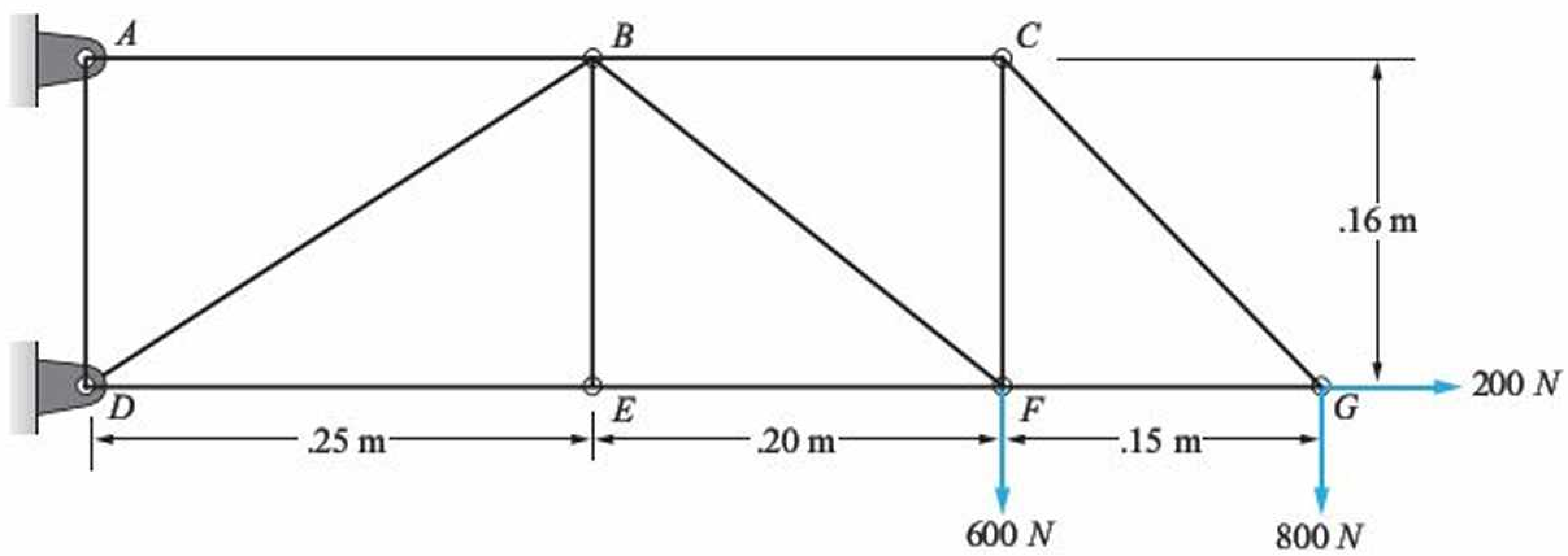


FIGURA P3–185 Armadura del problema 3–185.

3–186. Véase la figura P3–186. La carga es de 34.0 kN y se aplicará un choque moderado.

a) Calcule las fuerzas en varillas de soporte AB y AE.

b) Diseñe las varillas de soporte y especifique los materiales y el diámetro adecuado.

c) Calcule las fuerzas cortantes en los seis pasadores.

d) Diseñe los pasadores para que sean seguros a cortante y especifique el material y el diámetro adecuado.

e) Pruebe los pasadores que diseñó en cuanto a esfuerzo de apoyo aceptable. Suponga que el material en contacto a través del cual se perforan los agujeros es más resistente que el material de pasador. Especifique el espesor mínimo requerido de las partes en contacto para tener un área de apoyo adecuada.

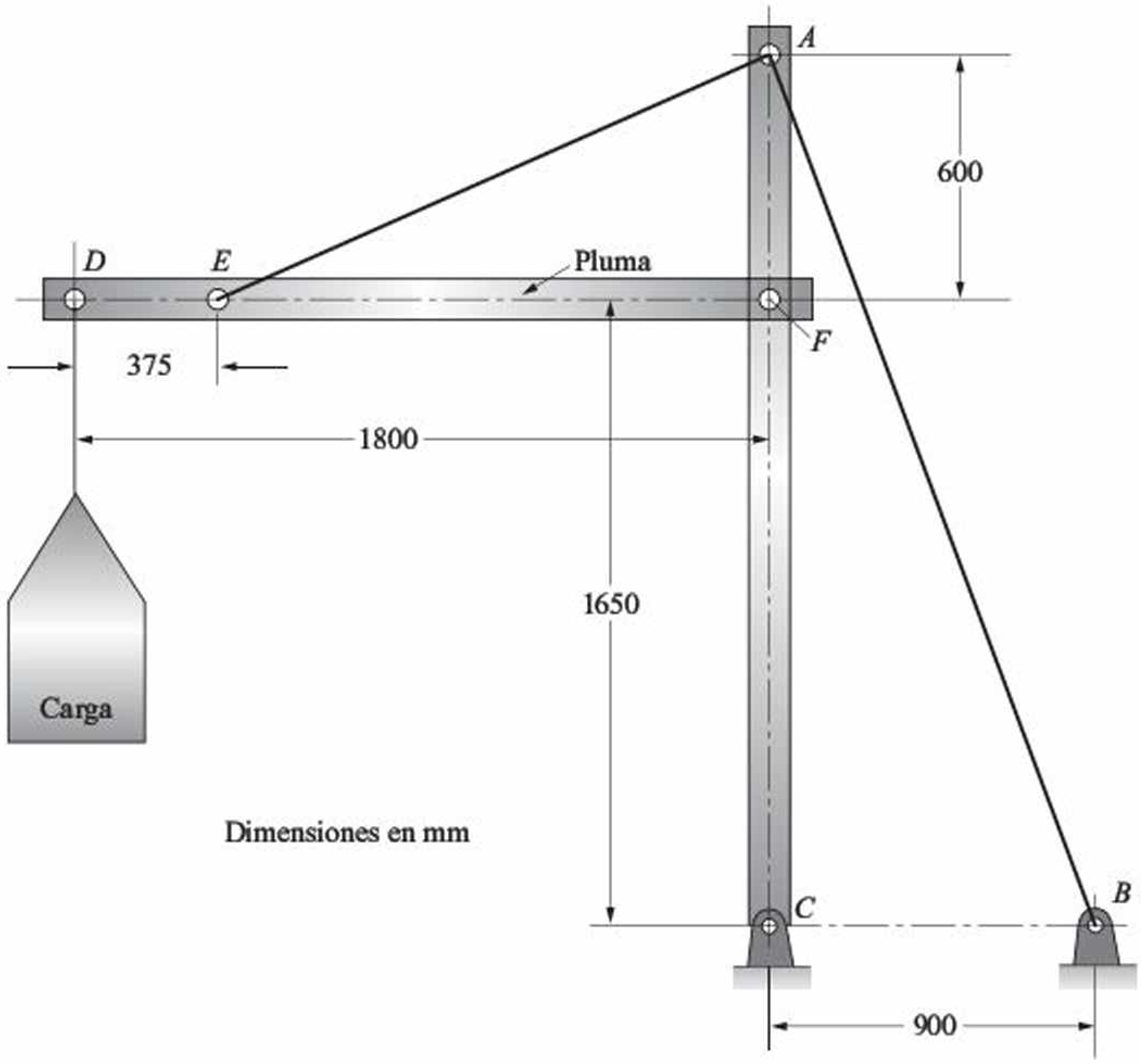


FIGURA P3–186 Estructura del problema 3–186.

4

Esfuerzo cortante torsional y deformación torsional

La imagen completa y actividad

4–1 Objetivos de este capítulo

4–2 Par de torsión, potencia y velocidad de rotación

4–3 Esfuerzo cortante torsional en miembros con secciones transversales circulares

4–4 Derivación de la fórmula del esfuerzo cortante torsional

4–5 Momento polar de inercia de barras circulares sólidas

4–6 Esfuerzo cortante torsional y momento polar de inercia de barras circulares huecas

4–7 Diseño de miembros circulares sometidos a torsión

4–8 Comparación de miembros circulares sólidos y miembros circulares huecos

4–9 Concentraciones de esfuerzo en miembros sometidos a torsión

4–10 Torsión–deformación torsional elástica

4–11 Torsión en secciones no circulares

La imagen completa

Esfuerzo cortante torsional y deformación torsional

Mapa de análisis

- En este capítulo aprenderá a calcular el nivel de esfuerzo cortante experimentado por miembros que soportan un par de torsión.
- Aprenderá a utilizar la ecuación de esfuerzo cortante torsional para su cálculo.
- También aprenderá a calcular la cantidad de deformación torsional en un miembro torsionalmente cargado.
- Utilizará la ecuación del ángulo de torsión.

Descubra

Piense en productos o máquinas con las que está familiarizado y que dispongan de flechas rotatorias que transmiten potencia. Elabore una lista que describa el origen de esta potencia y la trayectoria que toma hacia el punto final de su uso. Vea la figura 4–1, el ejemplo de un reductor de velocidad de engranes, en la página siguiente.

En ocasiones se aplica un par de torsión a un miembro que no gira. ¿Puede pensar en un ejemplo? Considere la llave de dados mostrada en la figura 4–4 que se utiliza para apretar un perno. Éste gira al principio cuando está siendo insertado para sujetar dos miembros. Luego, cuando el perno finalmente está apretado, usted le está aplicando a la cabeza del perno un par de torsión por medio de la extensión. De hecho, el ensamble apropiado de conexiones empernadas requiere la aplicación de un par de torsión especificado a la cabeza de cada perno.

Cuando cualquier miembro se somete a un par de torsión muestra cierta cantidad de torcedura donde un extremo es girado con respecto al otro. Con frecuencia, la cantidad de deformación elástica debe ser determinada mediante métodos analíticos para asegurarse de que el miembro sea suficientemente rígido.

¿Puede pensar en otros ejemplos en los que la rigidez torsional sea un parámetro importante de diseño y desempeño?

Torsión se refiere a la carga de un miembro que tiende a hacerlo girar o torcerlo. Semejante carga se llama *par de torsión*, *momento torsional*, *par de torsión* o *par*. Cuando se aplica un par de torsión a un miembro se desarrolla un *esfuerzo cortante* en su interior y se crea una *deformación torsional*; el resultado es un ángulo de torsión de un extremo del miembro con respecto al otro.

Un ejemplo conocido de un miembro torsional es una flecha circular, propulsada por un motor eléctrico, que suministra potencia por medio de un engrane a otro. La figura 4–1 muestra un dibujo de una posible configuración. Su operación se describe a continuación.

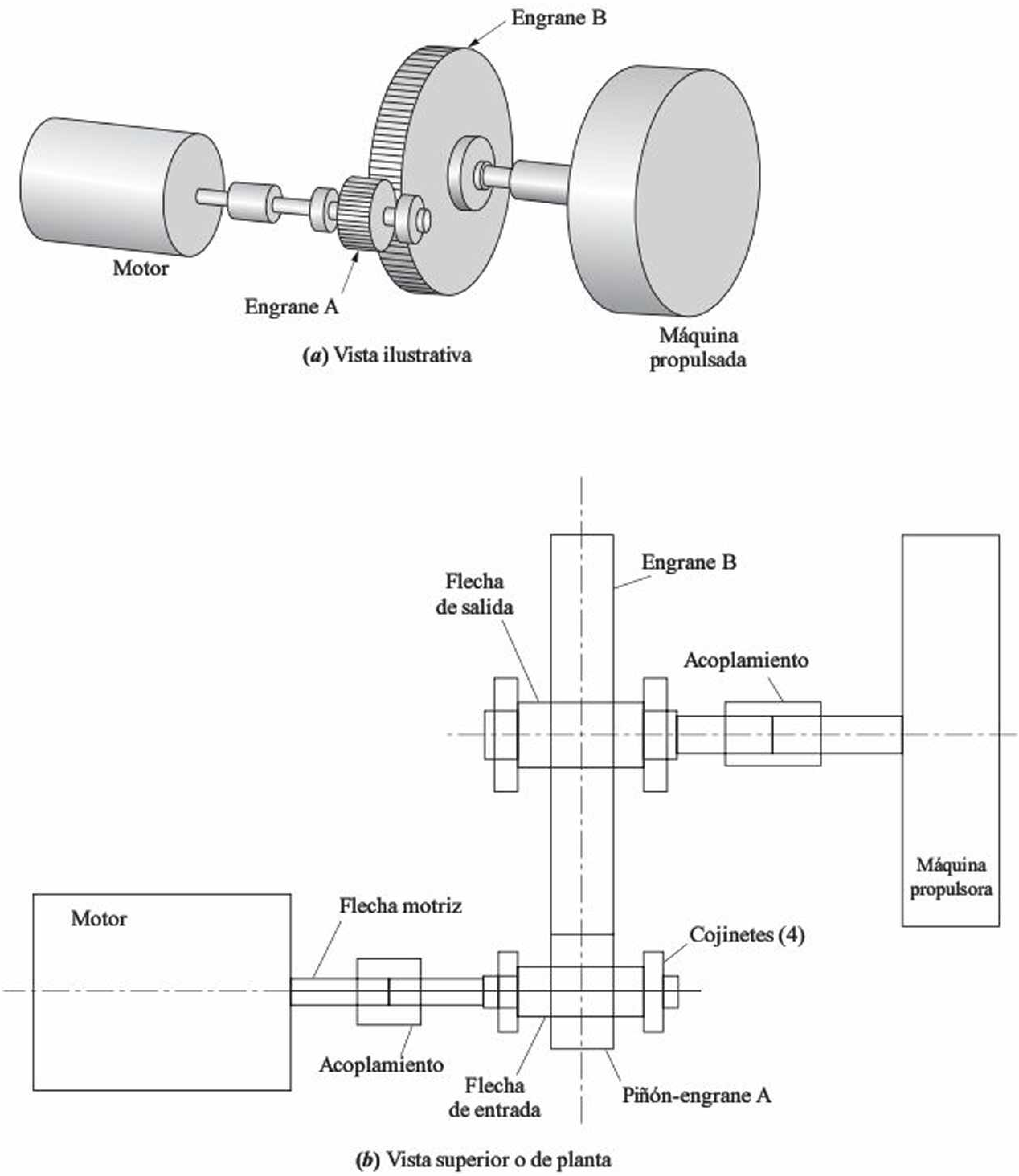
El motor utiliza energía eléctrica para producir un par de torsión motriz en su flecha de salida. La flecha del motor está conectada a la flecha de entrada del reductor de velocidad de engranes mediante un acoplamiento flexible. Éste permite transmitir el par de torsión al mismo tiempo que elimina cualquier tendencia de flexionar la flecha o hacer que se desarrollen cargas axiales. Cuando el motor gira al mismo tiempo que desarrolla un par de torsión, transmite potencia a las flechas del sistema mostrado.

La flecha de entrada descansa en dos cojinetes antifricción y porta el engrane pequeño A, llamado *piñón*, entre los dos cojinetes. El par de torsión aplicado a la flecha desde el acoplamiento se transmite a lo largo de la flecha hasta el engrane, donde se presenta un par de torsión de reacción en la forma de una resistencia ofrecida por el engrane B.

La potencia luego se transfiere al engrane B y lo hace girar. Cuando los engranes operan a velocidad constante y transmiten potencia, existe un nivel uniforme de par de torsión en la flecha de entrada desde al acoplamiento hasta el engrane. Esa parte de la flecha de entrada desde el engrane A hasta el cojinete externo prácticamente no experimenta par de torsión porque el cojinete opone muy poca resistencia.

El engrane B recibe la potencia del piñón A y la suministra a la flecha de salida. La potencia viaja entonces a lo largo de la flecha a través de otro acoplamiento flexible hasta la máquina propulsada. Ésta puede ser un ventilador, una banda transportadora o algún otro dis-

FIGURA 4–1 Disposición general de la propulsión de una sierra con reductor de engranes de una sola etapa.



(*a*) Vista ilustrativa

(*b*) Vista superior o de planta

positivo que utilice potencia para realizar algún trabajo útil. De este modo, la flecha de salida experimenta un par de torsión desde el engrane B hasta el acoplamiento. La flecha motriz de la máquina propulsada también experimenta ese mismo nivel de par de torsión.

Trate de visualizar el flujo de la potencia y el par de torsión aquí descritos. Cada parte de cada flecha que experimenta un par de torsión aplicado desarrollará esfuerzos cortantes internos. Debe aprender a calcular el nivel de dichos esfuerzos como una función del par de torsión aplicado y la geometría de la flecha, por medio de la ecuación de esfuerzo cortante torsional.

También aprenderá cómo calcular la cantidad de deformación torsional en un miembro torsionalmente cargado. Utilizará la *ecuación del ángulo de torsión* que relaciona el par de torsión aplicado, la longitud del miembro, su geometría y el módulo de elasticidad de su material con el ángulo de torsión.

El objetivo de este análisis es garantizar que el miembro sea seguro para la carga torsional aplicada y suficientemente rígido para que funcione apropiadamente en servicio.

Actividad Capítulo 4: Esfuerzo cortante torsional y deformación torsional

A. Actividad no cuantitativa

Hágase de algunos materiales que le ayuden a tener una buena "idea" de cómo se aplica un par de torsión a un objeto y cómo se comporta cuando opone resistencia al par de torsión. La mayoría de los ejemplos analizados en este capítulo son cilindros sólidos o cilindros huecos. Sin embargo, se prestará algo de atención a perfiles no circulares como cuadrados, rectángulos, hexágonos sólidos o huecos, o perfiles laminados o extruidos especiales. He aquí algunos ejemplos.

1. Un tubo de cartón relativamente delgado, tal como aquel sobre el cual se enrollan toallas de papel o papel para regalo.
2. Un cilindro de espuma flexible, tal como un juguete o cojín para nadar.
3. Una varilla o tubo largo de diámetro pequeño o una espiga de madera.
4. Un perfil largo, laminado o extruido, tal como el que podría ser utilizado como riel de una puerta de armario, una varilla de cortinero o una parte del armazón de un juguete, gabinete o aparato doméstico.

Dado que los términos *largo*, *diámetro pequeño*, *flexible* y *delgado* son imprecisos, busque objetos que se deformen un poco cuando los manipule con sus propias manos.

Sujete uno de sus objetos cilíndricos por los extremos, como la figura 4–2 lo ilustra. Luego tuérzalo en direcciones opuestas con cada mano mientras observa cómo se deforma. El cilindro en la parte (a) de la figura 4–2 no está sometido a torsión. Una cuadrícula rectangular, formada por líneas circunferenciales y longitudinales, se trazó sobre su superficie. La parte (b) de la figura muestra lo que sucede cuando se aplica torsión. Observe cómo se comban las líneas horizontales conforme se tuerce el cilindro, en tanto que las líneas circunferenciales prácticamente no cambian. Si es factible, trace una cuadrícula similar en su objeto. Estas observaciones son útiles cuando se consideran las fórmulas que utilizamos para calcular esfuerzos y deformaciones en miembros sometidos a torsión.

Utilizando un tubo de cartón delgado y aplicando la acción de torsión, observe cómo es bastante rígido a la torsión con respecto al peso o resistencia general del cartón. Si no dispone de un tubo ya hecho, busque un pedazo de papel rígido de aproximadamente 5 in × 11 in (125 mm × 275 mm) y enróllelo para formar un tubo aproximadamente de 1.0 in a 1.5 in (25 mm a 35 mm) de diámetro. Podría enrollarlo alrededor del palo cilíndrico de una escoba para formar el tubo. Aplique cinta adhesiva a todo lo largo de él. El tubo será rígido a la torsión aun cuando pueda aplastarlo con facilidad. Entonces corte con cuidado el tubo a todo lo largo y note cómo se vuelve extremadamente flexible a la torsión. Esto ilustra la importancia de una sección transversal circular continua para una buena rigidez torsional.

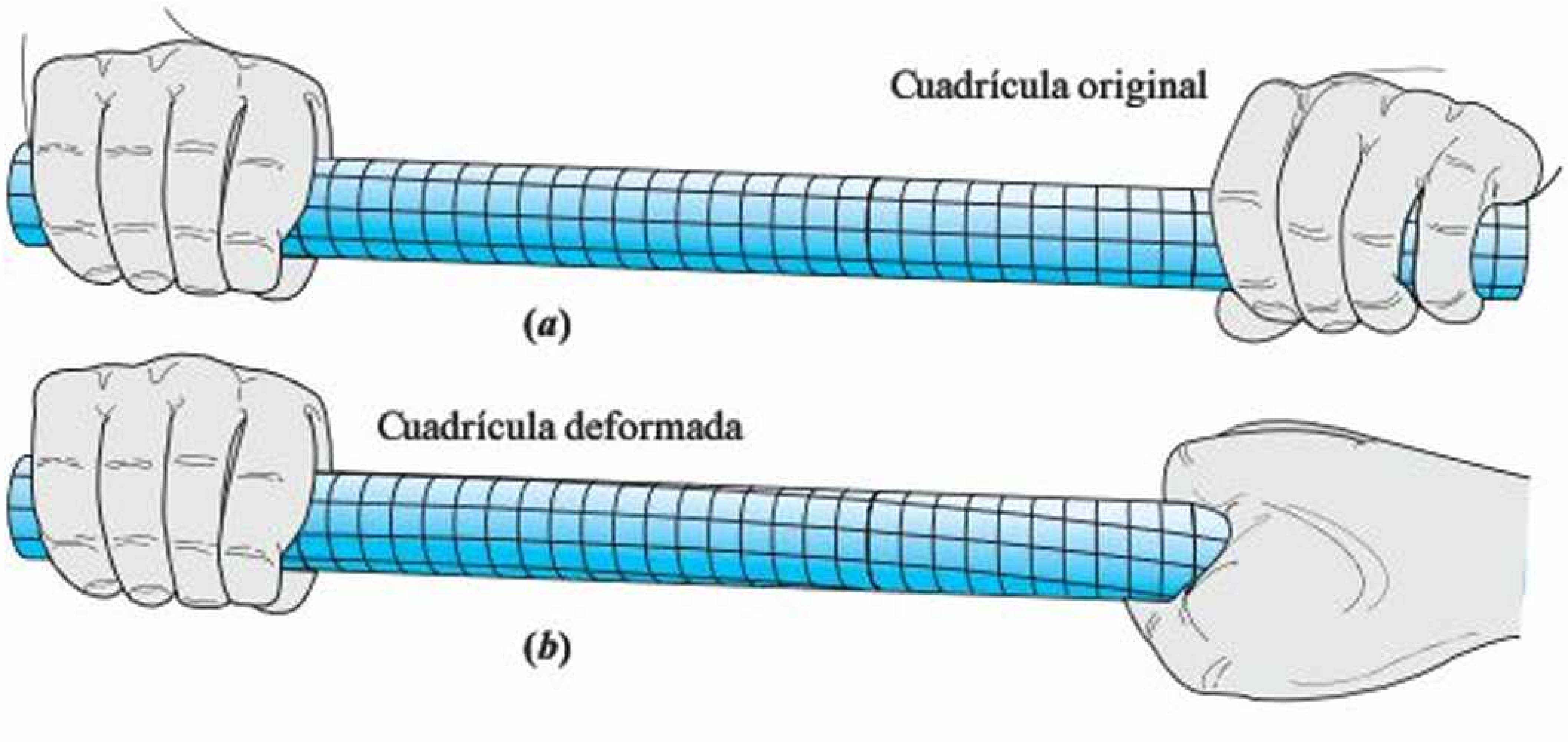


FIGURA 4–2 Torsión de una varilla cilíndrica.

B. Actividad cuantitativa

Para efectuar mediciones cuantitativas se requiere una estructura rígida para mantener fijo un extremo de un miembro, tal como una varilla o un tubo cilíndrico, al mismo tiempo que se permite que el otro se mantenga en su lugar, aunque libre para girar a medida que se aplica un par de torsión a dicho extremo. Se requiere una forma de medir el par de torsión aplicado y la deformación torsional (ángulo de torsión).

La figura 4–3 muestra un aparato comercialmente disponible que facilita la prueba y demostración. Se aplica un par de torsión colgando pesos conocidos en el extremo de un brazo unido al extremo de la varilla que está libre para girar. El par de torsión aplicado simplemente se calcula con la definición básica de par de torsión,

$$T = Fr$$

donde T = Par de torsión aplicado
F = Fuerza aplicada en el extremo del brazo
r = Distancia perpendicular desde la línea de acción de la fuerza hasta el centro de la varilla

La deformación angular se mide sobre una escala de transportador fijo con un indicador sujeto a la varilla.

Diseñe un experimento con el cual pueda registrar los datos siguientes:

1. Descripción general de la varilla o tubo que se va a someter a acción de torsión.
2. Material del cual está hecha la varilla.
3. Diámetro de la varilla junto con el diámetro interno, si se utiliza un tubo hueco.
4. Longitud entre el punto donde la varilla se mantiene fija y el punto donde se aplica el par de torsión.
5. Una tabla de datos que incluya lo siguiente por cada punto de dato:

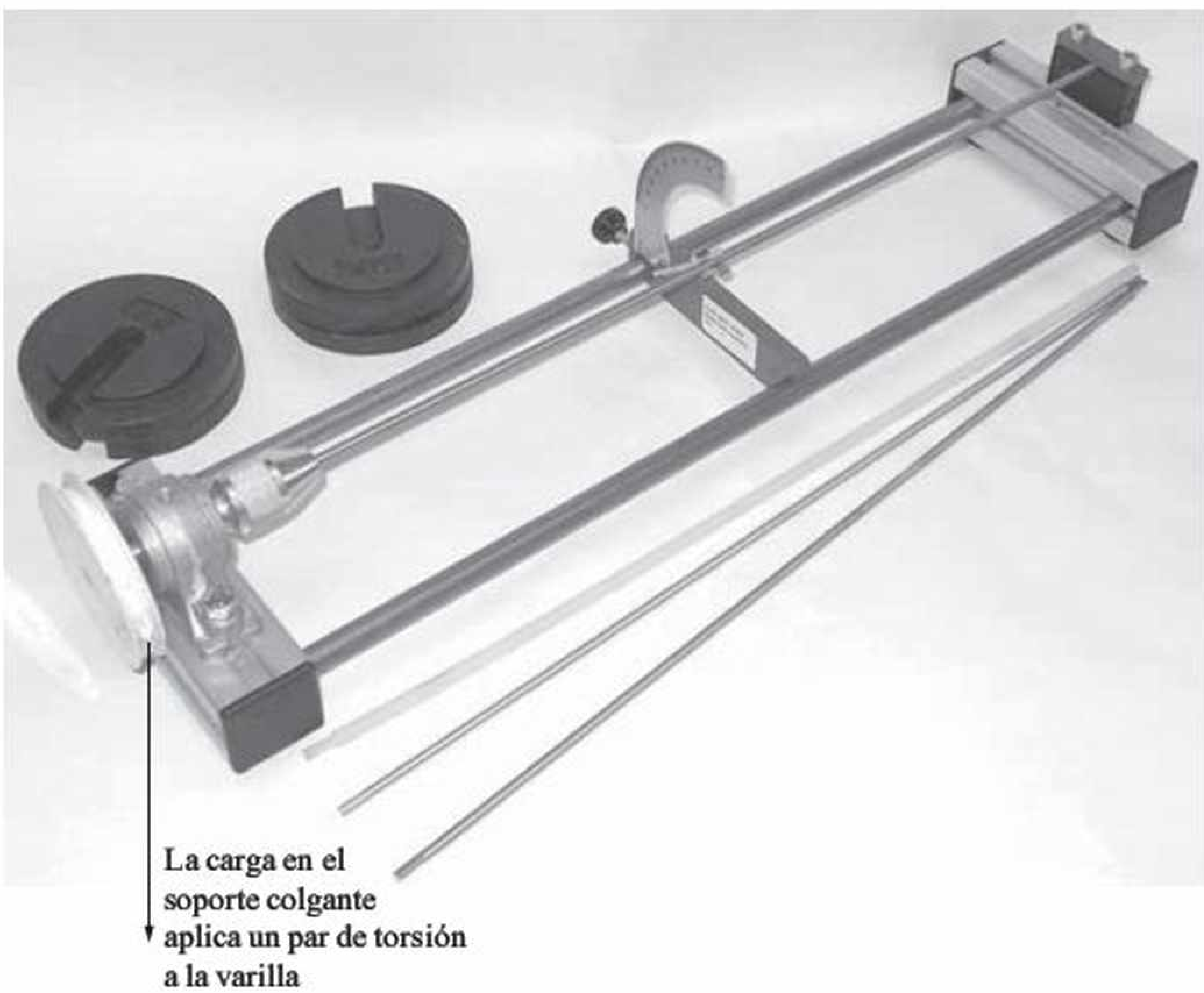


FIGURA 4–3 Dispositivo de prueba de torsión. (Fuente; P. A. Hilton Ltd./Hi-Tech, Hampshire, Inglaterra)

a. Fuerza incremental aplicada en el brazo.

b. Longitud del brazo del momento de torsión.

c. Par de torsión calculado ($T = Fr$).

d. Ángulo de rotación.

De la prueba se derivan varias cosas:

1. Una gráfica del ángulo de torsión contra el par de torsión aplicado.
2. Un registro y una descripción de cualquier falla de la varilla o tubo que pueda haber ocurrido, tal como deflexión excesiva, fractura, desgarre, aplastamiento o encogimiento, y la carga a la cual ocurrió la falla.
3. Mantenimiento del registro de datos que se utilizarán una vez que desarrollen, más adelante en este capítulo, los principios de esfuerzo cortante torsional y el análisis de la deformación torsional. Sólo entonces se podrán calcular las propiedades geométricas y del material de la varilla o tubo, y el esfuerzo y deformación calculados podrán ser comparados con los datos medidos.

4–1 OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

Después de completar este capítulo, el lector será capaz de:

1. Definir *par de torsión* y calcular la magnitud del par de torsión ejercido en miembro estructural sujeto a carga torsional.
2. Definir la relación entre las tres variables críticas que intervienen en la transmisión de potencia, par de torsión y velocidad de rotación.
3. Manipular las unidades de potencia, par de torsión y velocidad de rotación tanto en sistema métrico SI como en el sistema inglés.
4. Calcular el esfuerzo cortante máximo en un miembro sometido a carga torsional.
5. Definir el *momento polar de inercia* y calcular su valor para flechas redondas sólidas y huecas.
6. Calcular el esfuerzo cortante en un punto cualquiera de un elemento sometido a torsión.
7. Especificar un esfuerzo cortante de diseño para un miembro estructural sometido a tensión.
8. Definir el *módulo de sección polar* y calcular su valor para flechas redondas sólidas y huecas.
9. Determinar el diámetro requerido de una flecha para que soporte con seguridad un par de torsión dado.
10. Comparar el diseño de flechas sólidas y huecas en cuanto a la masa de las mismas requerida para soportar un cierto par de torsión, al mismo tiempo que se limita el esfuerzo cortante torsional a un cierto valor de diseño.
11. Aplicar factores de concertación de esfuerzo a miembros sometidos a torsión.
12. Calcular el ángulo de torsión de un miembro sometido a torsión.
13. Definir el *módulo de elasticidad a cortante.*
14. Analizar el método de calcular esfuerzo cortante torsional y deformación torsional en el caso de miembros con secciones transversales no circulares.
15. Describir las formas generales de miembros estructurales de rigidez torsional relativamente elevada.

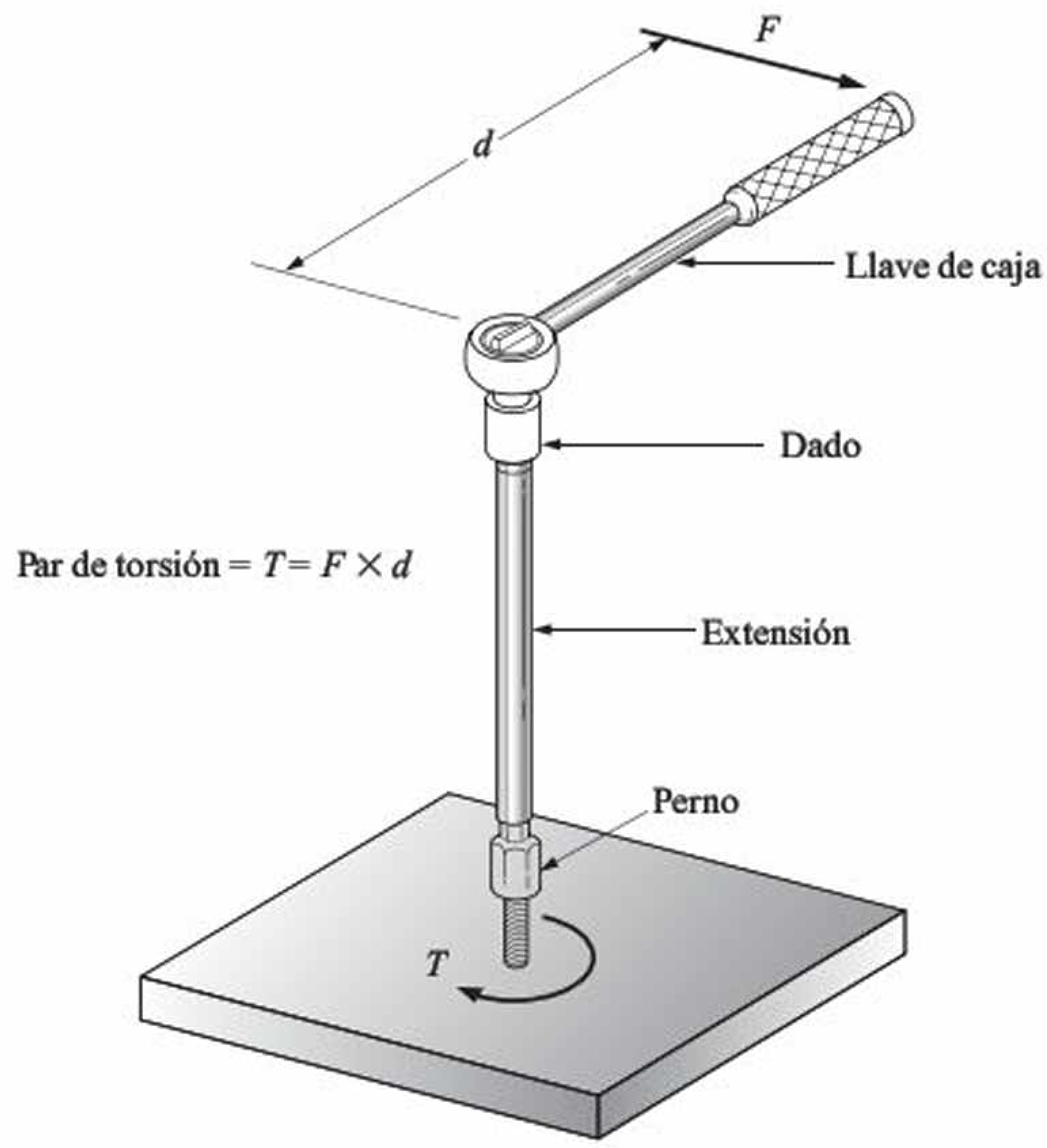


FIGURA 4–4
Llave de caja aplicando un par de torsión a un perno.

4-2 PAR DE TORSIÓN, POTENCIA Y VELOCIDAD DE ROTACIÓN

Una tarea necesaria cuando se pretende calcular el esfuerzo cortante torsional y la deflexión es la comprensión del concepto de *par de torsión* y la relación entre las tres variables críticas que intervienen en la transmisión de potencia: *par de torsión*, *potencia* y *velocidad de rotación*.

Par de torsión. La figura 4-4 muestra una llave de caja con una extensión con la que se está apretando un perno. El *par de torsión* aplicado, tanto al perno como a la extensión, es el producto de la fuerza aplicada por la distancia de la línea de acción de ésta al eje del perno. Es decir,

Par de torsión

$$\text{par de torsión} = T = F \times d \tag{4–1}$$

Así pues, el par de torsión se expresa en las unidades de *fuerza por distancia*, las cuales son N·m en el sistema métrico y lb·in o lb·ft en el sistema inglés.

Problema de ejemplo 4–1 Para la llave de la figura 4–4 calcule la magnitud del par de torsión aplicado al perno si se ejerce una fuerza de 50 N en un punto a 250 mm del eje de la caja.

Solución

Objetivo: Calcular el par de torsión en la llave.

Datos: El montaje mostrado en la figura 4–4, $F = 50$ N. $d = 250$ mm = longitud del brazo de palanca

Análisis: Utilizar la ecuación (4–1), $T = F \times d$

Resultados: $$\text{Par de torsión} = T = (50\text{ N})(250\text{ mm}) \times \frac{1\text{ m}}{1000\text{ mm}} = 12.5\text{ N}\cdot\text{m}$$

Comentario: La llave aplica un par de torsión de 12.5 N·m al perno.

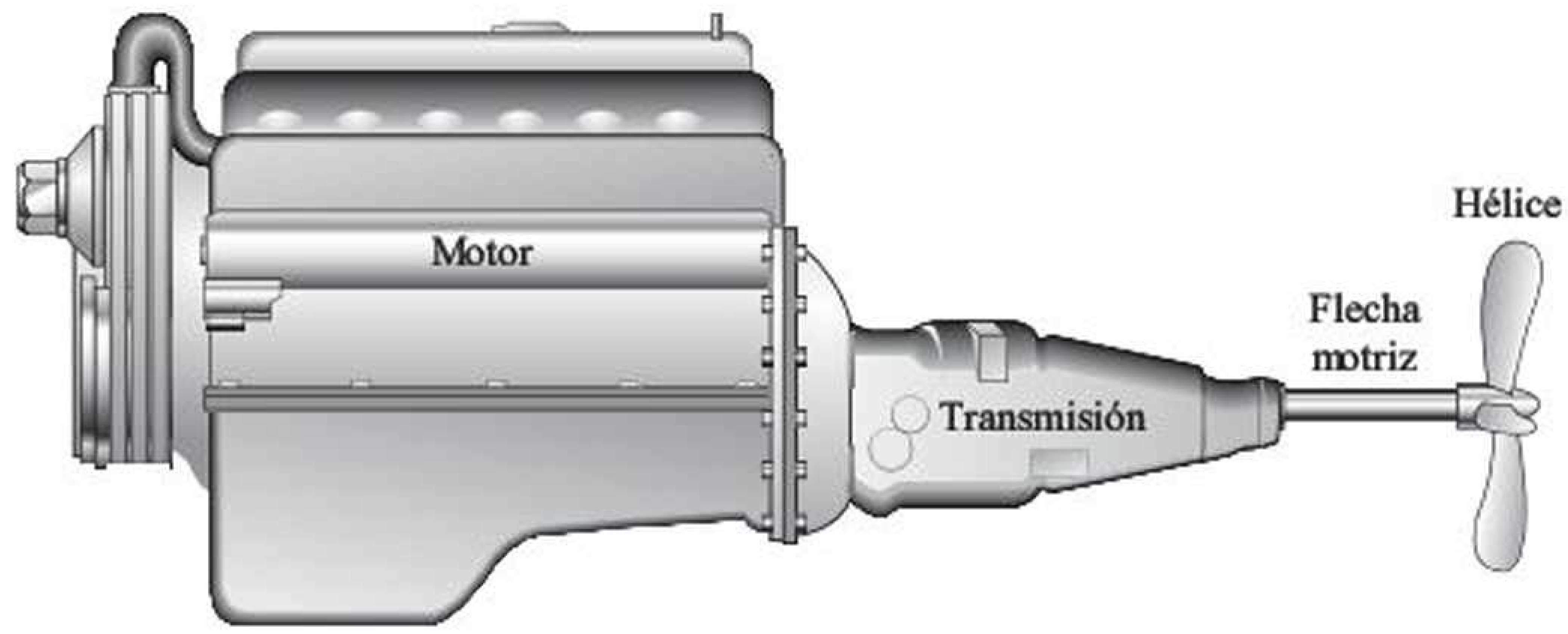


FIGURA 4–5
Sistema de propulsión de un bote.

Potencia

La potencia se define como la rapidez de transferencia de energía.

La figura 4–5 muestra el sistema propulsor de un bote. La potencia desarrollada por el motor fluye a través de la transmisión y la flecha motriz hacia la hélice, la que impulsa el bote hacia delante. El cigüeñal en el interior del motor, las diversas flechas que componen la transmisión y la flecha motriz experimentan torsión.

La magnitud del par de torsión en una flecha de transmisión de potencia depende de la cantidad de potencia que soporta y de la velocidad de rotación, según la siguiente relación:

Potencia

$$\text{potencia} = \text{par de torsión} \times \text{velocidad de rotación}$$
$$P = T \times n \tag{4–2}$$

Ésta es una relación muy útil porque con dos valores cualquiera, P, n o T, que se conozcan, se puede calcular el tercero.

Se debe prestar una cuidadosa atención a las unidades cuando se trabaja con par de torsión, potencia y velocidad de rotación. A continuación se revisan las unidades apropiadas en el sistema métrico SI y el sistema inglés.

Potencia en unidades del sistema métrico SI. En el sistema métrico SI, el *joule* es la unidad estándar de energía y equivale a N·m, la unidad estándar del par de torsión. Es decir,

$$1.0\text{ J} = 1.0\text{ N}\cdot\text{m}$$

Luego la potencia se define como

Unidades de potencia del SI

$$\text{potencia} = \frac{\text{energía}}{\text{tiempo}} = \frac{\text{joule}}{\text{segundo}} = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{s}} = \text{watt} = \text{W} \tag{4–3}$$

Observe que 1.0 J/s se define como 1.0 watt (1.0 W). El watt es una unidad de potencia algo pequeña, por lo que a menudo se utiliza el kilowatt (1.0 kW = 1000 W).

La unidad estándar de velocidad de rotación en el sistema métrico SI es *radianes sobre segundo*, rad/s. Con frecuencia, sin embargo, la velocidad de rotación se expresa en revoluciones por minuto. La conversión requerida se muestra a continuación, con la conversión de 1750 rpm en rad/s.

$$n = \frac{1750\text{ rev}}{\text{min}} \times \frac{2\pi\text{ rad}}{\text{rev}} \times \frac{1\text{ min}}{60\text{ s}} = 183\text{ rad/s}$$

Cuando se utiliza n en rad/s en la ecuación (4–2), el radián *no se considera como unidad*, tal como se ilustra en ejemplo siguiente.

Problema de ejemplo 4–2 Un malacate iza (levanta) 425 kg de concreto. Calcule el peso del concreto que equivale a la fuerza ejercida en el malacate por el concreto.

Solución

Objetivo Calcular el par de torsión en la flecha.

Datos $P = 95$ kW $= 95\,000$ W $= 95\,000$ N·m/s; $n = 525$ rpm

Análisis La ecuación (4–2) se resolverá para T para calcular el par de torsión.

$$P = Tn, \quad \text{entonces } T = P/n$$

Pero n debe estar en rad/s, como a continuación se determina,

$$n = \frac{525\text{ rev}}{\text{min}} \times \frac{2\pi\text{ rad}}{\text{rev}} \times \frac{1\text{ min}}{60\text{ s}} = 55.0\text{ rad/s}$$

Resultados El par de torsión es

$$T = \frac{P}{n} = \frac{95\,000\text{ N}\cdot\text{m}}{\text{s}} \times \frac{1}{55.0\text{ rad/s}} = 1727\text{ N}\cdot\text{m}$$

Comentario Observe que la unidad de radián se ignoró en los cálculos.

Potencia en unidades del sistema inglés. Las unidades típicas de par de torsión, potencia y velocidad de rotación en el sistema inglés de unidades son

T = par de torsión (lb·in)

n = velocidad de rotación (rpm)

P = potencia (caballos de fuerza, hp)

Note que 1.0 hp = 6600 lb·in/s. Luego las conversiones de unidades requeridas para que las unidades sean compatibles son

$$\text{potencia} = T(\text{lb}\cdot\text{in}) \times n\left(\frac{\text{rev}}{\text{min}}\right) \times \frac{1\text{ min}}{60\text{ s}} \times \frac{2\pi\text{ rad}}{\text{rev}} \times \frac{1\text{ hp}}{6600\text{ lb}\cdot\text{in/s}}$$

o

Unidades de potencia del sistema inglés

$$\text{potencia} = \frac{Tn}{63\,000} \tag{4–4}$$

Problema de ejemplo 4–3 Calcule la potencia, en caballos de fuerza, transmitida por una flecha si desarrolla un par de torsión de 15 000 lb·in y gira a 525 rpm.

Solución

Objetivo Calcular la potencia transmitida por la flecha.

Datos $T = 15\,000$ lb·in; $n = 525$ rpm

Análisis Se utilizará la ecuación (4–4) directamente porque T y n están en las unidades apropiadas de lb·in y rpm. La potencia estará en caballos de fuerza.

Resultados La potencia es

$$P = \frac{Tn}{63\,000} = \frac{(15\,000)(525)}{63\,000} = 125 \text{ hp}$$

Sensores de par de torsión. Existen ocasiones en las que los diseñadores mecánicos e ingenieros tienen que medir el par de torsión en laboratorios de desarrollo de productos, o incorporar un sensor de par de torsión en equipo que están operando. El sitio 4 de Internet incluye a lista de fabricantes comerciales de sensores de par de torsión que cubren una amplia variedad de valores desde 5N·m hasta más de 225 000 N·m (0.044 lb·in hasta 2×10^6 lb·in). Los sensores incorporan transductores para producir una salida de lectura digital electrónica o de señales analógicas para indicar valores de par de torsión. El sitio 5 de Internet es un artículo que analiza la historia, el estado actual y las proyecciones a futuro de la tecnología de detección de par de torsión.

4–3 ESFUERZO CORTANTE TORSIONAL EN MIEMBROS CON SECCIONES TRANSVERSALES CIRCULARES

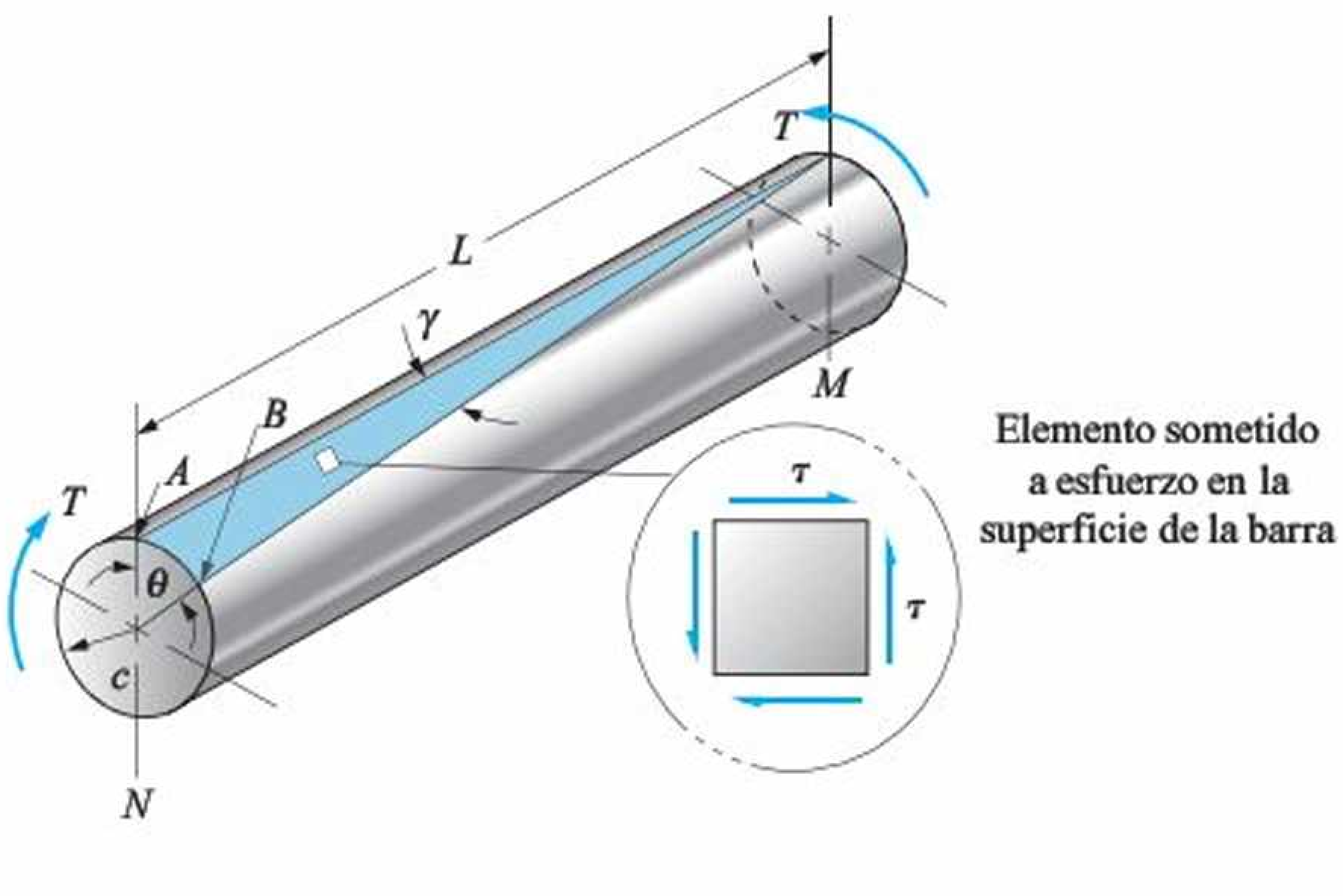
Cuando un miembro se somete a un par de torsión externo, en el material del cual está hecho el miembro se desarrolla un par de torsión resistente interno, el cual es el resultado de los esfuerzos generados en el material.

La figura 4–6 muestra una barra circular sometida a un par de torsión T. La sección N gira con respecto a la sección M, como se muestra. Estas fuerzas cortantes generan esfuerzos cortantes en el elemento. Para que el elemento sometido a esfuerzo esté en equilibrio, en las caras superior e inferior del elemento deben actuar esfuerzos cortantes iguales.

El elemento sometido a esfuerzo cortante mostrado en la figura 4–6 es fundamentalmente el mismo de la figura 1–19, utilizado en el análisis de esfuerzo cortante directo. Si bien la forma en que se producen los esfuerzos difiere, la naturaleza del esfuerzo cortante torsional es la misma del esfuerzo cortante directo cuando se considera un elemento infinitesimal.

Cuando la barra circular se somete a un par de torsión externo, el material en cada una de sus secciones transversales se deforma de tal modo que las fibras en la superficie externas experimentan la deformación máxima. En el eje central de la barra no se produce deformación. Entre el centro y la superficie externa, la deformación varía linealmente con la posición radial r.

FIGURA 4–6 Esfuerzo cortante torsional en una barra circular.



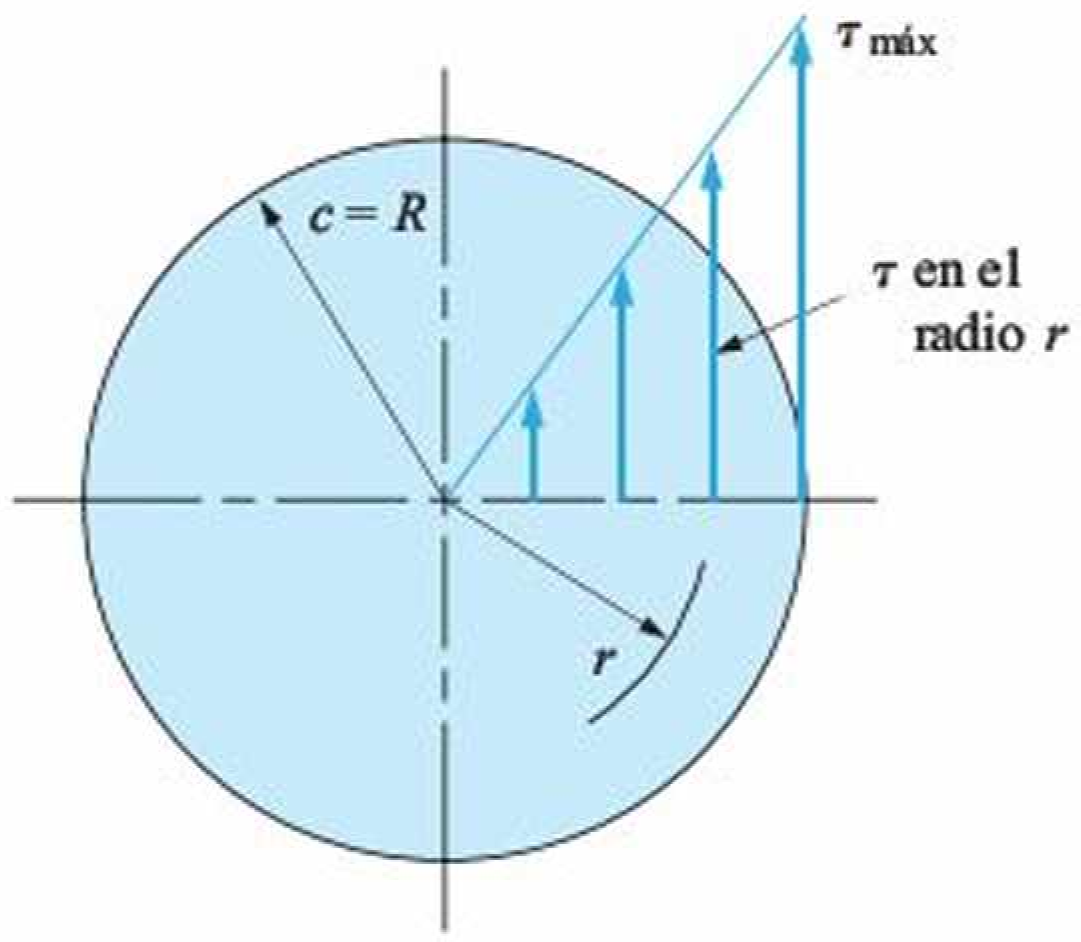


FIGURA 4–7 Distribución del esfuerzo cortante en la sección transversal de una barra.

Como el esfuerzo es directamente proporcional a la deformación, podemos decir que el esfuerzo máximo ocurre en la superficie externa, que el esfuerzo varía linealmente con la posición radial r y que en el centro el esfuerzo es cero. La figura 4–7 ilustra estas observaciones.

La derivación de la fórmula del esfuerzo cortante máximo en la superficie externa de la barra se demostrará en la siguiente sección. Por ahora, expresamos la *fórmula del esfuerzo cortante torsional* como

Fórmula del esfuerzo cortante torsional

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc}{J} \qquad \textbf{(4–5)}$$

donde T = par de torsión aplicado en la sección de interés
c = radio de la sección transversal
J = momento polar de inercia de la sección transversal

La fórmula del momento polar de inercia (J) de una sección transversal circular se desarrolla en la sección 4-6. Por el momento, mostramos los resultados de la derivación, como,

Momento polar de inercia de una barra circular

$$J = \frac{\pi D^4}{32} \qquad \textbf{(4–6)}$$

donde D es el diámetro de la flecha; es decir, $D = 2R$.

Por la variación lineal del esfuerzo y la deformación con la posición en la barra como se ilustra en la figura 4–7, el esfuerzo, τ, en cualquier posición radial, r, puede calcularse por medio de

Esfuerzo cortante en cualquier radio

$$\tau = \tau_{\text{máx}} \frac{r}{c} \qquad \textbf{(4–7)}$$

Las ecuaciones (4–5), (4–6) y (4–7) se utilizan para calcular el esfuerzo cortante en un punto cualquiera de una barra circular sometida a un par de torsión externo. Los ejemplos siguientes ilustran el uso de estas ecuaciones.

Problema de ejemplo 4–4

Para la llave de caja mostrada en la figura 4–4, calcule el esfuerzo cortante torsional máximo en la parte media donde el diámetro es de 9.5 mm. El par de torsión aplicado es de 10.0 N·m.

Solución

Objetivo: Calcular el esfuerzo cortante torsional máximo en la extensión.

Datos: Par de torsión = T = 10.0 N·m; diámetro = D = 9.5 mm

Análisis Se utiliza la ecuación (4–6) para calcular J y la ecuación (4–5) para calcular el esfuerzo cortante máximo. Además, $c = D/2 = 9.5\text{ mm}/2 = 4.75\text{ mm}$.

Resultados

$$J = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi(9.5\text{ mm})^4}{32} = 800\text{ mm}^4$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc}{J} = \frac{(10\text{ N}\cdot\text{m})(4.75\text{ mm})}{800\text{ mm}^4} \times \frac{10^3\text{ mm}}{\text{m}} = 59.4\text{ N/mm}^2 = 59.4\text{ MPa}$$

Comentario Este nivel de esfuerzo ocurrirá en todos los puntos de la superficie de la parte circular de la extensión.

Problema de ejemplo 4–5 Calcule el esfuerzo cortante torsional máximo que se desarrollaría en una flecha circular sólida de 1.25 in de diámetro si se transmiten 125 hp mientras gira a 525 rpm.

Solución

Objetivo Calcular el esfuerzo cortante torsional máximo en la flecha.

Datos Potencia $= P = 125$ hp; velocidad de rotación $= n = 525$ rpm

Diámetro de la flecha $= D = 1.25$ in.

Análisis Resuelva la ecuación (4–4) para el par de torsión, T. Utilice la ecuación (4–6) para calcular J y la ecuación (4–5) para calcular el esfuerzo cortante máximo. Por otra parte, $c = D/2 = 1.25\text{ in}/2 = 0.625$ in.

Resultados Ecuación (4–4),

$$\text{Potencia} = P = \frac{Tn}{63\,000}$$

Resolviéndola para el par de torsión T se obtiene

$$T = \frac{63\,000\,P}{n}$$

Recuerde que esta ecuación da el valor del par de torsión de forma directa en lb·in cuando P está en caballos de fuerza y n está en rpm. Por lo tanto,

$$T = \frac{63\,000(125)}{525} = 15\,000\text{ lb}\cdot\text{in}$$

$$J = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi(1.25\text{ in})^4}{32} = 0.240\text{ in}^4$$

Entonces

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc}{J} = \frac{(15\,000\text{ lb}\cdot\text{in})(0.625\text{ in})}{0.240\text{ in}^4} = 39\,100\text{ psi}$$

Comentario Este nivel de esfuerzo ocurrirá en todos los puntos de la superficie de la flecha.

4–4 DERIVACIÓN DE LA FÓRMULA DEL ESFUERZO CORTANTE TORSIONAL

La forma estándar de la fórmula del esfuerzo cortante torsional para una barra circular sometida a un par de torsión externo se presentó como ecuación (4–5) y su uso se ilustró en los ejemplos 4–4 y 4–5. Esta sección demostrará la derivación de dicha formula. Las figuras 4–6 y 4–7 ilustran la naturaleza general de las cargas de torsión y el efecto del par de torsión en el comportamiento de la barra circular.

En esta derivación, se supone que el material de la barra se comporta conforme a la ley de Hooke; es decir, el esfuerzo es directamente proporcional a la deformación. Además, las propiedades de la barra son homogéneas e isotrópicas; es decir, el material reacciona igual independientemente de la dirección de las cargas aplicadas. Además, se supone que la barra es de sección transversal constante cerca de la sección de interés.

Si se consideran dos secciones transversales M y N en diferentes lugares de la barra, la sección N giraría un ángulo θ con respecto a la sección M. Las fibras del material experimentarían una deformación que sería máxima en la superficie externa de la barra y variarían linealmente con la posición radial hasta un valor nulo en el centro de la barra. Debido a que, en el caso de los materiales elásticos que obedecen la ley de Hooke, el esfuerzo es proporcional a la deformación, el esfuerzo máximo también ocurriría en el exterior de la barra, como se muestra en la figura 4–7. También se muestra la variación lineal del esfuerzo, τ, con la posición radial, r, en la sección transversal. Entonces usando la proporcionalidad de triángulos semejantes,

$$\frac{\tau}{r} = \frac{\tau_{\text{máx}}}{c} \tag{4–8}$$

En consecuencia, el esfuerzo cortante en cualquier radio se expresa como una función del esfuerzo cortante máximo en la superficie externa de la flecha,

$$\tau = \tau_{\text{máx}} \times \frac{r}{c} \tag{4–9}$$

Es de hacerse notar que el esfuerzo cortante τ actúa de manera uniforme en una pequeña área anular, dA, de la flecha, como se ilustra en la figura 4–8. Ahora bien, como la fuerza es igual al esfuerzo por el área, la fuerza en el área dA es

$$dF = \tau dA = \underbrace{\tau_{\text{máx}} \frac{r}{c}}_{\text{esfuerzo}} \times \underbrace{dA}_{\text{área}}$$

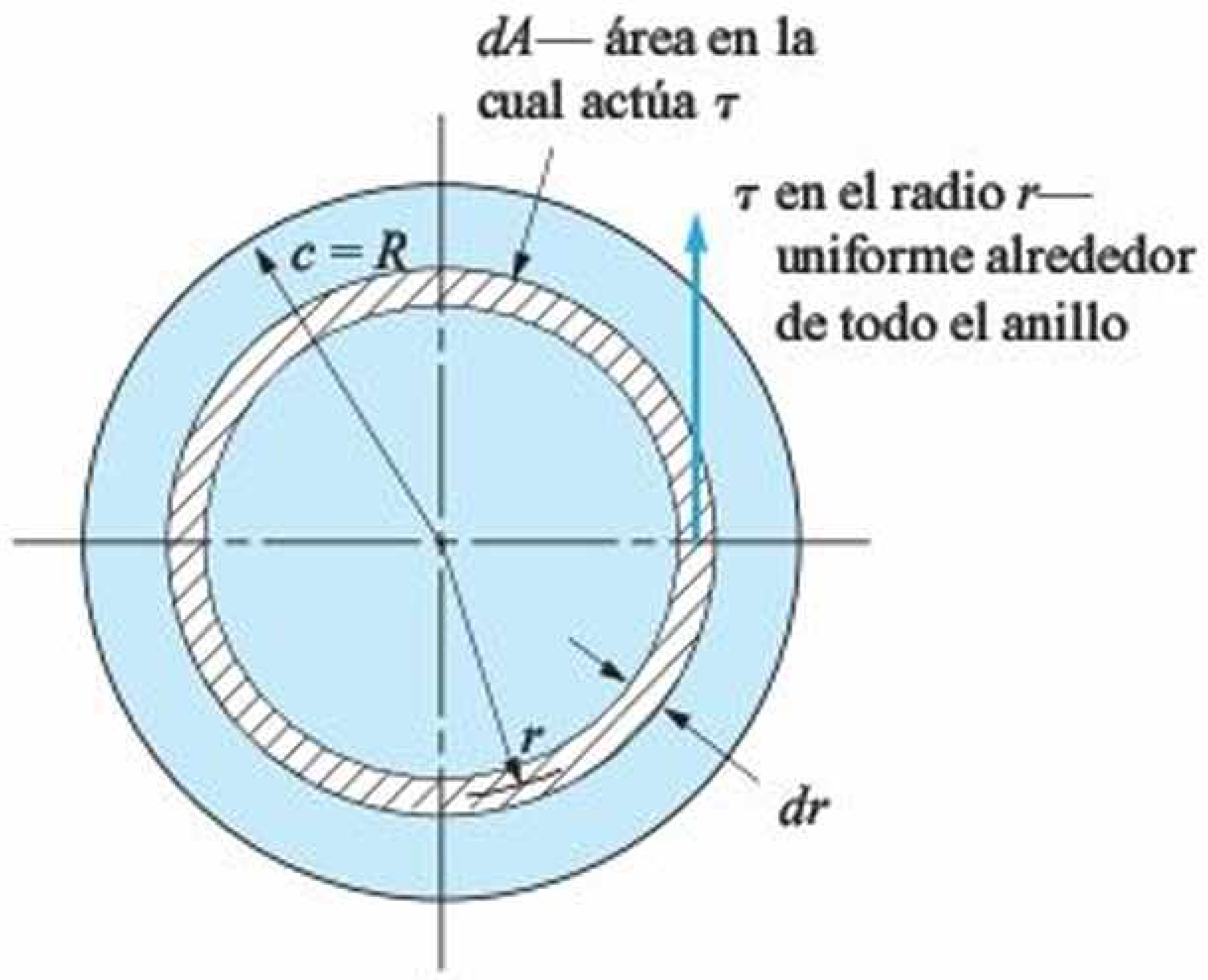


FIGURA 4–8 Esfuerzo cortante τ en el radio r que actúa en el área dA.

El siguiente paso es considerar que el par de torsión dT generado por esta fuerza es el producto de dF por la distancia radial a dA. Entonces

$$dT = dF \times r = \underbrace{\tau_{\text{máx}} \frac{r}{c} dA}_{\text{fuerza}} \times \underbrace{r}_{\text{radio}} = \tau_{\text{máx}} \frac{r^2}{c} dA$$

Esta ecuación es el par de torsión resistente interno desarrollado en la área pequeña dA. El par de torsión total en toda la superficie sería la suma de todos los pares de torsión individuales que actúan en todas las áreas de la sección transversal. El proceso de sumar se realiza mediante la técnica matemática de integración, ilustrada como sigue:

$$T = \int_A dT = \int_A \tau_{\text{máx}} \frac{r^2}{c} dA$$

En el proceso de integración, los términos constantes tales como $\tau_{\text{máx}}$ y c pueden salir del signo de integración, y la ecuación se escribe como

$$T = \frac{\tau_{\text{máx}}}{c} \int_A r^2 dA \qquad \textbf{(4–10)}$$

En mecánica, el término $\int r^2 dA$ recibe el nombre de *momento polar de inercia* y se identifica con el símbolo J. La ecuación (4-10) puede escribirse como

$$T = \tau_{\text{máx}} \frac{J}{c}$$

o

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc}{J} \qquad \textbf{(4–11)}$$

El método de evaluar J se desarrolla en la siguiente sección.

La ecuación (4–11), que es idéntica a la ecuación (4–5), se utiliza para calcular el esfuerzo cortante máximo en una barra circular sometida a torsión. El esfuerzo cortante máximo ocurre en una parte cualquiera de la superficie externa de la barra.

4–5 MOMENTO POLAR DE INERCIA DE BARRAS CIRCULARES SÓLIDAS

Consulte la figura 4–8, que muestra una sección transversal circular sólida. Para evaluar J con

$$J = \int r^2 dA$$

se debe considerar que dA es el área de un pequeño anillo de espesor dr situado a una distancia r del centro de la sección.

Con dr de pequeña magnitud, el área es la de una franja de longitud igual a la circunferencia del anillo por el espesor.

$$dA = \underbrace{2\pi r}_{\text{circunferencia de un anillo en el radio } r} \times \overbrace{dr}^{\text{espesor del anillo}}$$

En consecuencia, el momento polar de inercia de toda la sección transversal se determina integrando desde $r = 0$ en el centro de la barra hasta $r = R$ en la superficie externa.

$$J = \int_0^R r^2 dA = \int_0^R r^2(2\pi r)dr = \int_0^R 2\pi r^3\, dr = \frac{2\pi R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2}$$

En general, es más conveniente utilizar el diámetro en lugar del radio. Luego como $R = D/2$,

$$J = \frac{\pi(D/2)^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32} \qquad \textbf{(4–12)}$$

4–6 ESFUERZO CORTANTE TORSIONAL Y MOMENTO POLAR DE INERCIA DE BARRAS CIRCULARES HUECAS

Más adelante se demostrará que existen muchas ventajas al utilizar una barra circular hueca, en comparación con una sólida, para soportar un par de torsión. Esta sección se ocupa del método de calcular el esfuerzo cortante máximo y el momento polar de inercia de una barra hueca.

La figura 4–9 muestra la geometría básica de una barra hueca. Las variables son,

R_i = radio interno

D_i = diámetro interno

R_o = radio externo = c

D_o = diámetro externo

La lógica y los detalles del desarrollo de la fórmula del esfuerzo cortante torsional, como se muestran en la sección 4–4, también son válidos tanto para una barra hueca como para una barra sólida. La diferencia entre ellas radica en la evaluación del momento polar de inercia, como más adelante se verá. En consecuencia, se puede utilizar la ecuación (4–5) o la (4–11) para calcular el esfuerzo cortante torsional máximo en una barra sólida o una hueca.

Además, como se ilustra en la figura 4–9, el esfuerzo cortante máximo ocurre en la superficie externa de la barra y varía linealmente con la posición radial en el interior de la barra. El esfuerzo cortante mínimo ocurre en la superficie interna. El esfuerzo cortante en cualquier posición radial se calcula con la ecuación (4–7) o (4–9).

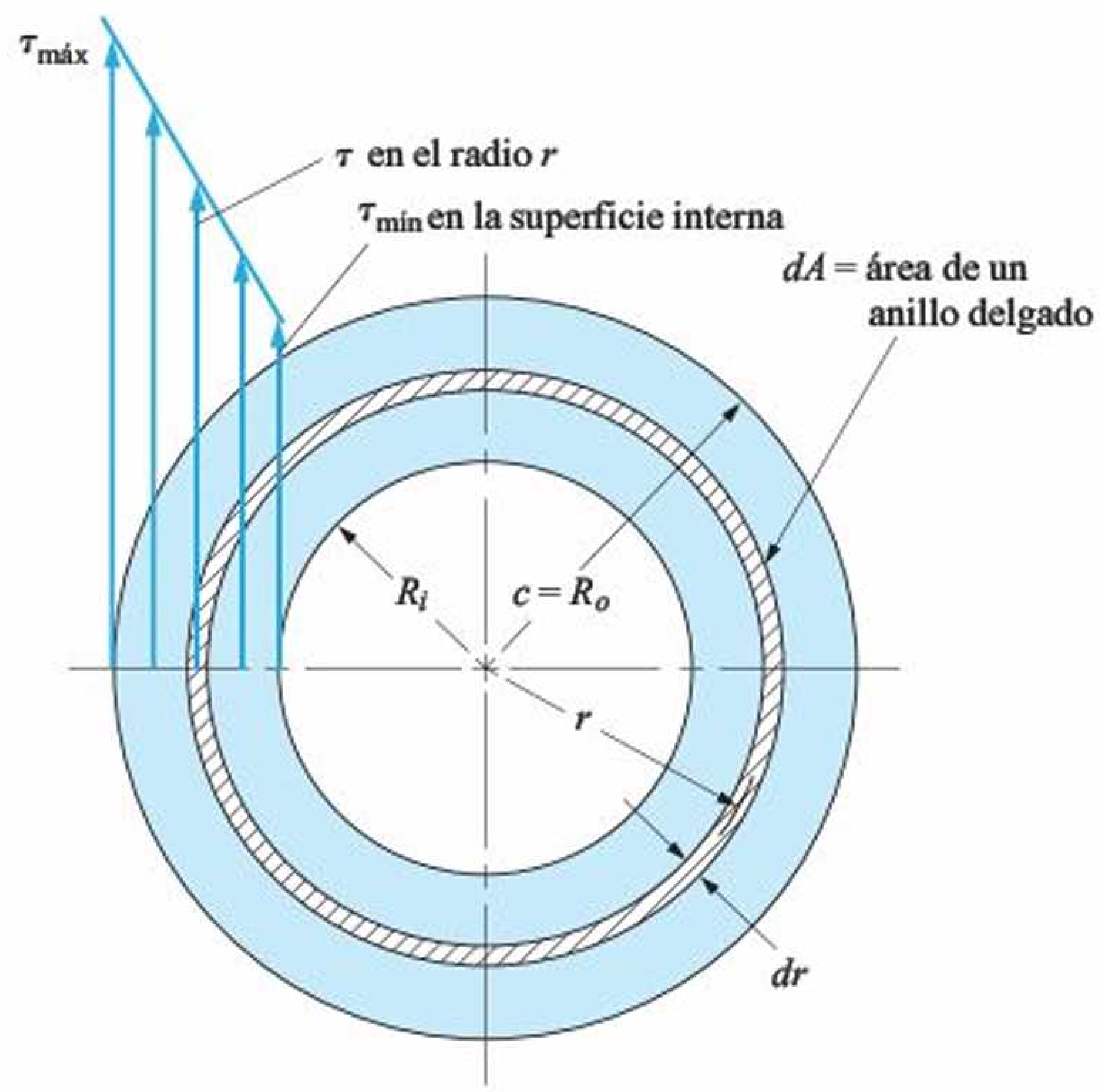


FIGURA 4–9 Notación para las variables utilizadas en la derivación de J para una barra redonda hueca.

Momento polar de inercia de una barra hueca. El proceso de derivación de la fórmula del momento polar de inercia de una barra hueca es similar a la que se utilizó para la barra sólida. Consulte de nuevo la figura 4–9 por lo que se refiere a la geometría. Partiendo de la definición básica del momento polar de inercia,

$$J = \int r^2 dA$$

como antes, $dA = 2\pi r dr$. Pero en el caso de la barra hueca, r varía únicamente desde R_i hasta R_o. Luego

$$J = \int_{R_i}^{R_o} r^2(2\pi r)dr = 2\pi \int_{R_i}^{R_o} r^3 dr = \frac{2\pi(R_o^4 - R_i^4)}{4}$$

$$J = \frac{\pi}{2}(R_o^4 - R_i^4)$$

Sustituyendo $R_o = D_o/2$ y $R_i = D_i/2$ se obtiene

Momento polar de inercia de una barra hueca

$$J = \frac{\pi}{32}(D_o^4 - D_i^4) \tag{4–13}$$

Esta es la ecuación para el momento polar de inercia para una barra circular hueca.

Resumen de relaciones para esfuerzos torsionales cortantes en barras circulares huecas

Máximo esfuerzo torsional

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc}{J} \tag{4–11}$$

$\tau_{\text{máx}}$ ocurre en la superficie externa de la barra, donde c es el radio de la barra,

Esfuerzo cortante en cualquier posición radial

$$\tau = \tau_{\text{máx}}\frac{r}{c} = \frac{Tr}{J} \tag{4–9}$$

Momento polar de inercia de barras huecas

$$J = \frac{\pi}{32}(D_o^4 - D_i^4) \tag{4–13}$$

Problema de ejemplo 4–6 Para la flecha motriz de la hélice de la figura 4–5, calcule el esfuerzo cortante torsional cuando transmite un par de torsión de 1.76 kN·m. La flecha es un tubo hueco de 60 mm de diámetro externo y 40 mm de diámetro interno. Determine el esfuerzo en las superficies externa e interna.

Solución Objetivo Calcular el esfuerzo cortante torsional en las superficies externa e interna de la flecha hueca motriz de la hélice.

Datos La flecha mostrada en la figura 4–5. Par de torsión $= T = 1.76$ kN·m. $= 1.76 \times 10^3$ N·m
Diámetro externo $= D_o = 60$ mm; diámetro interno $= D_i = 40$ mm.

Análisis El cálculo final del esfuerzo cortante torsional en la superficie externa se hará con la ecuación (4–11). La ecuación (4–9) se utilizará para calcular el esfuerzo en superficie interna. El momento polar de inercia se calculará con la ecuación (4–13). Y ahora, $c = D_o/2 = 30$ mm.

Resultados En la superficie externa,

$$\tau_{máx} = \frac{Tc}{J}$$

$$J = \frac{\pi}{32}(D_o^4 - D_i^4) = \frac{\pi}{32}(60^4 - 40^4)\text{ mm}^4 = 1.02 \times 10^6\text{ mm}^4$$

$$\tau_{máx} = \frac{Tc}{J} = \frac{(1.76 \times 10^3\text{ N}\cdot\text{m})(30\text{ mm})}{1.02 \times 10^6\text{ mm}^4} \times \frac{10^3\text{ mm}}{\text{m}}$$

$$\tau_{máx} = 51.8\text{ N/mm}^2 = 51.8\text{ MPa}$$

En la superficie interna, $r = D_i/2 = 40\text{ mm}/2 = 20\text{ mm}$,

$$\tau = \tau_{máx}\frac{r}{c} = 51.8\text{ MPa} \times \frac{20\text{ mm}}{30\text{ mm}} = 34.5\text{ MPa}$$

Comentario El lector deberá visualizar estos valores de esfuerzo graficados en la sección transversal mostrada en la figura 4–9.

4–7 DISEÑO DE MIEMBROS CIRCULARES SOMETIDOS A TORSIÓN

En un problema de diseño se conocen las cargas que actúan en un miembro, y lo que se requiere es determinar su geometría para asegurarse de que soportará las cargas con seguridad. La selección del material y la determinación de los esfuerzos de diseño son partes integrales del proceso de diseño. *Las técnicas desarrolladas en esta sección son sólo para miembros circulares, sometidos únicamente a torsión.* Desde luego, se analizan tanto miembros circulares sólidos como huecos. La torsión en miembros no circulares se estudia en una sección posterior de este capítulo. En capítulos subsiguientes se presenta la combinación de torsión con flexión y cargas axiales.

La ecuación básica del esfuerzo cortante torsional, la ecuación (4–11), se expresó como

$$\tau_{máx} = \frac{Tc}{J} \qquad \textbf{(4–11)}$$

En el diseño, podemos sustituir un cierto esfuerzo de diseño τ_d por $\tau_{máx}$. Como en el caso de miembros sometidos a esfuerzo cortante directo hechos de materiales dúctiles, el esfuerzo de diseño está relacionado con la resistencia del material a cortante. Es decir,

$$\tau_d = \frac{s_{ys}}{N}$$

donde N es el factor de diseño elegido por el diseñador basado en el tipo de carga. Se puede usar la tabla 4–1 como guía para determinar el valor de N.

En los casos en que no se dispone de valores de s_{ys}, el valor puede ser estimado como $s_y/2$. Este valor dará un valor razonable, y por lo general conservador, para metales dúctiles, sobre todo para acero. Entonces

Esfuerzo cortante de diseño

$$\tau_d = \frac{s_{ys}}{N} = \frac{s_y}{2N} \qquad \textbf{(4–14)}$$

TABLA 4–1 Factores de diseño y esfuerzos cortantes de diseño para metales dúctiles

Tipo de carga	Factor de diseño	Esfuerzo cortante de diseño $\tau_d = s_y/2N$
Torsión estática o constante	2	$\tau_d = s_y/4$
Torsión repetida	4	$\tau_d = s_y/8$
Impacto o choque torsional	6	$\tau_d = s_y/12$

En un problema de diseño, el par de torsión, T, sería conocido. Luego, en la ecuación (4–11) sólo c y J deben ser determinados. Observe que tanto c como J son propiedades de la geometría del miembro que se va a diseñar. En el caso de miembros circulares sólidos (flechas), el diámetro define por completo la geometría. Se ha demostrado que

$$c = \frac{D}{2}$$

y

$$J = \frac{\pi D^4}{32}$$

Ahora conviene señalar que si se forma el cociente J/c, se obtiene una expresión simple que contiene D.

En el estudio de la resistencia de materiales, el término J/c recibe el nombre de *módulo de sección polar* y se utiliza el símbolo Z_p para denotarlo.

Módulo de sección polar-flechas sólidas

$$Z_p = \frac{J}{c} = \frac{\pi D^4}{32} \times \frac{1}{D/2} = \frac{\pi D^3}{16} \tag{4–15}$$

Si se sustituye Z_p por J/c en la ecuación (4–11) se obtiene

Esfuerzo cortante máximo

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{T}{Z_p} \tag{4–16}$$

Para utilizar esta ecuación en el proceso de diseño, se hace $\tau_{\text{máx}} = \tau_d$ y luego se resuelve para Z_p.

Módulo de sección polar requerido

$$Z_p = \frac{T}{\tau_d} \tag{4–17}$$

La ecuación (4–17) dará el valor requerido del módulo de sección polar de una flecha circular para limitar el esfuerzo cortante torsional a τ_d cuando se somete a un par de torsión T. En ese caso se utiliza la ecuación (4–15) para determinar el diámetro requerido de una flecha circular sólida. Resolviendo para D se obtiene

Diámetro requerido

$$D = \sqrt[3]{\frac{16 Z_p}{\pi}} \tag{4–18}$$

Si se va a diseñar una flecha hueca,

Módulo de sección polar–flechas huecas

$$Z_p = \frac{J}{c} = \frac{\pi}{32}(D_o^4 - D_i^4) \times \frac{1}{D_o/2}$$

$$Z_p = \frac{\pi}{16}\,\frac{D_o^4 - D_i^4}{D_o} \tag{4–19}$$

En este caso, uno de los diámetros *o* la relación entre los dos diámetros tendría que ser especificada y resolver para la geometría completa de la flecha hueca.

PROBLEMA DE EJEMPLO PROGRAMADO

La solución de este problema se presenta en un formato programado. Usted deberá responder cada pregunta en el momento de ser planteada antes de pasar a la siguiente sección, después de la línea que las separa. El propósito de este proceso es que usted intervenga en las actividades de toma de decisiones requeridas de un diseñador.

Problema de ejemplo 4–7

La transmisión final de una transportadora que vierte carbón en un carro de ferrocarril es una flecha sometida a torsión pura y que transmite un par de torsión de 800 N·m. Un diseño propuesto exige que la flecha tenga una sección transversal circular. Complete el diseño especificando primero un acero adecuado para la flecha y luego el diámetro.

Solución

Objetivo

1. Especificar un acero adecuado para la flecha.
2. Especificar el diámetro de la flecha.

Datos

Par de torsión aplicado $= T = 800$ N·m

La flecha impulsa una transportadora de carbón

Análisis

En primer lugar, como una ayuda para seleccionar un material adecuado, ¿qué tipo de carga experimentará la flecha en servicio?

Es probable que la transmisión de una transportadora experimente un tipo de servicio muy severo conforme el carbón se vacía sobre la transportadora. Por consiguiente, el diseño deberá ser capaz de soportar las cargas de impacto y choque. ¿Qué propiedades debe poseer el acero para la flecha?

Se debe utilizar un material mucho muy dúctil porque los materiales con esa característica soportan las cargas de choque mucho mejor que los frágiles. La resistencia del acero debe ser moderadamente elevada, de modo que el diámetro requerido de la flecha sea razonable. Es importante seleccionar un acero maquinable porque es probable que la flecha requiera maquinado durante su fabricación. ¿Cuál es una medida típica de ductilidad para aceros?

El capítulo 2 menciona que el *porcentaje de alargamiento* de un acero indica su ductilidad. Para que soporte impacto y choque, se debe especificar un acero con un porcentaje de alargamiento de más de 10%. Ahora especifique un acero adecuado.

Existen muchos aceros que puedan dar resultados satisfactorios. Especifiquemos acero AISI 1141 OQT 1300. Tome los datos pertinentes del apéndice A–14.

Tal vez encontró que $s_y = 469$ MPa y que el 28% de alargamiento indica una elevada ductilidad. Asimismo observe, tal como se mencionó en el capítulo 2, que los aceros de la serie 1100 son fáciles de maquinar por el contenido relativamente elevado de azufre presente en la aleación.

Utilizaremos las ecuaciones (4–16), (4–17 y (4–18) para continuar el proceso de diseño con el objetivo final de especificar un diámetro adecuado para la flecha. Sabemos que el par de

torsión aplicado es de 800 N·m. El siguiente paso consiste en determinar un esfuerzo cortante de diseño aceptable. ¿Cómo lo hará?

La tabla 4–1 requiere $\tau_d = s_y/2N$ con $N = 6$, es decir, $\tau_d = s_y/12$. Entonces,

$$\tau_d = s_y/12 = 469\text{ MPa}/12 = 39.1\text{ MPa} = 39.1\text{ N/mm}^2$$

¿Cuál es el siguiente paso?

Podemos usar la Ecuación (4-17) para calcular el valor requerido del módulo de la sección polar para la sección transversal de la flecha. Hágalo en este punto.

Debería haber hallado el requerido $Zp = 20.5 \times 10^3\text{ mm}^3$ a partir de

$$Z_p = \frac{T}{\tau_d} = \frac{800\text{ N}\cdot\text{m}}{39.1\text{ N/mm}^2} \times \frac{10^3\text{ mm}}{\text{m}} = 20.5 \times 10^3\text{ mm}^3$$

¿Cuál es el siguiente paso?

Podemos calcular el diámetro mínimo aceptable para la flecha con la ecuación (4–18). Hagámoslo ahora.

Deberá tener $D_{\text{mín}} = 47.1$ mm, calculado con

$$D = \sqrt[3]{\frac{16Z_p}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16(20.5 \times 10^3)\text{ mm}^3}{\pi}} = 47.1\text{ mm}$$

Sería apropiado especificar un diámetro para la flecha un poco más grande que el anterior. Utilice el apéndice A–2 como guía y especifique un diámetro.

Se prefiere especificar $D = 50$ mm.

Resumen de resultados La flecha se fabricará de acero AISI 1141 OQT 1300 con un diámetro de 50 mm.

Comentario El esfuerzo cortante máximo en la superficie externa de la flecha de 50 mm de diámetro en realidad es menor que el esfuerzo de diseño porque especificamos un diámetro un poco más grande que el diámetro mínimo requerido de 47.1 mm. Calculemos ahora el esfuerzo máximo real en la flecha. Primero, calcularemos el módulo de sección polar para la flecha de 50 mm de diámetro.

$$Z_p = \frac{\pi D^3}{16} = \frac{\pi(50)^3\text{ mm}^3}{16} = 24.5 \times 10^3\text{ mm}^3$$

Luego, el esfuerzo cortante máximo es

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{T}{Z_p} = \frac{800\text{ N}\cdot\text{m}}{24.5 \times 10^3\text{ mm}^3} \times \frac{10^3\text{ mm}}{1\text{ m}} = 32.6\text{ N/mm}^2 = 32.6\text{ MPa}$$

4–8 COMPARACIÓN DE MIEMBROS CIRCULARES SÓLIDOS Y MIEMBROS CIRCULARES HUECOS

Ahora demostraremos, con un ejemplo, que las flechas huecas son más eficientes que las sólidas. En este caso el término *eficiencia* se utiliza como una medida de la masa del material de una flecha requerida para soportar un par de torsión dado con un nivel de esfuerzo cortante dado. El siguiente ejemplo ilustra el diseño de una flecha hueca con un diámetro externo un poco más grande, que desarrolla el mismo esfuerzo cortante máximo que la flecha sólida de 50 mm de diámetro que se acaba de diseñar. Luego, la masa de la flecha hueca es equiparable a la de la flecha sólida.

PROBLEMA DE EJEMPLO PROGRAMADO

La solución de este problema se presenta en un formato programado. Usted deberá responder cada pregunta en el momento de ser planteada antes de pasar a la siguiente sección, después de la línea que las separa. El propósito de este proceso es que usted intervenga en las actividades de toma de decisiones requeridas de un diseñador.

Problema de ejemplo 4–8

Un diseño alternativo de la flecha descrita en el ejemplo 4–7 sería un tubo hueco. Suponga que un tubo de 60 mm de diámetro externo está disponible en el mismo material que se especificó para la flecha sólida (AISI 1141 OQT 1300). Calcule el diámetro interno máximo que el tubo debe tener para que se produzca en el acero un esfuerzo igual al de la flecha sólida de 50 mm.

Solución

Objetivo Calcular el diámetro interno máximo permisible para la flecha hueca.

Datos Según el ejemplo 4–7, el esfuerzo cortante máximo $= \tau_{máx} = 32.6$ MPa.
$D_o = 60$ mm. Par de torsión aplicado $= T = 800$ N·m.

Análisis Como el esfuerzo cortante torsional es inversamente proporcional al módulo de sección polar, es necesario que el tubo hueco tenga el mismo valor de Z_p que la flecha sólida de 50 mm de diámetro. Es decir, $Z_p = 24.5 \times 10^3$ mm^3. ¿Cuál es la fórmula de Z_p para una flecha hueca?

$$Z_p = \frac{\pi}{16}\frac{D_o^4 - D_i^4}{D_o}$$

Se sabe que el diámetro externo, D_o, es de 60 mm. Podemos resolver la ecuación para el diámetro interno requerido, D_i. Hagámoslo ahora.

Deberá tener

$$D_i = \left(D_o^4 - \frac{16Z_pD_o}{\pi}\right)^{1/4}$$

Calculemos ahora el diámetro interno máximo permisible.

$$D_i = \left[(60)^4 - \frac{(16)(24.5 \times 10^3)(60)}{\pi}\right]^{1/4} \text{mm} = 48.4 \text{ mm}$$

Resumen de resultados Diseño final de la flecha hueca:
$D_o = 60$ mm; $D_i = 48.4$ mm.
Material: Acero AISI 1141 OQT 1300.
Esfuerzo cortante máximo en la superficie externa $= \tau_{máx} = 32.6$ MPa.

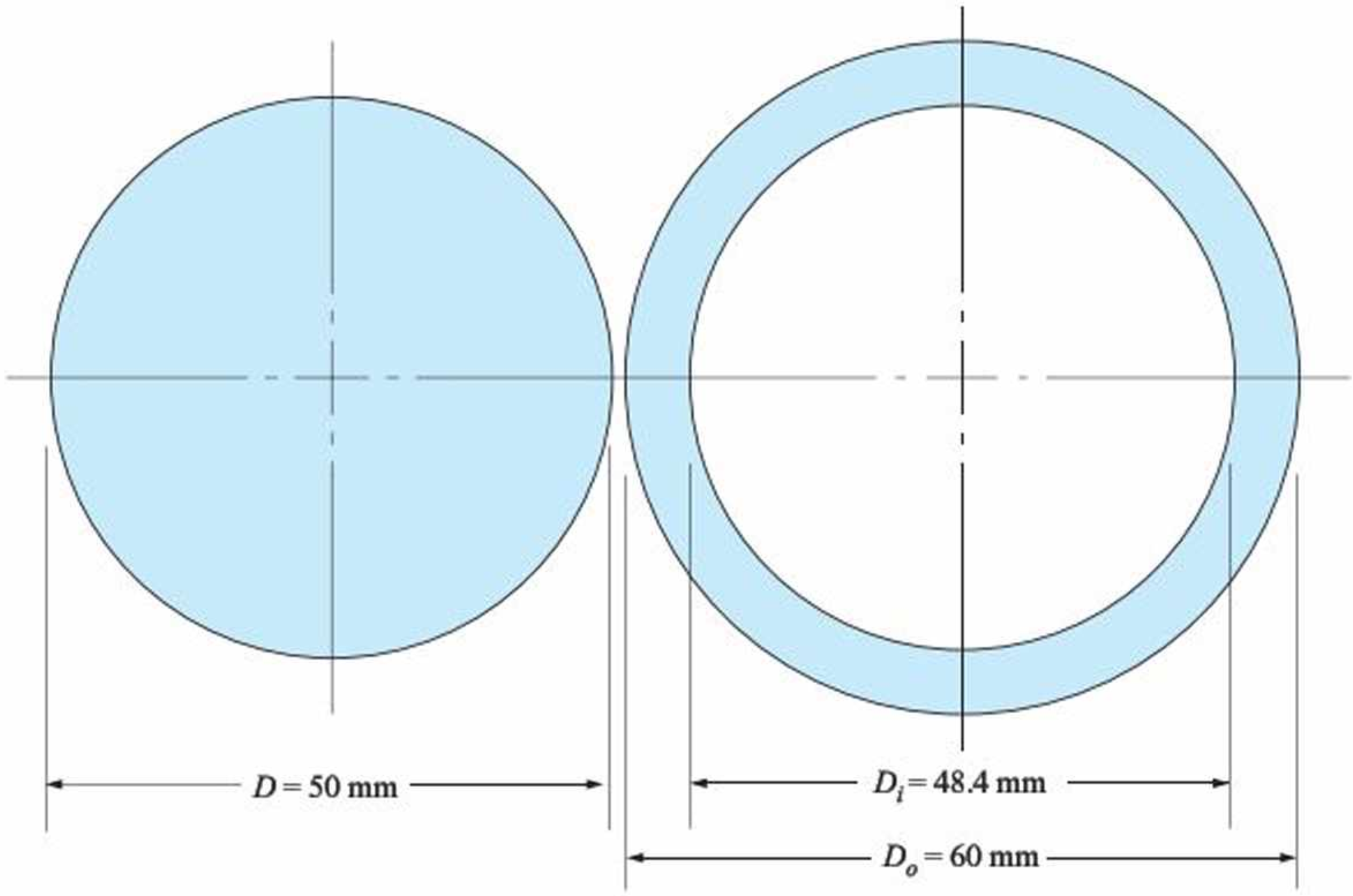


FIGURA 4–10 Comparación de flechas sólidas y huecas del problema de ejemplo 5–8.

Comentario La figura 4–10 muestra una comparación de la flecha hueca con la sólida que soporta el mismo esfuerzo cortante máximo. Los diseños están dibujados en tamaño real. A simple vista es evidente que la flecha hueca utiliza menos material. La siguiente sección demostrará que esto es cierto.

Masas de flechas sólidas y huecas. En muchas situaciones de diseño, la economía en el uso de material es un importante criterio del desempeño de un producto. En aplicaciones aeroespaciales, cualquier reducción en la masa de la aeronave o vehículo especial permite incrementar la carga útil. Los automóviles consumen menos combustible cuando son más ligeros. Asimismo, como la materia prima se adquiere a un precio por unidad de masa, una pieza más liviana en general cuesta menos.

Para economizar material en la fabricación de miembros de carga se requiere que éstos se sometan a un nivel de esfuerzo próximo al esfuerzo de diseño seguro. De este modo cada porción del miembro soporta una parte de la carga.

Los ejemplos 4–7 y 4–8 ilustran este punto. Recuerde que los dos diseños mostrados en la figura 4–10 producen el mismo esfuerzo cortante torsional máximo en la flecha de acero. El diámetro de la flecha hueca es un poco más grande, pero el *volumen* de metal determina la masa de la flecha. Considere un segmento de flecha de 1.0 m de longitud. El volumen de la flecha sólida es igual al área de su sección transversal por su longitud.

$$V_S = A_S L = \frac{\pi D^2}{4} L$$

$$V_S = \frac{\pi (50\text{ mm})^2}{4} \times 1.0\text{ m} \times \frac{1\text{ m}^2}{(10^3\text{ mm})^2} = 1.96 \times 10^{-3}\text{ m}^3$$

La masa es el volumen por la densidad, ρ. Según el apéndice A–14, la densidad del acero es de 7680 kg/m³. Por consiguiente, la masa de la flecha sólida es $V_S \times \rho$.

$$M_S = 1.96 \times 10^{-3}\text{ m}^3 \times 7680\text{ kg/m}^3 = 15.1\text{ kg}$$

El volumen de la flecha hueca es

$$V_H = A_H L = \frac{\pi}{4}(D_o^2 - D_i^2)(L)$$

$$V_H = \frac{\pi}{4}(60^2 - 48.4^2)\ \text{mm}^2 \times 1.0\ \text{m} \times \frac{1\ \text{m}^2}{(10^3\ \text{mm})^2}$$

$$V_H = 0.988 \times 10^{-3}\ \text{m}^3$$

Y su masa es $V_H \times \rho$.

$$M_H = 0.988 \times 10^{-3}\ \text{m}^3 \times 7680\ \text{kg/m}^3 = 7.58\ \text{kg}$$

De este modo se puede ver que la masa de la flecha hueca es casi de la *mitad de la* de la flecha sólida, aunque ambas están sometidas al mismo nivel de esfuerzo con un par de torsión dado.

Se puede hacer una generalización de este análisis. Comparando la masa de un flecha hueca con la de una flecha sólida de la misma longitud, L, y densidad de material, ρ, podemos calcular la relación de las dos masas con,

$$\frac{M_H}{M_S} = \frac{V_H\rho}{V_S\rho} = \frac{A_H L\rho}{A_S L\rho} = \frac{A_H}{A_S}$$

La relación de las masas es igual a la relación de las áreas de sección transversal de las flechas.

La razón por la que la flecha hueca es más liviana es que la mayor parte de su material experimenta un nivel de esfuerzo más elevado que en la flecha sólida. La figura 4–7 muestra la distribución del esfuerzo en la flecha sólida. El esfuerzo máximo, de 32.6 MPa, ocurre en la superficie externa. El esfuerzo varía entonces linealmente con el radio en otros puntos de la flecha hasta *cero* en el centro. En consecuencia, el material cerca de la parte media de la flecha no se utiliza con eficiencia.

Compare lo anterior con la ilustración de la flecha hueca en la figura 4–9. De nueva cuenta, el esfuerzo en la superficie externa es el máximo, 32.6 MPa. El esfuerzo en la superficie interna de la flecha hueca se calcula con la ecuación (4–6).

$$\tau = \tau_{\text{máx}} \frac{r}{c}$$

En la superficie interna, $r = R_i = D_i/2 = 48.4\ \text{mm}/2 = 24.2\ \text{mm}$. Asimismo, $c = R_o = D_o/2 = 60\ \text{mm}/2 = 30\ \text{mm}$. Por consiguiente

$$\tau = 32.6\ \text{MPa}\ \frac{24.2}{30} = 26.3\ \text{MPa}$$

El esfuerzo en puntos localizados entre las superficies interna y externa varía linealmente con el radio en cada punto. En consecuencia, se puede ver que todo el material de la flecha hueca mostrada en la figura 4–9 está sometido a un nivel de esfuerzo bastante elevado pero seguro. Esto ilustra por qué la sección hueca requiere menos material.

Desde luego, los datos específicos utilizados en la ilustración previa no pueden ser generalizados a todos los problemas. Sin embargo, en el caso de cargas torsionales de miembros circulares, se puede diseñar una sección hueca de modo que sea más ligera que una sólida, en tanto que ambas se sometan al mismo esfuerzo cortante torsional máximo.

Precaución en el caso de flechas huecas de pared delgada. Se deberá proceder prudentemente en cuanto a la tendencia de adelgazar cada vez más la pared de flechas huecas para utilizar con más eficiencia el material. Existe un límite al cual el espesor de pared puede adelgazarse antes de que se vuelva inestable y comience a pandearse y arrugarse localmente. Cuando esto ocurre, es probable que la flecha se colapse de manera repentina.

La referencia 5 presenta las siguientes ecuaciones como estimaciones del nivel de esfuerzo cortante torsional que hará que se pandee la pared de una flecha tubular de pared delgada.

Observe que la suposición de que la pared es delgada en general requiere que la relación del radio medio de la pared al espesor de ésta sea de 10 o mayor. Antes de aplicar las ecuaciones deberá verificar lo anterior.

Las variables principales implicadas son:

τ' = Esfuerzo cortante torsional aproximado al cual ocurrirá el pandeo

E = Módulo de elasticidad del material de la flecha

t = Espesor de pared de la flecha

l = Longitud de la flecha

r = Radio de la flecha

La decisión de que ecuación se va a utilizar está basada en el valor de la relación l/r.

a) Si $l/r > 6.6\sqrt[4]{1-\nu^2}\sqrt{r/t}$:

$$\tau' = 0.272\frac{E}{(1-\nu^2)^{3/4}}(t/r)^{3/2}$$

Vea la tabla 2–1 en el capítulo 2 para estimaciones de los valores de ν de metales comunes. Si ν es aproximadamente de 0.3 como lo es para acero, acero inoxidable, titanio, aluminio y latón, esta ecuación se escribe:

$$\tau' = 0292\ E(t/r)^{3/2}$$

b) Si $5 < l/r < 6.6\sqrt[4]{1-\nu^2}\sqrt{r/t}$: y

$$\tau' = E(t/l)^2\left[1.8 + \sqrt{1.2 + 0.201(l/\sqrt{tr})^3}\right]$$

c) Si $l/r < 5$:

$$\tau' = 0.10E(t/r) + 5E(t/l)^2$$

4–9 CONCENTRACIONES DE ESFUERZO EN MIEMBROS SOMETIDOS A TORSIÓN

Los miembros sometidos a torsión, sobre todo las flechas transmisoras de potencia, con frecuencia se fabrican con cambios de geometría en diferentes posiciones. La figura 4–11 muestra un ejemplo. Se trata de una parte de una flecha donde se montaría un elemento de transmisión de potencia, tal como un engrane. El diámetro del agujero en la maza del engrane sería tal que permitiría deslizarlo sobre la parte derecha de la flecha donde el diámetro de ésta es d = 25 mm. En el cuñero se insertaría una cuña cuadrada o rectangular, y en la maza del engrane habría una cuñero correspondiente para que se deslice sobre la cuña. El engrane se deslizaría entonces sobre la flecha de derecha a izquierda hasta que se detuviera contra el hombro en la sección 2, creado por el incremento del diámetro de la flecha a D = 40 mm. Para mantener el engrane en su posición, en la ranura de la sección 4, se inserta un anillo de retención.

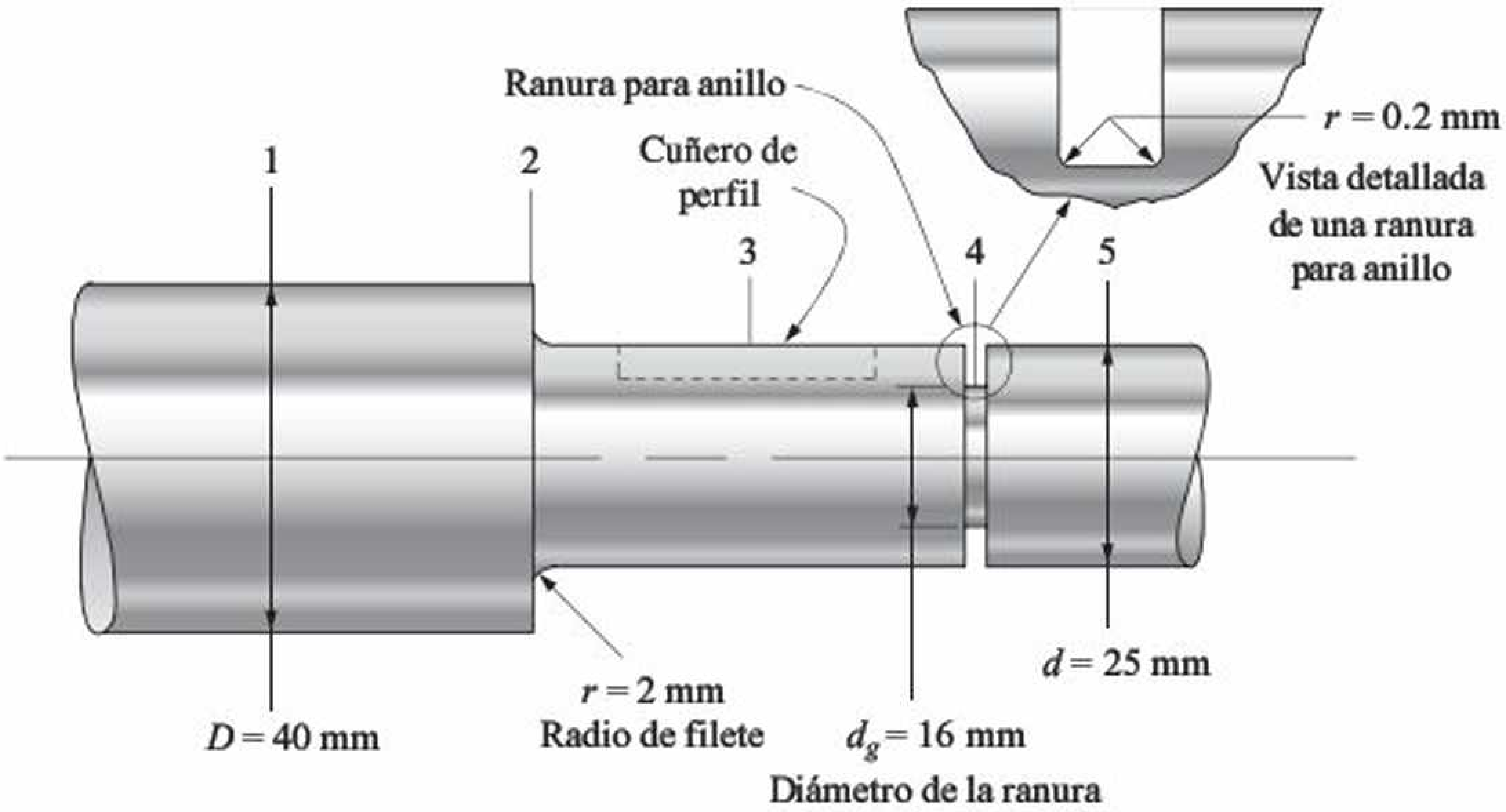


FIGURA 4–11 Flecha con concentraciones de esfuerzo.

Los cambios de la sección transversal de un miembro sometido a torsión hacen que el esfuerzo local cerca de los cambios sea más elevado que el pronosticado por la fórmula del esfuerzo cortante. El nivel real del esfuerzo en esos casos se determina experimentalmente. Luego se determina un *factor de concentración de esfuerzo*, el cual permite calcular el esfuerzo máximo en diseños similares con la relación

$$\tau_{\text{máx}} = K\tau_{\text{nom}} = K_t(T/Z_p) \qquad \textbf{(4–20)}$$

El término τ_{nom} es el esfuerzo nominal originado por la torsión, el cual se desarrollaría en las piezas en caso de que la concentración de esfuerzo no estuviera presente. Por lo tanto, se pueden utilizar las fórmulas de esfuerzo cortante [ecuaciones (4–5) y (4–16)] para calcular el esfuerzo nominal. El valor de K_t es un factor por el cual el esfuerzo máximo es mayor que el nominal.

Remitiéndose de nuevo a la figura 4–11, observe que habría varios niveles de esfuerzo en diferentes lugares a lo largo de la barra, aun si el par de torsión aplicado es el mismo a lo largo de toda ella. Los diámetros diferentes y la presencia de concentraciones de esfuerzo ocasionan los niveles de esfuerzo variables. El esfuerzo en la sección 1, donde $D = 40$ mm, sería relativamente bajo por la presencia de un diámetro grande y un módulo de sección polar correspondientemente grande. En la sección 2, el diámetro de la flecha se reduce a $d = 25$ mm y el escalón produce una concentración de esfuerzo que tiende a elevarse al nivel del esfuerzo local. Entonces, el cuñero en la sección 3 produce una concentración de esfuerzo diferente. En la sección 4, ocurren dos factores importantes que tienden a incrementar el esfuerzo local. El corte de la ranura para anillo reduce el diámetro a $d_g = 16$ mm y además produce dos escalones muy cercanos entre sí con radios de filete relativamente pequeños en el fondo de la ranura. En la sección 5, lejos de la ranura, el esfuerzo sería igual al esfuerzo nominal en la flecha de 25 mm de diámetro. El ejemplo 4–10 ilustra todas estas situaciones mediante cálculos reales de los esfuerzos en las cinco secciones de la flecha.

Antes del problema de ejemplo, analizaremos la naturaleza de los factores de concentración de esfuerzo. La siguiente lista de gráficas de apéndice ofrece datos sobre varios casos representativos.

Apéndice A–22–5: Barra redonda con agujero transversal sometida a torsión

Apéndice A–22–6: Barra redonda ranurada sometida a torsión

Apéndice A–22–7: Barra redonda escalonada sometida a torsión

Apéndice A–22–11: Flechas con cuñeros

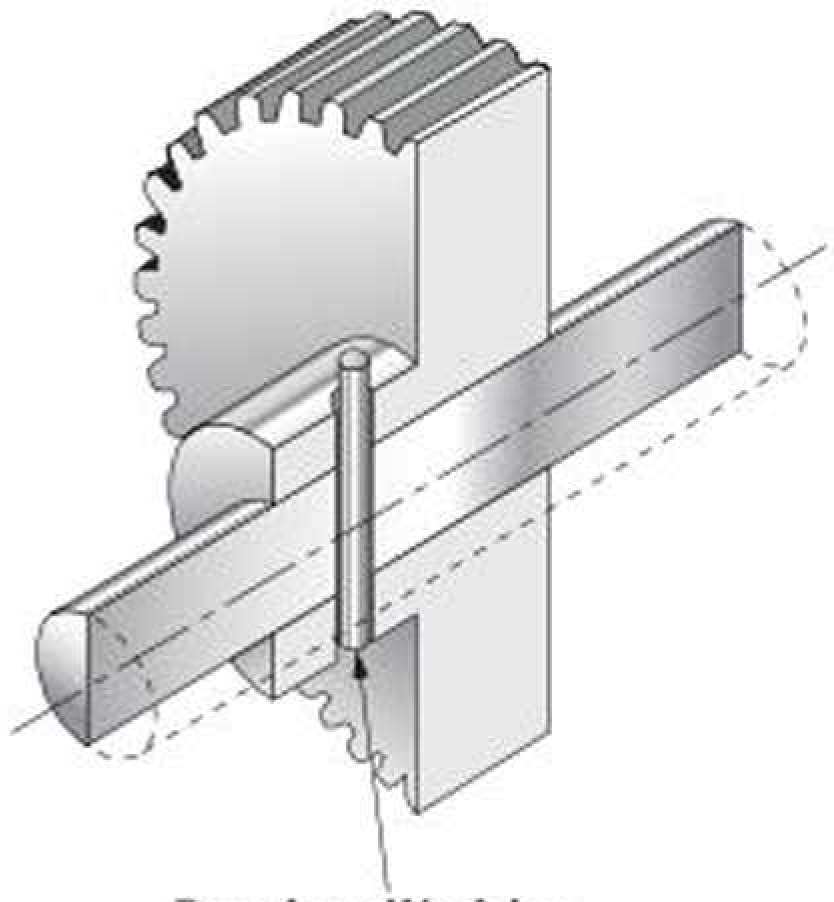


FIGURA 4–12 Flecha redonda con un barreno transversal utilizado para conectar un engrane a la flecha con un pasador cilíndrico.

Barra redonda con un agujero transversal. El propósito de perforar un agujero en una flecha es insertar un pasador a través de él y a través del agujero correspondiente en la maza de un elemento de máquina tal como un engrane, polea o rueda dentada. Vea la figura 4–12. El pasador sirve para localizar el elemento de máquina axialmente en la flecha, al tiempo transmite el par de torsión de la flecha al elemento o de éste a la flecha. El agujero en la flecha constituye en cambio geométrico repentino y produce una concentración de esfuerzo. El apéndice A–22–5 es una gráfica para este caso, donde se puede determinar K_t. La curva C corresponde al caso de flechas sometidas a torsión. Observe que la fórmula del esfuerzo nominal en la flecha está basada en toda la sección transversal bruta de la flecha.

Barra redonda ranurada. Las ranuras de fondo redondeado se tallan en barras redondas con el objeto de instalar sellos o distribuir aceite lubricante alrededor de una flecha. Vea la figura 4–11. El factor de concentración de esfuerzo depende de la relación del diámetro de la flecha al diámetro de la ranura, y de la relación del radio de la ranura al diámetro en la base de la misma. La ranura se talla con una herramienta de boca redondeada para producir la ranura de fondo redondeado. El radio debe ser tan grande como sea posible para reducir al mínimo el factor de concentración de esfuerzo. Observe que el esfuerzo nominal está basado en el diámetro *en la base de la ranura*. Vea el apéndice A–22–6.

Barra redonda escalonada. A menudo, las flechas se fabrican con dos o más diámetros, lo que produce una flecha escalonada como la mostrada en el apéndice A–22–7 y la figura 4–11. La cara del escalón sirve para localizar un costado de un elemento montado en la flecha, tal como un cojinete, engrane, polea o rueda dentada. Se debe tener cuidado al definir el radio en el fondo del escalón, llamado *radio de filete*. Debe evitarse las esquinas puntiagudas, ya que provocan factores de concentración de esfuerzo extremadamente elevados. El radio debe ser tan grande como sea posible sin que deje de ser compatible con los elementos montados en la flecha.

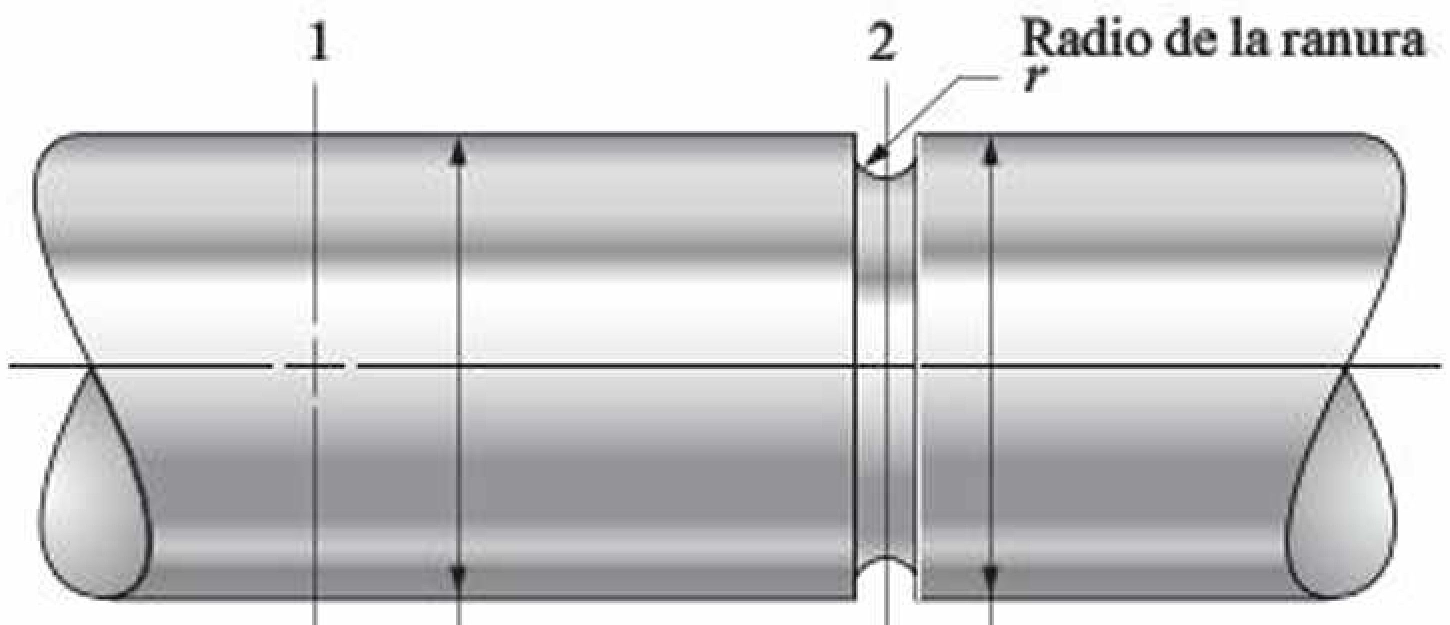
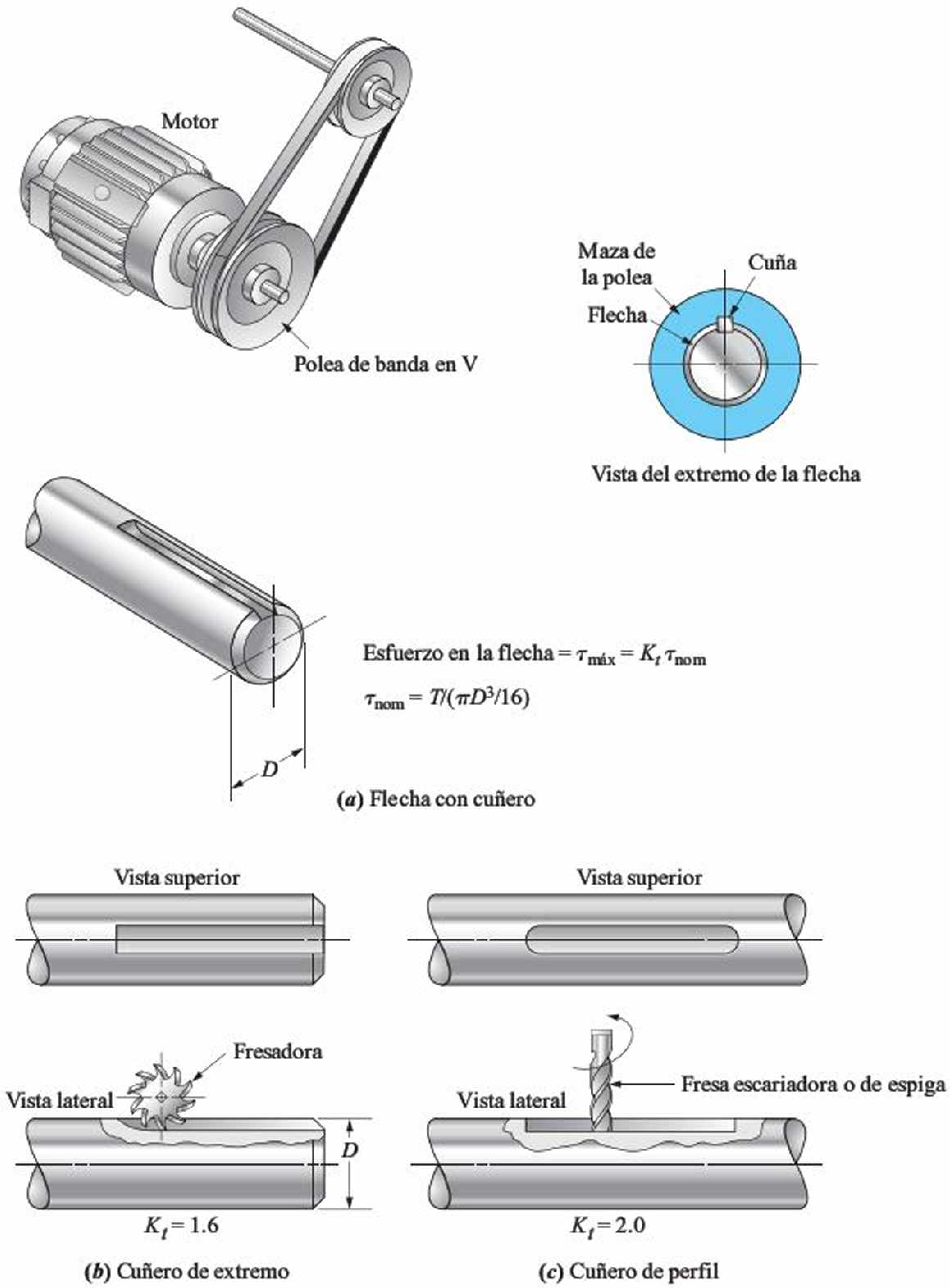


FIGURA 4–13 Flecha con una ranura circular.

Con frecuencia se utilizan anillos de retención asentados en ranuras talladas en la flecha para localizar elementos de máquina, como se muestra en la figura 4–11. Generalmente, las ranuras son de fondo plano con radios pequeños en los costados. Algunos diseñadores consideran las ranuras como si fueran dos escalones en la flecha muy cercanos entre sí y utilizan la gráfica de flechas escalonadas (apéndice A–22–7) para determinar el factor de concentración de esfuerzo. Por el radio pequeño en la base de la ranura, el radio relativo con frecuencia es bastante pequeño, lo que provoca valores de K_t tan elevados que quedan fuera de la gráfica. En casos como ésos, en ocasiones se utiliza un valor de $K_t = 3.0$.

Flechas con cuñeros. Los elementos transmisores de potencia por lo general transmiten un par de torsión hacia y desde las flechas por medio de cuñas insertadas en cuñeros cortados en ellas, como se muestra en la figura 4–14. La polea de banda en V montada en el extremo de

FIGURA 4–14 Factores de concentración de esfuerzo para cuñeros. (a) Aplicación representativa. (b) Cuñero de extremo hecho con una fresa circular. (c) Cuñero de perfil hecho con fresa escariadora o de espiga.



la flecha motriz es un ejemplo. Dos tipos de cuñeros se utilizan con frecuencia: los de *extremo* y los de *perfil*.

Para cortar el cuñero de extremo, por lo general en el extremo de una flecha, se utiliza una fresa circular de espesor igual al ancho del cuñero, como se muestra en la figura 4–14(b). Al final del corte, la fresa deja un radio suave, como se muestra en la vista lateral, y su resultado es $K_t = 1.6$ como valor de diseño.

Un cuñero de perfil se corta con una fresa escariadora de diámetro igual al ancho del cuñero. Utilizada por lo general en un lugar alejado de los extremos de la flecha, deja una esquina a escuadra en los extremos del cuñero visto de lado, como se muestra en la figura 4–14(c). Éste es más severo que el cuñero de extremo y se utiliza un valor de $K_t = 2.0$. Observe que los factores de concentración de esfuerzo responden tanto de la remoción de material de la flecha como del cambio de geometría.

Cuñas, pasadores y anillos de retención comercialmente disponibles. Los sitios de Internet 1–3 muestran cuñas, pasadores, anillos de retención comercialmente disponibles y flechas con cuñeros que se analizaron en esta sección como causas de discontinuidades geométricas que conducen a concentraciones de esfuerzo en flechas. En el sitio (2) donde se muestran anillos de retención, es posible acceder a las páginas desde un catálogo en línea que contiene numerosos estilos de anillos para tamaños de flechas que van desde aproximadamente 1/8 in. hasta 10 in (3.2 mm hasta 254 mm). Comúnmente se utiliza el estilo básico 5100 en flechas para fijar elementos activos tales como cojinetes, engranes, ruedas dentadas, poleas, garruchas y otros dispositivos. Se da la geometría completa y las dimensiones detalladas de las ranuras cortadas en la flecha donde se asientan los anillos. Observe el pequeño radio de filete solicitado para base de la ranura que da lugar a factores de concentración de esfuerzo relativamente elevados.

El uso de factores de concentración de esfuerzo se ilustra en los siguientes problemas de ejemplo.

Problema de ejemplo 4-9

La figura 4–13 muestra un segmento de una flecha donde se maquinó una ranura circular. Para un par de torsión aplicado de 4500 lb·in, calcule el esfuerzo cortante en la sección 1 donde el diámetro es máximo y en la sección 2 donde se localiza la ranura. Use $r = 0.10$ in, $D = 1.50$ in, $d_g = 1.25$ in.

Solución

Objetivo Calcular el esfuerzo en las secciones 1 y 2.

Datos Par de torsión aplicado $= T = 4500$ lb·in. La geometría de la flecha mostrada en la figura 4–13.
$r = 0.10$ in, $D = 1.50$ in, $d_g = 1.25$ in.

Análisis Suponiendo que la sección 1 está bastante lejos de la ranura, no existe una concentración de esfuerzo significativa. Consecuentemente, se puede utilizar la ecuación (4–16). En la sección 2 donde se localiza la ranura, se debe utilizar la ecuación (4–20). El valor del factor de concentración de esfuerzo se determina con el apéndice A–22–6.

Resultados En la sección 1: $\tau_{máx} = T/Z_p$.

$$Z_p = \pi D^3/16 = \pi(1.50\text{ in})^3/16 = 0.663\text{ in}^3$$

$$\tau_{máx} = \frac{4500\text{ lb}\cdot\text{in}}{0.663\text{ in}^3} = 6790\text{ psi}$$

En la sección 2: $\tau_{máx} = K_t T/Z_p$

$$Z_p = \pi d_g^3/16 = \pi(1.25\text{ in})^3/16 = 0.383\text{ in}^3$$

Para evaluar K_t, habrá que calcular dos valores como lo exige el apéndice A–22–6.

$$D/d_g = (1.50 \text{ in})/(1.25 \text{ in}) = 1.20$$
$$r/d_g = (0.10 \text{ in})/(1.25 \text{ in}) = 0.08$$

Por consiguiente, en la gráfica del apéndice A–22–6 se lee $K_t = 1.55$.

Ahora podemos calcular el esfuerzo cortante máximo.

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{K_t T}{Z_p} = \frac{(1.55)(4500 \text{ lb} \cdot \text{in})}{0.383 \text{ in}^3} = 18\,200 \text{ psi}$$

Comentario Observe que el esfuerzo en la ranura es 2.6 veces más elevado que aquel en la parte del diámetro máximo de la flecha. Una razón es la reducción del diámetro en la ranura. Además, el uso del factor de concentración de esfuerzo es esencial para predecir el nivel de esfuerzo máximo real en la ranura.

PROBLEMA DE EJEMPLO PROGRAMADO *Se analizará el esfuerzo en cada sección por separado en una sección separada por una línea horizontal. Deberá realizar los cálculos indicados antes de consultar los resultados mostrados.*

Problema de ejemplo 4–10 La figura 4–11 muestra un segmento de una flecha donde se va a montar un engrane. Éste se colocará centrado en el cuñero de la sección 3. Se recargará en el hombro de la sección 2 y un anillo de retención colocado en la ranura de la sección lo mantendrá en su posición. Se aplica un par de torsión repetido de 20 N·m a todo lo largo de la flecha. Calcule el esfuerzo cortante máximo en las secciones 1, 2, 3, 4 y 5 de la flecha. Luego especifique un acero adecuado para la flecha.

Solución Objetivo
1. Calcular los esfuerzos en las secciones 1, 2, 3, 4 y 5.
2. Especificar un acero adecuado para la flecha.

Datos La geometría de la flecha mostrada en la figura 4–11, $T = 20$ N·m repetido.

Análisis En cada caso, el análisis requiere la aplicación de la ecuación (4–20).

$$\tau_{\text{máx}} = K_t T / Z_p$$

Siempre se considerará que el par de torsión es de 20 N·m. Debe evaluar el factor de concentración de esfuerzo y el módulo polar apropiado para cada sección. Observe que $K_t = 1.0$ donde no cambia la geometría. Calcule el esfuerzo en la sección 1.

Sección 1. La geometría no cambia, por lo tanto $K_t = 1.0$. El diámetro de la flecha es $D =$ 40 mm. Entonces,

$$Z_p = \frac{\pi D^3}{16} = \frac{\pi (40 \text{ mm})^3}{16} = 12\,570 \text{ mm}^3$$

$$\tau_1 = \frac{20 \text{ N} \cdot \text{m}}{12\,570 \text{ mm}^3} \times \frac{10^3 \text{ mm}}{\text{m}} = 1.59 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 1.59 \text{ MPa}$$

Calcule el esfuerzo en la sección 2.

Sección 2. La flecha escalonada y el filete del hombro producen una concentración de esfuerzo que debe ser evaluada con el apéndice A–22–7. El módulo de sección polar debe basarse en el diámetro menor; $d = 25$ mm. Los resultados son

$$\tau_{nom} = \frac{T}{\pi d^3/16} = \frac{20\ \text{N}\cdot\text{m}}{[\pi(25)^3/16]\ \text{mm}^3} \times \frac{10^3\ \text{mm}}{\text{m}}$$
$$= 6.52\ \text{N/mm}^2 = 6.52\ \text{MPa}$$

El valor de K_t depende de las relaciones D/d y r/d.

$$\frac{D}{d} = \frac{40\ \text{mm}}{25\ \text{mm}} = 1.60$$
$$\frac{r}{d} = \frac{2\ \text{mm}}{25\ \text{mm}} = 0.08$$

Entonces según el apéndice A–22–7, $K_t = 1.45$. Por consiguiente,

$$\tau_2 = (1.45)(6.52\ \text{MPa}) = 9.45\ \text{MPa}$$

Ahora calcule el esfuerzo en la sección 3.

Sección 3. El cuñero tipo perfil presenta un factor de concentración de esfuerzo de 2.0. El esfuerzo nominal es el mismo que se calculó en el filete del hombro. Por consiguiente,

$$\tau_3 = K_t\tau_{nom} = (2.0)(6.52\ \text{Mpa}) = 13.04\ \text{MPa}$$

Calcule el esfuerzo en la sección 4.

Sección 4. En esta sección se encuentra la ranura para anillo. Aquí el esfuerzo nominal se calcula con base en el diámetro de la raíz de la ranura.

$$\tau_{nom} = \frac{T}{\pi d_g^3/16} = \frac{20\ \text{N}\cdot\text{m}}{[\pi(16)^3/16]\ \text{mm}^3} \times \frac{10^3\ \text{mm}}{\text{m}} = 24.9\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$
$$\tau_{nom} = 24.9\ \text{MPa}$$

El valor de K_t depende de d/d_g y r/d_g.

$$\frac{d}{d_g} = \frac{25\ \text{mm}}{16\ \text{mm}} = 1.56$$
$$\frac{r}{d_g} = \frac{0.2\ \text{mm}}{16\ \text{mm}} = 0.013$$

El factor de concentración de esfuerzo se lee en la gráfica del apéndice A–22–7. Éste es el tipo de caso en que $K_t = 3.0$ es razonable.

$$\tau_4 = K_t\tau_{nom} = (3.0)(24.9\ \text{MPa}) = 74.7\ \text{MPa}$$

Calcule el esfuerzo en la sección 5.

Sección 5. La sección 5 es la parte más pequeña de la flecha, donde no hay concentración de esfuerzo. Entonces $K_t = 1.0$ y

$$\tau = \frac{T}{Z_p} = \frac{T}{\pi d^3/16}$$

Observe que este esfuerzo es idéntico al esfuerzo nominal calculado para las secciones 2 y 3. Entonces en la sección 5,

$$\tau_5 = 6.52 \text{ MPa}$$

Resumen de los resultados

Existe una amplia de niveles de esfuerzo cerca del lugar de la flecha donde se va a montar el engrane.

$$\tau_1 = 1.59 \text{ MPa} \quad D = 40 \text{ mm} \quad K_t = 1.0.$$
$$\tau_2 = 9.45 \text{ MPa} \quad d = 25 \text{ mm} \quad K_t = 1.45. \text{ Escalón.}$$
$$\tau_3 = 13.04 \text{ MPa} \quad d = 25 \text{ mm} \quad K_t = 2.0. \text{ Cuñero.}$$
$$\tau_4 = 74.7 \text{ MPa} \quad d_g = 16 \text{ mm} \quad K_t = 3.0. \text{ Ranura para anillo.}$$
$$\tau_5 = 6.52 \text{ MPa} \quad d = 25 \text{ mm} \quad K_t = 1.0.$$

La especificación de un material apropiado debe basarse en el esfuerzo que se presenta en la sección 4 donde se localiza la ranura para anillo. Sea el esfuerzo de diseño, τ_d, igual a ese nivel de esfuerzo y determine la resistencia a la cedencia requerida del material.

Deberá haber obtenido una resistencia a la cedencia requerida de $s_y = 598$ MPa. Para el par de torsión repetido, la tabla 4–1 recomienda $N = 4$, y el resultado es

$$\tau_d = s_y/2N = s_y/8$$

Entonces, resolviendo para s_y se obtiene,

$$s_y = 8(\tau_d) = 8(74.7 \text{ MPa}) = 598 \text{ MPa}$$

Especifique un material apropiado.

Según el apéndice A–14, dos aceros apropiados para este requerimiento son el AISI 1040 WQT 900 y el AISI 41040 OQT 1300. Ambos tienen una resistencia adecuada y una alta ductilidad de acuerdo con su porcentaje de alargamiento. Sin duda, se podrían utilizar otras aleaciones y tratamientos térmicos.

Comentario

Revise los resultados de este ejemplo. Ilustra la importancia de considerar los detalles del diseño de una flecha en cualquier área local donde pudieran ocurrir concentraciones de esfuerzo.

4–10 TORSIÓN-DEFORMACIÓN TORSIONAL ELÁSTICA

La rigidez, además de la resistencia, es una importante consideración de diseño de miembros sometidos a torsión. La medida de rigidez torsional es el ángulo de torsión de una parte de una flecha con respecto a otra cuando se aplica un cierto par de torsión.

En aplicaciones de transmisión de potencia mecánica, la excesiva torsión de una flecha puede provocar vibraciones, que provocarían ruido y una sincronización inadecuada de las partes en movimiento. Hay lineamientos con respecto a la rigidez torsional que tienen ver con el grado de precisión deseado, como se indica en la tabla 4–2 (vea las referencias 1 y 3).

TABLA 4–2 Rigidez torsional recomendada: ángulo de torsión por unidad

Aplicación	Deflexión torsional	
	grados/in	rad/m
Parte de una máquina en general	1×10^{-3} a 1×10^{-2}	6.9×10^{-4} a 6.9×10^{-3}
Precisión moderada	2×10^{-5} a 4×10^{-4}	1.4×10^{-5} a 2.7×10^{-4}
Alta precisión	1×10^{-6} a 2×10^{-5}	6.9×10^{-7} a 1.4×10^{-5}

En el diseño estructural, los miembros de carga en ocasiones se someten a torsión, así como a tensión o flexión. La rigidez de una estructura depende entonces de la rigidez torsional de los componentes, Cualquier carta aplicada fuera del eje de un miembro y transversal al eje producirá torsión. Esta sección analizará la torsión de miembros circulares, tanto sólidos como huecos. Las secciones no circulares se analizarán más adelante. Es muy importante señalar que el comportamiento de un perfil de sección abierta, tal como un canal o ángulo, es muy diferente al de una sección cerrada, tal como un tubo circular o rectangular. En general, la rigidez torsional de las secciones abiertas es muy baja.

Ángulo de torsión de un miembro circular. Considere la flecha mostrada en la figura 4–15. Un extremo de la flecha, sección M, se mantiene fija mientras se aplica un par de torsión T al otro. En estas condiciones la flecha se torcerá entre los dos extremos un ángulo θ.

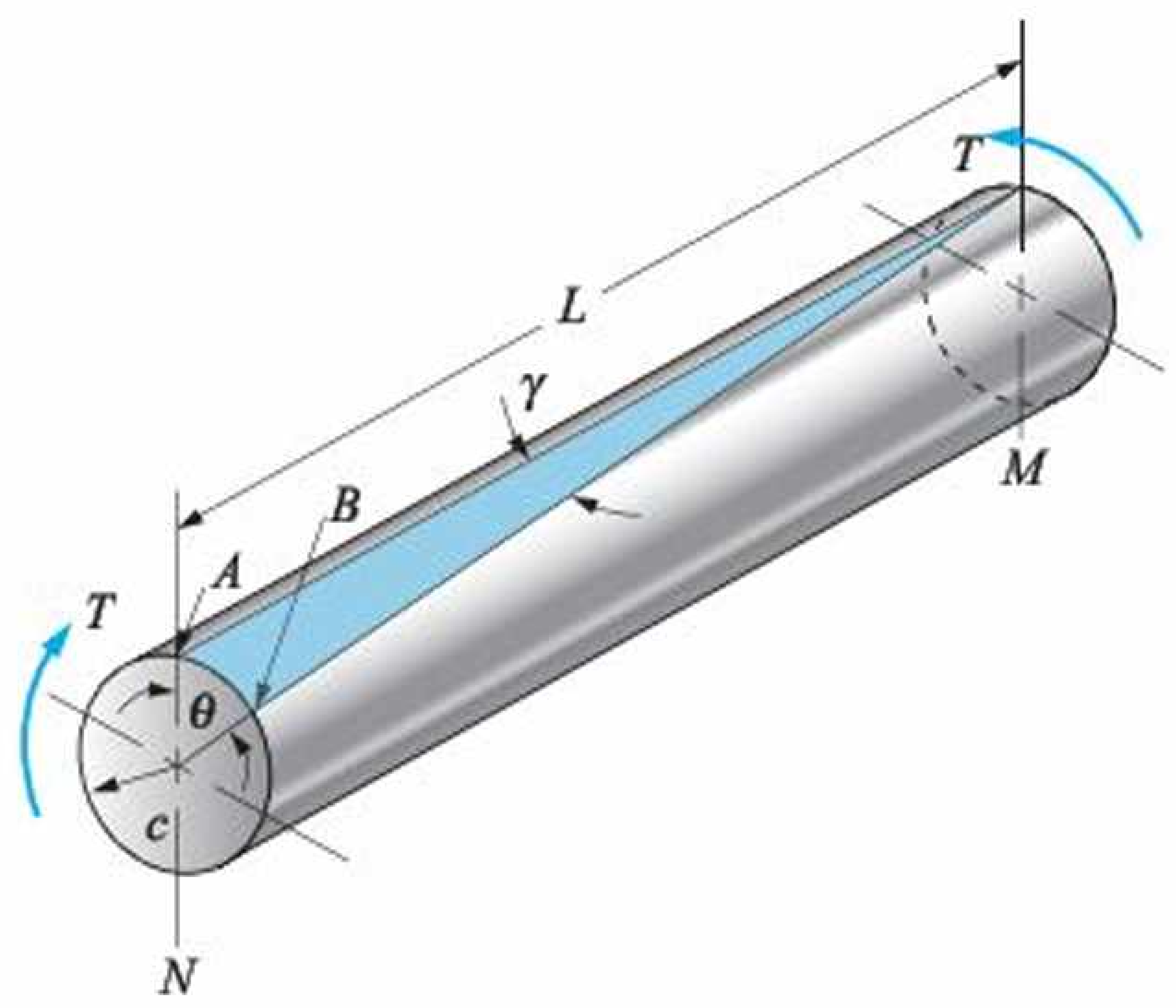
La derivación de la fórmula del ángulo de torsión depende de algunas suposiciones básicas sobre el comportamiento de un miembro circular cuando se somete a torsión. Conforme se aplica el par de torsión, un elemento de longitud L a lo largo de la superficie externa del miembro, el cual inicialmente era recto, gira un pequeño ángulo γ (gamma). Asimismo, un radio del miembro en una sección transversal gira un pequeño ángulo θ. En la figura 4–15, las rotaciones γ y θ están relacionadas con la longitud de arco AB en la superficie de la barra. Por la geometría, para ángulos pequeños, la longitud de arco es el producto del ángulo en radianes por la distancia al centro de la rotación. Por consiguiente, la longitud de arco AB se puede expresar como

$$AB = \gamma L$$

o

$$AB = \theta c$$

FIGURA 4–15
Deformación torsional en una barra circular.



donde c es el radio externo de la barra. Estas dos expresiones para la longitud de arco AB se pueden igualar entre sí,

$$\gamma L = \theta c$$

Resolviendo para γ se obtiene

$$\gamma = \frac{\theta c}{L} \tag{4–21}$$

El ángulo γ mide la deformación por cortante máxima en un elemento de la superficie externa de la barra. En el capítulo 2 se vio que la deformación por cortante, γ, está relacionada con el esfuerzo cortante, τ, por el módulo de elasticidad a cortante, G. Esa relación se expresó como la ecuación (2–5),

$$G = \frac{\tau}{\gamma} \tag{4–5}$$

En la superficie externa, entonces,

$$\gamma = G\gamma$$

Pero la fórmula del esfuerzo cortante torsional [ecuación (4–11)] estipula

$$\tau = \frac{Tc}{J}$$

Igualando estas dos expresiones para τ se obtiene

$$G\gamma = \frac{Tc}{J}$$

Ahora, si se sustituye γ con la ecuación (4–21), obtenemos

$$\frac{G\theta c}{L} = \frac{Tc}{J}$$

Ahora podemos eliminar c y resolver para θ;

Ángulo de torsión

$$\theta = \frac{TL}{JG} \tag{4–22}$$

El ángulo de torsión resultante, θ, está en radianes. Cuando se utilizan unidades compatibles para todos los términos que entran en el cálculo, todas las unidades se eliminan, y queda un número sin dimensiones. Éste deberá ser interpretado como el ángulo, θ, en radianes.

Uso de la fórmula del ángulo de torsión

- La ecuación (4–22) puede utilizarse para calcular el ángulo de torsión de una sección de una barra circular, ya sea sólida o hueca, con respecto a otra, donde L es la distancia

TABLA 4–3 Módulo de elasticidad a cortante, G.

Material	Módulo a cortante, G	
	GPa	psi
Aceros aleados y al carbón simple	80	11.5×10^6
Acero inoxidable tipo 304	69	10.5×10^6
Aluminio 6061-T6	26	3.75×10^6
Cobre al berilio	48	7.0×10^6
Magnesio	17	2.4×10^6
Aleación de titanio	43	6.2×10^6

entre ellas, siempre que el par de torsión, T, el momento polar de inercia, J, y el módulo de elasticidad a cortante, G, sean los mismos a lo largo de L.

- Si alguno de estos factores varía en un problema dado, la barra puede subdividirse en segmentos donde sean constantes para calcular los ángulos de rotación de dichos segmentos. Luego los ángulos calculados pueden combinarse algebraicamente para obtener el ángulo de torsión total. Este principio, llamado *superposición*, se ilustrará en el problema de ejemplo 4–13.
- El módulo de elasticidad a cortante, G, mide la rigidez torsional del material de la barra. La tabla 4–3 da valores de G para materiales seleccionados.

Problema de ejemplo 4–11

Determine el ángulo de torsión en grados entre dos secciones con una separación entre ellas de 250 mm en una varilla de acero de 10 mm de diámetro cuando se somete a un par de torsión de 15 N·m. La figura 4–15 muestra la disposición de la varilla.

Solución

Objetivo Calcular el ángulo de torsión en grados.

Datos Par de torsión aplicado $= T = 15$ N·m. Barra circular: diámetro $= D = 10$ mm.

Longitud $= L = 250$ mm (figura 4–15)

Análisis Se puede utilizar la ecuación (4–22). Calcule $J = \pi D^4/32$.
$G = 80$ GPa $= 80 \times 10^9$ N/m^2 (tabla 4–3).

Resultados

$$\theta = \frac{TL}{JG}$$

El valor de J es

$$J = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi(10 \text{ mm})^4}{32} = 982 \text{ mm}^4$$

Entonces

$$\theta = \frac{TL}{JG} = \frac{(15 \text{ N}\cdot\text{m})(250 \text{ mm})}{(982 \text{ mm}^4)(80 \times 10^9 \text{ N/m}^2)} \times \frac{(10^3 \text{ mm})^3}{1 \text{ m}^3} = 0.048 \text{ rad}$$

Observe que todas las unidades se eliminan. Con el ángulo en grados,

$$\theta = 0.048 \text{ rad} \times \frac{180 \text{ grados}}{\pi \text{ rad}} = 2.73 \text{ grados}$$

Problema de ejemplo 4–12 Determine el diámetro requerido de una flecha redonda de aleación de aluminio 6061–T6 si no se debe torcer más de 0.08 grados de in en 1 ft de longitud cuando se somete a un par de torsión de 75 lb·in.

Solución

Objetivo Calcular el diámetro requerido, D, de la flecha redonda.

Datos Par de torsión aplicado $= T = 75$ lb·in. Longitud $= L = 1.0$ ft $= 12$ in

Ángulo de torsión máximo = 0.08 grados. Aluminio 6061–T6.

$G = 3.75 \times 10^6$ psi (tabla 4–3).

Análisis La ecuación (4–22) puede resolverse para J porque J es el único término que incluye el diámetro desconocido, D. Luego, despeje D de la fórmula $J = \pi D^4/32$.

Resultados

$$\theta = \frac{TL}{JG}$$

$$J = \frac{TL}{\theta G}$$

El ángulo de torsión debe expresarse en radianes.

$$\theta = 0.08 \text{ grados} \times \frac{\pi \text{ rad}}{180 \text{ grados}} = 0.0014 \text{ rad}$$

Entonces

$$J = \frac{TL}{\theta G} = \frac{(75 \text{ lb}\cdot\text{in})(12 \text{ in})}{(0.0014)(3.75 \times 10^6 \text{ lb/in}^2)} = 0.171 \text{ in}^4$$

Ahora como $J = \pi D^4/32$,

$$D = \left(\frac{32\,J}{\pi}\right)^{1/4} = \left[\frac{(32)(0.171 \text{ in}^4)}{\pi}\right]^{1/4} = 1.15 \text{ in}$$

Comentario Éste es el diámetro mínimo aceptable. Deberá especificar un diámetro conveniente, por ejemplo de 1.25 in. El ángulo de torsión resultante será entonces de menos de 0.08 grados en 1.0 ft de longitud.

Deformación en flechas con múltiples niveles de par de torsión. Cuando una sola flecha contiene dos o más elementos que le aplican un par de torsión, es necesario determinar el nivel de par de torsión en todos los segmentos de la flecha. El uso de diagramas de cuerpo libre de partes de la flecha ayuda en este proceso.

Se puede utilizar el principio de equilibrio para determinar el nivel de par de torsión interno que debe existir en el interior de flecha en cualquier sección, imaginándose que la flecha se corta en una sección de interés. Entonces los valores del par de torsión externamente aplicado en la parte restante de la flecha, a ambos lados del corte, deben ser equilibrados por el par de torsión interno en el lugar donde se cortó la flecha. Esta técnica se ilustra en el problema de ejemplo 4–13.

Definamos una convención de notación para ese tipo de problemas. En primer lugar, para reportar el par de torsión aplicado a la flecha por un elemento activo, tal como un engrane

o polea, refiérase a dicho par con un solo subíndice que designe la sección donde se aplicó el par de torsión a la flecha. Por ejemplo, el par de torsión aplicado a una sección llamada A se llamará T_A.

Para reportar el par interno en la flecha entre dos secciones de interés, refiérase a él con un subíndice doble que identifique los puntos extremos del segmento donde dicho valor aplica. Por ejemplo, para reportar el par de torsión en el segmento entre las secciones B y C en una flecha, llámelo T_{BC}.

El problema también ilustra el cálculo del ángulo de torsión de cada segmento de la flecha donde los valores del par de torsión y momento polar de inercia son constantes. Por consiguiente, el ángulo de torsión neto resultante a todo lo largo de la flecha se calcula con la suma algebraica de los ángulos de torsión en los diversos segmentos.

Esfuerzos en flechas con múltiples niveles de par de torsión. El esfuerzo cortante torsional también varía con la posición en la flecha cuando cambia el par de torsión en la flecha o en el tamaño de ésta. El problema del ejemplo 4–14 demuestra el método de analizar ese tipo de flechas.

PROBLEMA DE EJEMPLO PROGRAMADO

La solución de este ejemplo se presenta en un formato programado. Deberá realizar cada operación indicada antes de proseguir a la siguiente sección.

Problema de ejemplo 4–13

La figura 4–16 muestra una flecha de acero con tres discos montados en ella. La flecha está fija contra rotación en su extremo izquierdo, pero sí rota en una chumacera por su extremo derecho. Cada disco es de 300 mm de diámetro. En las caras externas de los discos actúan fuerzas dirigidas hacia debajo, de modo que se aplican pares de torsión a la flecha. Determine el ángulo de torsión de la sección A con respecto a la sección fija E.

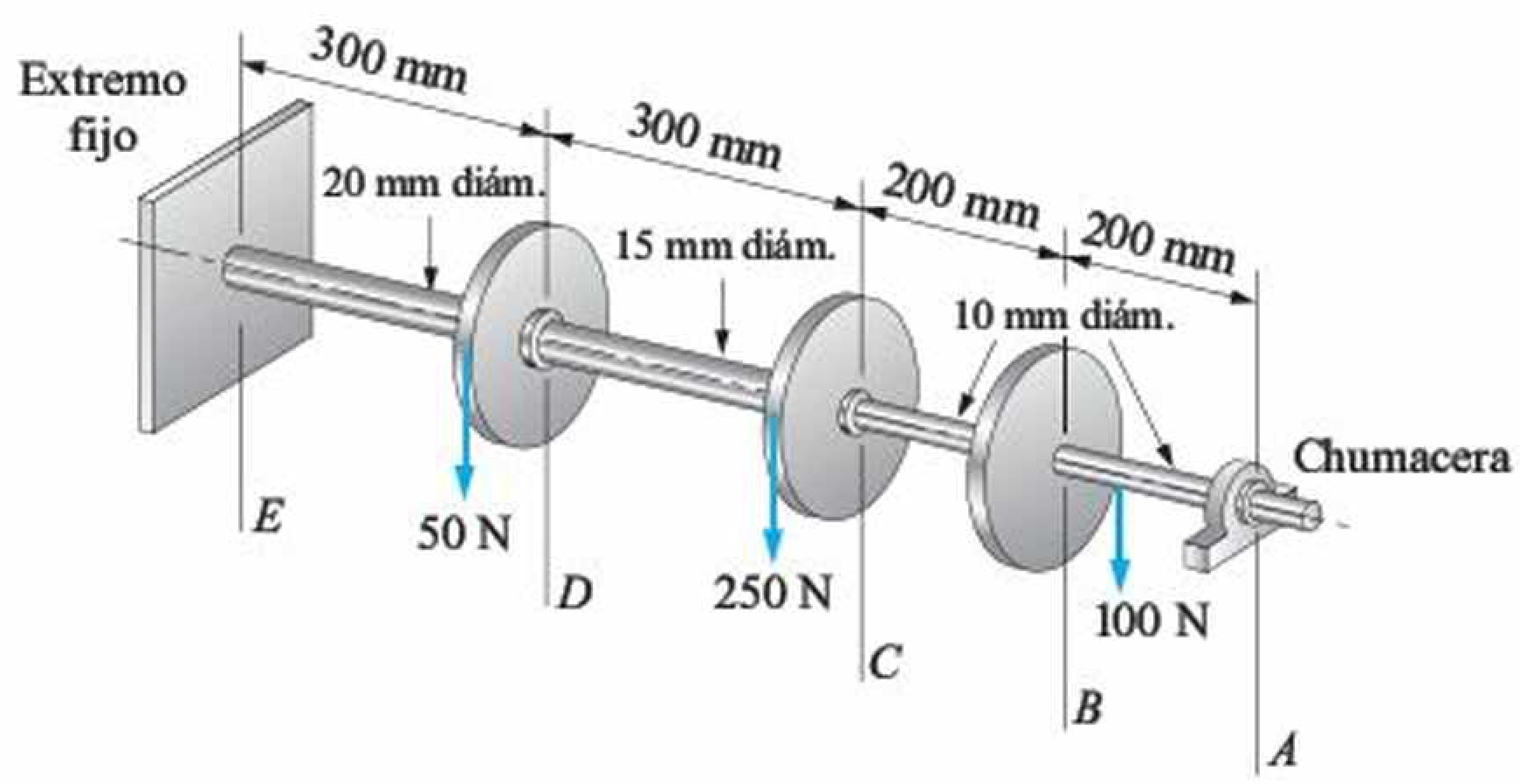


FIGURA 4–16 Flecha del problema de ejemplo 4–13.

Solución

Objetivo: Calcular el ángulo de torsión de la flecha en A con respecto a E.

Datos: La flecha es de acero, $G = 80$ GPa (tabla 4–3).

La geometría de la flecha y las cargas mostradas en la figura 4–16.

Para cada disco, diámetro $= D = 300$ mm. Radio $= R = 150$ mm.

Análisis: La longitud total de flecha mostrada en la figura 4–16 es de 1000 mm o 1.0 m. Pero la flecha está dividida en cuatro segmentos de diferentes longitudes, diámetros o niveles de par torsión aplicados. Por consiguiente, se debe aplicar la ecuación (4–22) a cada segmento por separado para calcular el ángulo de torsión de cada uno. Luego, el ángulo de torsión total en la sección A con respecto a E será la suma algebraica de los cuatro ángulos.

La primera operación es calcular la magnitud y dirección de los pares de torsión aplicados en cada disco, B, C y D. Hágalo ahora. Recuerde la definición de par de torsión de la ecuación (4–1)

En cuanto a las direcciones, asuma un punto de vista a lo largo de la varilla desde el extremo derecho. La magnitud del par de torsión en cada disco es el producto de la fuerza que actúa en la periferia del disco por el radio de éste. Entonces, considerando positivo el sentido de las manecillas del reloj,

par de torsión en el disco B, en el sentido de las manecillas del reloj:

$T_B = (100 \text{ N})(150 \text{ mm}) = 15\,000 \text{ N·m} = 15 \text{ N·m}$ (en el sentido de las manecillas del reloj)

par de torsión en el disco C, en sentido contrario al de las manecillas del reloj:

$T_C = -(250 \text{ N})(150 \text{ mm}) = -37\,500 \text{ N·mm} = -37.5 \text{ N·m}$ (en el sentido contrario de las manecillas del reloj)

par de torsión en el disco D, en sentido contrario al de las manecillas del reloj:

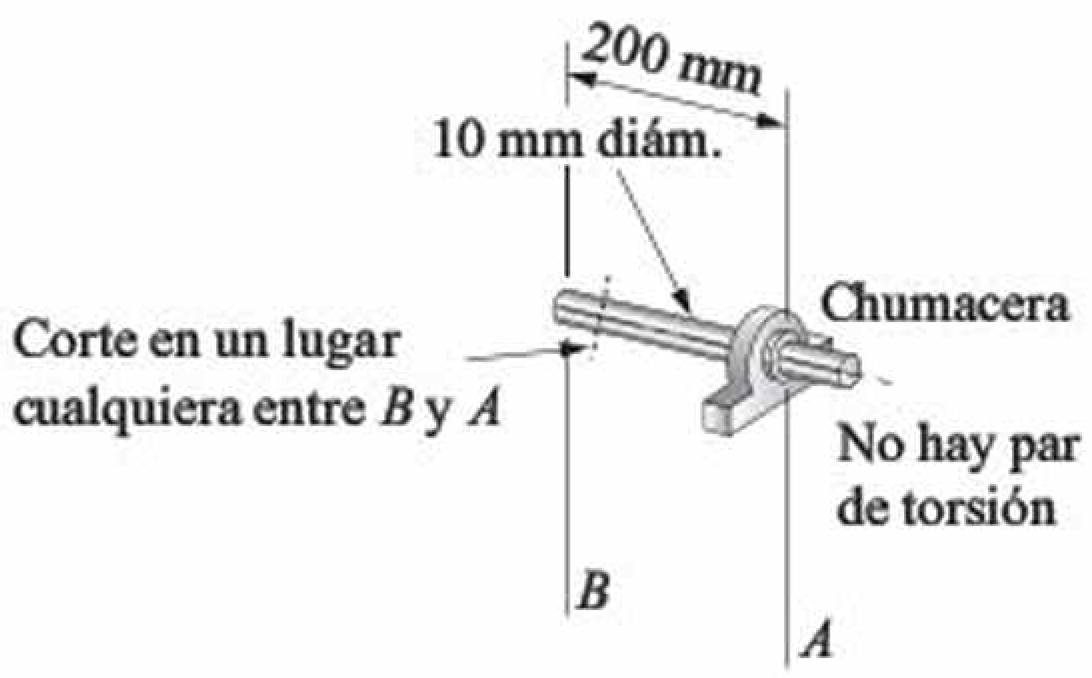
$T_D = -(50 \text{ N})(150 \text{ mm}) = -7500 \text{ N·mm} = -7.5 \text{ N·m}$ (en el sentido contrario de las manecillas del reloj)

Ahora determine el nivel de par de torsión en cada segmento de la flecha. Deberá visualizar un diagrama de cuerpo libre de cada una de las partes de la flecha entre los extremos de cada segmento "cortándola" y calculando la magnitud del par de torsión aplicado a la flecha a la derecha del corte. Para mantener el equilibrio, el par de torsión interno en la flecha debe ser igual en magnitud y de dirección opuesta al par de torsión externo aplicado.

Se sugiere que empiece por el extremo derecho A. La chumacera permite la libre rotación de las flecha en ese extremo. Luego prosiga hacia la izquierda y calcule el par de torsión para los segmentos AB, BC, CD y DE. ¿Cuál es el nivel de par de torsión en el segmento AB?

En el segmento AB hasta, pero sin incluir B, el par de torsión en la flecha es cero porque la chumacera permite la libre rotación. Esto se ilustra en la figura 4–7 que muestra la parte de la flecha de la sección B al extremo del flecha en A. Visualice un corte en el flecha en cualquier lugar entre B y A y aísle la sección cortada a la derecha como un cuerpo libre. Como no hay un par externo aplicado, el par de torsión interno en la flecha en cualquier lugar entre B y A debe ser cero. Es decir, $T_{AB} = 0$.

FIGURA 4–17
Diagrama de cuerpo libre del segmento AB de la flecha del problema de ejemplo 4–13.



Ahora, considere el par de torsión aplicado por el disco en B y determine el par de torsión en el segmento BC.

Si se corta la flecha en cualquier lugar a la derecha de C en el segmento BC, el resultado sería un par de torsión externo de 15 N·m aplicado en el sentido de las manecillas del reloj, originado por el par de torsión que actúa en el disco B. La figura 4–18 muestra el diagrama de cuerpo libre de esa parte de la flecha a la derecha de la sección C, después de que supuso que está cortada. Sólo el disco B aplica un par de torsión externo a la flecha. El par de torsión interno en la flecha en el corte debe equilibrar el par de torsión que actúa en el disco B.

Por consiguiente, el par de torsión a todo lo largo del segmento BC es

$$T_{BC} = 15 \text{ N·m (en el sentido de las manecillas del reloj)}$$

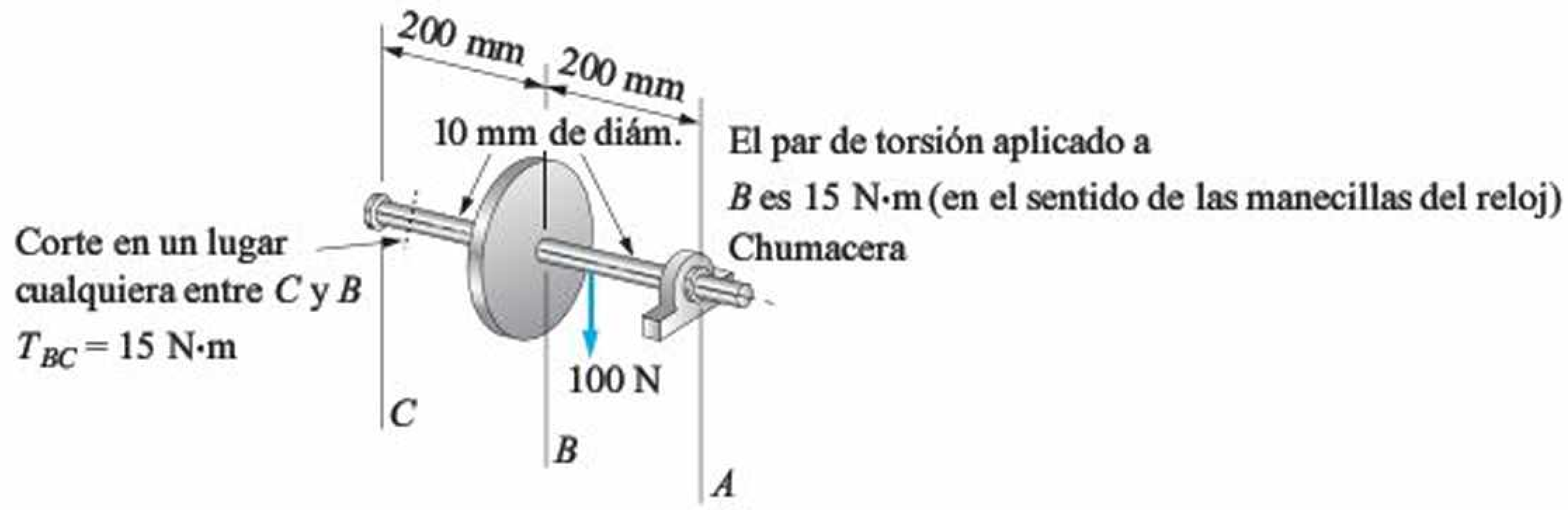


FIGURA 4–18 Diagrama de cuerpo libre del segmento a la derecha de la sección C de la flecha del problema de ejemplo 4-13.

Consideraremos que este par de torsión actúa en el sentido de las manecillas del reloj (SMR) y que es positivo porque tiende a hacer girar la varilla en el sentido de las manecillas del reloj.

Ahora determine el par de torsión en el segmento CD, llamado T_{CD}.

Si se corta la flecha en un punto cualquiera entre C y D, se tendría tanto a T_C como a T_B actuando en la flecha a la derecha del corte. Vea la figura 4-19. Pero actúan en sentido opuesto, uno en el sentido de las manecillas del reloj y el otro en contra. Por lo tanto, el par de torsión neto aplicado a la flecha es la diferencia entre ellos. Es decir,

$$T_{CD} = -T_C + T_B = -37.5 \text{ N·m} + 15 \text{ N·m} = -22.5 \text{ N·m (SCMR)}$$

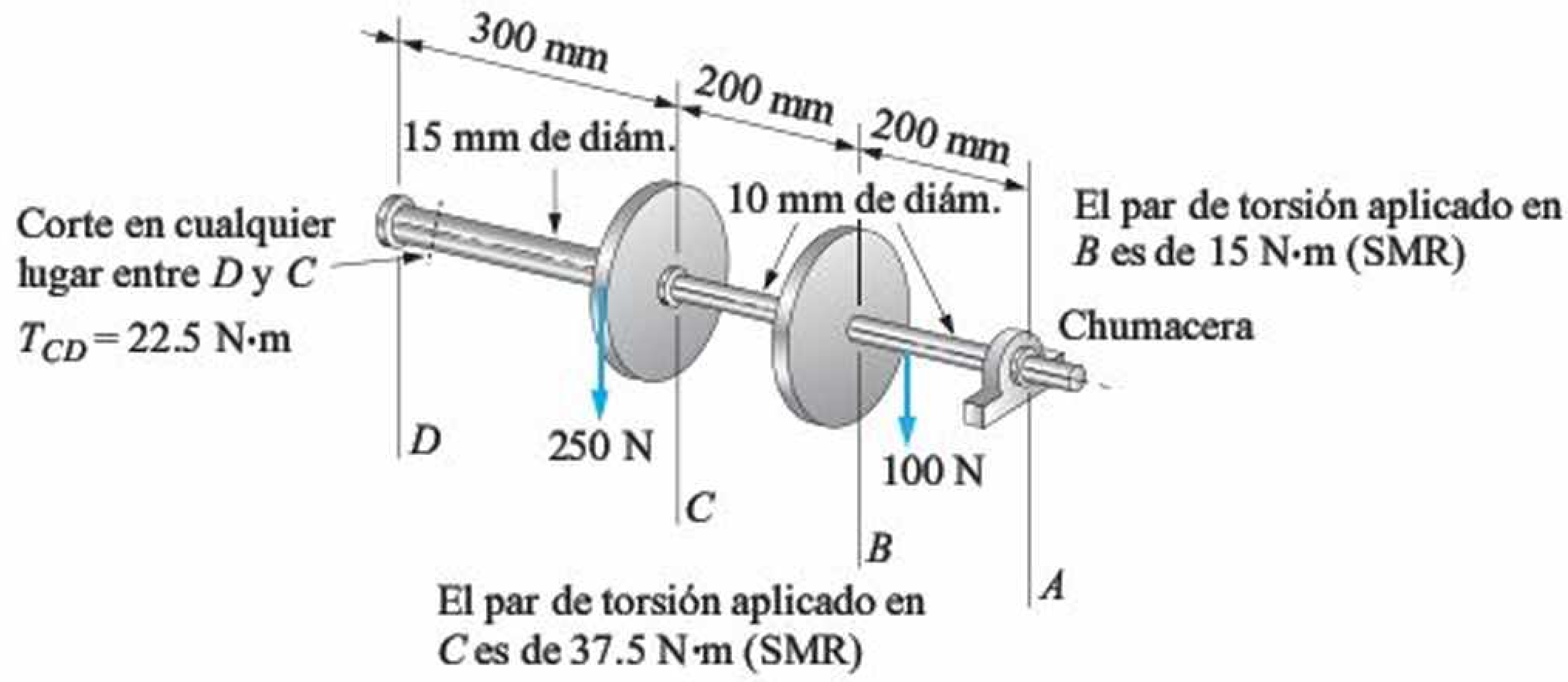


FIGURA 4–19 Diagrama de cuerpo libre del segmento a la derecha de la sección D de la flecha del problema de ejemplo 4–13.

Continúe este proceso para el segmento final, DE.

Entre D y E en la flecha, el par de torsión es la resultante de todos los pares de torsión aplicados en D, C y B. Vea la figura 4–20. Entonces,

$$T_{DE} = -T_D - T_C + T_B = -7.5 \text{ N·m} - 37.5 \text{ N·m} + 15 \text{ N·m} = -30 \text{ N·m (SCMR)}$$

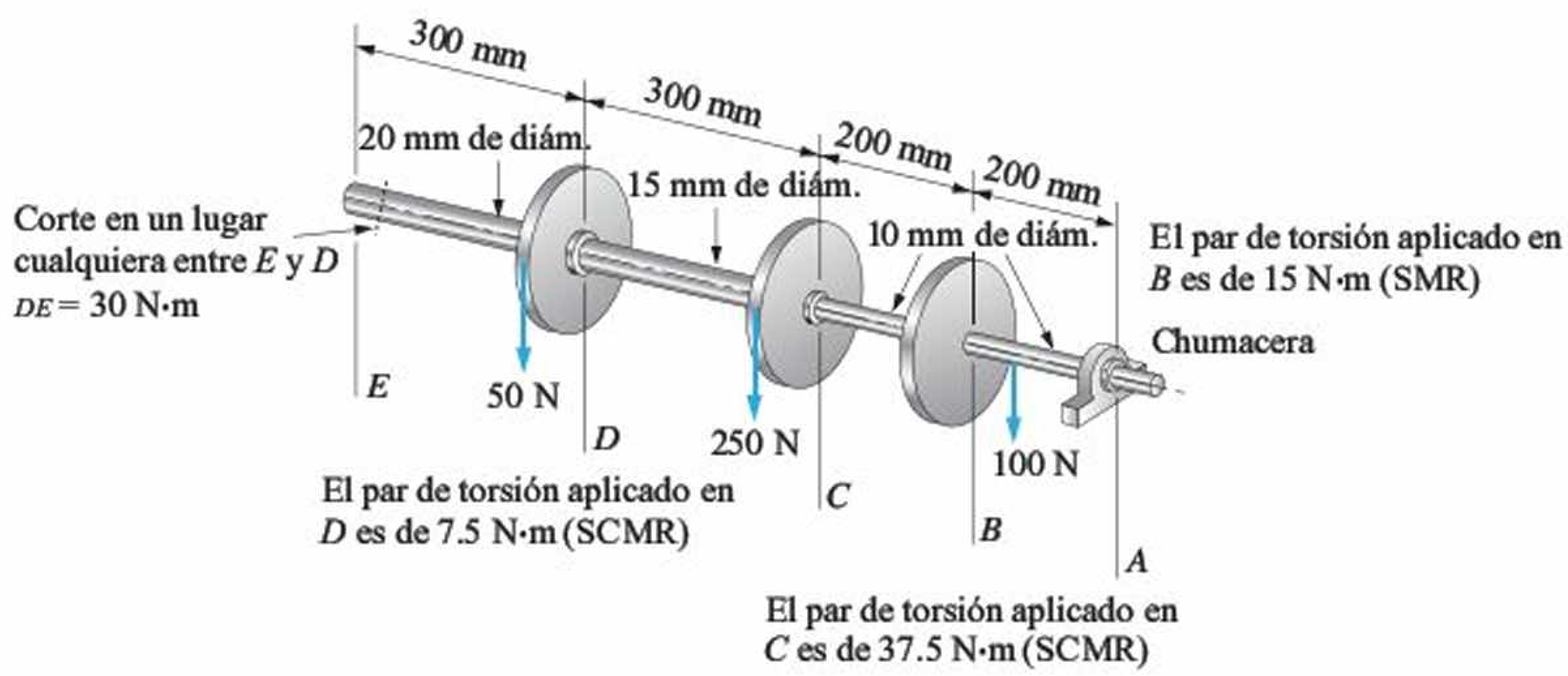
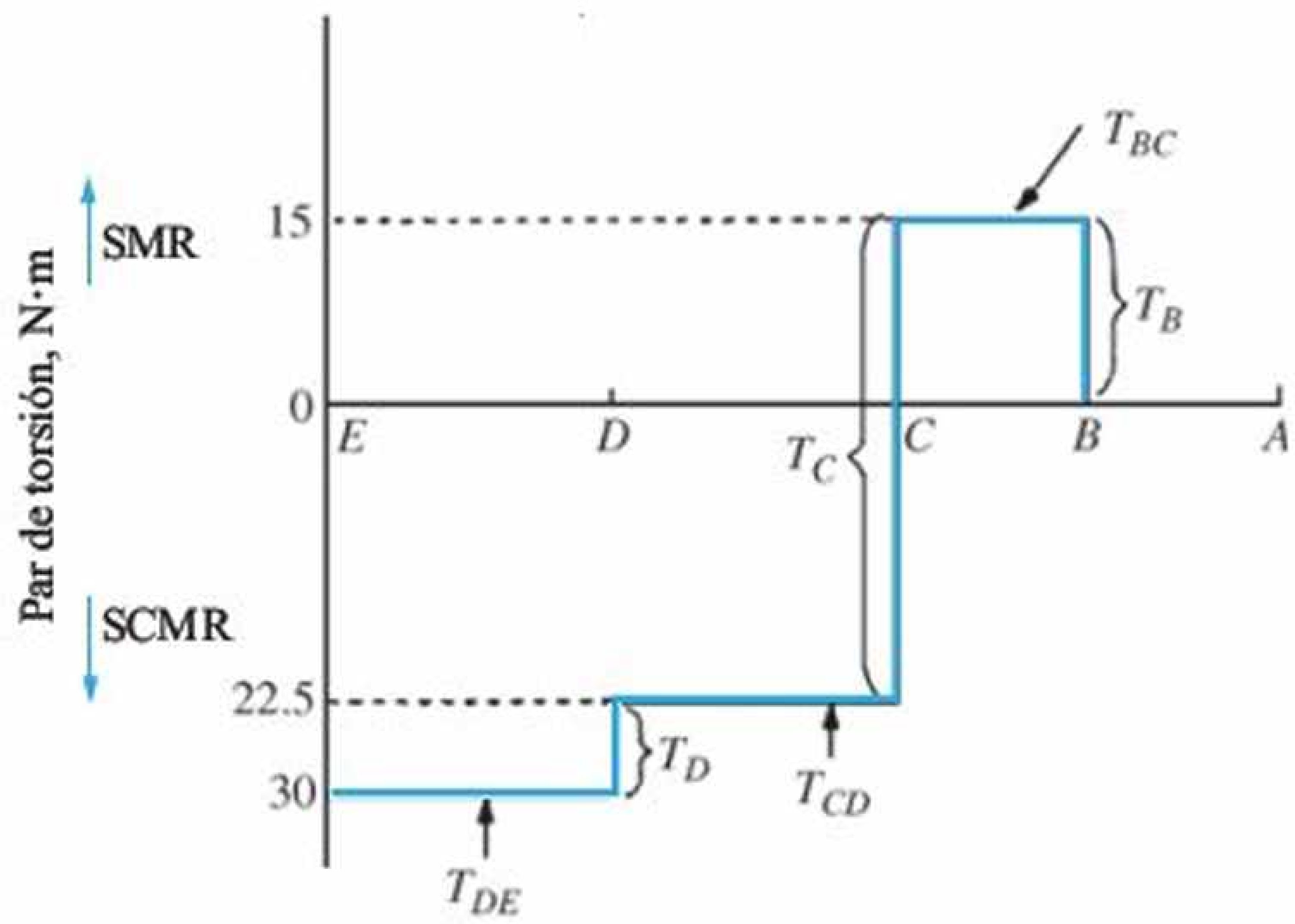


FIGURA 4–20 Diagrama de cuerpo libre del segmento a la derecha de la sección E de la flecha del problema 4–13.

El apoyo fijo en E debe ser capaz de producir un par de torsión de reacción de 30 N·m para mantener la flecha en equilibrio.

En conclusión, la distribución del par de torsión en la flecha puede mostrarse de forma gráfica como en la figura 4–21. Observe que los pares de torsión aplicados T_B, T_C y T_D son los *cambios* del par de torsión que ocurren en B, C y D, pero que no necesariamente son las magnitudes del par de torsión en esos puntos de *la flecha*.

FIGURA 4–21 Distribución del par de torsión en la flecha del problema de ejemplo 4–13.



Ahora calcule el ángulo de torsión en cada segmento aplicando la ecuación (4–22) en sucesión. Comience con el segmento AB.

Segmento AB

$$\theta_{AB} = T_{AB}\left(\frac{L}{JG}\right)_{AB}$$

Como $T_{AB} = 0$, $\theta_{AB} = 0$. No hay torsión en la flecha entre A y B.

Ahora continúe con el segmento BC.

Segmento BC

$$\theta_{BC} = T_{BC}\left(\frac{L}{JG}\right)_{BC}$$

Sabemos que $T_{BC} = 15$ N·m, $L = 200$ mm y $G = 80$ GPa para acero. Para la flecha de 10 mm de diámetro,

$$J = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi(10\text{ mm})^4}{32} = 982\text{ mm}^4$$

Entonces

$$\theta_{BC} = \frac{(15\text{N}\cdot\text{m})(200\text{ mm})}{(982\text{ mm}^4)(80 \times 10^9\text{ N/m}^2)} \times \frac{(10^3)^3\text{ mm}^3}{\text{m}^3} = 0.038\text{ rad}$$

Este resultado indica que *B* gira 0.038 rad en el sentido de las manecillas del reloj con respecto a la sección *C*, puesto que θ_{BC} es el ángulo total de torsión en el segmento *BC*.

Continúe con el segmento *CD*.

Segmento CD

$$\theta_{CD} = T_{CD}\left(\frac{L}{JG}\right)_{CD}$$

En este caso $T_{CD} = -22.5$ N·m, $L = 300$ mm y el diámetro de la flecha es de 15 mm. Entonces

$$J = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi(15\text{ mm})^4}{32} = 4970\text{ mm}^4$$

$$\theta_{CD} = \frac{-(22.5\text{ N}\cdot\text{m})(300\text{ mm})}{(4970\text{ mm}^4)(80\times 10^9\text{ N/m}^2)} \times \frac{(10^3)^3\text{ mm}^3}{\text{m}^3} = -0.017\text{ rad}$$

La sección *C* gira 0.017 rad en sentido contrario al de las manecillas del reloj con respecto a la sección *D*.

Por último, complete el análisis para el segmento *DE*.

Segmento DE

$$\theta_{DE} = T_{DE}\left(\frac{L}{JG}\right)_{DE}$$

En este caso $T_{DE} = -30$ N·m, $L = 300$ mm y $D = 20$ mm. Entonces

$$J = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi(20\text{ mm})^4}{32} = 15\ 700\text{ mm}^4$$

$$\theta_{DE} = \frac{-(30\text{ N}\cdot\text{m})(300\text{ mm})}{(15\ 700\text{ mm}^4)(80\times 10^9\text{ N/mm}^2)} \times \frac{(10^3)^3\text{ mm}^3}{\text{m}^3} = -0.007\text{ rad}$$

D gira 0.007 rad en sentido contrario al de las manecillas del reloj con respecto a *E*. La operación final es calcular el ángulo de torsión total de *E* a *A* sumando algebraicamente los ángulos de torsión de todos los segmentos. Hágalo ahora.

Ángulo de torsión total de *E* a *A*

$$\begin{aligned}\theta_{AE} &= \theta_{AB} + \theta_{BC} - \theta_{CD} - \theta_{DE} \\ &= 0 + 0.038 - 0.017 - 0.007 = 0.014\text{ rad}\end{aligned}$$

Resumen y comentario Para ver con claridad lo que sucede a todo lo largo de la flecha se traza una gráfica del ángulo de torsión como una función de la posición. Esto se hace en la figura 4–22 situando el punto de referencia cero en *E*. La línea recta de *E* a *D* muestra el cambio lineal del ángulo con la posición hasta el valor de –0.007 rad (en sentido contrario al de las manecillas del reloj). A partir de este valor, el ángulo se incrementa en −0.017 rad entre *D* y *C*. En el segmento *BC*, la rotación relativa ocurre en el sentido de las manecillas del reloj con una magnitud de 0.038 rad y termina con el valor final de 0.014 en *B*. Y, como no hay par de torsión en el segmento *AB*, el ángulo de rotación permanece en ese valor.

Problema de ejemplo 4–14 Calcule el esfuerzo cortante torsional que ocurre en cada segmento de la flecha mostrada en la figura 4–16 y descrita en el problema de ejemplo 4–13.

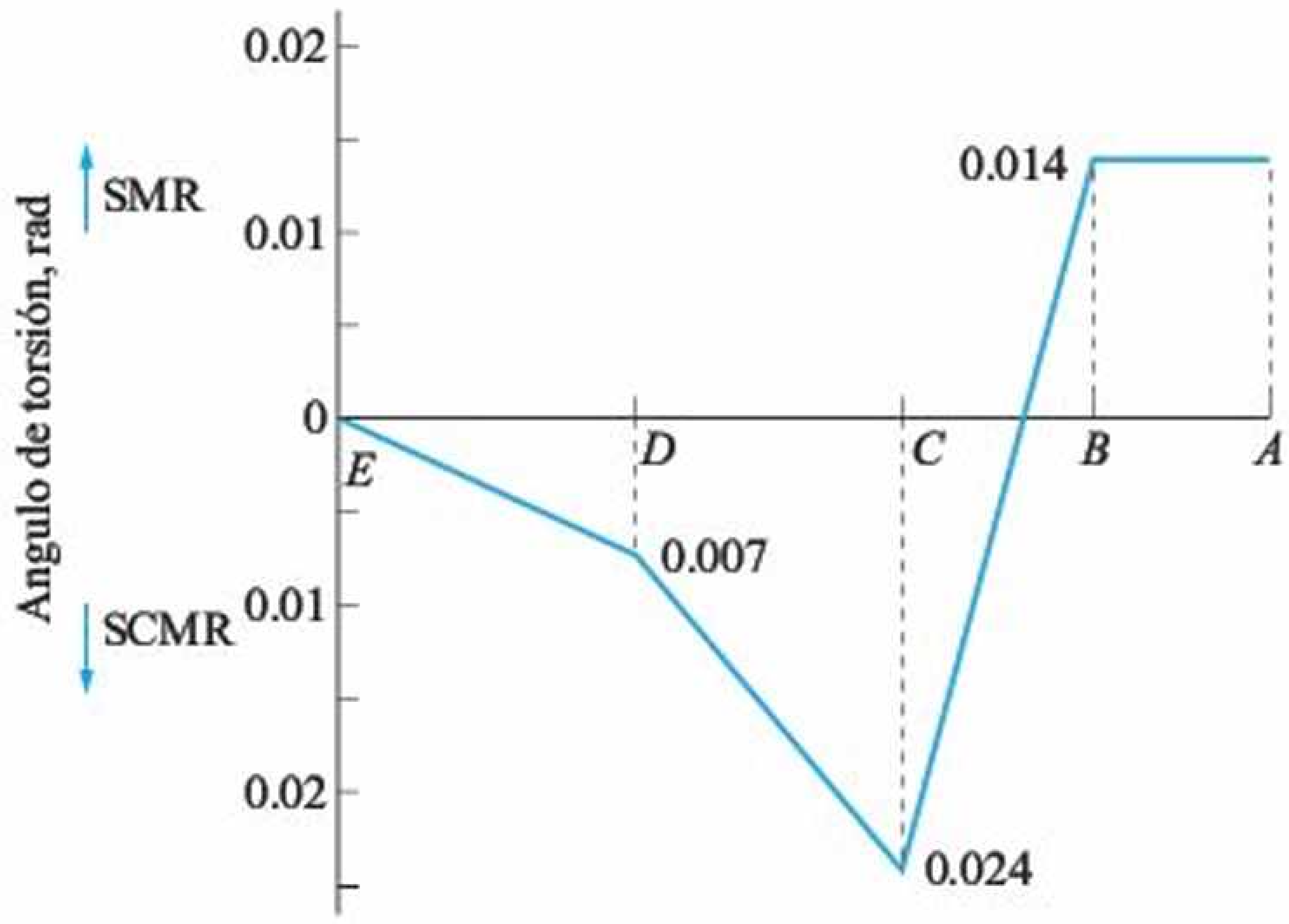


FIGURA 4–22 Ángulo de torsión contra posición en la flecha del problema de ejemplo 4–13.

Solución

Objetivo Calcular el esfuerzo cortante torsional.

Datos La flecha mostrada en la figura 4–16 con múltiples niveles de par de torsión y diferentes diámetros.

Análisis Se utiliza la ecuación de esfuerzo cortante torsional.

$$\tau = Tc/J$$

Aplicaremos esta ecuación en cada segmento donde todos los factores son iguales. La flecha se dividirá en los segmentos *AB*, *BC*, *CD* y *DE*. Algunos datos se tomaron de los resultados del problema de ejemplo 4–13.

Resultados ***Segmento AB*:** En este segmento no se transmite ningún par de torsión. Por consiguiente,

$$\tau_{AB} = 0$$

Segmento BC: $T_{BC} = 15$ N·m, $D = 10$ mm, $c = 5$ mm, $J_{BC} = 982\ \text{mm}^4$. Entonces

$$\tau_{BC} = \frac{T_{BC}c}{J_{BC}} = \frac{(15\ \text{N}\cdot\text{m})(5\ \text{mm})}{982\ \text{mm}^4}\ \frac{1000\ \text{mm}}{\text{m}} = 76.4\ \text{N/mm}^2 = 76.4\ \text{MPa}$$

***Segmento CD*:** $T_{CD} = 22.5$ N·m, $D = 15$ mm, $c = 7.5$ mm mm, $J_{CD} = 4970\ \text{mm}^4$. Entonces

$$\tau_{CD} = \frac{T_{CD}c}{J_{CD}} = \frac{(22.5\ \text{N}\cdot\text{m})(7.5\ \text{mm})}{4970\ \text{mm}^4}\ \frac{1000\ \text{mm}}{\text{m}} = 34.0\ \text{N/mm}^2 = 34.0\ \text{MPa}$$

Segmento DE: $T_{DE} = 30$ N·m, $D = 20$ mm, $c = 10$ mm, $J_{DE} = 15\,700\ \text{mm}^4$. Entonces

$$\tau_{DE} = \frac{T_{DE}c}{J_{DE}} = \frac{(30\ \text{N}\cdot\text{m})(10\ \text{mm})}{15\,700\ \text{mm}^4}\ \frac{1000\ \text{mm}}{\text{m}} = 19.1\ \text{N/mm}^2 = 19.1\ \text{MPa}$$

Comentario A continuación se resume la distribución de los esfuerzos en la flecha.

LECCIÓN 9

$$\tau_{AB} = 0 \qquad \tau_{BC} = 76.4\ \text{MPa} \qquad \tau_{CD} = 34.0\ \text{MPa} \qquad \tau_{DE} = 19.1\ \text{MPa}$$

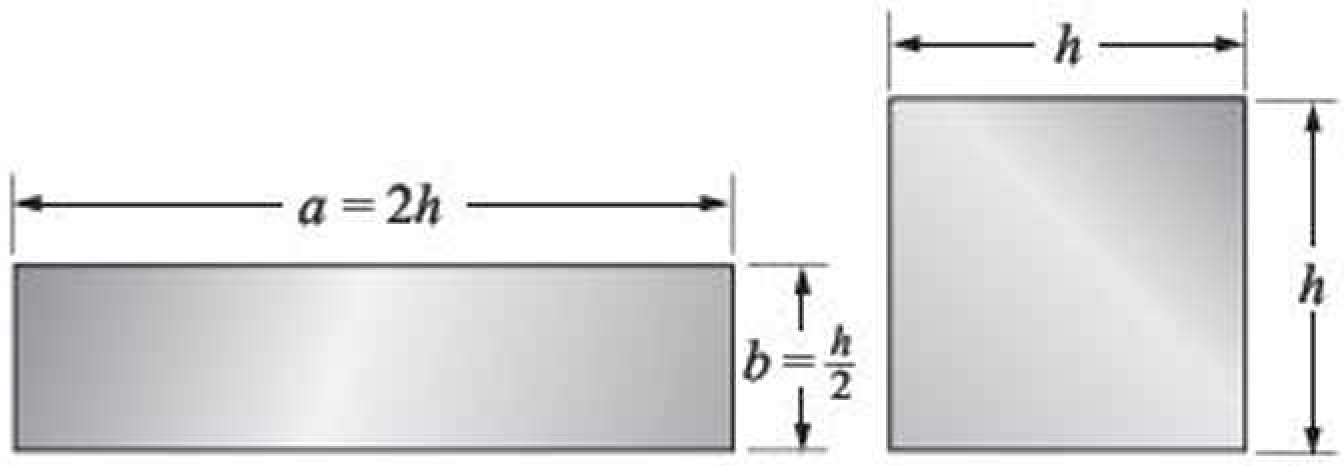


FIGURA 4–23 Comparación de la rigidez de secciones rectangulares y cuadradas a torsión. La sección cuadrada es dos veces más rígida que la rectangular aun cuando ambas tienen la misma área: $ab = h^2$.

4–11 TORSIÓN EN SECCIONES NO CIRCULARES

El comportamiento de las secciones no circulares cuando se someten a torsión es bastamente diferente del de las secciones circulares, las cuales se analizaron al principio de este capítulo. Existe una gran variedad de perfiles, y el análisis de rigidez y resistencia es diferente para cada uno. El desarrollo de las relaciones que intervienen no se llevará a cabo aquí. Las referencias 1 a 5 incluyen recopilaciones de las fórmulas pertinentes y en esta sección se dan algunas.

Se pueden hacer algunas generalizaciones. Las secciones sólidas con la misma área de sección transversal son más rígidas cuando su perfil es casi circular (vea la figura 4–23). A la inversa, un miembro compuesto de secciones largas, esbeltas que no forman un perfil cerrado, tal como un tubo, son muy débiles y flexibles a torsión. Algunos ejemplos de secciones flexibles son los perfiles estructurales comunes tales como vigas de patín ancho, vigas I estándar, canales, ángulos y "t", como se ilustra en la figura 4–24. Los tubos circulares, las barras sólidas y los tubos rectangulares estructurales son muy rígidos (vea la figura 4–25).

Una ilustración interesante de la falta de rigidez de las secciones abiertas, esbeltas se muestra en la figura 4–26. La placa delgada (a), el ángulo (b) y el canal (c) tienen el mismo espesor y área de sección transversal y casi la misma rigidez torsional. Asimismo, si a la placa delgada se le diera una forma circular (d) pero con una ranura, su rigidez seguiría siendo baja. Sin embargo, si el tubo se cierra por completo como en la figura 4–25(a) soldándolo o estirándolo como un tubo sin costura se obtendría un miembro relativamente rígido. La comprensión de estas comparaciones ayuda a seleccionar un perfil razonable para miembros sometidos a torsión.

La figura 4–27 muestra propiedades torsionales para siete casos de secciones transversales no circulares que comúnmente se encuentran en el diseño de máquinas y análisis estructural. Utilizaremos las mismas ecuaciones para el esfuerzo cortante torsional máximo, $\tau_{\text{máx}}$ [ecuación (4–16)], y la deformación torsional, δ [ecuación (4–22)],

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{T}{Z_p} \tag{4–16}$$

$$\theta = \frac{TL}{GJ} \tag{4–22}$$

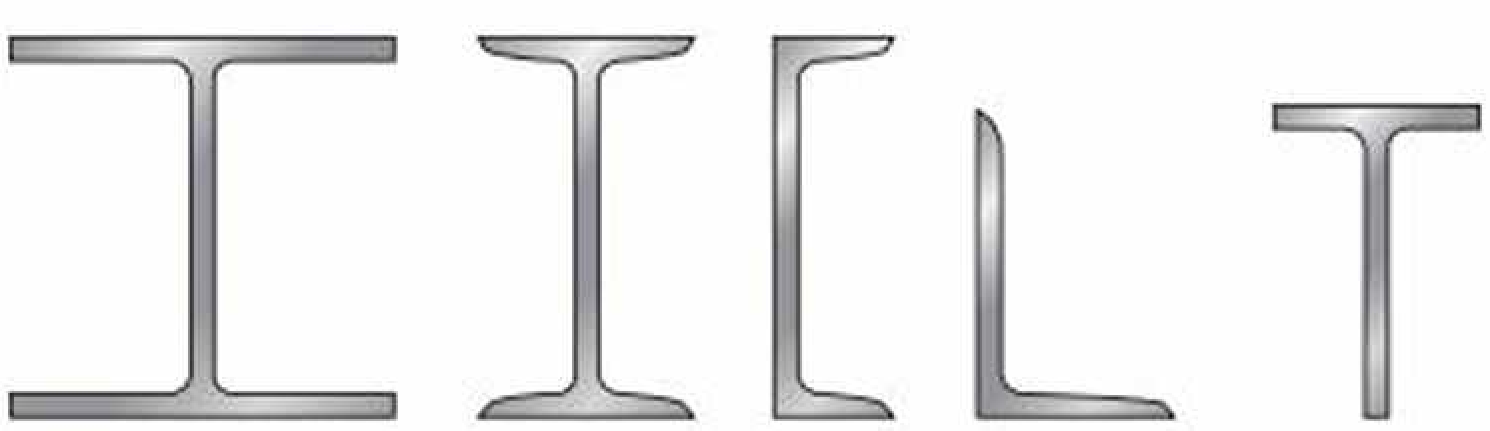


FIGURA 4–24 Secciones torsionalmente flexibles.

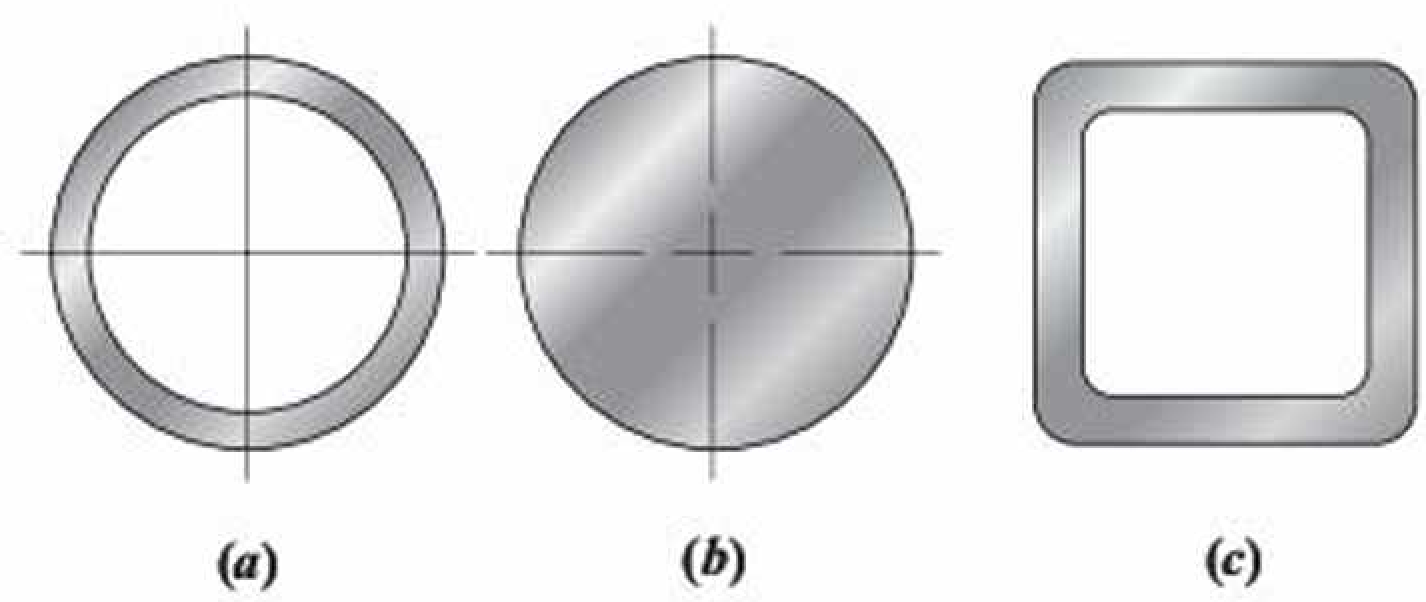


FIGURA 4–25 Secciones torsionalmente rígidas.

FIGURA 4–26
Secciones con rigidez torsional casi igual (y baja).

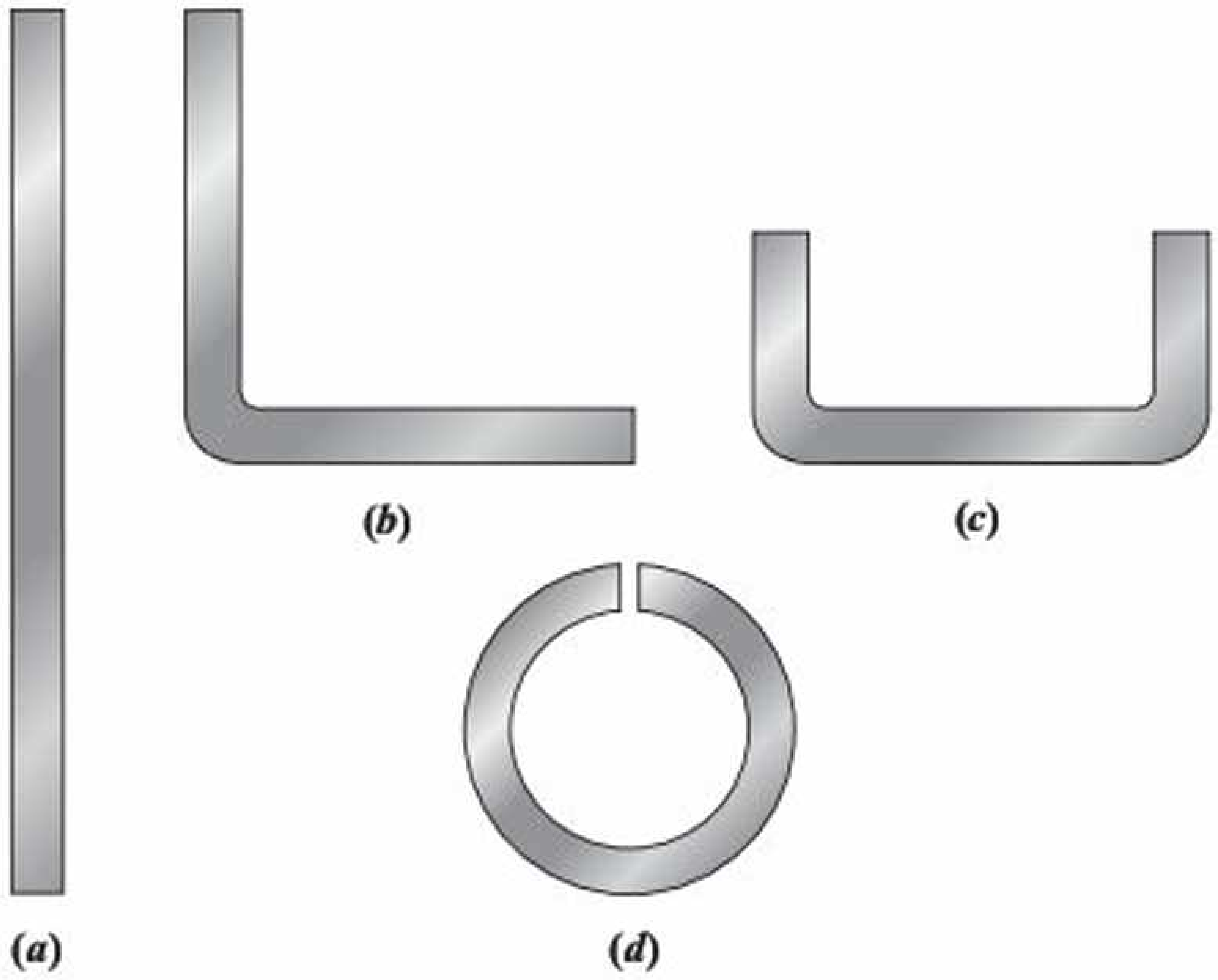
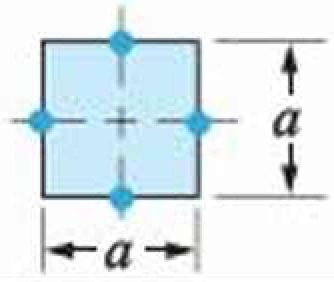
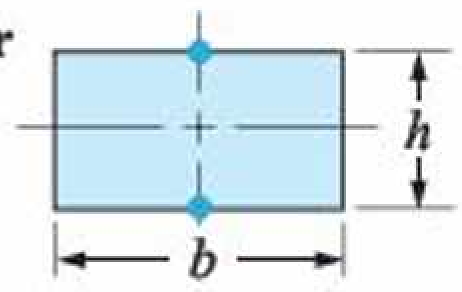
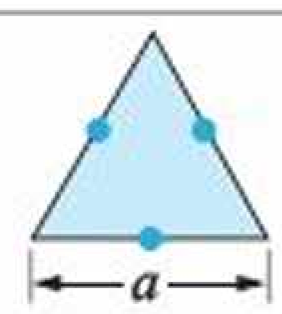
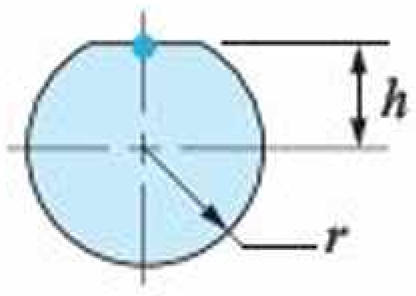
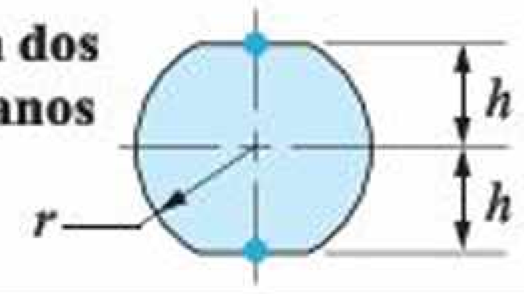
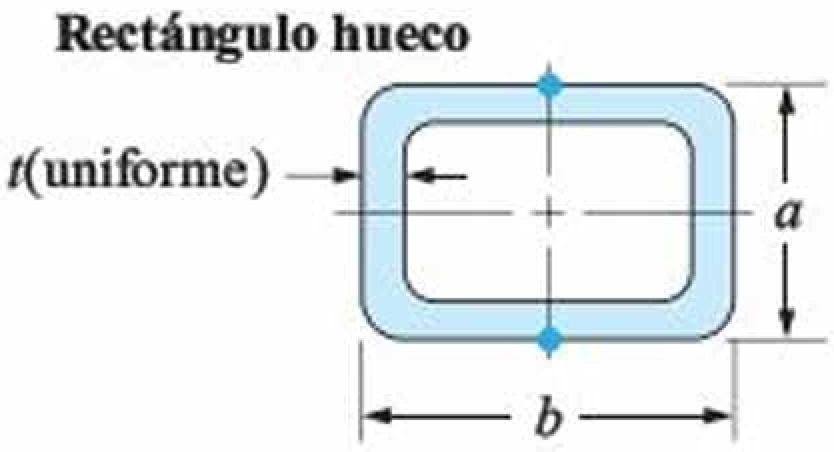
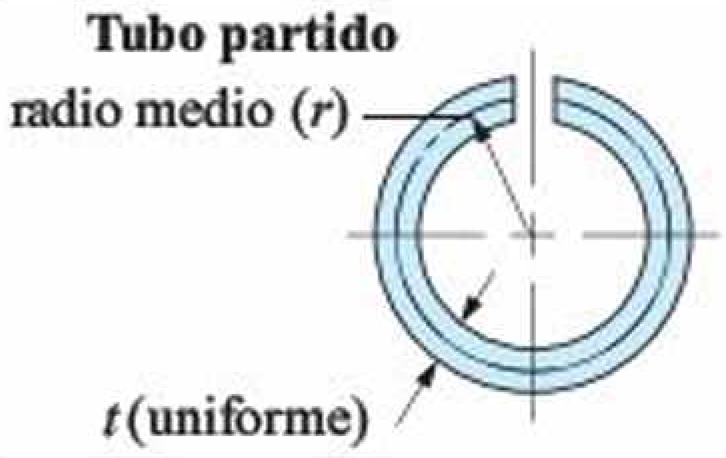


FIGURA 4–27
Métodos para determinar valores de J y Z_p de varios tipos de secciones transversales. (Fuente: *Machine Elements in Mechanical Design*, 4ª ed., Robert L. Mott, derechos reservados © Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 2004. Reimpreso con permiso del editor)

<table>
<tr><th>Perfil de la sección transversal</th><th>J = para usarse en $\theta = TL/GJ$
Z_p = para usarse en $\tau = T/Z_p$</th><th>El punto azul (•) denota la ubicación de $\tau_{máx}$</th></tr>
<tr><td>Cuadrada
</td><td>$J = 0.141a^4$
$Z_p = 0.208a^3$</td><td>$\tau_{máx}$ a la mitad de cada lado</td></tr>
<tr><td>Rectangular
</td><td>$J = bh^3\left[\frac{1}{3} - 0.21\frac{h}{b}\left(1 - \frac{(h/b)^4}{12}\right)\right]$
$Z_p = \frac{bh^2}{[3 + 1.8(h/b)]}$</td><td>(Aproximado; dentro de ≈ 5%)
$\tau_{máx}$ a la mitad de los lados largos</td></tr>
<tr><td>Triángulo equilátero
</td><td>$J = 0.0217a^4$
$Z_p = 0.050a^3$</td><td></td></tr>
<tr><td>Flecha con rebaje plano
</td><td>$J = C_1 r^4$
$Z_p = C_2 r^3$</td><td><table>
<tr><td>h/r</td><td>0</td><td>0.2</td><td>0.4</td><td>0.6</td><td>0.8</td><td>1.0</td></tr>
<tr><td>C_1</td><td>0.30</td><td>0.51</td><td>0.78</td><td>1.06</td><td>1.37</td><td>1.57</td></tr>
<tr><td>C_2</td><td>0.35</td><td>0.51</td><td>0.70</td><td>0.92</td><td>1.18</td><td>1.57</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Flecha con dos rebajes planos
</td><td>$J = C_3 r^4$
$Z_p = C_4 r^3$</td><td><table>
<tr><td>h/r</td><td>0.5</td><td>0.6</td><td>0.7</td><td>0.8</td><td>0.9</td><td>1.0</td></tr>
<tr><td>C_3</td><td>0.44</td><td>0.67</td><td>0.93</td><td>1.19</td><td>1.39</td><td>1.57</td></tr>
<tr><td>C_4</td><td>0.47</td><td>0.60</td><td>0.81</td><td>1.02</td><td>1.25</td><td>1.57</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Rectángulo hueco
</td><td colspan="2">$J = \frac{2t(a-t)^2(b-t)^2}{(a+b-2t)}$
$Z_p = 2t(a-t)(b-t)$
Da el esfuerzo promedio; buena aproximación del esfuerzo máximo cuando es pequeño
Las esquinas interiores deberán tener filetes generosos</td></tr>
<tr><td>Tubo partido
</td><td colspan="2">$J = 2\pi r t^3/3$
$Z_p = \frac{4\pi^2 r^2 t^2}{(6\pi r + 1.8t)}$
t debe ser pequeño</td></tr>
</table>

Por consiguiente, aunque puede que no se satisfaga la definición estricta de J y Z_p, utilizaremos esos símbolos en los cálculos. En resumen, el momento polar de inercia J se utiliza para representar la rigidez de un perfil sometido a torsión, y el módulo de sección polar Z_p se utiliza para representar el factor relacionado con la resistencia. Observe que la industria de la construcción utiliza el símbolo C, llamado *constante torsional*, en lugar de Z_p para perfiles estructurales, como se verá más adelante en este capítulo.

En la figura 4–27 se ve que los puntos de esfuerzo cortante máximo se indican por medio de un punto grande y que, por lo general, quedan a la mitad de los lados planos. Esto es radicalmente diferente de las secciones transversales circulares donde toda la superficie experimenta el esfuerzo cortante máximo. Vea en las referencias 2 y 4 más detalles sobre el fenómeno. La referencia 5 da ecuaciones de propiedades torsionales de muchas más secciones no circulares.

Propiedades torsionales de perfiles estructurales. Las tablas de los apéndices contienen las propiedades torsionales de algunos perfiles estructurales, como a continuación se indica:

1. Los perfiles estructurales redondos huecos (HSS, por sus siglas en inglés o tubos) tienen una excelente resistencia torsional. En las tablas A–12 y A–12 (SI) se incluyen valores para J y Z_p. Los datos del AISC para esos perfiles utilizan el símbolo C, llamado *constante torsional*, en lugar de Z_p para diseño estructural y construcción. Estos valores se calculan con las ecuaciones desarrolladas en este capítulo. La ecuación (4–13) para J y la (4–19) para Z_p o C.
2. Las tablas A–13 y A–13 (SI) incluyen J y Z_p para tubería mecánica de acero que con frecuencia se somete a torsión cuando se utiliza en máquinas y estructuras de vehículos. También se pueden utilizar las ecuaciones (4–13) y (4–19) para calcular estos valores.
3. Los perfiles HSS cuadrados y rectangulares son bastante buenos para usarse donde ocurren cargas torsionales en una estructura, debido a sus secciones transversales cerradas. Los perfiles cuadrados funcionan mejor que los rectangulares porque se aproximan más a los perfiles HSS redondos que son prácticamente ideales. Las tablas A–9 y A–9 (SI) dan valores de propiedad torsional que utilizan los símbolos AISC de J y C. Observe que los perfiles HSS cuadrados y rectangulares son del tipo mostrado en la figura 4–2–7. Las ecuaciones para J y Z_p (o C) son aproximadas, aun cuando dan buenas estimaciones, en particular cuando el espesor de pared es delgado. Comparando los valores tabulados en las tablas A–9 y A–9 (SI) con valores calculados con las ecuaciones que aparecen en la figura 4–27 se ve que los valores para J quedan dentro de menos del 3% y que los valores de Z_p quedan dentro del 4.0%. Para la mayoría de los perfiles con espesor de pared de ¼ in, los valores quedan dentro de menos del 1%. Las diferencias pueden ser provocadas por variaciones en la forma de las esquinas redondeadas.
4. No se dan valores de propiedades torsionales de perfiles abiertos tales como L, C, W y S porque son muy flexibles a torsión y se aconseja no utilizarlos en aplicaciones donde se presentan pares de torsión significativos.

El problema de ejemplo 4–15 ilustra el alto grado de flexibilidad de un perfil abierto, un tubo partido, en comparación con un tubo cerrado.

Problema de ejemplo 4–15

Un tubo se fabrica con una lámina de acero plana de 4.0 mm de espesor, a la que se le da una forma circular de 90 mm de diámetro externo. El paso final es soldar la junta a todo lo largo del tubo. Las figuras 4–26(a), 4–26(d) y 4–25(a) muestran las etapas del proceso. Realice los siguientes cálculos para comparar el comportamiento del tubo soldado, cerrado con el del tubo abierto.

a) Calcule el par de torsión que produciría un esfuerzo de 10 MPa en el tubo cerrado soldado.
b) Calcule el ángulo de torsión de un segmento de 1.0 m de longitud del tubo cerrado con el par de torsión de la parte (a).
c) Calcule el esfuerzo en el tubo abierto con el par de torsión de la parte (a).
d) Calcule el ángulo de torsión de un segmento de 1.0 m de longitud del tubo abierto con el par de torsión de la parte (a).
e) Compare el esfuerzo y deflexión del tubo abierto con los del tubo cerrado.

Solución *La solución se obtendrá siguiendo un formato programado con cada parte de la solución a)– e) como una sección distinta. Cada parte se abordará con un problema diferente con* Objetivo, Datos, Análisis y Resultados.

Complete la parte a) ahora.

Objetivo Calcule el par de torsión en el tubo cerrado que produciría un esfuerzo cortante torsional máximo de 10 MPa.

Datos El tubo es de acero, $D_o = 90$ mm. Espesor de pared $= t = 4.0$ mm.
$D_i = D_o - 2t = 90 \text{ mm} - 2\ (4.0 \text{ mm}) = 82$ mm.

Análisis Utilice la ecuación (4–11) del esfuerzo cortante máximo y resuelva para T.

Resultados

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc}{J} \tag{4–11}$$

Entonces

$$T = \frac{\tau_{\text{máx}}\, J}{c}$$

Podemos calcular J con la ecuación (4–13),

$$J = \frac{\pi}{32}(D_o^4 - D_i^4) \tag{4–13}$$

Con $D_o = 90 \text{ mm} = 0.09$ m y $D_i = 82 \text{ mm} = 0.082$ m

$$J = \frac{\pi}{32}(0.09^4 - 0.082^4)\,\text{m}^4 = 2.00 \times 10^{-6}\,\text{m}^4$$

Ahora, con $\tau_{\text{máx}} = 10 \text{ Mpa} = 10 \times 10^6 \text{ N/m}^2$, tenemos

$$T = \frac{\tau_{\text{máx}} J}{c} = \frac{(10 \times 10^6 \text{ N/m}^2)(2.00 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{0.045 \text{ m}} = 444 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Es decir, un par de torsión de 444 N·m aplicado al tubo soldado cerrado produciría un esfuerzo cortante torsional máximo de 10 MPa en el tubo. Observe que ese nivel de esfuerzo es muy bajo para acero.

Complete la parte b) del problema.

Objetivo Para el tubo cerrado utilizado en a), calcule el ángulo de torsión.

Datos $J = 2.00 \times 10^{-6}$ m^4. Longitud $= L = 1.0$ m. Par de torsión $= T = 444$ N·m. $G = 80$ GPa.

Análisis Use la ecuación (4–22) para calcular el ángulo de torsión, θ.

Resultados

$$\theta = \frac{TL}{GJ} = \frac{(444 \text{ N} \cdot \text{m})(1.0 \text{ m})}{(80 \times 10^9 \text{ N/m}^2)(2.00 \times 10^{-6} \text{ m}^4)} = 0.00278 \text{ rad}$$

Convirtiendo θ en grados se obtiene

$$\theta = 0.00278 \text{ rad}\,\frac{180 \text{ grados}}{\pi \text{ rad}} = 0.159 \text{ grados}$$

De nuevo, observe que éste es un ángulo de torsión muy pequeño.

Considere un tubo formado como en las partes a) y b) excepto que no está cerrado, como se muestra en la figura 4–26(d). Calcule el esfuerzo cortante torsional en el tubo abierto producido por el par de torsión de 444 N·m.

Objetivo Calcular el esfuerzo cortante en el tubo abierto.

Datos Par de torsión $= T = 444$ N·m, $D_o = 90$ mm. Espesor de pared $= t = 4.0$ mm.

Análisis Se puede utilizar la ecuación (4–16) para calcular el esfuerzo cortante máximo para el tubo abierto antes de soldarlo, considerándolo como una sección transversal no circular. La fórmula para Z_p se da en la figura 4–27.

$$Z_p = \frac{4\pi^2 r^2 t^2}{6\pi r + 1.8t}$$

Resultados El radio medio es

$$r = \frac{D_o}{2} - \frac{t}{2} = \frac{90 \text{ mm}}{2} - \frac{4 \text{ mm}}{2} = 43 \text{ mm}$$

Entonces

$$Z_p = \frac{4\pi^2(43)^2(4)^2}{6\pi(43) + 1.8(4)} \text{ mm}^3 = 1428 \text{ mm}^3$$

El esfuerzo en el tubo abierto es, entonces,

$$\tau_{máx} = \frac{T}{Z_p} = \frac{444 \text{ N}\cdot\text{m}}{1428 \text{ mm}^3}\,\frac{1000 \text{ mm}}{\text{m}} = 311 \text{ MPa}$$

Ahora, complete la parte d) calculando el ángulo de torsión del tubo abierto.

Objetivo Calcular el ángulo de torsión del tubo abierto con T = 444 N·m.

Datos Longitud $= L = 1.0$ m. Par de torsión $= T = 444$ N·m. $G = 80$ GPa.
$D_o = 90$ mm. Espesor de pared $= t = 4.0$ mm

Análisis El ángulo de torsión del tubo abierto se calcula con la ecuación (4–22). La figura 4–27 de la fórmula de la constante de rigidez torsional, J.

Resultados Con $r = 43$ mm $= 0.043$ m y $t = 4$ mm $= 0.004$ m se obtiene

$$J = \frac{2\pi r t^3}{3} = \frac{2\pi(0.043)(0.004)^3}{3} = 5.764 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

Entonces el ángulo de torsión es

$$\theta = \frac{TL}{GJ} = \frac{(444 \text{ N}\cdot\text{m})(1.0 \text{ m})}{(80 \times 10^9 \text{ N/m}^2)(5.764 \times 10^{-9} \, m^4)} = 0.963 \text{ rad}$$

Convirtiendo θ en grados, obtenemos

$$\theta = 0.963 \text{ rad}\,\frac{180 \text{ grados}}{\pi \text{ rad}} = 55.2 \text{ grados}$$

Ahora complete la parte final e) comparando los tubos abiertos y cerrados.

Objetivo Comparar el esfuerzo y deflexión del tubo abierto con los del tubo cerrado.

Datos Con los resultados de las partes a), b), c) y d):

Esfuerzo en el tubo cerrado $= \tau_c = 10$ MPa.
Ángulo de torsión del tubo cerrado $= \theta_c = 0.159$ grados.
Esfuerzo en el tubo abierto $= \tau_o = 311$ MPa.
Ángulo de torsión del tubo abierto $= \theta_o = 55.2$ grados.

Análisis Calcule la relación de los esfuerzos τ_o/τ_c y la relación de los ángulos de torsión θ_o/θ_c.

Resultados Relación de los esfuerzos:

$$\frac{\tau_o}{\tau_c} = \frac{311 \text{ MPa}}{10 \text{ MPa}} = 31.1 \text{ veces mayor}$$

Relación de los ángulos de torsión:

$$\frac{\theta_o}{\theta_c} = \frac{55.2 \text{ grados}}{0.159 \text{ grados}} = 347 \text{ veces mayor}$$

Comentario Estas comparaciones son una clara demostración de la ventaja de utilizar secciones cerradas para soportar torsión.

Además, el nivel de esfuerzo real calculado para el tubo abierto es probablemente mayor que el esfuerzo permisible para muchos aceros. Recuerde que el esfuerzo cortante de diseño es

$$\tau_d = \frac{0.5 s_y}{N}$$

Luego la resistencia a la cedencia requerida del material para que sea seguro con un nivel de esfuerzo de 311 MPa y un factor de diseño de 2.0 es

$$s_y = \frac{N\tau_d}{0.5} = \frac{2(311 \text{ MPa})}{0.5} = 1244 \text{ MPa}$$

Sólo unos cuantos aceros térmicamente tratados que aparecen en el apéndice A–14 tienen este nivel de resistencia a la cedencia.

REFERENCIAS

1. Blodgett, O. W., *Design of Weldments*, James F. Lincoln Arc Welding Foundation, Cleveland, OH, 1963.
2. Boresi, A. R. y R. J. Schmidt, *Advanced Mechanics of Materials*, 6ª ed. John Wiley, Nueva York, 2002.
3. Mott, R. L., *Machine Elements in Mechanical Design*, 4ª ed., Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 2004.
4. Young, W. C. y R. D. Cook, *Advanced Mechanics of Materials*, 2ª ed., Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1999.
5. Young, W. C y R. G. Budynas, *Roark's Formulas for Stress and Strain*, 7ª ed., McGraw-Hill, Nueva York, 2002.

SITIOS EN INTERNET

1. Driv–Lok, Inc., www.driv–lok.com Fabricante de una amplia variedad de cuñas paralelas y dispositivos de sujeción de ajuste forzado o presión, tales como pasadores ranurados, espigas, pernos de muelle y pernos prisioneros. Incluye datos sobre tamaños de cuñas y materiales adecuados para éstas.
2. Truarc Company, LLC www.truarc.com Fabricante de una amplia variedad de anillos de retención para productos industriales, comerciales, militares y de consumo. Un catálogo en línea da dimensiones de ranuras y detalles de una amplia gama de tamaños. Los anillos básicos modelo 5100 se sugieren para aplicaciones en flechas.
3. Keystone Manufacturing www.trukey.com Fabricante de cuñas y flechas con cuñeros premaquinados. Incluye tablas de tamaños de cuñas para diferentes tamaños de flechas y propiedades de material para la fabricación de flechas.
4. Sensors Portal www.sensorsportal.com/HTML/SENSORS/TorqueSens_Manuf.htm El sitio Sensors Portal identifica numerosos fabricantes de sensores para muchas clases de medición, incluida la medición de pares de torsión.
5. S&T e–Digest http://www.sensorsportal.com/HTML/DIGEST/march_06/P_59.pdf Una versión electrónica de *Sensors & Transducers Magazine*. La página citada es un artículo llamado "Evolution and Future of Torque Measurement Technology" del Dr. W. Krimmel, publicado el 27 de marzo de 2006.

PROBLEMAS

4–1.M Calcule el esfuerzo cortante torsional que se produciría en una flecha circular sólida de 20 mm de diámetro cuando se somete a un par de torsión de 280 N·m.

4–2.M Calcule el esfuerzo cortante torsional en una flecha hueca de 35 mm de diámetro externo y 25 mm de diámetro interno cuando se somete a un par de torsión de 560 N·m.

4–3.E Calcule el esfuerzo cortante torsional en una flecha de 1.25 in de diámetro cuando transmite un par de torsión de 1550 lb·in

4–4.E Un tubo de acero se utiliza como una flecha que transmite un par de torsión de 5500 lb·in. El diámetro externo es de 1.75 in y el espesor de pared es de 1/8 in. Calcule el esfuerzo cortante torsional en las superficies externa e interna del tubo.

4–5.M El mecanismo propulsor de un proyector de cine es accionado por un motor de 0.08 kW cuyo eje gira a 180 rad/s. Calcule el esfuerzo cortante torsional en su eje de 3.0 mm de diámetro.

4–6.M El impulsor de una batidora gira a 42 rad/s y requiere 35 kW de potencia. Calcule el esfuerzo cortante torsional en la flecha que acciona el impulsor si es hueca y tiene un diámetro externo de 40 mm y un diámetro interno de 25 mm.

4–7.E La flecha motriz de una fresadora transmite 15.0 hp a una velocidad de 240 rpm. Calcule el esfuerzo cortante torsional en la flecha si es sólida y tiene un diámetro de 1.44 in. ¿Sería segura la flecha si el par de torsión se aplicara con choque y estuviera hecha de acero AISI 4140 OQT 1300.

4–8.E Repita el problema 4–7 si la flecha contuviera un cuñero de perfil.

4–9.E La figura P4–9 muestra el extremo de la flecha vertical de una podadora de césped rotatoria. Calcule el esfuerzo cortante torsional máximo en la flecha si transmitiera 7.5 hp a las cuchillas al girar a 2200 rpm. Especifique un acero adecuado para la flecha.

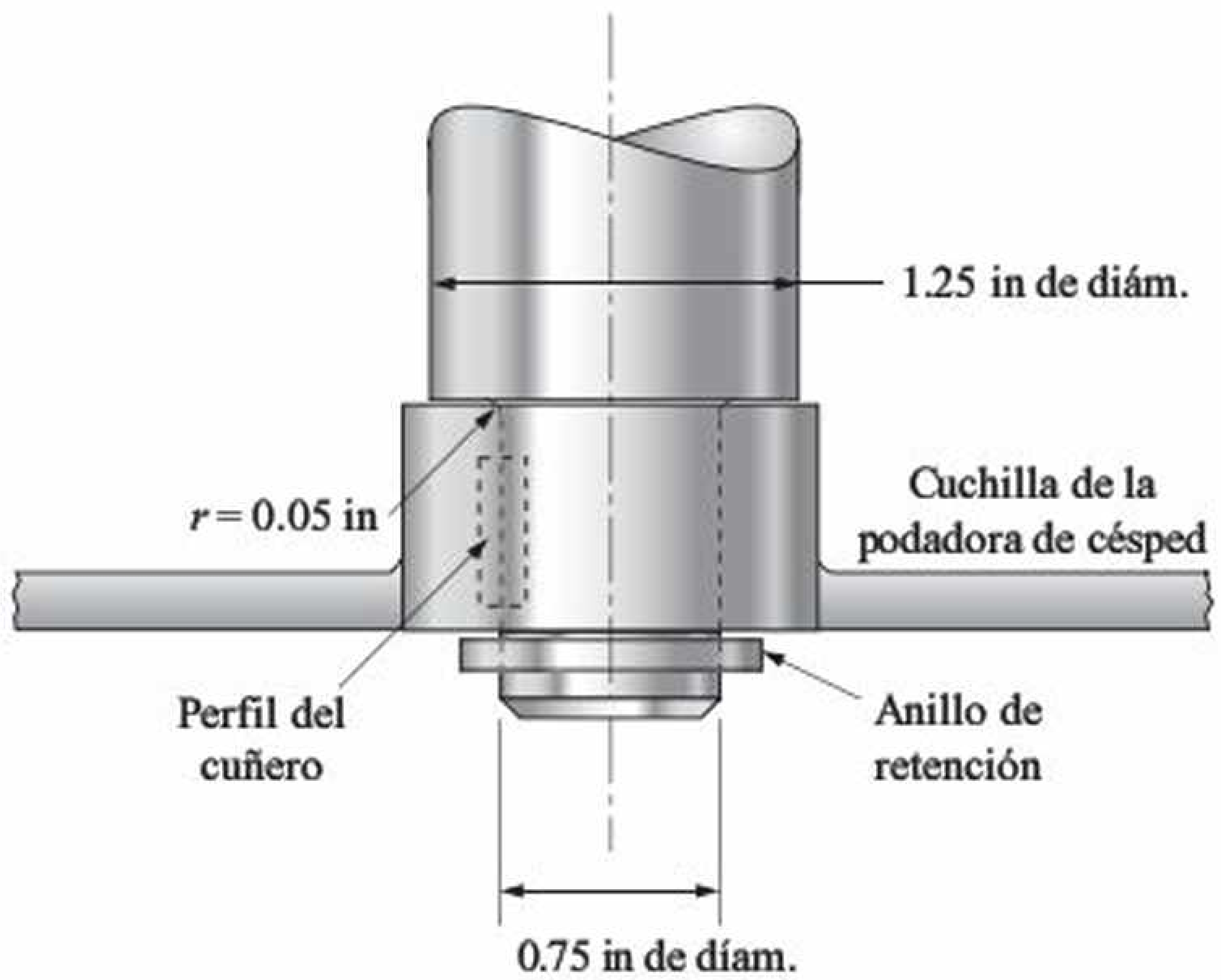


FIGURA P4–9 Flecha del problema 4-9.

4–10.E La figura P4–10 muestra una flecha escalonada sometida a torsión. La sección de mayor diámetro también tiene un barreno que la atraviesa de lado a lado.

a) Calcule el esfuerzo cortante máximo en el escalón con un par de torsión aplicado de 7500 lb·in.

b) Determine el barreno de mayor diámetro que se podría perforar en la flecha de modo que el esfuerzo cerca del barreno se mantenga a un valor igual o menor que el que ocurre en el escalón.

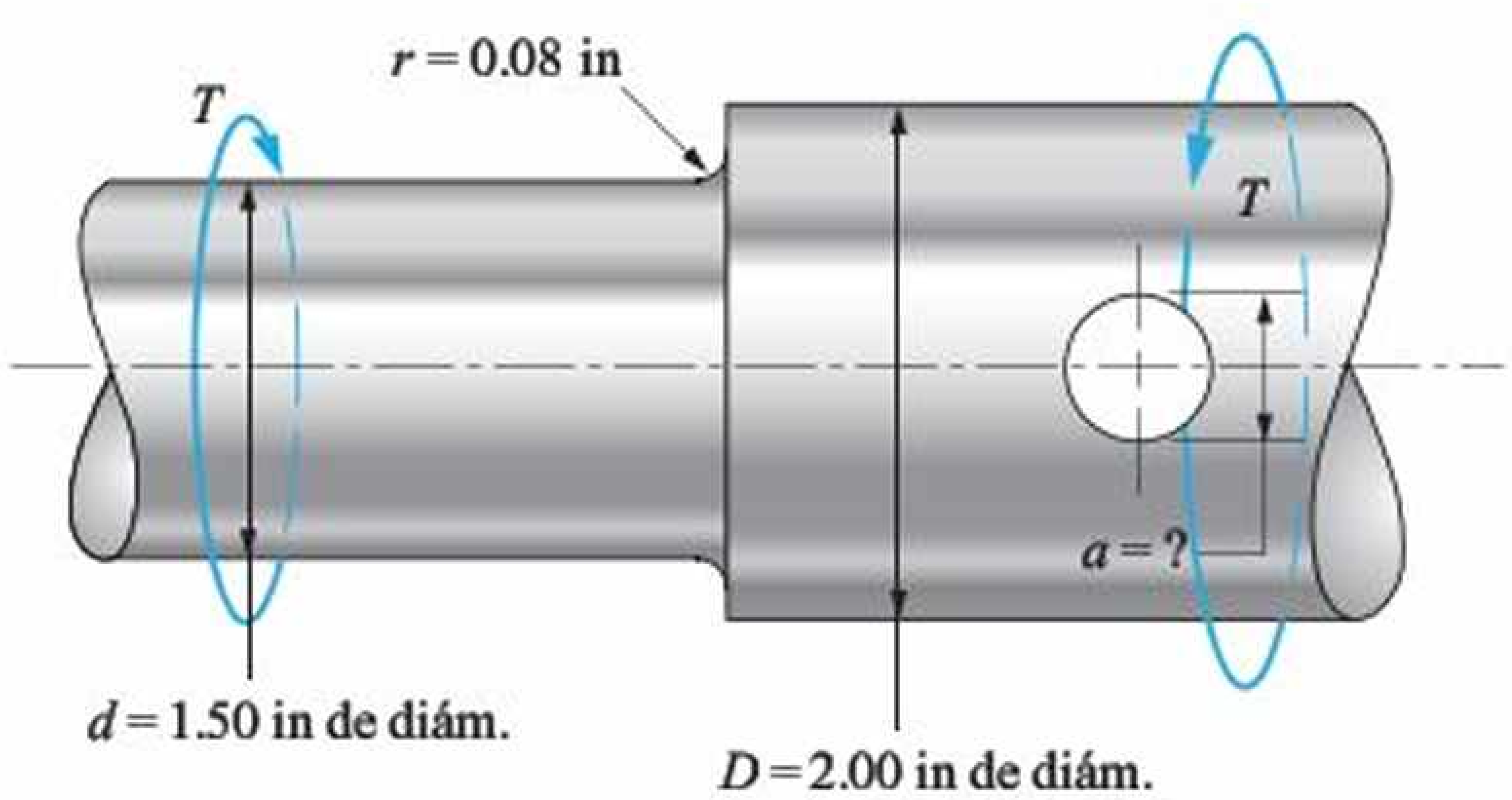


FIGURA P4–10 Flecha del problema 4-10.

4–11.M Calcule el esfuerzo cortante torsional y el ángulo de torsión en grados en un tubo de aluminio de 600 mm de largo, 60 mm de diámetro interno y 80 mm de diámetro externo cuando se somete a un par de torsión constante de 4500 N·m. A continuación especifique una aleación de aluminio apropiada para el tubo.

4–12.M Se tienen en mente dos diseños para una flecha. Ambas tienen un diámetro externo de 50 mm y son de 600 mm de largo. Una es sólida y la otra hueca, con diámetro interno de 40 mm. Ambas son de acero. Compare el esfuerzo cortante torsional, el ángulo de torsión y la masa de las dos flechas al someterse a un par de torsión de 850 N·m.

4–13.M Determine los diámetros interno y externo requeridos para una flecha hueca que transmite un par de torsión de 1200 N·m con un esfuerzo cortante torsional máximo de 45 MPa. Haga que la relación del diámetro externo al interno sea aproximadamente de 1.25.

4–14.E La flecha motriz impulsada por engranes de una fresadora transmite 7.5 hp a una velocidad de 240 rpm. Calcule el esfuerzo cortante torsional en la flecha sólida de 0.860 in de diámetro.

4–15.E La flecha de entrada de la transmisión de engranes descrita en el problema 4-14 también transmite 7.5 hp, pero ahora gira a 1140 rpm. Determine el diámetro requerido de la flecha de entrada para que soporte el mismo esfuerzo que la flecha de salida.

4–16.E Determine el esfuerzo que se produciría en un tubo de acero cédula 40 de 1½ in cuando un plomero aplica una fuerza de 80 lb en el extremo del maneral de una llave de tuercas de 18 in de largo.

4–17.E Un anuncio giratorio completa 1 revolución cada 5 s. Cuando el viento sopla con fuerza, para mantener la rotación se requiere un par de torsión de 30 lb·ft. Calcule la potencia requerida para impulsar el anuncio. También calcule el esfuerzo en la flecha motriz final si su diámetro fuera de 0.60 in. Especifique un acero adecuado para la flecha para obtener un factor de diseño de 4 basado en la resistencia a la cedencia a cortante.

4–18.M Se suelda una corta barra cilíndrica en un extremo de una placa rígida, y luego se aplica un par de torsión en el otro. Si el diámetro de la barra es de 15 mm y es de acero AISI 1020 estirado en frío, calcule el par de torsión que hay que aplicarle para someterla a un esfuerzo igual a su resistencia a la cedencia a cortante. Use $s_{ys} = s_y/2$.

4–19.E La flecha motriz de la hélice de un barco debe transmitir 2500 hp a 75 rpm. Se tiene que fabricar de acero AISI 1040 WQT 1300. Use un factor de diseño de 6 basado en la resistencia a la cedencia a cortante. La flecha tiene que ser hueca, con el diámetro interno igual a 0.80 veces el diámetro externo. Determine el diámetro requerido de la flecha.

4–20.E La flecha de la hélice del problema 4–19 tiene que ser sólida en lugar de hueca; determine el diámetro requerido. Luego calcule la relación del peso de la flecha sólida al de la flecha hueca.

4–21.M Un destornillador mecánico o de impacto utiliza una flecha de 5.0 mm de diámetro. ¿Qué par de torsión se puede aplicar al destornillador si el esfuerzo límite producido por torsión es de 80 MPa?

4–22.M Una extensión de una llave de caja similar a la mostrada en la figura 4–4 tiene un diámetro de 6.0 mm y una longitud de 250 mm. Calcule el esfuerzo y el ángulo de torsión en la extensión cuando se le aplica un par de torsión de 5.5 N·m. La extensión es de acero.

4–23.M Calcule el ángulo de torsión en una flecha de acero de 15 mm de diámetro y 250 mm de largo cuando se le aplica un par de torsión de 240 N·m.

4–24.M Calcule el ángulo de torsión en un tubo de aluminio cuyos diámetros externo e interno son de 80 mm y 60 mm, respectivamente, cuando se somete a un par de torsión de 2250 N·m. El tubo es de 1200 mm de largo.

4–25.E Se utiliza una varilla de acero de 8.0 ft de longitud y diámetro de 0.625 in como una llave larga para desatornillar un tapón roscado en el fondo de una piscina. Se requiere un par de torsión de 40 lb·ft para aflojarlo; calcule el ángulo de torsión de la varilla.

4–26.E ¿Qué diámetro debe tener la varilla del problema 4-25 si se desea que experimente sólo 2.0 grados de torsión cuando se somete a un par de torsión de 40 lb·ft?

4–27.M Calcule el ángulo de torsión del extremo libre con respecto al extremo fijo de la barra de acero mostrada en la figura P4–27.

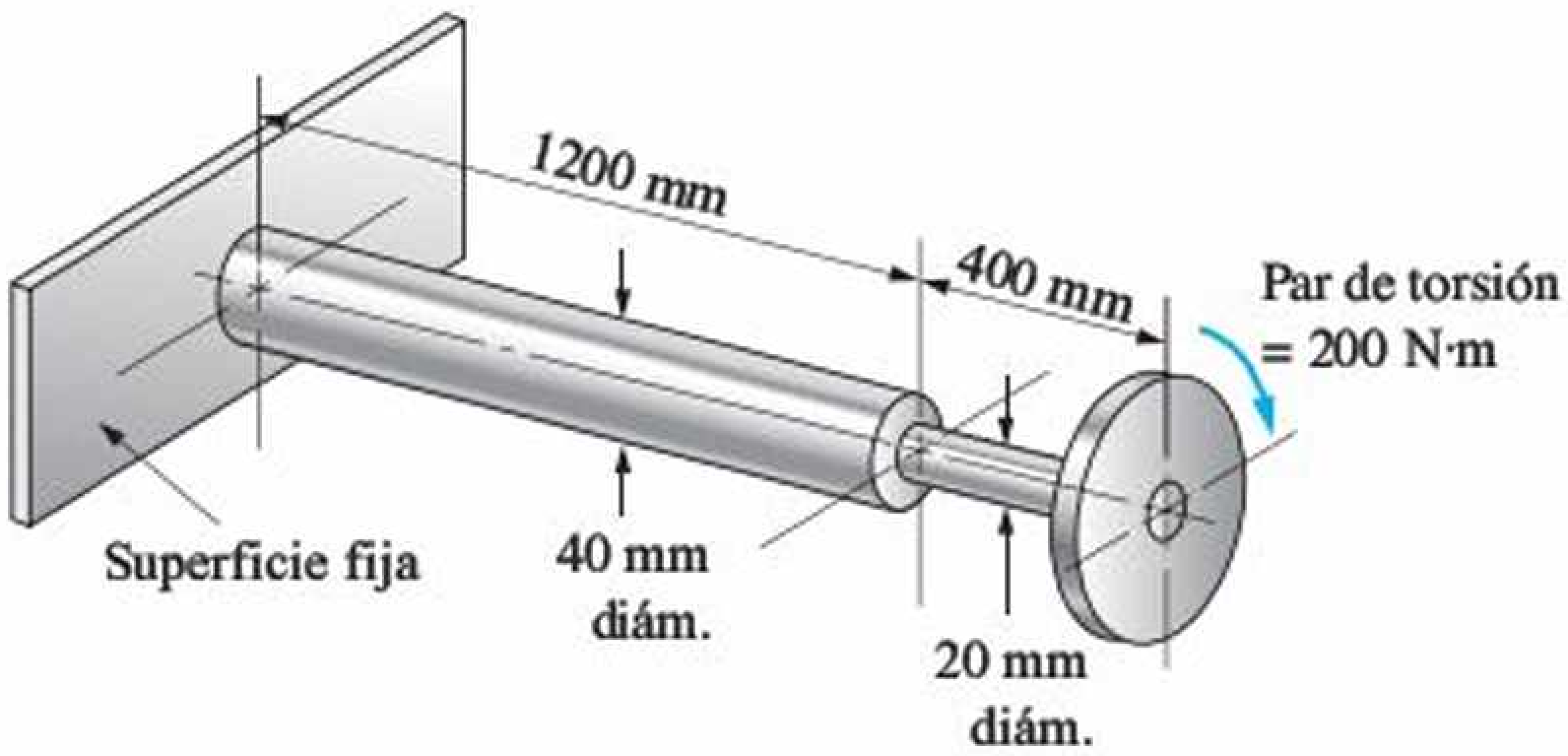


FIGURA P4–27 Barra del problema 4-27.

4–28.M Un medidor de par de torsión utiliza el ángulo de torsión de una flecha para indicar el par de torsión. La flecha tiene que ser de aleación de aluminio 6061–T6 y de 150 mm de longitud. Determine el diámetro requerido de la flecha si se desea que experimente una torsión de 10.0 grados cuando se aplica un par de torsión de 5.0 N·m al medidor. Para la flecha así diseñada, calcule el esfuerzo cortante torsional y luego calcule el factor de diseño resultante para la flecha. ¿Es satisfactorio? De no serlo, ¿qué haría usted?

4–29.M Un alambre de cobre al berilio de 1.50 mm de diámetro y 40 mm de longitud se utiliza como un pequeño tirante o tensor en un instrumento. Determine que ángulo de torsión se produciría en el alambre si se sometiera a un esfuerzo de 250 MPa.

4–30.M Una línea de combustible en un avión es de aleación de titanio. La línea tubular tiene un diámetro externo de 18 mm y un diámetro interno de 16 mm. Calcule el esfuerzo en el tubo si un segmento de 1.65 m debe ser torcido un ángulo de 40 grados durante su instalación. Determine el factor de

diseño basado en la resistencia a la cedencia a cortante; el tubo es de aleación Ti–6A1–4V, envejecida.

4–31.M Para la flecha mostrada en la figura P4–31, calcule el ángulo de torsión de las poleas B y C con respecto a A. El diámetro de la flecha de acero es de 35 mm a todo lo largo de ella. Los pares de torsión son $T_1 = 1500$ N·m, $T_2 = 1000$ N·m, $T_3 = 500$ N·m. Las longitudes son $L_1 = 500$ mm, $L_2 = 800$ mm.

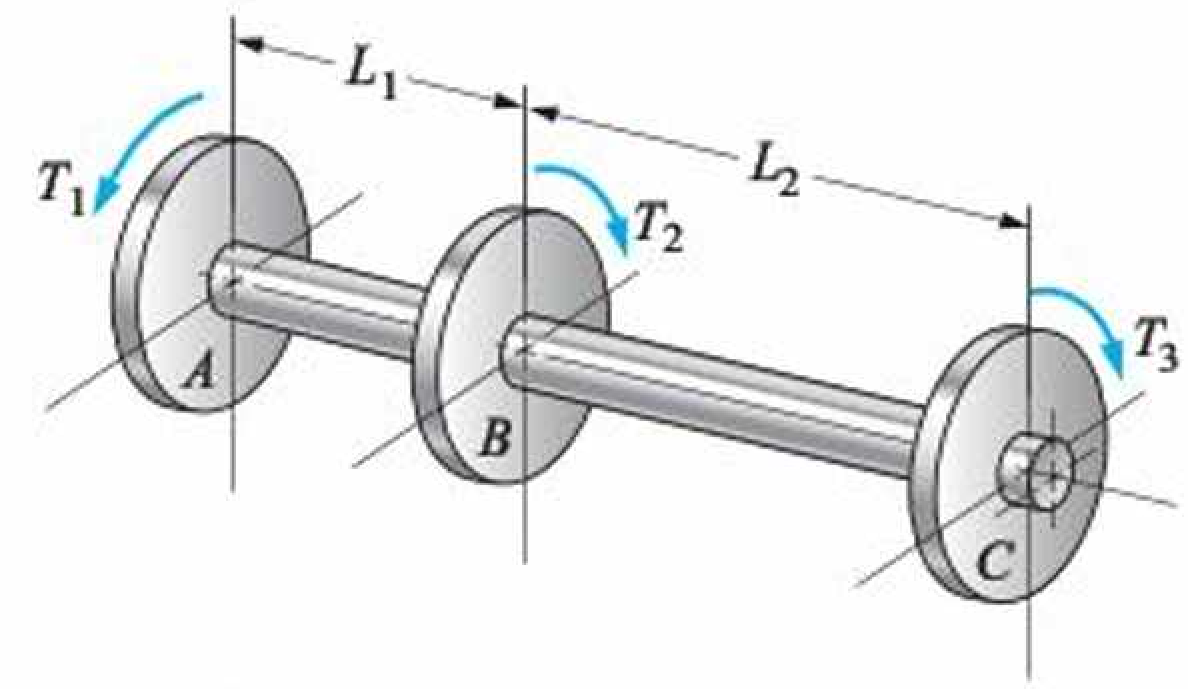


FIGURA P4–31 Flecha del problema 4-31.

4–32.M Una barra de torsión de una suspensión de camión tiene que ser de acero y 820 mm de largo. Se somete a un par de torsión de 1360 N·m y la torsión debe limitarse a 2.2 grados. Determine el diámetro requerido de la barra redonda sólida. En seguida calcula el esfuerzo en la barra.

4–33.M La flecha motriz de acero de un automóvil es un tubo hueco de 1525 mm de largo. Su diámetro externo es de 75 mm y su diámetro interno de 55 mm. Si la flecha transmite 120 kW de potencia a una velocidad de 225 rad/s, calcule el esfuerzo cortante torsional en la flecha y el ángulo de torsión de un extremo con respecto al otro.

4–34.M Una parte del eje trasero de un automóvil es una flecha de acero sólida cuya configuración es la mostrada en la figura P4–34. Considerando la concentración de esfuerzo provocada por el hombro, calcule el esfuerzo cortante torsional en el eje cuando gira a 70.0 rad/s y transmite 60 kW de potencia.

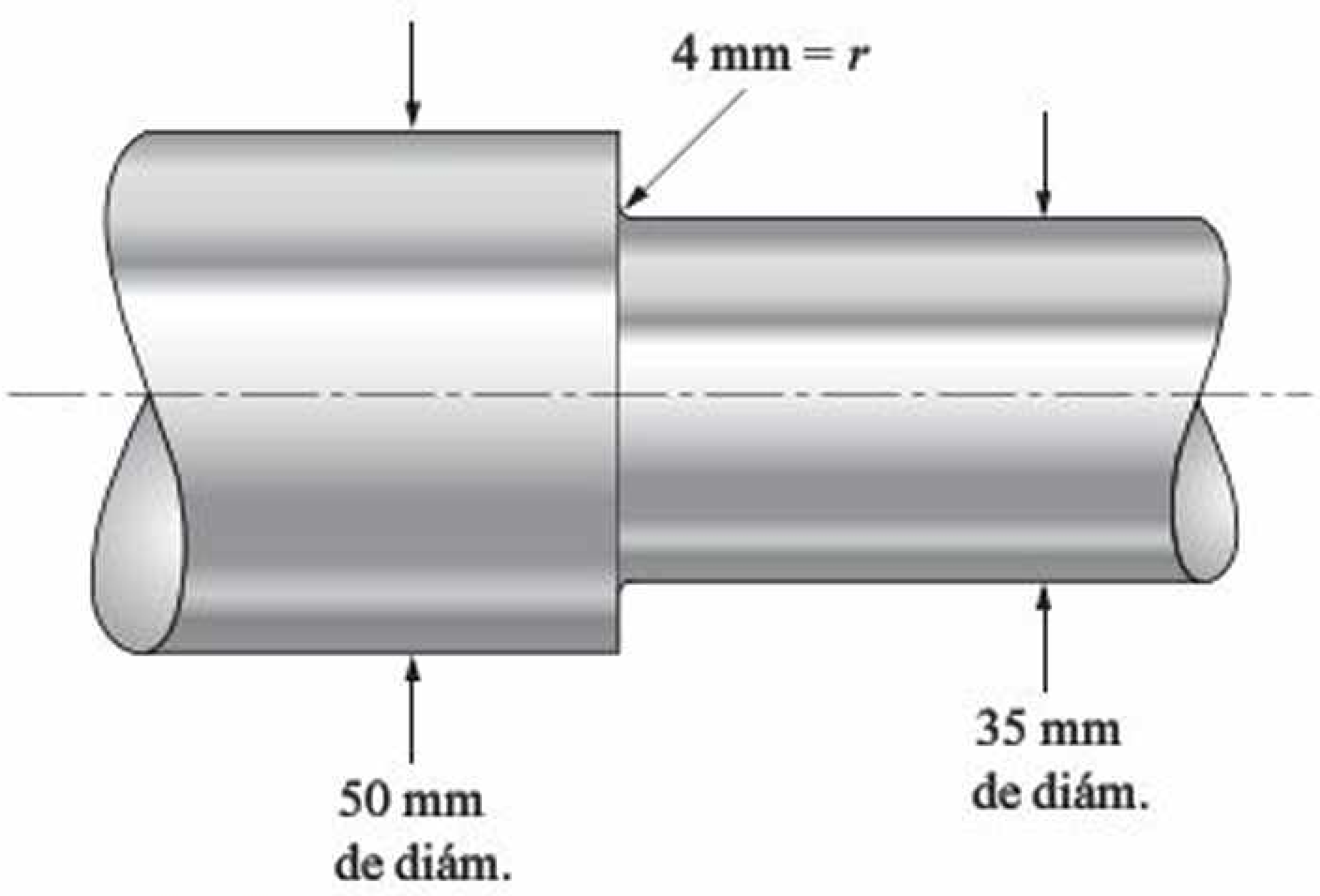


FIGURA P4–34 Eje del problema 4-34.

4–35.M Una parte de una flecha de salida de una transmisión automotriz tiene la configuración mostrada en la figura P4–35. La flecha transmite 105 kW a 220 rad/s; calcule el esfuerzo cortante torsional máximo en la flecha. Tenga en cuenta la concentración de esfuerzo en el lugar donde va el engrane del velocímetro.

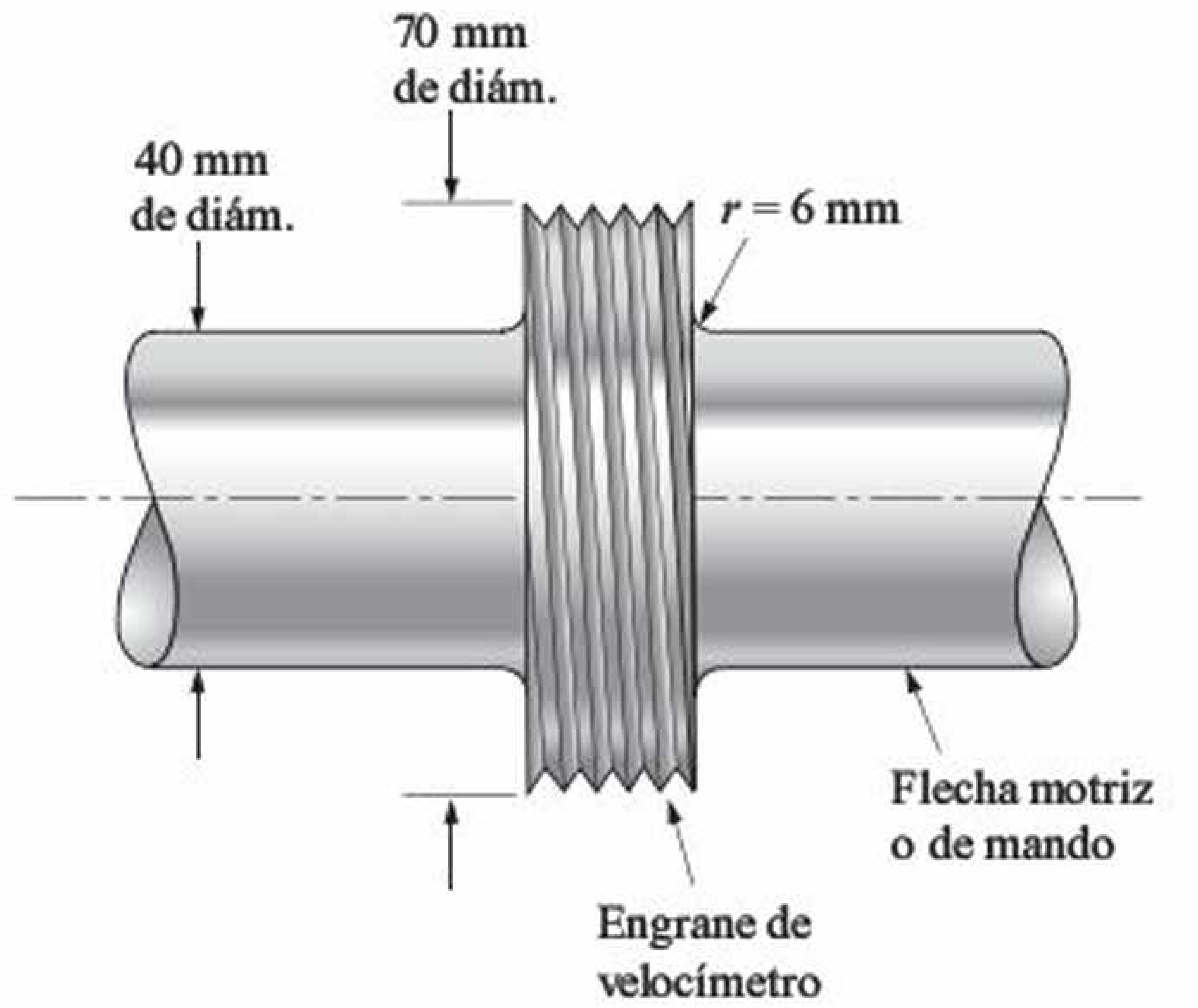


FIGURA P4–35 Flecha del problema 4-35.

Las figuras indicadas para los problemas 4–36 a 4–39 muestran segmentos de flechas de equipo transmisor de potencia. Calcule el par de torsión repetido máximo que podría ser aplicado con seguridad a cada flecha (tienen que ser de acero AISI 1141 OQT 1100).

4–36.M Use la figura P4–36.

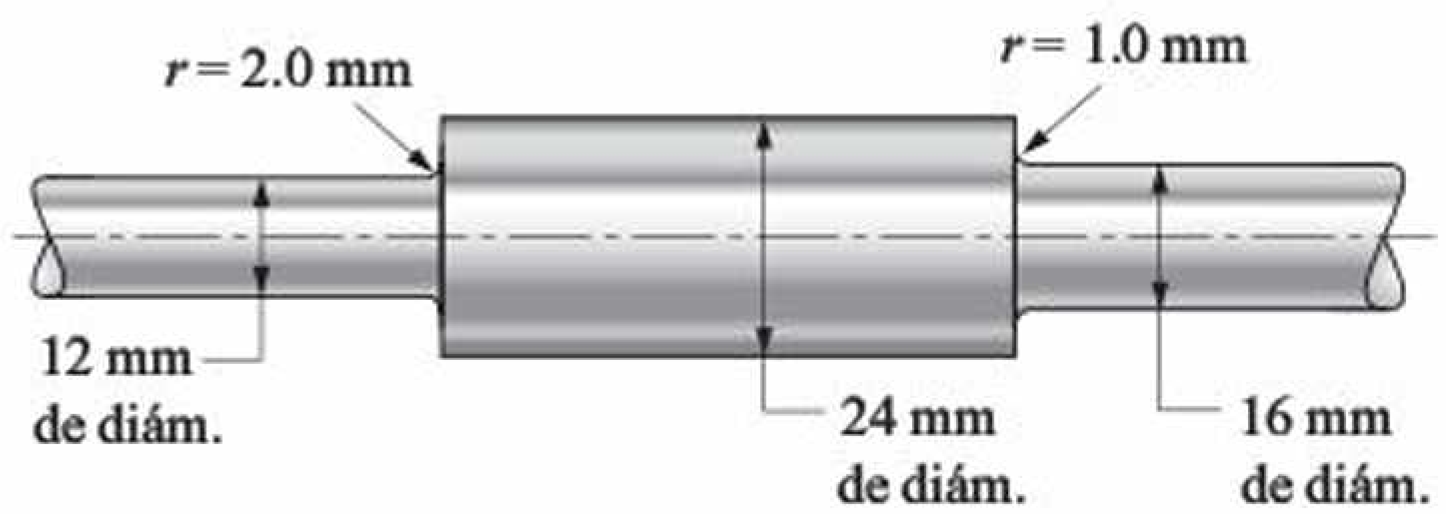


FIGURA P4–36 Flecha del problema 4-36.

4–37.E Use la figura P4–37.

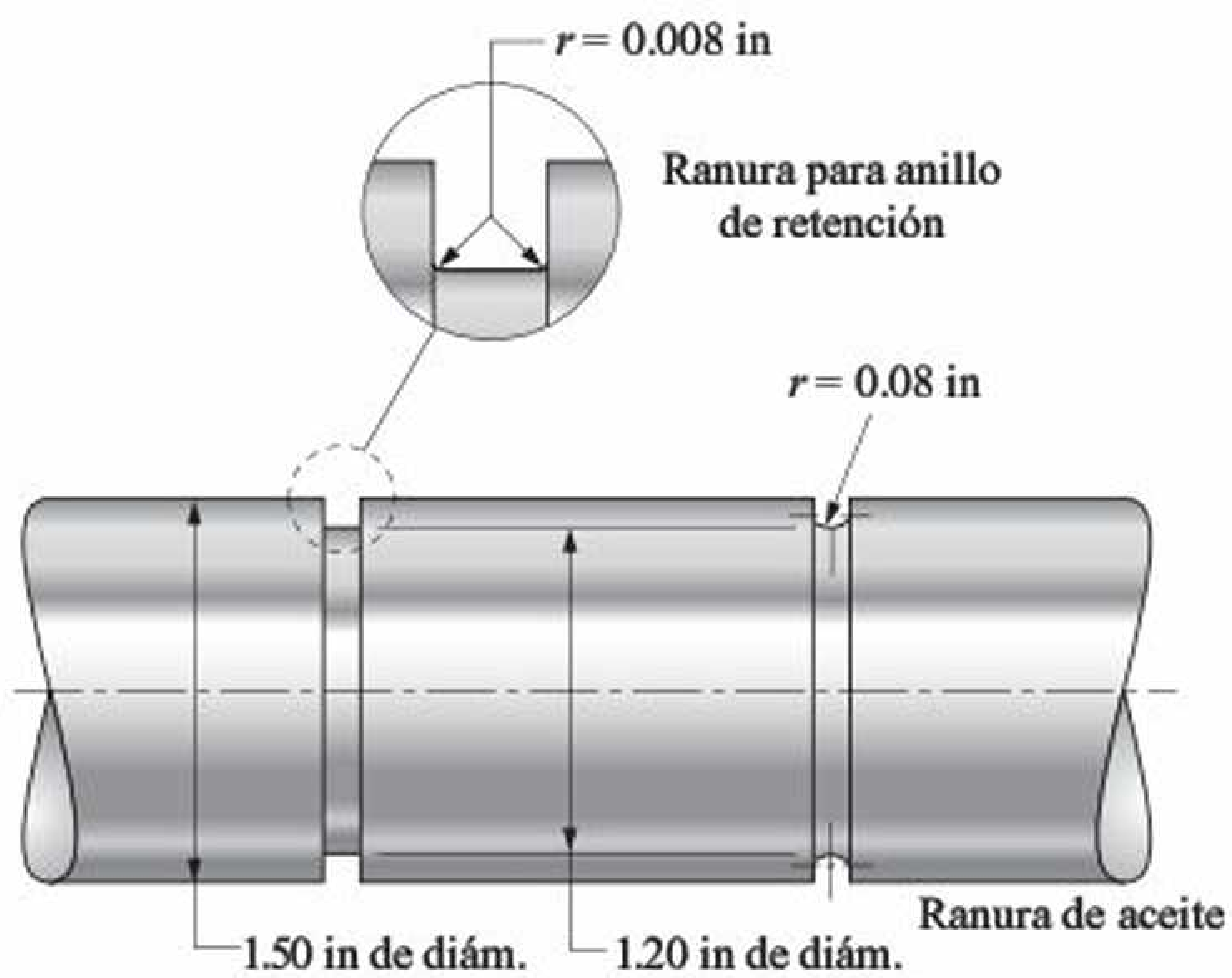


FIGURA P4–37 Flecha del problema 4-37.

4–38.M Use la figura P4–38.

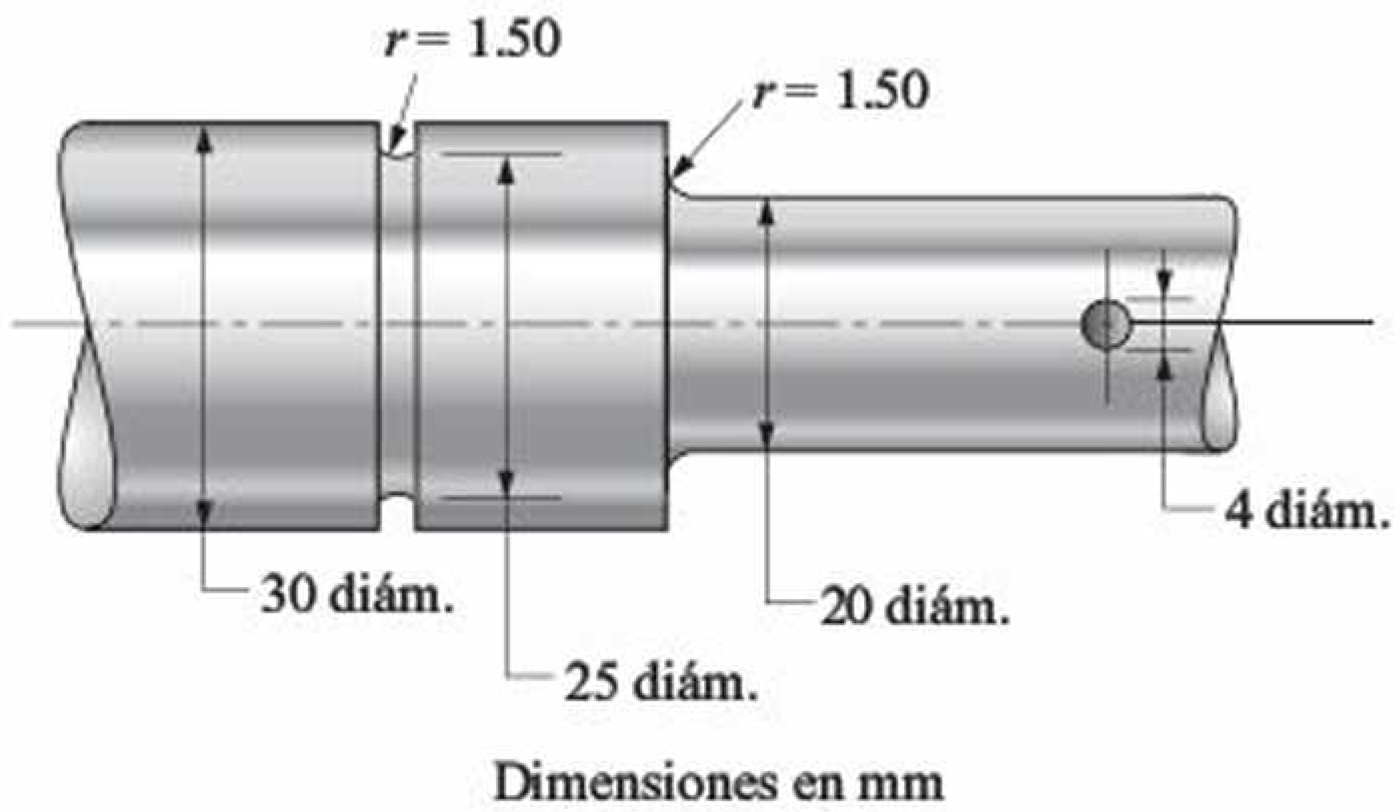


FIGURA P4–38 Flecha del problema 4-38.

4–39.E Use la figura P4–39.

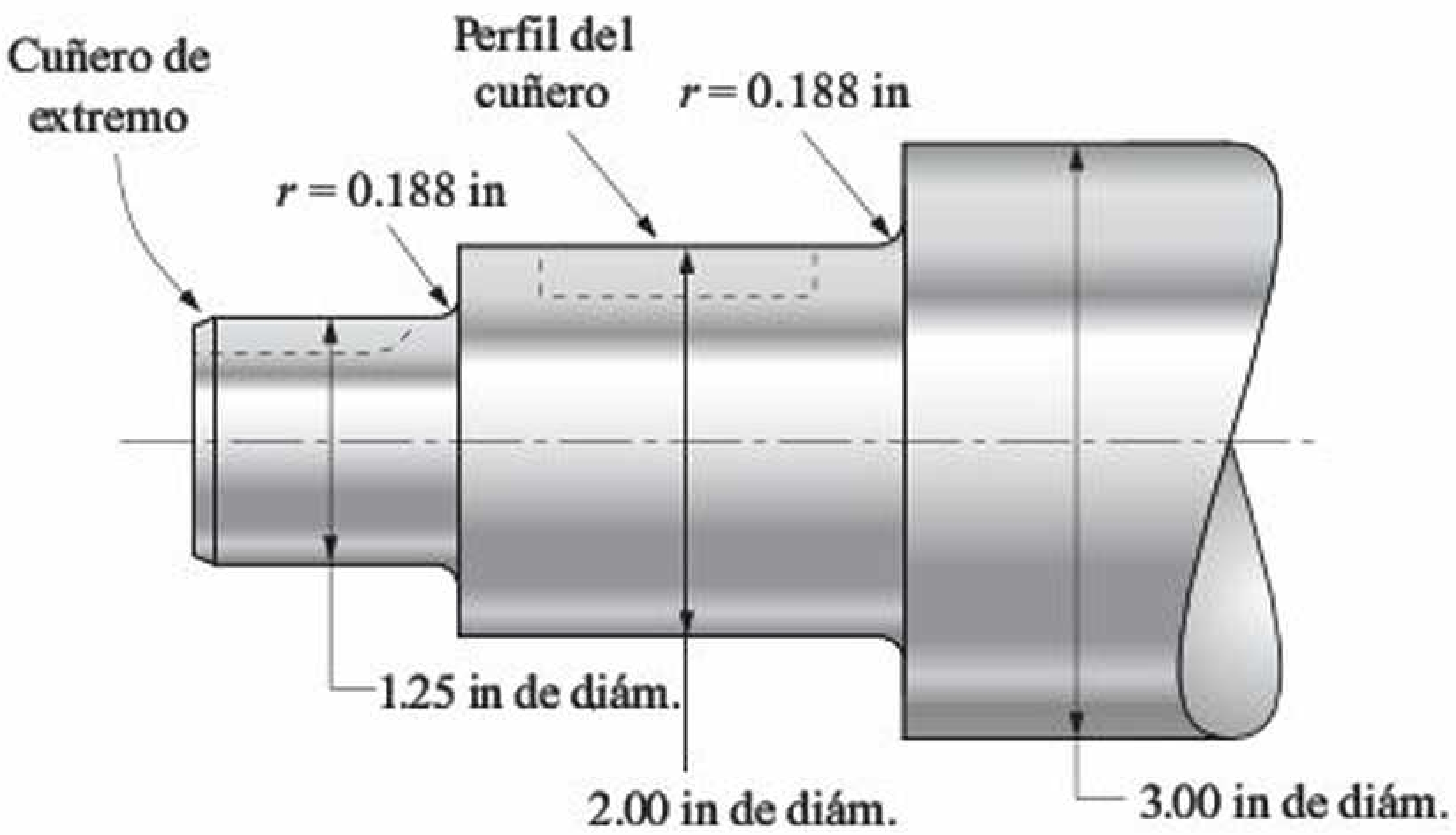


FIGURA P4–39 Flecha del problema 4-39.

Secciones no circulares

4–40.M Calcule el par de torsión que produciría un esfuerzo cortante torsional de 50 MPa en una varilla de acero cuadrada de 20 mm por lado.

4–41.M Para la varilla descrita en el problema 4–40, calcule el ángulo de torsión que produciría el par de torsión determinado en el problema a lo largo de 1.80 m.

4–42.E Calcule el par de torsión que produce un esfuerzo cortante torsional de 7500 psi en una varilla de aluminio cuadrada de 1.25 in por lado.

4–43.E Para la varilla descrita en el problema 4–42, calcule el ángulo de torsión que produciría el par de torsión determinado en el problema a lo largo de 48 in.

4–44.E Calcule el par de torsión que produce un esfuerzo cortante torsional de 7500 psi en una barra rectangular de aluminio de 1.25 in de espesor por 3.00 in de ancho.

4–45.E Para la barra descrita en el problema 4–44, calcule el ángulo de torsión que produciría el par de torsión determinado en el problema a lo largo de 48 in.

4–46.M El perfil de una barra de aluminio extruida es un triángulo equilátero de 30 mm por lado. ¿Qué par de torsión se requiere para originar un ángulo de torsión en la barra de 0.80 grados a lo largo de 2.60 m?

4–47.M Para la barra triangular descrita en el problema 4–46, ¿qué esfuerzo se desarrollaría en la barra al transmitir el par de torsión determinado en el problema?

4–48.E Como se muestra en la figura P4–48, un segmento de una flecha de acero tiene un plano maquinado en un lado. Calcule el esfuerzo cortante torsional tanto en la sección circular como en el plano cuando se aplica un par de torsión de 850 lb·in.

4–49.E Para la barra de acero mostrada en la figura P4–48, calcule el ángulo de torsión de un extremo con respecto al otro si se aplica un par de torsión de 850 lb·in. uniformemente a todo lo largo de ella.

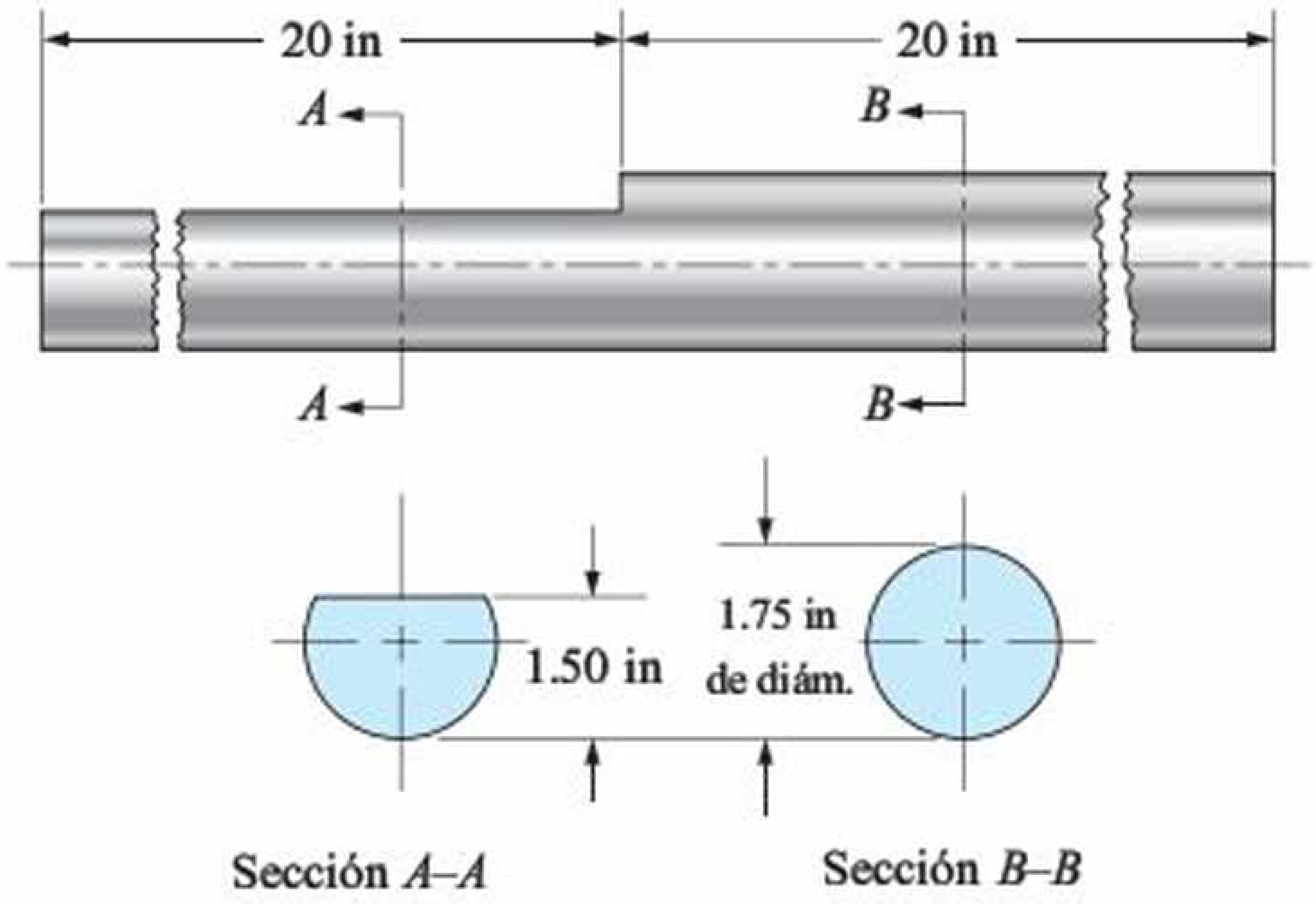


FIGURA P4–48 Problemas 4-48 a 4-51.

4–50.E Repita el problema 4–48 con los mismos datos, excepto que dos planos fueron maquinados en la flecha resultando en una medición total a través de ellos de 1.25 in.

4–51.E Repita el problema 4–49 para una flecha que tiene dos planos y que dan una medición total a través de ellos de 1.25 in.

4–52.M Un perno cuadrado de 200 mm de largo y de 8 mm por lado es de titanio Ti–6A1–4V envejecido. ¿Qué ángulo de torsión se producirá cuando una llave de tuercas aplica un par de torsión puro que hace que el esfuerzo sea igual a la resistencia a la cedencia del material a cortante?

4–53.E Calcule el par de torsión requerido para producir una torsión de 3.00 grados en un tubo de acero estructural cuadrado estándar de 4 × 4 × ¼ in y 8.00 ft de largo.

4–54.E Para el tubo del problema 4–53, calcule el esfuerzo máximo en él cuando se tuerce 3.00 grados. ¿Sería seguro este ángulo de torsión si el tubo fuera de acero estructural ASTM A501 y la carga fuera estática?

4–55.E Repita el problema 4–53 para un tubo rectangular de 6 × 4 × ¼.

4–56.E Repita el problema 4–54 para un tubo rectangular de 6 × 4 × ¼.

4–57.E La sección transversal, de 6 × 6 × ¼, de un tubo de acero cédula 40 estándar de 6 in es aproximadamente igual a la de un tubo cuadrado, y por consiguiente un segmento de ambos de la misma longitud pesaría lo mismo. Compare el esfuerzo cortante torsional y el ángulo de torsión resultantes para los dos perfiles, si se les aplicara el mismo par de torsión a ambos.

PROBLEMAS ADICIONALES DE PRÁCTICA, REPASO Y DISEÑO

4–58 Calcule el esfuerzo cortante torsional en un flecha redonda sólida que transmite 125 kW de potencia mientras gira a 1150 rpm. El diámetro de la flecha es de 35 mm.

4–59 Para la flecha del problema 4–58, especifique un acero adecuado para una potencia uniforme y continua.

4–60 Para la flecha del problema 4–58, especifique un acero adecuado para una potencia cíclica.

4–61 Para la flecha del problema 4–58, especifique un acero adecuado para una potencia aplicada con choque.

4–62 Una flecha de transmisión de potencia tiene que transmitir un caballaje constante de 12.0 hp mientras gira a 1150 rpm. Especifique un diámetro adecuado para la flecha circular sólida si tiene que ser de acero AISI 1040 WQT 1100.

4–63 Una flecha de transmisión de potencia tiene que transmitir un caballaje constante de 20.0 hp mientras gira a 3450 rpm. La flecha impulsa una máquina especial que forma láminas de acero y se esperan algunas cargas de choque. Especifique un diámetro adecuado para la flecha circular sólida si tiene que ser de acero AISI 4140 OQT 1300.

4–64 Una flecha de aleación de acero tiene un diámetro externo de 100 mm. Se perfora un barreno central de 60 mm en una parte de su longitud, como se muestra en la figura P4–64. Calcule el esfuerzo cortante en la sección hueca si el esfuerzo en la sección sólida es de 200 MPa.

4–65 Para la flecha descrita en el problema 4–64, calcule el ángulo de torsión del extremo derecho con respecto al izquierdo.

4–66 La figura P4–66 muestra una flecha con tres poleas que gira a 1750 rpm. La polea A suministra 15 kW a una polea compañera que impulsa un ventilador. La polea C suministra 20 kW a una polea compañera diferente que impulsa una transportadora. Toda la potencia llega a la flecha por medio de la polea B. Considerando sólo torsión, calcule el esfuerzo cortante en cada parte de la flecha. Considere concentraciones de esfuerzo.

4–67 La figura P4–67 muestra una flecha con tres engranes que giran a 1150 rpm. La polea A suministra 20 kW a una polea compañera que impulsa una mezcladora. La polea C suministra 12 kW a una polea compañera diferente que impulsa una sierra circular. Toda la potencia llega a la flecha por medio de la polea B. Considerando sólo torsión, calcule el esfuerzo cortante en cada parte de la flecha. Considere concentraciones de esfuerzo.

4–68 Diseñe una flecha de acero hueca para que transmita 225 kW de potencia a 80 rpm sin que exceda un esfuerzo cortante de 60 MPa. Considere sólo torsión y asuma que no hay concentraciones de esfuerzo. Haga que la relación del diámetro externo al interno sea aproximadamente de 1.25.

4–69 Una varilla de aluminio sólida de 4.0 mm de diámetro tiene que experimentar una torsión de ½ revolución (180 grados) cuando actúa como barra de torsión. El esfuerzo cortante torsional no debe ser de más de 150 Mpa. Determine la longitud requerida de la varilla.

4–70 Se tiene que fabricar una barra de torsión con una barra de titanio hueca de 200 mm de longitud. La relación del diámetro externo al interno tiene que ser aproximadamente de 1.50. La rigidez torsional deseada tiene que ser de 0.015 grados de rotación por cada 1.0 N·m de par de torsión aplicado. Especifique los diámetros externo e interno de la barra.

4–71 Para la barra diseñada en el problema 4–70, calcule el esfuerzo cortante torsional que ocurriría en la barra cuando gira 10.0 grados.

4–72 Para la barra diseñada en el problema 4–70, calcule el ángulo de torsión cuando el esfuerzo cortante torsional en la barra tiene una factor de diseño de 3 basado en la resistencia a la cedencia a cortante. El material de la barra es acero AISI 4141 OQT 1100.

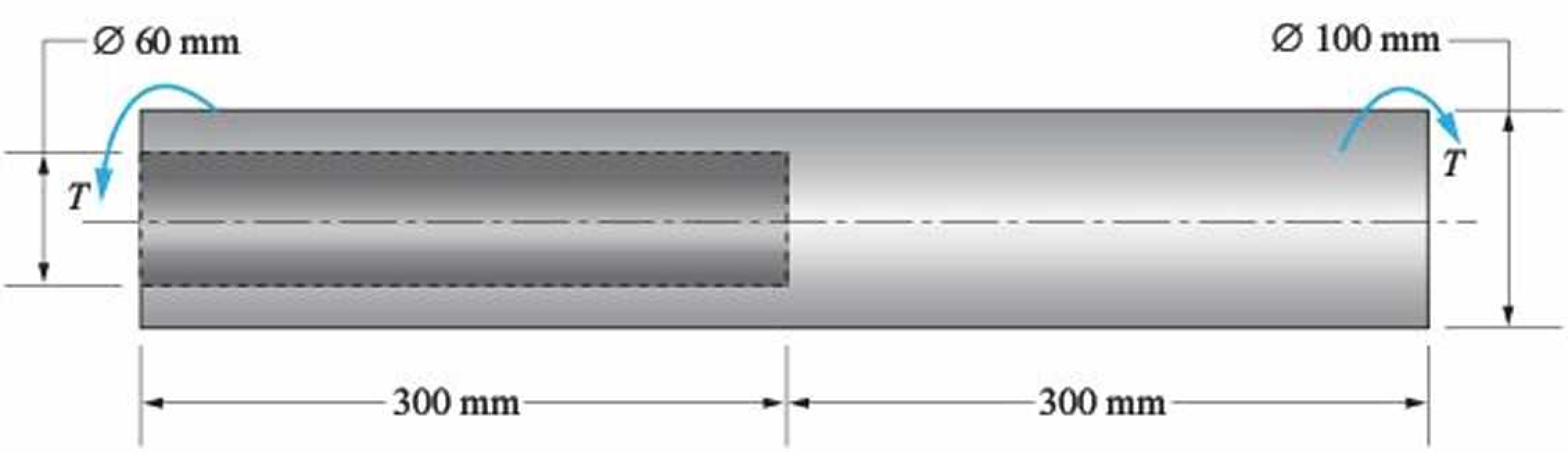
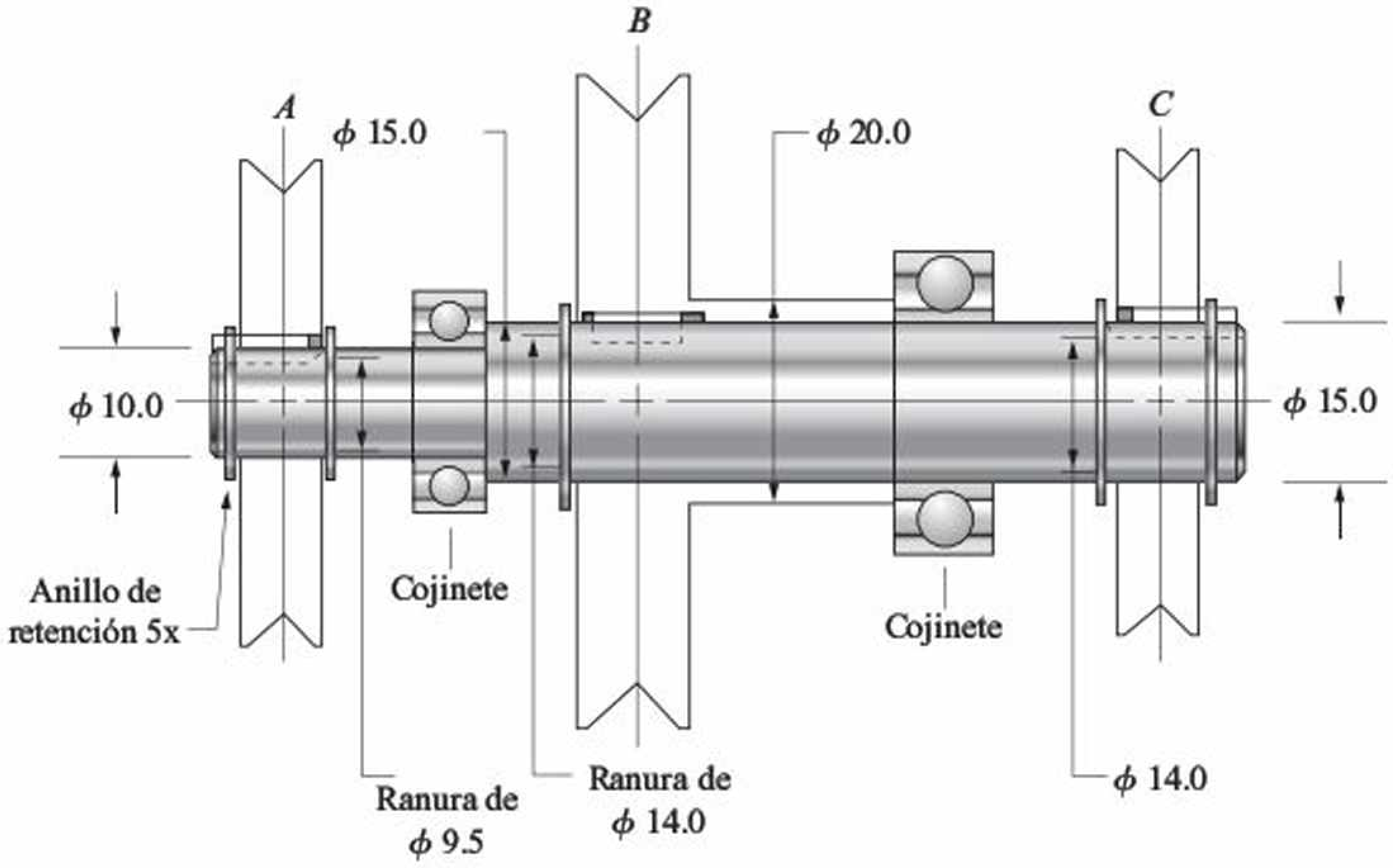
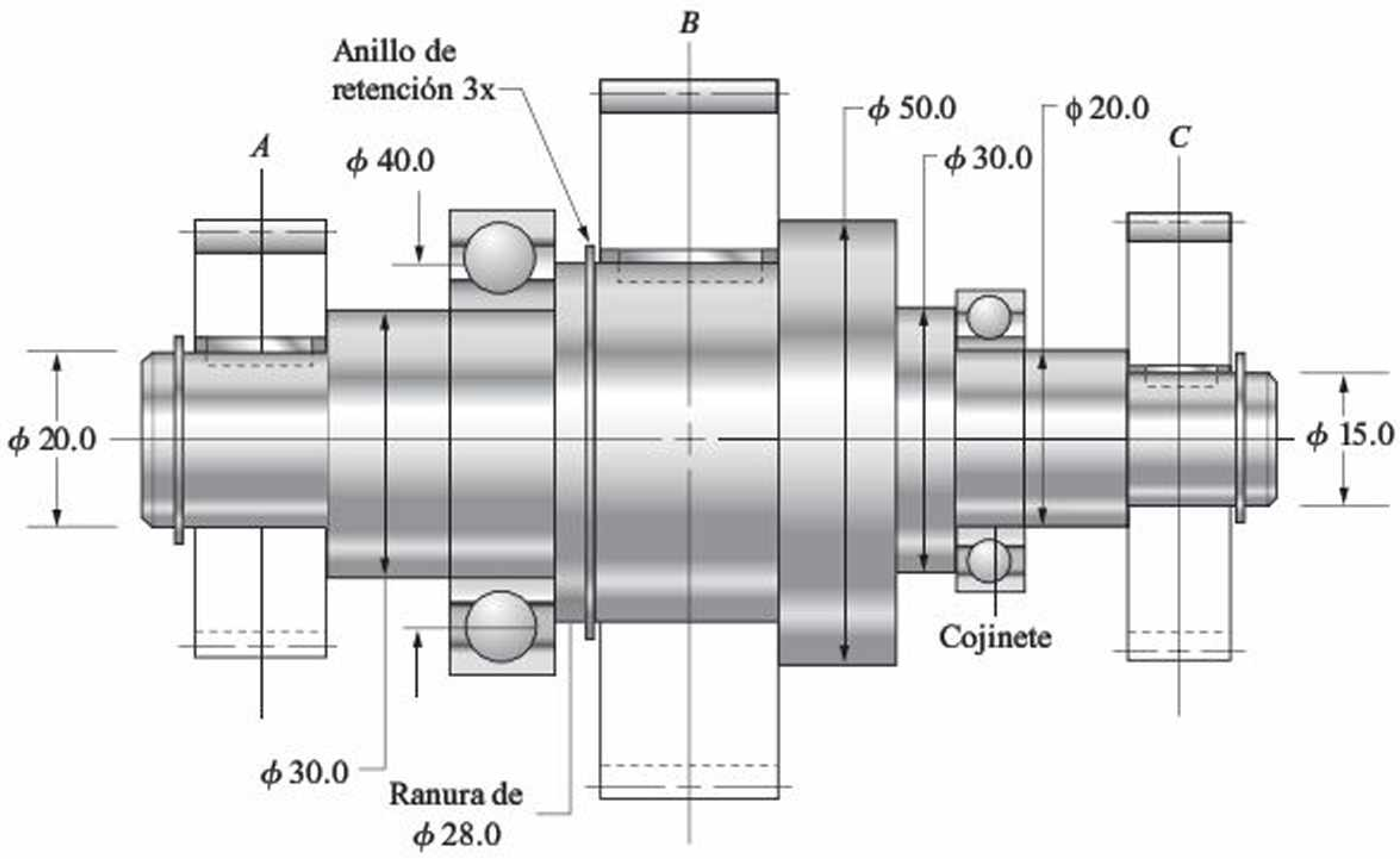


FIGURA P4–64 Flecha de los problemas 4-64 y 4-65.



Radio de filete = 0.50 mm en cada escalón
Dimensiones en mm
Cuñero de extremo en *A, C*
Perfil del cuñero en *B*

FIGURA P4–66 Flecha del problema 4–66.



Cuñeros de perfil *A, B, C*
Radio de filete = 1.00 mm en cada escalón
Dimensiones en mm

FIGURA P4–67 Flecha del problema 4–67.

TAREAS PARA RESOLVERSE CON COMPUTADORA

Nota: Cualquiera de estas tareas puede ser realizada como un programa de computadora en un lenguaje técnico tal como QBASIC o C. O podrían diseñarse como una hoja de cálculo o resueltas con un sistema algebraico de computadora o con algún otro programa de análisis matemático. Asegúrese de considerar todos los factores introducidos en los problemas e indicar las unidades de todos los resultados.

1. Dada la necesidad de diseñar una flecha circular sólida para un par de torsión dado, una resistencia a la cedencia dada y un factor de diseño dado, calcule el diámetro requerido para la flecha.

Adiciones a la tarea 1

a) Para una potencia transmitida y velocidad de rotación dadas, calcule el par de torsión aplicado.

b) Incluya una tabla de materiales de entre los cuales el diseñador pueda seleccionar. Luego automáticamente busque la resistencia a la cedencia.

c) Incluya la tabla 4–1 de factores de diseño. En seguida pídale al diseñador que especifique el tipo de carga únicamente y determine el factor de diseño apropiado con la tabla incluida en el programa.

2. Repita la tarea 1, pero ahora diseñe una flecha circular hueca. Existen tres posibles procedimientos de solución.

a) Para un diámetro externo dado, calcule el diámetro interno requerido.

b) Para un diámetro interno dado, calcule el diámetro externo requerido.

c) Para una relación dada de D_i/D_o, determine tanto D_i como D_o.

Adiciones a la tarea 2

a) Calcule la masa del diseño resultante para una longitud y una densidad de material dadas.

b) Si la computadora cuenta con tarjeta de gráficos, dibuje la sección transversal resultante y dimensiónela.

3. Introduzca las curvas del factor de concentración de esfuerzo en el programa, lo que permite el cálculo automático de K_t para factores dados tales como radio de filete, relación de diámetros, diámetro de barrenos, y así sucesivamente. Se podría utilizar cualquiera de los casos mostrados en los apéndices A–22–5, A–22–6 o A–22–7. Este programa podría ejecutarse por sí mismo o como extensión de otro programa de análisis de esfuerzo.

4. Calcule el ángulo de torsión con la ecuación con T, L, G y J dados.

Adiciones a la tarea 4

a) Calcule J con dimensiones dadas de la flecha, ya sea sólida o hueca.

b) Incluya en el programa una tabla de valores de G, tomados de la tabla 4–3.

5. Calcule el diámetro requerido de una flecha circular sólida para limitar el ángulo de torsión a una cantidad especificada.

6. Calcule el ángulo de torsión de un extremo de una flecha de varias secciones con respecto al otro, como en el problema de ejemplo 4–13. Considere longitudes, diámetros, materiales y pares de torsión diferentes en cada sección.

7. Escriba un programa para calcular los valores del módulo de sección efectiva, Z_p y la constante de rigidez torsional, J, con base en la figura 4–17 en uno o en todos los casos.

Adición a la tarea 7

Determine las ecuaciones para C_1, C_2, C_3 y C_4 en función de la relación, h/r, para flechas con rebajes planos. Use una rutina de ajuste de curvas.

5

Fuerzas cortantes y momentos flexionantes en vigas

La imagen completa y actividad

5–1 Objetivos de este capítulo

5–2 Cargas en vigas, apoyos y tipos de vigas

5–3 Reacciones en los apoyos

5–4 Fuerzas cortantes y momentos flexionantes en el caso de cargas concentradas

5–5 Indicaciones para trazar diagramas de vigas con cargas concentradas

5–6 Fuerzas cortantes y momentos flexionantes en el caso de cargas distribuidas

5–7 Formas generales encontradas en diagramas de momento flexionante

5–8 Fuerzas cortantes y momentos flexionantes en vigas en voladizo

5–9 Vigas con cargas distribuidas linealmente variables

5–10 Diagramas de cuerpo libre de componentes de estructuras

5–11 Análisis matemático de diagramas de vigas

5–12 Vigas continuas: Teorema de los tres momentos

La imagen completa

Fuerzas cortantes y momentos flexionantes en vigas

Mapa de análisis

- Buena parte del análisis de los siguientes seis capítulos tiene que ver con vigas. Deberá estar familiarizado con la siguiente definición de una viga:

  Una viga es un miembro que soporta cargas transversales, es decir, perpendiculares a su eje largo.

- En este capítulo aprenderá a caracterizar los tipos de vigas y las cargas colocadas sobre ellas.
- En capítulos posteriores, aprenderá a calcular la magnitud de esfuerzos en vigas y diseñarlas para garantizar que son seguras.
- También aprenderá, en capítulos posteriores, a calcular la deflexión de una viga sometida a un patrón de carga dado.

Descubra

Imagínese que pretende cruzar una pequeña corriente de agua. Encuentra un ancho tablón de madera suficientemente largo para colocarlo de un lado al otro de la corriente. Lo coloca y está listo para subirse al tablón. En ese momento es posible que se pregunte, "¿Es el tablón suficientemente resistente para soportar mi peso cuando cruce la corriente?" Sabe que cuando camine sobre el tablón, éste se va a flexionar hacia abajo. Es probable que sepa que se va a flexionar aún más a medida que camine hacia la mitad del tablón. ¿Se flexionará tanto como para que sienta que se va a hundir en el agua? ¿Se romperá bajo su peso y usted se hundirá por completo en el agua?

A menos que sepa cómo analizar los esfuerzos en vigas y calcular sus deflexiones, dependerá de su criterio para juzgar la seguridad del tablón. Este ejemplo simple hará que entienda la necesidad de aprender a analizar el comportamiento de una viga.

¿Qué otros ejemplos de vigas se le ocurren?

Considere la construcción de su casa, edificios comerciales o puentes.

También tome en cuenta equipo deportivo o de ejercicio.

Examine con cuidado juguetes para niños y vea si algunas de sus partes soportan cargas perpendiculares a sus ejes largos.

Examine su auto o camión, y vea si puede decir qué partes se podrían reflexionar bajo la carga del mismo vehículo o por cargas aplicadas a ellos durante u operación.

Considere sillas y otros muebles para sentarse. Examine las graderías en una cancha de fútbol, básquetbol o campo de béisbol.

Examine el equipo utilizado en la construcción de carreteras o la construcción de cualquier clase de estructura. La mayor parte del equipo debe levantar y transportar cargas pesadas, o empujar o jalar con gran fuerza.

¿Cómo se compara su lista de ejemplos de vigas con los siguientes elementos?

- En el sótano de su casa podría haber una larga viga de acero de un lado a otro de una habitación a la mitad del largo de la construcción para sostener las viguetas del piso de arriba.
- Las viguetas mismas son vigas que transmiten la carga del piso a la viga de acero de soporte o a los muros de la cimentación.
- Incluso el piso mismo actúa como viga que soporta su peso, el peso de los muebles y aparatos que aplican cargas a las viguetas.
- Los remates de puertas y ventanas disponen de vigas fuertes, llamadas dinteles, para sostener la estructura sobre estas aberturas en muros.
- Los costados de escaleras, llamados zancas, actúan como vigas pues soportan el peso de una persona cuando sube los escalones.
- Un bat de béisbol o una raqueta de tenis actúa como una clase especial de viga, llamada viga en voladizo, que es mantenida fija en un extremo por sus manos y que aplica una fuerza a la bola cerca del extremo de la raqueta o bat.

- La viga de equilibrio en la gimnasia en un ejemplo obvio, y también podría incluir las barras paralelas.
- ¿Consideró el aro de básquetbol como viga? Cuando un jugador clava el balón y se cuelga del aro, ciertamente se flexiona hacia abajo. Tiene que ser suficientemente resistente y rígido para soportar la carga sin que se rompa o deflexione permanentemente.
- Algunas personas se ejercitan remando para desplazar el bote por el agua. Usted aplica una fuerza de tirón en las agarraderas contra la resistencia de la pala del remo en el agua y éste se flexiona con respecto a la horquilla de apoyo de los remos que está fija en el bote.
- ¿Buscó ejemplos de vigas en una piscina? El trampolín es una viga que debe flexionarse lo necesario, al tiempo que mantiene su resistencia para miles de clavados. Los escalones de la escalera utilizada para llegar al trampolín alto son vigas.
- Ciertas clases de carros, camiones y ejes de remolques son vigas que transfieren las cargas del vehículo a las ruedas y luego al suelo.
- En sitios de construcción de edificios nuevos podrá ver numerosas vigas horizontales durante la edificación; éstas transfieren las cargas de cada piso del edificio a las columnas verticales y los cimientos.

En este capítulo aprenderá a calcular la manera en que las cargas sobre una viga producen fuerzas internas y momentos que deben ser resistidos. Los análisis de esfuerzo y deflexión se abordan en capítulos posteriores.

Actividad Capítulo 5—Fuerzas cortantes y momentos flexionantes en vigas

Para comprender con claridad el comportamiento de vigas a flexión, debe visualizar lo que sucede *dentro de las fibras de la viga*. Es difícil porque no puede observar directamente cómo cada una de las partículas del material de la viga se ve afectada por la acción de las cargas que soporta la viga. Sin embargo, un experimento simple dará una idea y le permitirá deducir el fenómeno no visible de las *fuerzas cortantes* y los *momentos flexionantes* a los que este capítulo está dedicado. Hará que entienda los fenómenos relacionados en los capítulos siguientes.

Montaje. Adquiera o fabrique una viga simple y dos apoyos para ella. La viga deberá ser suficientemente flexible, de modo que pueda flexionarla con pequeñas fuerzas aplicadas sólo con sus manos, pero deberá ser suficientemente rígida para que muestre la curvatura natural que una viga exhibe bajo carga. Las posibilidades son vigas con longitudes aproximadas de 200 mm a 1000 mm (8 in a 36 in), y ancho de 25 mm (1.0 in) hechas de:

1. Un pedazo plano delgado de madera de cerca de 2 mm a 3 mm de espesor (0.08 in a 0.12 in).
2. Cartón denso de dimensiones similares. Puede pegar varias tiras más delgadas una con otra para lograr el espesor y la rigidez apropiados. Esparza el pegamento uniformemente en toda la superficie de contacto para asegurarse de que la pieza compuesta actúe como una sola unidad.
3. Una tira de lámina de aluminio plana de aproximadamente 1.6 mm de espesor (0.06 in).
4. Una tira de lámina de acero de aproximadamente 0.5 mm de espesor (0.02 in).
5. Una tira de plástico plana de aproximadamente 2.0 mm de espesor (0.08 in).

Varios de estos perfiles y materiales pueden ser sustituidos por reglas y flexómetros baratos, disponibles en tiendas de artículos para la mejora del hogar o de materiales para oficina.

Los dos apoyos deben quedar estables, cuando se coloquen sobre una superficie plana, y soportar la viga en por lo menos 15 mm (0.6 in) fuera de la superficie. Un ejemplo ideal es un pequeño ángulo con longitudes de alas de 20 mm a 30 mm (0.75 in a 1.25 in) de madera, plástico o metal. Coloque las alas hacia abajo para crear un "soporte de cuña" sobre el cual apoyar la viga.

También adquiera una buena regla de aproximadamente 75 mm a 150 mm (3.0 in a 6.0 in) de largo.

Actividad A

Comience simplemente con seleccionar la viga y aplicar fuerzas que tiendan a flexionarla mientras observa la forma que la viga asume y la dirección de las fuerzas requerida para flexionarla. Después de cada acción lleve a la viga a un equilibrio estable. Si es posible, dibuje la viga en su forma flexionada e indique dónde se aplicaron las fuerzas de soporte o las acciones de agarre. ¿En cuántas formas puede hacer eso? Las posibilidades son:

1. Agarre la viga con el pulgar y dos o más dedos de cada mano algo separados entre sí y flexione la viga.
2. Coloque el pulgar de cada mano en la superficie inferior de la viga y un dedo de cada mano hacia fuera de los pulgares. Luego empuje hacia abajo con los dedos.
3. Coloque el pulgar de cada mano en la superficie inferior de la viga y un dedo de cada mano hacia dentro de los pulgares. Luego empuje hacia abajo con los dedos.

Los pasos 4–7 pueden ser más fáciles si dispone de dos bloques rígidos de aproximadamente 75 mm a 100 mm de largo (3.0 in a 4.0 in) en cada lado de la viga; sujétela como si fuera un "emparedado".

4. Agarre un extremo de la viga firmemente con una mano; luego empújela hacia abajo con los dedos de la otra mano.
5. Sujete ambos extremos de la viga firmemente y hágala que gire, girando sus muñecas. Pruebe diferentes combinaciones de la dirección de rotación de cada mano.
6. Sujete firmemente ambos extremos de la viga y gírela moviendo un mano hacia arriba o hacia abajo con respecto a la otra con sus muñecas fijas.
7. Después de realizar el paso 6, retire una mano y observe lo que le sucede a la forma de la viga. Al soltarla, trate de mantener la posición de la viga donde estaba.

Observaciones y conclusiones. Deberá observar lo siguiente:

1. Algunas acciones produjeron una curvatura continua de la viga en una dirección.
2. Otras produjeron curvaturas parcialmente cóncavas hacia arriba o parcialmente cóncavas hacia abajo.
3. Cuando algunas partes de la viga quedaron fuera de los puntos de apoyo o sujeción, esa parte de la viga permaneció recta.
4. La firme sujeción controló no sólo la posición de la viga sino también la curvatura, de modo que la pendiente de la viga estaba alineada con el punto de sujeción.
5. Cuando una parte de una viga flexionada se libera de una firme sujeción, su forma asume una curvatura continua en una dirección, sin importar la forma que había supuesto mientras estaba sujeta.
6. Si una fuerza de apoyo o una firme sujeción se liberaban por completo, la viga continuaba recobrando su forma recta original.

Actividad B

1. Coloque dos apoyos simples sobre una superficie plana y separados entre sí de modo que aproximadamente $\frac{1}{4}$ de la longitud de la viga sobresalga por encima de cada apoyo.
2. Coloque la viga sobre los apoyos.
3. Aplique un fuerza dirigida hacia abajo con un dedo a la mitad de la viga entre los apoyos.
4. Use la regla para observar la curvatura de la viga entre los apoyos, en cada voladizo.

Observaciones y conclusiones. ¿Qué observó con este experimento simple? He aquí algunas cuestiones a considerar:

1. La fuerza hacia abajo aplicada a la viga en su parte media hace que la viga se flexione y adopte una curvatura cóncava hacia arriba. Esto ilustra la *flexión positiva.*
2. Las partes de la viga que sobresalen por encima de los apoyos son rectas, no curvas.
3. La deflexión máxima ocurre en la mitad de la viga donde se aplica la carga.
4. La deflexión entre los apoyos alcanza un nivel más bajo que el de éstos, pero fuera de los apoyos, la deflexión es hacia arriba.

Actividad C

1. Coloque los apoyos sobre una superficie plana separados entre sí de modo que aproximadamente $\frac{1}{4}$ de la longitud de la viga sobresalga por encima de cada apoyo.
2. Aplique una fuerza dirigida hacia abajo en el extremo de ambos voladizos y observe la forma de la viga.
3. Ahora aplique una fuerza en sólo un extremo y observe que la fuerza de reacción en el apoyo opuesto debe estar dirigida hacia abajo y no hacia arriba como antes.
4. Aplique una fuerza entre los apoyos y en un extremo de uno de los voladizos. Observe la forma de la viga reflexionada y dibújela.
5. Ahora aplique tres fuerzas, una hacia abajo en cada voladizo y una hacia abajo entre los apoyos. Observe la forma de la viga reflexionada y dibújela.

Actividad D

Esta actividad requiere que usted piense sobre cómo debe actuar el material de la viga para que ésta se comporte de la manera observada, según la forma en que estaba apoyada o cargada.

1. Repita la actividad B y mantenga la fuerza dirigida hacia abajo, F, en su posición. La figura 5–1(a) muestra la viga en su forma no reflexionada, recta, original con los apoyos en los puntos A y C, y la fuerza, F, aplicada en B.
2. Dibuje la forma de la viga flexionada, como se muestra en la figura 5–1(b). Con una regla, cerciórese de que la viga flexionada adopta una forma curvada entre A y C mientras que el voladizo a la izquierda de A permanece recto.
3. ¿En qué dirección deben actuar las fuerzas en cada apoyo? (***Respuesta***: hacia arriba)
4. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza en cada apoyo? (***Respuesta:*** $F/2$)
5. Si la viga se cortara en un punto cualquiera, D, entre el apoyo izquierdo y la parte media de la viga donde se aplica la carga, ¿qué tendría que suceder en el extremo cortado de cada parte de la viga para que la viga conservara la misma posición y forma que

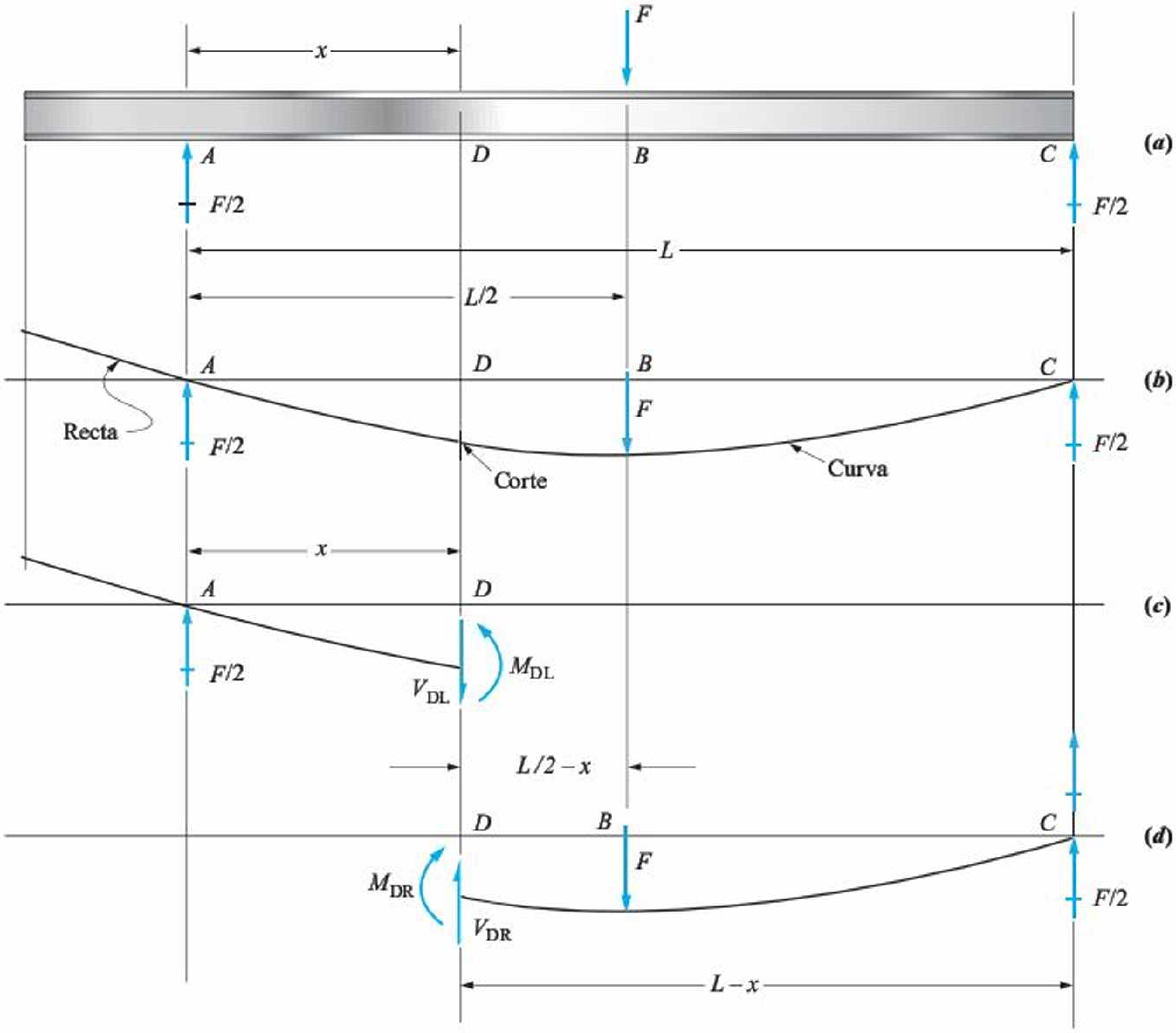


FIGURA 5–1 Viga simplemente apoyada con una carga concentrada a la mitad del tramo y un extremo saliente: ilustración de la fuerza cortante y el momento flexionante internos.

tenía antes del corte? Consulte la figura 5–1(c) y (d) que muestra la viga flexionada con un corte en el punto D, a una distancia arbitraria x del soporte izquierdo.

a. ***Respuesta:*** En cuanto a lo que sucede a la *izquierda de la sección cortada* utilizando esa parte como diagrama libre [figura 5–1(c)]:

   i. La fuerza de reacción dirigida hacia arriba de $F/2$ permanece aplicada en el apoyo. Entonces para mantener el equilibrio de fuerzas en la dirección vertical, en la sección se debe ejercer una fuerza $F/2$ dirigida hacia abajo. Se muestra esta fuerza, V_{DL}, la fuerza cortante en D de la sección izquierda cortada. En la viga completa, la parte de la viga a la derecha que fue cortada ejercía esta fuerza.

   ii. Para que la parte de la viga a la izquierda del corte mantenga su forma curva, en el corte se debe aplicar un momento en sentido contrario al de las manecillas del reloj, llamado M_{DL}, el momento en D de la sección cortada izquierda.

   iii. Para que la parte de la viga a la izquierda de corte mantenga el equilibrio rotacional, el momento debe ser de magnitud igual al par creado por la reacción ($F/2$) y la fuerza cortante interna en el corte ($F/2$) que actúa a una distancia x una de otra. Dicho momento es

$$M_{DL} = (F/2)(x) = Fx/2 \text{ en sentido contrario al de las manecillas del reloj}$$

iv. Ahora, la sección cortada está en equilibrio en cuanto a fuerzas en la dirección vertical y a momentos. Además, el momento en el corte mantiene la forma curva de la viga reflexionada entre el apoyo y el corte, al tiempo de permitir que la parte volada de la viga permanezca recta.

b. ***Respuesta*** En cuanto a lo que sucede a la *sección cortada derecha* utilizando dicha parte como diagrama de cuerpo libre [figura 5–1(d)]:

i. La lógica que se utilizó para la sección cortada izquierda también es válida en este caso. Para mantener el equilibrio de las fuerzas verticales, debe existir una fuerza cortante dirigida hacia arriba en la viga, llamada V_{DR}, la fuerza cortante en D para la sección cortada derecha.

ii. La magnitud de la fuerza cortante se determina sumando las fuerzas en la dirección vertical para la sección cortada derecha.

$$\Sigma F_v = 0 = F/2 + V_{DR} - F$$
$$V_{DR} = F - F/2 = F/2$$

iii. Para que la viga mantenga su forma curva, se debe aplicar un momento en el corte, llamado M_{DR}, el momento en D para la sección cortada derecha.

iv. Para que la parte de la viga a la derecha del corte mantenga el equilibrio rotacional, el momento debe ser igual a la suma de los momentos producidos por las otras dos fuerzas: F que actúa a una distancia $(L/2 - x)$ del corte y $F/2$ que actúa a una distancia $(L - x)$ del corte. Entonces,

$$M_{DR} = F(L/2 - x) - (F/2)(L - x) = Fx/2 \text{ en el sentido de las manecillas del reloj}$$

c. En resumen, las partes (c) y (d) de la figura 5–1 muestran los diagramas de cuerpo libre de las secciones cortadas izquierda y derecha. Observe que las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes en el corte en las dos partes forman de pares de acción-reacción, de igual magnitud pero de dirección opuesta.

En este capítulo aplicará procesos tales como éste, pero a vigas más complejas con varias condiciones de carga y apoyo. Aprenderá procedimientos para determinar la magnitud de fuerzas cortantes y momentos flexionantes de una forma más directa, y a trazar diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes que muestren sus variaciones a lo largo de la viga. La habilidad de realizar este análisis es un *primer paso* crítico para calcular los esfuerzos y deformación en una viga, como se verá en los siguientes capítulos.

5–1 OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

Después de completar este capítulo, usted deberá ser capaz de:

1. Definir el término *viga* y reconocer cuando un miembro de carga es una viga.
2. Describir varias clases de patrones de carga de vigas: *cargas concentradas*, *cargas uniformemente distribuidas*, *cargas distribuidas linealmente variables* y *momentos concentrados.*
3. Describir varias clases de vigas según el tipo de sus apoyos: *viga simple*, *viga saliente*, *vigas en voladizo* y *viga compuesta*.
4. Dibujar diagramas de cuerpo libre de vigas y de partes de ellas que muestren todas la fuerzas y reacciones.
5. Calcular la magnitud de las reacciones y momentos, y determinar sus direcciones.
6. Definir *fuerza cortante* y determinar su magnitud en cualquier parte de la viga.

7. Trazar diagramas de cuerpo libre de partes de vigas y mostrar las fuerzas cortantes internas.
8. Trazar diagramas de fuerza cortante completos de vigas sometidas a varios patrones de carga y con varias condiciones de apoyo.
9. Definir *momento flexionante* y determinar su magnitud en cualquier parte de la viga.
10. Trazar diagramas de cuerpo libre de *partes* de vigas y mostrar los momentos flexionantes internos.
11. Trazar diagramas de momento flexionante completos de vigas que soportan varios patrones de carga con varias condiciones de apoyo.
12. Utilizar las *leyes de los diagramas de vigas* para relacionar los diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante entre sí y dibujarlos.
13. Trazar diagramas de cuerpo libre de partes de vigas y estructuras compuestas, y diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de cada una.
14. Considerar como es debido los *momentos concentrados* en el análisis de vigas.
15. Utilizar el *teorema de los tres momentos* para analizar vigas continuas con tres o más apoyos sometidas a cualquier combinación de cargas concentradas y distribuidas.

5–2 CARGAS EN VIGAS, APOYOS Y TIPOS DE VIGAS

Recuerde la definición de una viga.

Una viga es un miembro que soporta cargas transversales, es decir, perpendiculares a su eje largo.

Cuando se analiza una viga para determinar reacciones, fuerzas cortantes internas y momentos flexionantes internos, conviene clasificar el patrón de carga, el tipo de apoyos y el tipo de viga.

Las vigas se someten a varios patrones de carga, incluidos:

Cargas concentradas normales

Cargas concentradas inclinadas

Cargas uniformemente distribuidas

Cargas distribuidas variables

Momentos concentrados

Los tipos de apoyo incluyen:

Apoyo simple de rodillo

Apoyo de pasador

Apoyo fijo

Los tipos de viga incluyen:

Vigas simplemente apoyadas; o vigas simples

Vigas salientes

Vigas en voladizo; o voladizas

Vigas compuestas

Vigas continuas

La comprensión de todos estos términos le servirá para comunicar las características sobresalientes de los diseños de vigas y para que realice los análisis requeridos. A continuación se describe brevemente cada uno de ellos junto con ilustraciones que permiten visualizarlos.

Patrones de carga. En secciones siguientes demostraremos que la naturaleza del patrón de carga determina la variación de la fuerza cortante y el momento flexionante a lo largo de la viga. Definimos los cinco patrones de carga más usuales y damos ejemplos de cada uno. A menudo se pueden analizar patrones de carga más complejos considerándolos como combinaciones de dos o más de estos tipos básicos.

Cargas normales concentradas

Una carga concentrada normal es una que actúa perpendicular (normal) al eje mayor de la viga en sólo un punto o a lo largo de un segmento muy pequeño de la viga.

La figura 5–2(a) muestra la forma característica de representar una viga sometida a cargas concentradas normales. Cada carga se muestra como un vector que actúa en la viga perpendicular a su eje largo. La parte (b) ilustra una situación que produce cargas concentradas. El peso de los tubos y su contenido determina la magnitud de las cargas.

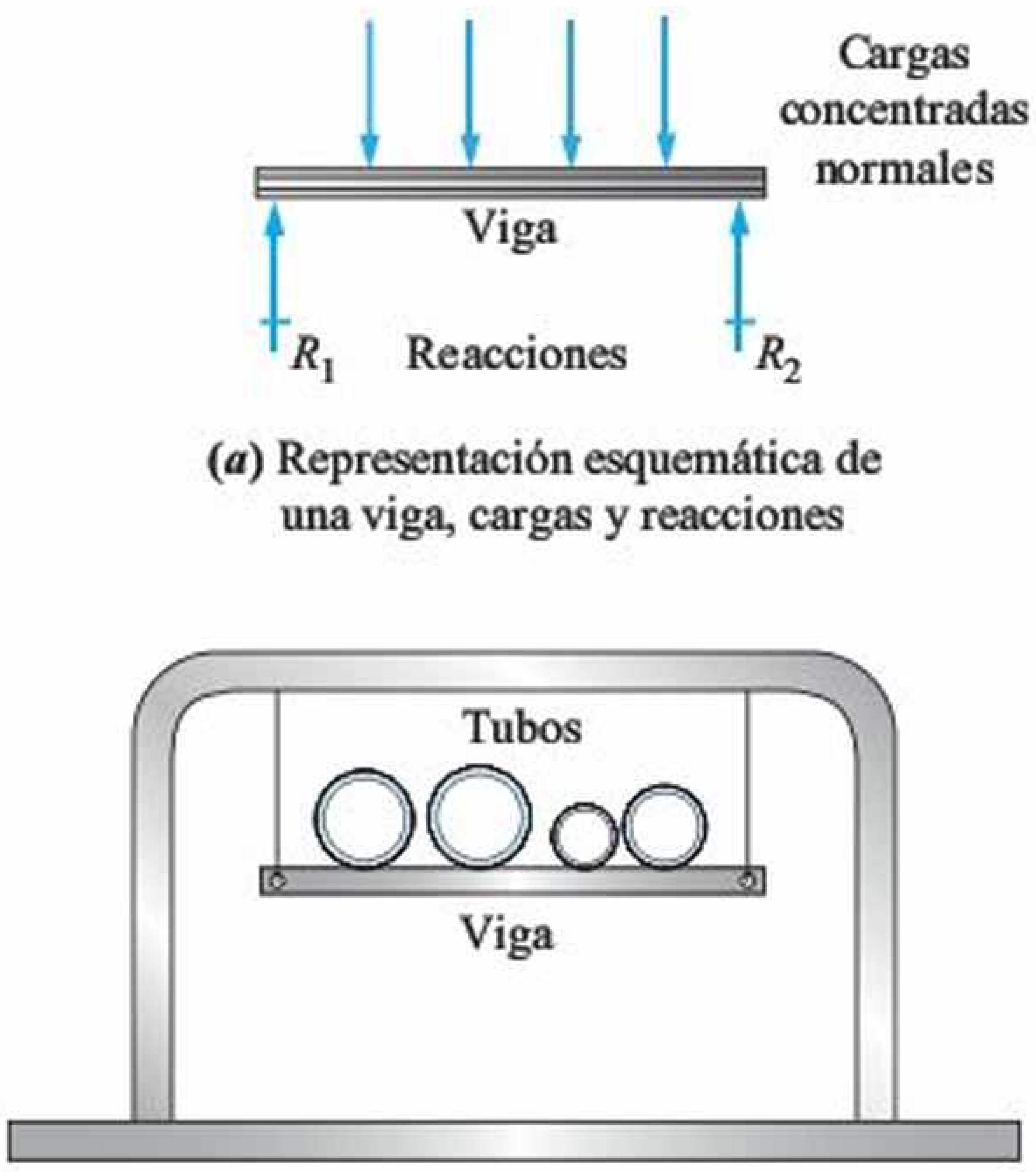
Si bien con frecuencia visualizamos cargas que actúan dirigidas hacia abajo debido a la gravedad, las cargas reales pueden actuar en cualquier dirección. Sobre todo en la maquinaría mecánica, las fuerzas producidas por varillajes, actuadores, resortes y mordazas, y otros dispositivos pueden actuar en cualquier dirección. La figura 5–3 muestra un ejemplo simple.

Las cargas normales concentradas tienden a provocar flexión pura en las vigas. La mayoría de los problemas en este capítulo incluyen este tipo de cargas. El análisis de esfuerzo flexionante se presenta en el capítulo 7.

Cargas concentradas inclinadas

Una carga concentrada inclinada es una que actúa efectivamente en un punto pero cuya línea de acción forma un cierto ángulo con el eje principal de la viga.

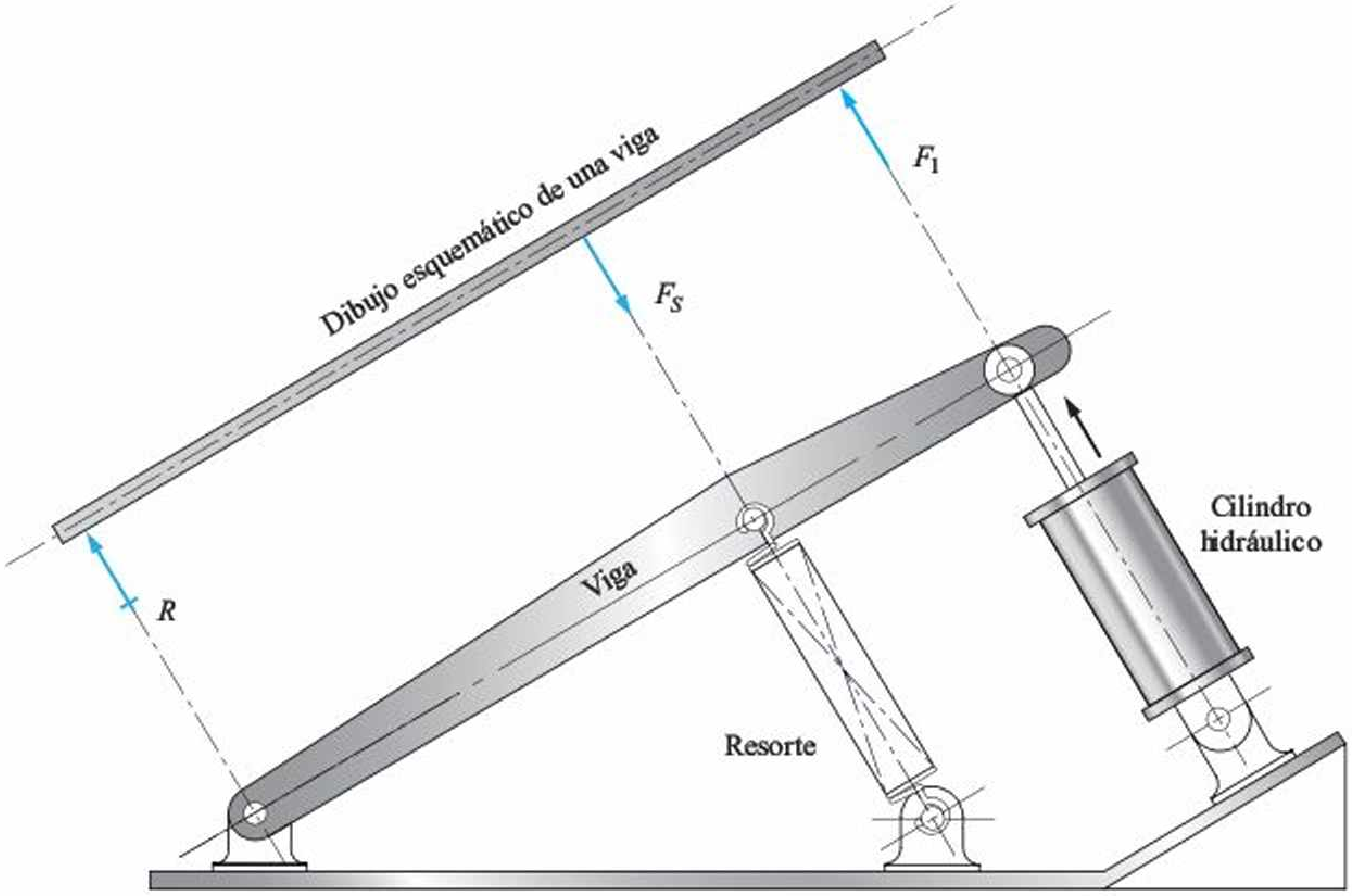
FIGURA 5–2 Viga simple con cargas concentradas normales.



(*a*) Representación esquemática de una viga, cargas y reacciones

(*b*) Representación ilustrativa de una viga y cargas

FIGURA 5–3 Palanca de una máquina que funciona como una viga simple sometida a cargas normales concentradas.

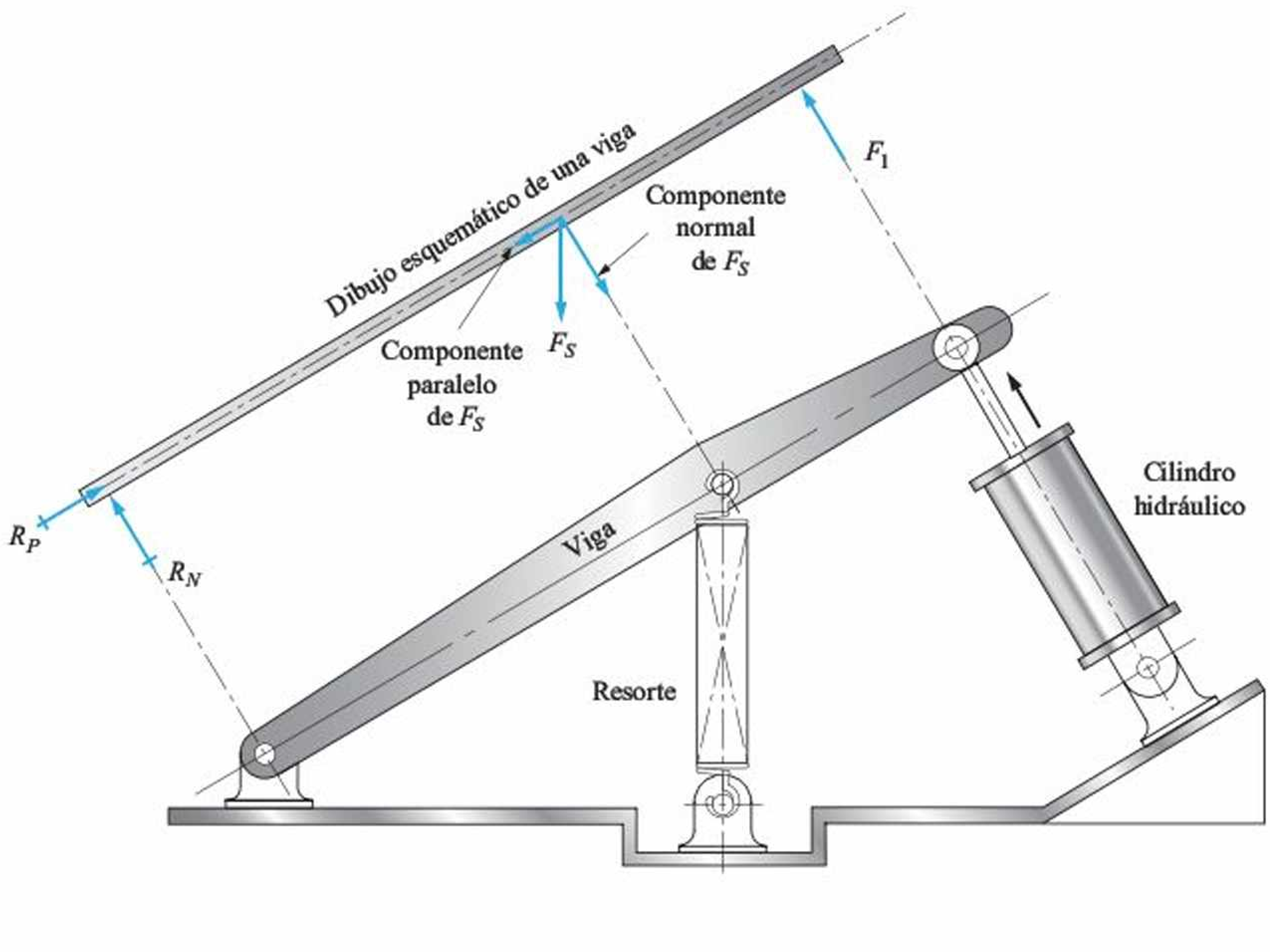


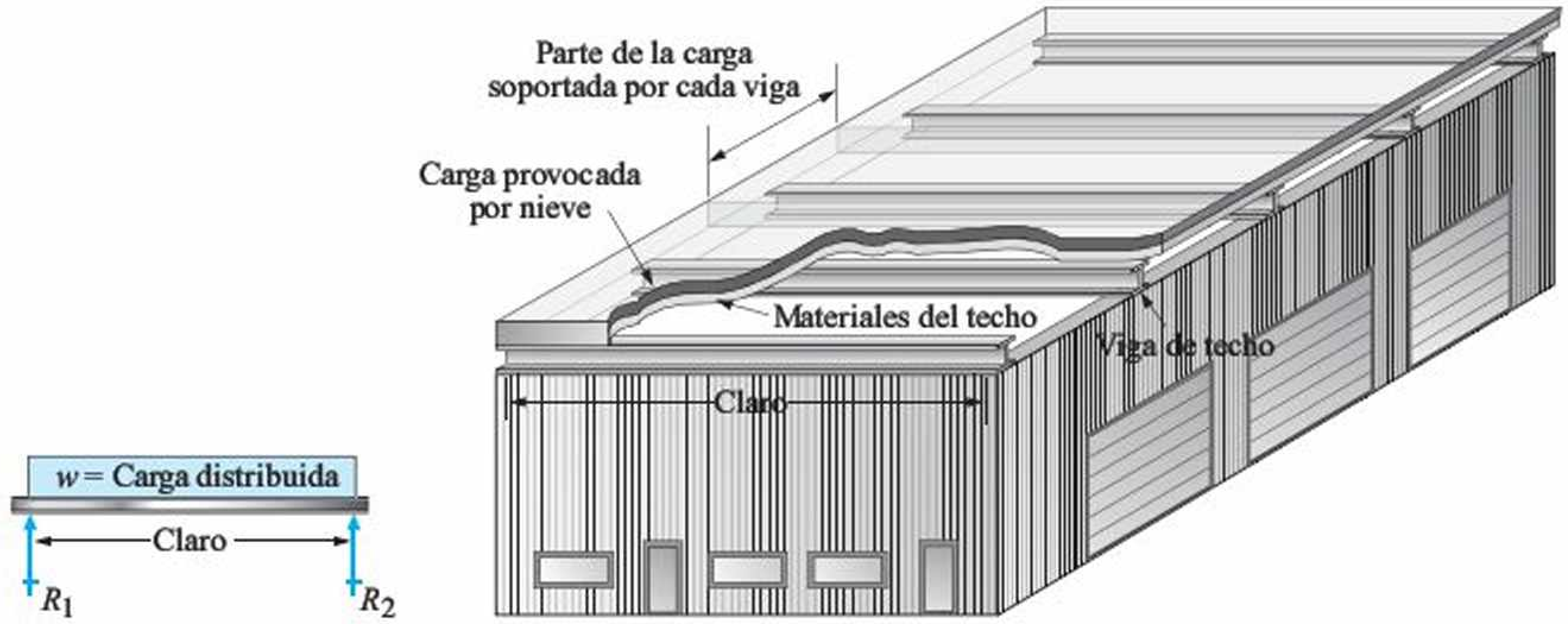
La figura 5–4 muestra un ejemplo de una carga concentrada inclinada. La carga inclinada ejercida por el resorte provoca una combinación de esfuerzos flexionantes y axiales en la viga. El capítulo 10 presenta técnicas de análisis de ese tipo de cargas.

Cargas uniformemente distribuidas

Las cargas de magnitud constante que actúan perpendiculares al eje de una viga a lo largo de un segmento significativo de la viga reciben el nombre de cargas uniformemente distribuidas.

FIGURA 5–4 Palanca de una máquina que funciona como una viga simple sometida a cargas normales concentradas y una carga inclinada.





(*a*) Representación esquemática de una viga con carga y reacciones

(*b*) Ejemplo ilustrativo

FIGURA 5–5 Viga simple con carga uniformemente distribuida.

Un ejemplo de este tipo de carga sería el peso de nieve de espesor uniforme acumulada en el techo soportado por vigas horizontales planas. Asimismo, los materiales que componen la estructura del techo, propiamente dicha, con frecuencia se instalan uniformemente distribuidos. La figura 5–5 ilustra ese patrón de carga e ilustra la forma que utilizamos en este libro para representar cargas uniformemente distribuidas en los problemas. El área rectangular sombreada define la extensión de la carga a lo largo de la viga. La magnitud de la carga, w, se expresa en unidades de fuerza por unidad de longitud. Unidades representativas serian lb/in, kN/m o K/ft. Recuerde que 1 K = 1 kip = 1000 lb.

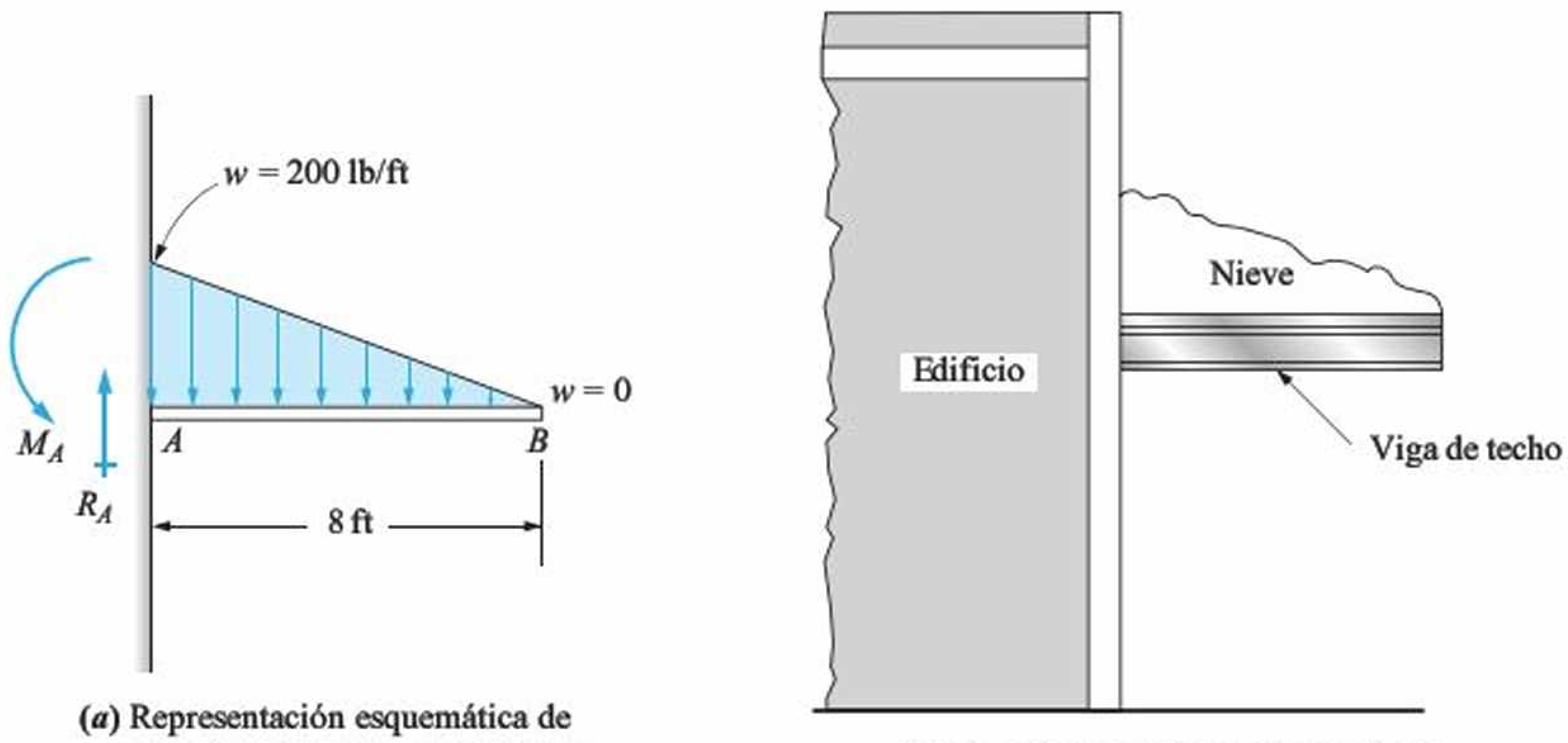
Por ejemplo, si la carga que actúa en la viga mostrada en la figura 5–5 fuera w = 150 lb/ft, entonces cada 1.0 ft de longitud de la viga soporta 150 lb de carga. Si la longitud es de 10 ft, la carga total es de 1500 lb.

Cargas distribuidas variables

Las cargas de magnitud variable que actúan perpendiculares al eje de una viga a lo largo de un segmento significativo de la viga se llaman cargas distribuidas variables.

Las figuras 5–6 y 5–7 muestran ejemplos de estructuras sometidas a cargas variables distribuidas. Cuando las cargas varían linealmente, éstas se cuantifican dando el valor de w en cada

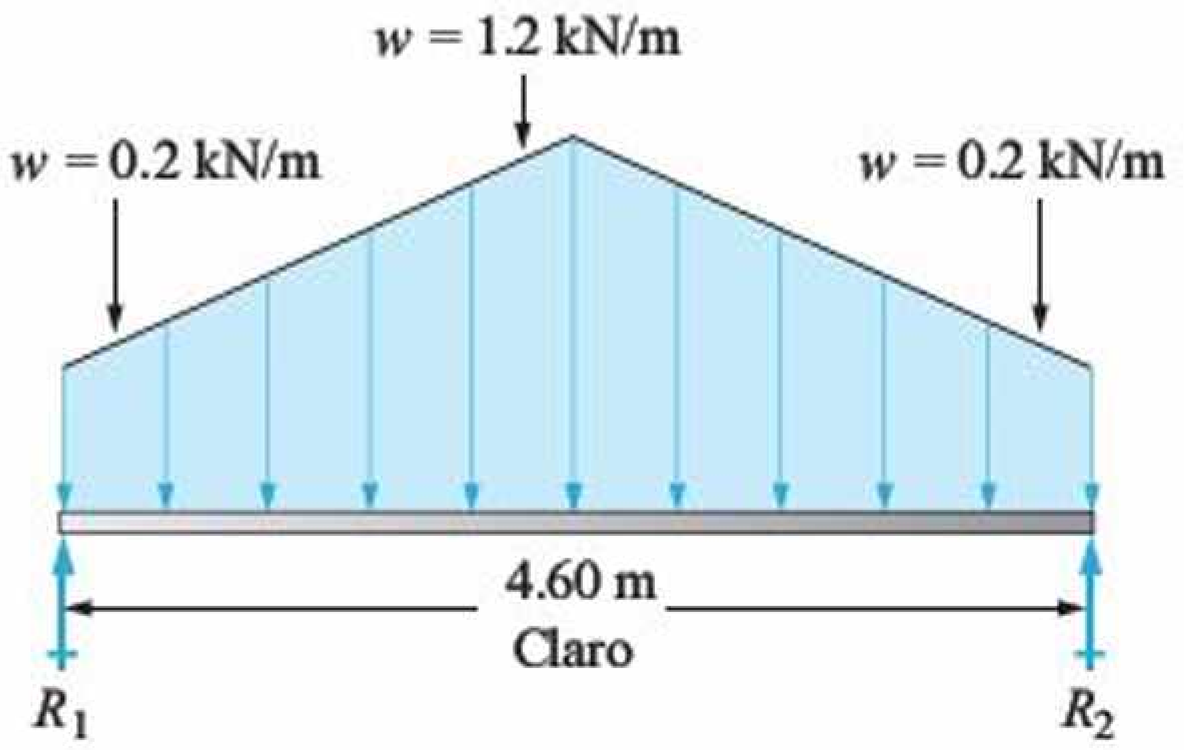
FIGURA 5–6 Ejemplo de una carga distribuida linealmente variable sobre una viga en voladizo.



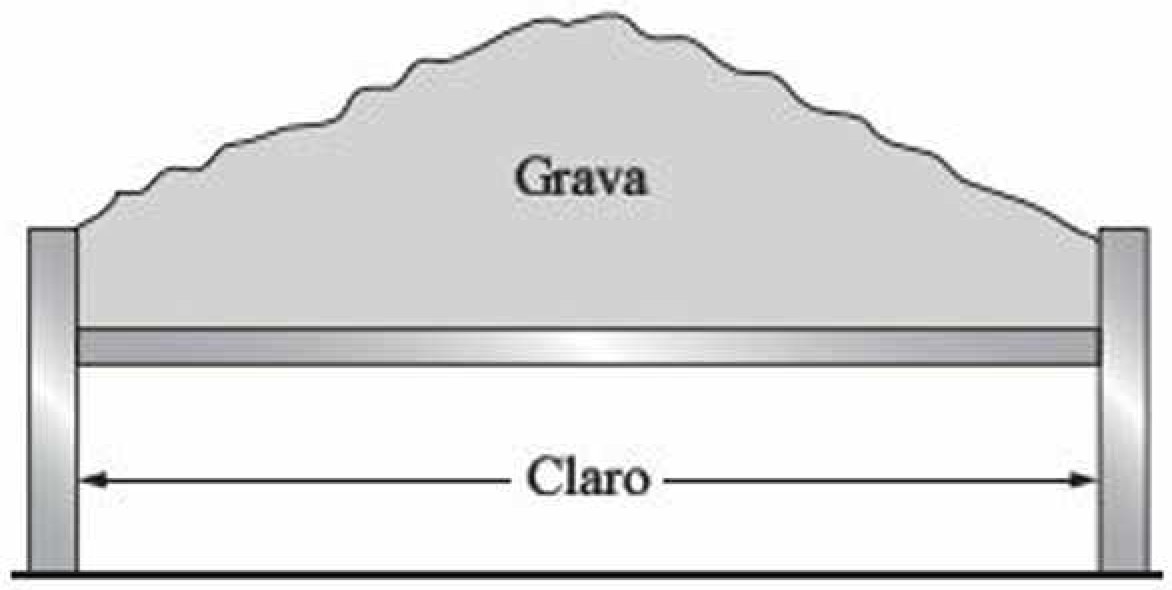
(*a*) Representación esquemática de una viga con carga, reacciones y momento, y datos muestra

(*b*) Ejemplo ilustrativo-carga de nieve sobre una marquesina

FIGURA 5–7
Ejemplo de una carga distribuida linealmente variable sobre una viga simple.



(*a*) Representación de una viga con una carga y reacciones, y datos muestra



(*b*) Ejemplo ilustrativo: grava sobre una plataforma

extremo de la línea inclinada que representa la carga. Para variaciones no lineales, más complejas, sería necesario idear otros esquemas de dar la magnitud de la carga.

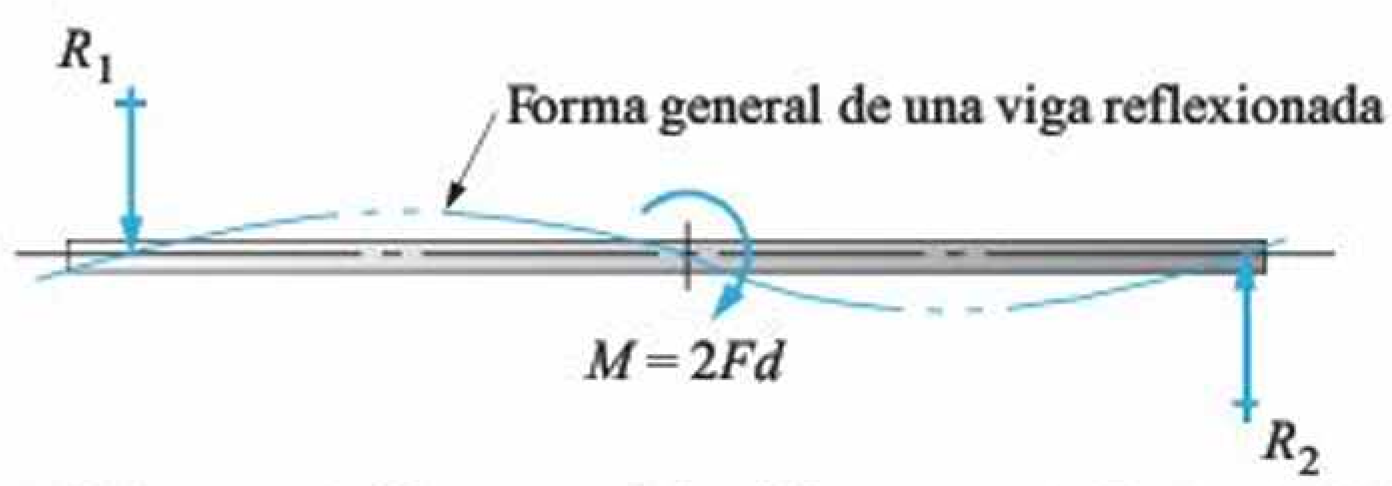
Momentos concentrados. Un momento es una acción que tiende a hacer girar un objeto. Los momentos pueden ser producidos por un par de fuerzas paralelas que actúan en direcciones opuestas, esta acción se conoce como *par*. La acción en una manivela o una palanca también produce un momento.

> ***Cuando un momento actúa en un punto de una viga de tal forma que tiende a provocarle rotación pura, se llama momento concentrado.***

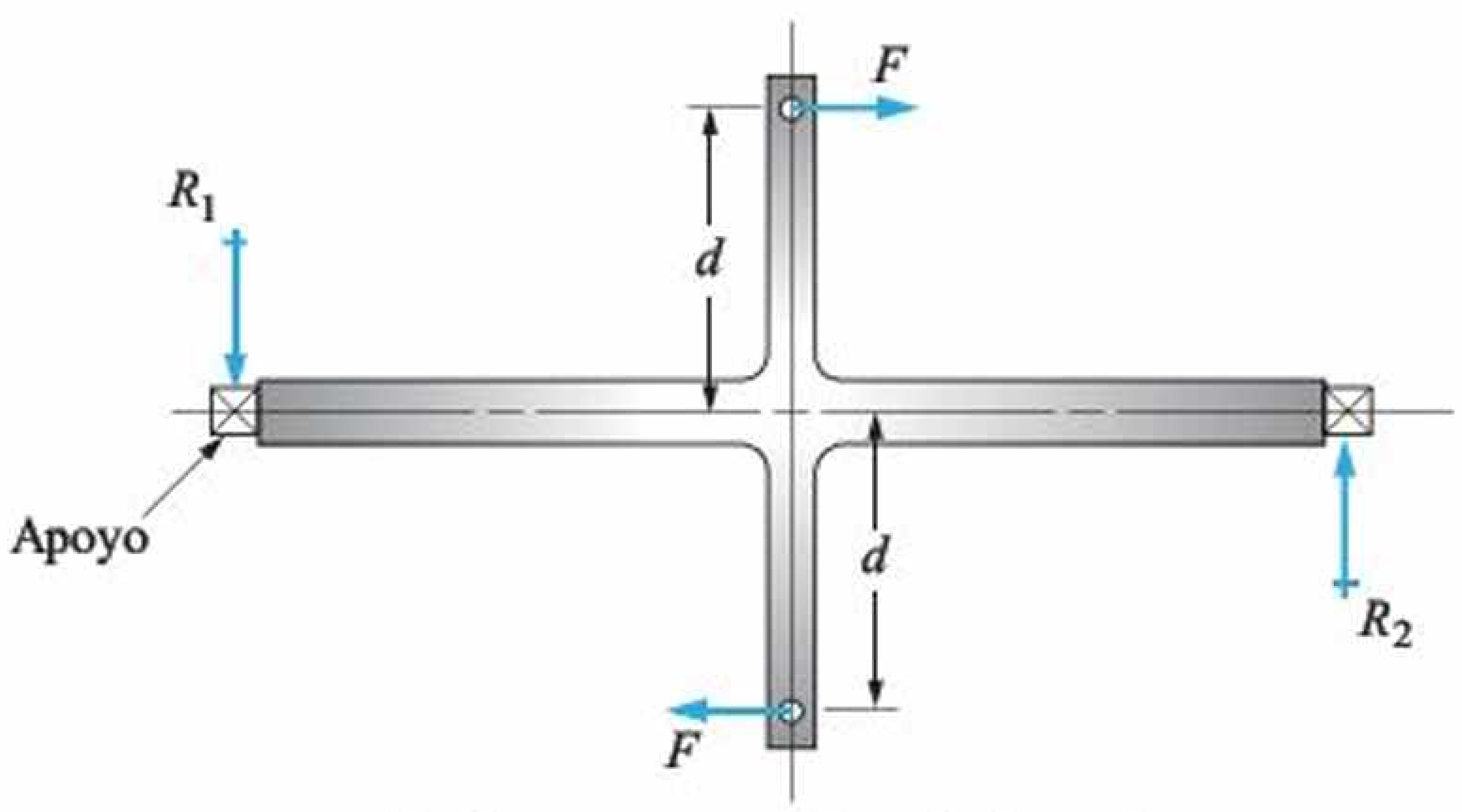
La figura 5–8 muestra un ejemplo de un momento concentrado. Las fuerzas que actúan en los extremos de los brazos verticales forman un par que tiende a torcer la viga en la forma mostrada. El hecho de que las dos fuerzas que forman el par sean iguales y opuestas hace que no haya ninguna fuerza horizontal aplicada en la viga.

Los momentos concentrados también pueden ser producidos por una fuerza que actúa en una viga paralela a su eje con su línea de acción a una cierta distancia de éste. Esta situación se ilustra en la figura 5–9, la cual representa una flecha con un engrane helicoidal. La fuerza F actúa paralela al eje de la flecha y tiende a flexionarla en el plano de la página. La diferencia en este caso es que también existe una fuerza horizontal desequilibrada aplicada a la viga, la cual debe provocar una fuerza de reacción en uno de los apoyos.

FIGURA 5–8
Momento concentrado en una viga compuesta.

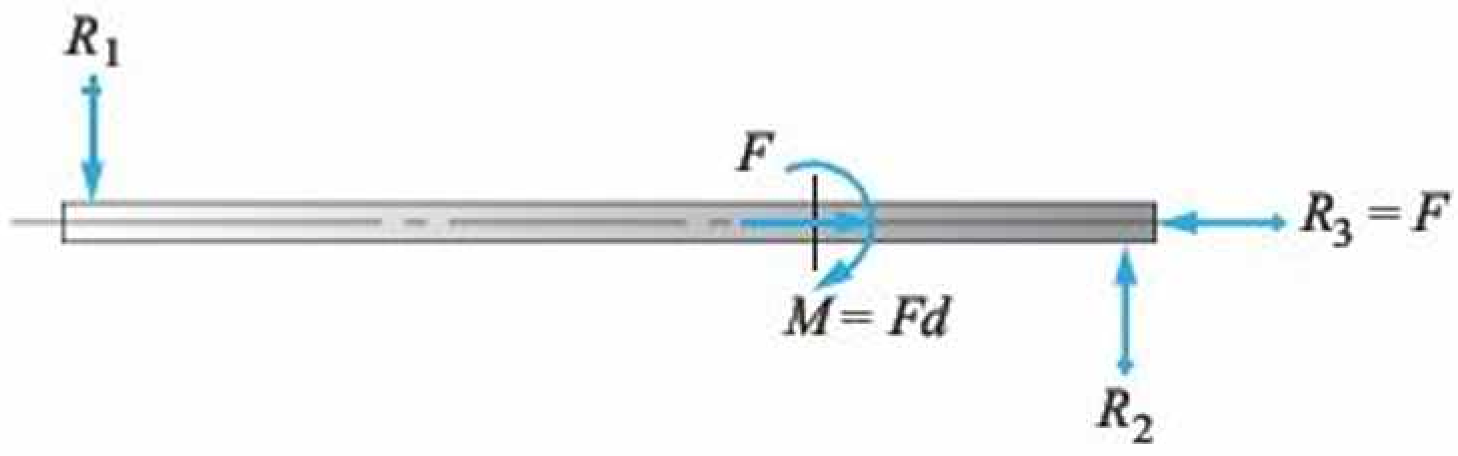


(*a*) Representación esquemática del componente horizontal de una viga compuesta sometida un momento concentrado

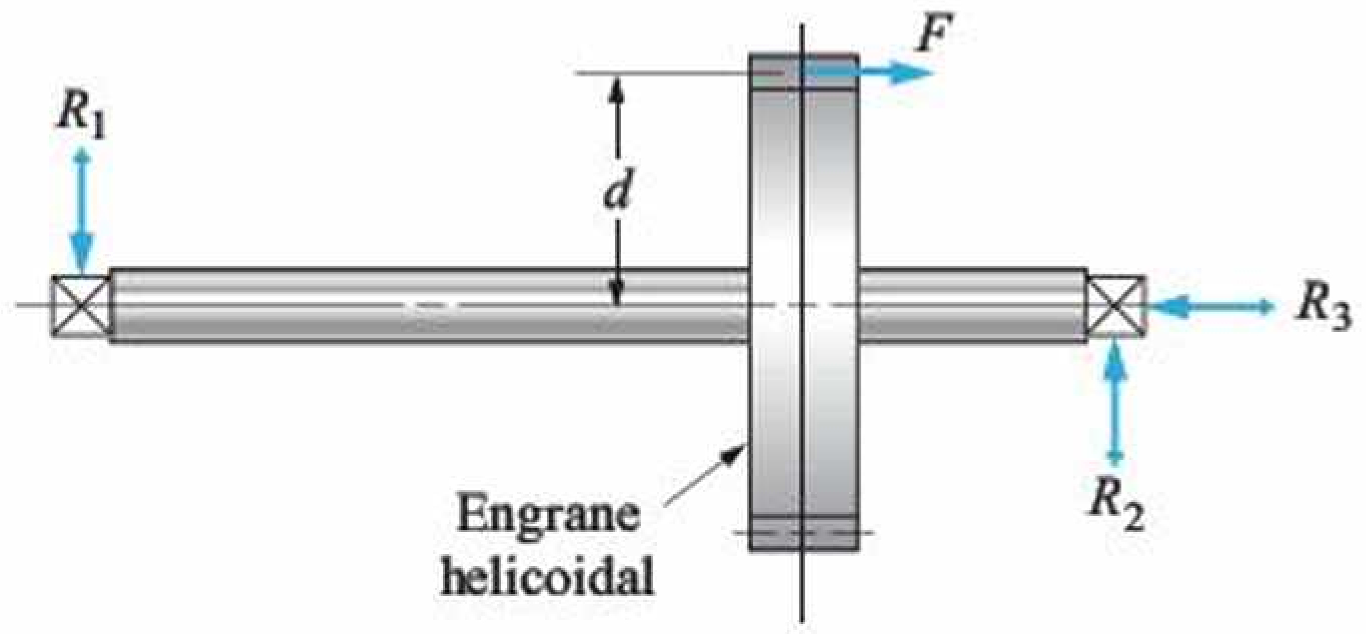


(*b*) Viga compuesta: ejemplo ilustrativo

FIGURA 5–9
Momento concentrado en una viga compuesta.



(*a*) Representación esquemática del componente horizontal de una viga compuesta que muestra un momento concentrado y la reacción horizontal



(*b*) Viga compuesta: ejemplo ilustrativo

Tipos de apoyos. Todas las vigas deben estar apoyadas de una manera estable para que se mantengan en equilibrio. Todas las cargas y momentos externos deben ser resistidos por uno o más apoyos. Los diferentes tipos de apoyos ofrecen diferentes tipos de reacciones.

Apoyo simple o de rodillo
Un apoyo simple es uno que puede resistir sólo fuerzas que actúan perpendiculares a la viga.

Una de las mejores ilustraciones de apoyos simples es el par de rodillos teóricamente libres de fricción mostrados en los extremos de la viga de la figura 5–10(a). Proporcionan apoyo hacia arriba contra la acción hacia bajo de la carga aplicada a la viga. Conforme la viga tienda a flexionarse por la influencia de la carga aplicada y las reacciones, la deformación por flexión no sería resistida por los rodillos. Pero si hubiera componentes horizontales de la carga, los rodillos rodarían y la viga no estaría restringida. Por consiguiente, el uso de los rodillos solos no es adecuado.

Apoyo de pasador
Un ejemplo de un apoyo de pasador es una bisagra que puede resistir fuerzas en dos direcciones pero que permite rotación en torno al eje de su pasador. La figura 5–10(b) muestra la misma viga de la figura 5–10(a) con el rodillo en el extremo izquierdo reemplazado por un apoyo de pasador. Este sistema proporciona un apoyo adecuado al tiempo de permitir que la viga se flexione libremente. La junta de pasador resistiría cualquier fuerza horizontal.

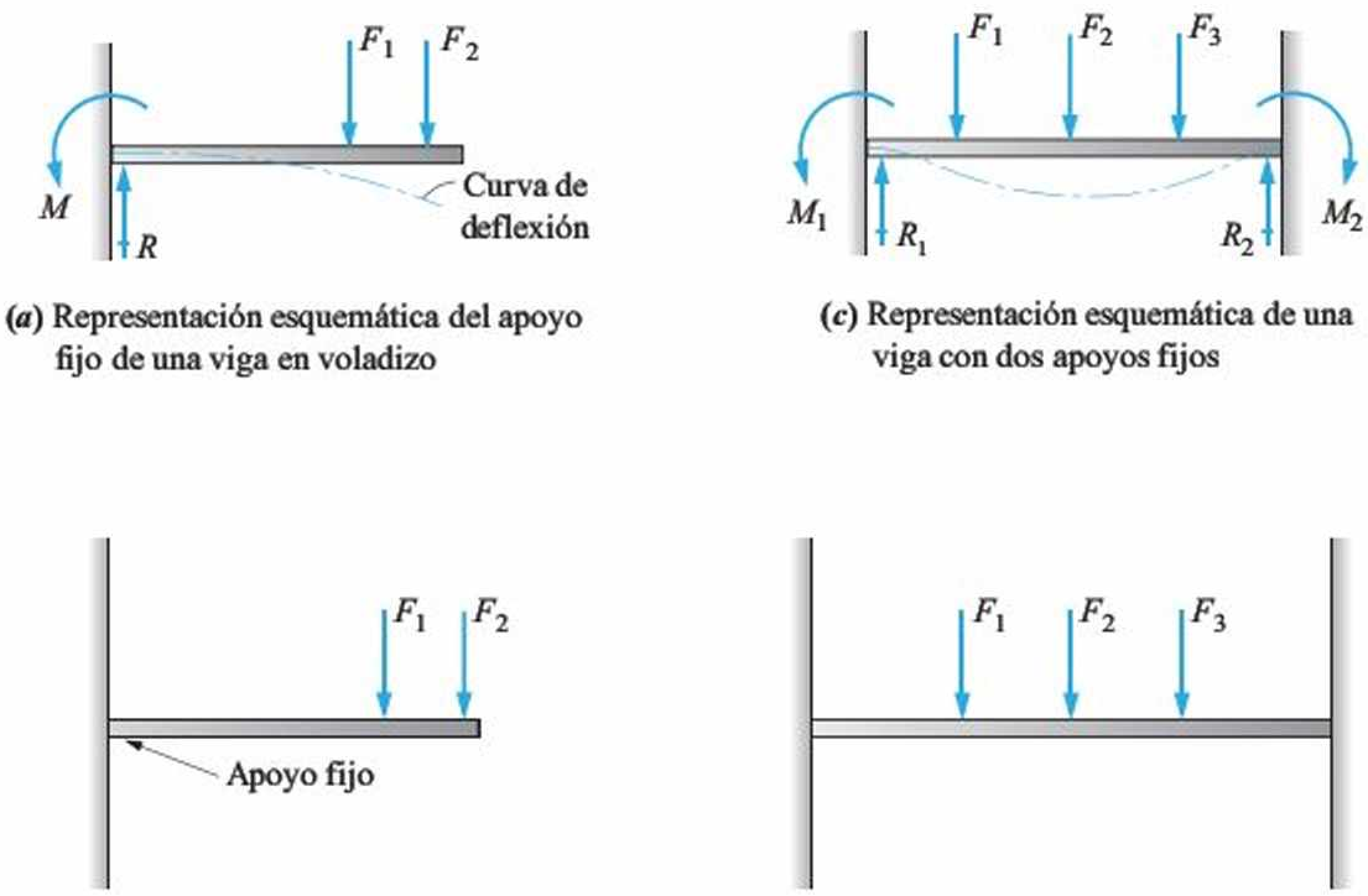
Apoyo fijo
Un apoyo fijo es aquel que se mantiene firmemente sujeto, de tal modo que resiste fuerzas en cualquier dirección y que también impide la rotación de la viga en el apoyo.

FIGURA 5–10
Ejemplos de apoyos simples.



(*a*) Vigas sobre dos rodillos
(*b*) Viga con un apoyo de pasador y otro de rodillo
(*c*) Diagrama de cuerpo libre de (*a*) o (*b*)

FIGURA 5–11
Vigas con apoyos fijos.



(*a*) Representación esquemática del apoyo fijo de una viga en voladizo

(*c*) Representación esquemática de una viga con dos apoyos fijos

(*b*) Representación ilustrativa

(*d*) Representación ilustrativa

Una forma de crear un apoyo fijo es producir una cavidad de ajuste apretado en una estructura rígida, en la que se inserta el extremo de la viga. El apoyo fijo resiste momentos lo mismo que fuerzas porque impide la rotación. La figura 5–11 muestra dos ejemplos del uso de apoyos fijos.

Tipos de viga. Los tipos de apoyos y su colocación determinan el tipo de viga.

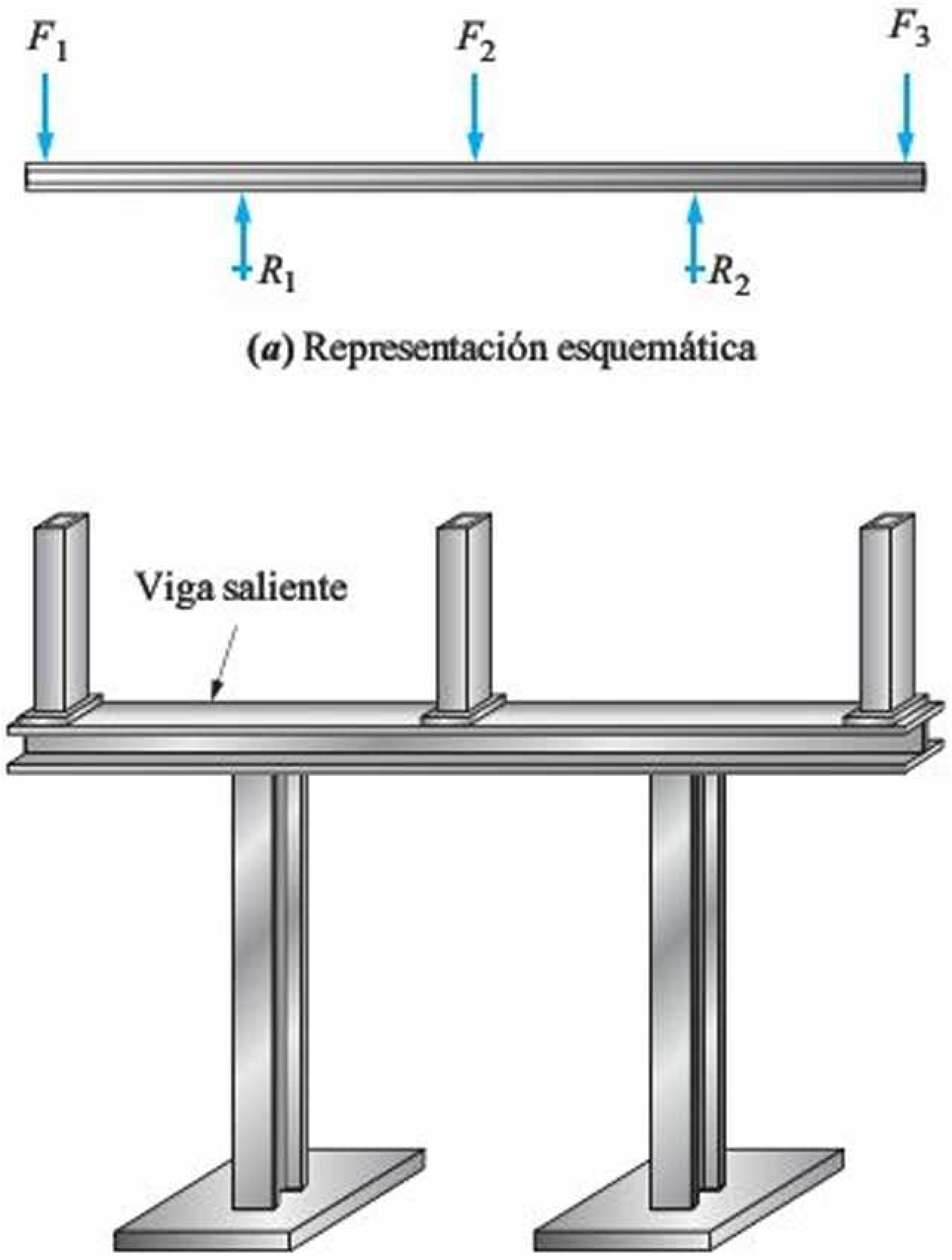
Viga simple. Una viga simple es una que soporta sólo cargas que actúan perpendiculares a su eje con sus extremos apoyados en apoyos simples que actúan perpendiculares al eje. La figura 5–1 es un ejemplo de una viga simple. Cuando todas las cargas actúan hacia abajo, la viga adopta la forma cóncava hacia arriba clásica. Ésta se conoce como flexión positiva.

Viga saliente. Una viga saliente es aquella en la que la viga cargada sobresale por encima de los apoyos. La figura 5–12 muestra un ejemplo de una viga saliente. La carga que actúa en las partes salientes tiende a flexionarlas hacia abajo y producirles una flexión negativa.

Viga en voladizo. Una viga en voladizo tiene sólo un extremo apoyo, como se muestra en la figura 5–13, donde se ilustra la pluma de una grúa rígidamente unida a una resistente columna vertical. Es esencial que el apoyo sea fijo, porque debe proporcionar apoyo vertical para las cargas externamente aplicadas junto con un momento de reacción para resistir el momento producido por las cargas. Las figuras 5–6 y 5–11(a) son otros ejemplos de vigas en voladizo.

Vigas compuestas. Si bien las vigas ilustradas hasta ahora eran miembros rectos simples, utilizaremos el término *viga compuesta* para referirnos a una que consta de dos o más piezas que se extienden en diferentes direcciones. Las figuras 5–8 y 5–9 son ejemplos de vigas compuestas. Las vigas de ese tipo en general se analizan por partes para determinar las fuerzas cortantes internas y los momentos flexionantes que actúan a todo lo largo de ellas. Con frecuencia, el lugar donde una pieza se une con otra es un punto crítico de interés.

FIGURA 5–12
Viga saliente.

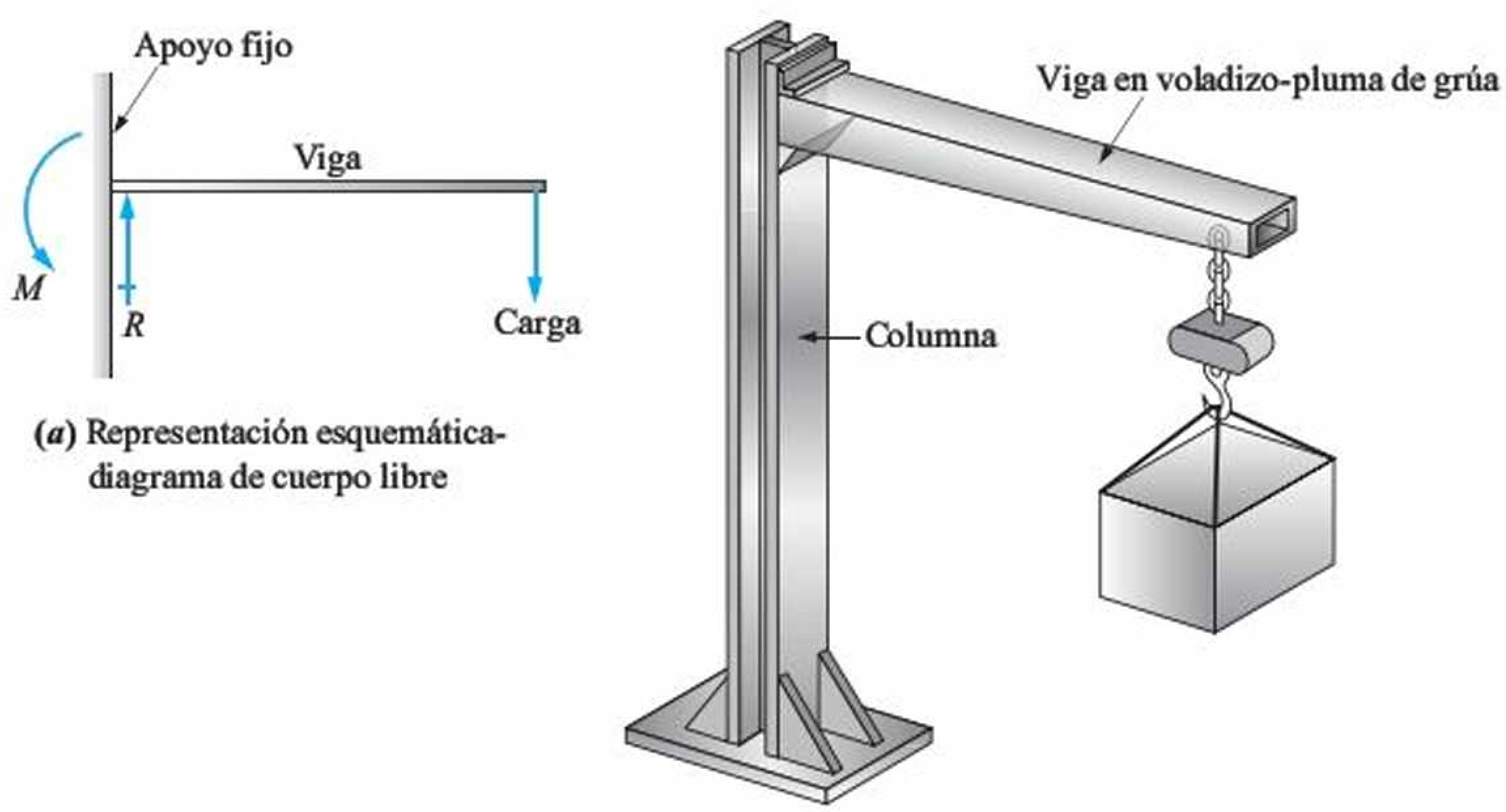


(*a*) Representación esquemática

(*b*) Ejemplo ilustrativo

Vigas continuas. Con excepción de la viga mostrada en las partes (c) y (d) de la figura 5–11, las vigas antes descritas contaban con uno o dos apoyos y sólo dos reacciones desconocidas. Los principios de estática nos permiten calcular todas las fuerzas y momentos de reacción con las ecuaciones clásicas de equilibrio, porque existen dos incógnitas y dos ecuaciones independientes para determinarlas. Las vigas como ésas se llaman *estáticamente determinadas*. En contraste, las *vigas continuas* disponen de apoyos adicionales, por lo que se requieren diferentes formas de analizar las fuerzas y momentos de reacción. Éstas se llaman vigas *estáticamente indeterminadas*. La figura 5–14 muestra un ejemplo de una viga continua sobre tres apoyos. La figura 5–15 muestra una viga con un extremo fijo y uno simplemente apoyado.

FIGURA 5–13
Viga en voladizo.



(*a*) Representación esquemática-diagrama de cuerpo libre

(*b*) Ejemplo ilustrativo

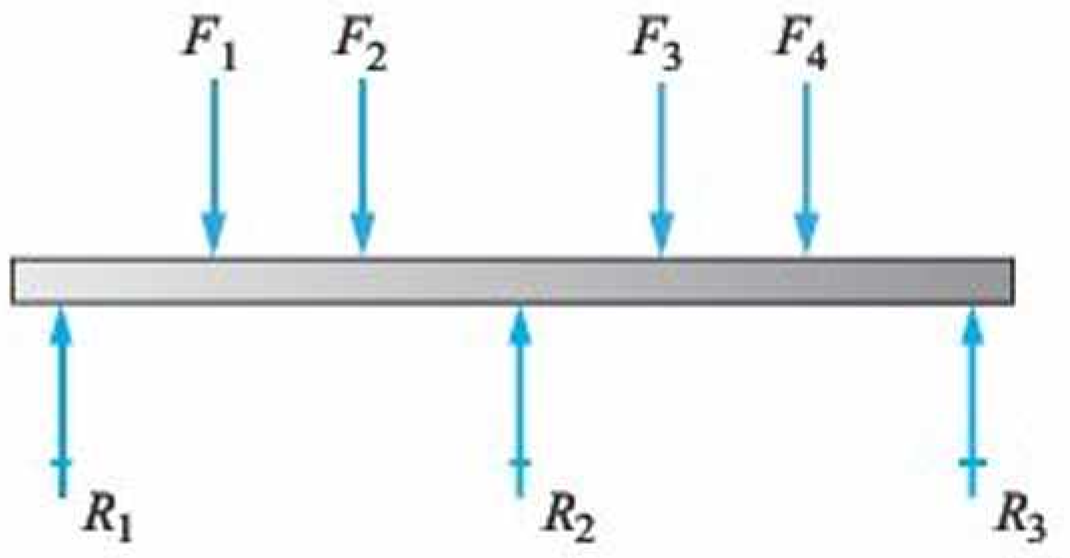


FIGURA 5–14 Viga continua sobre tres apoyos.

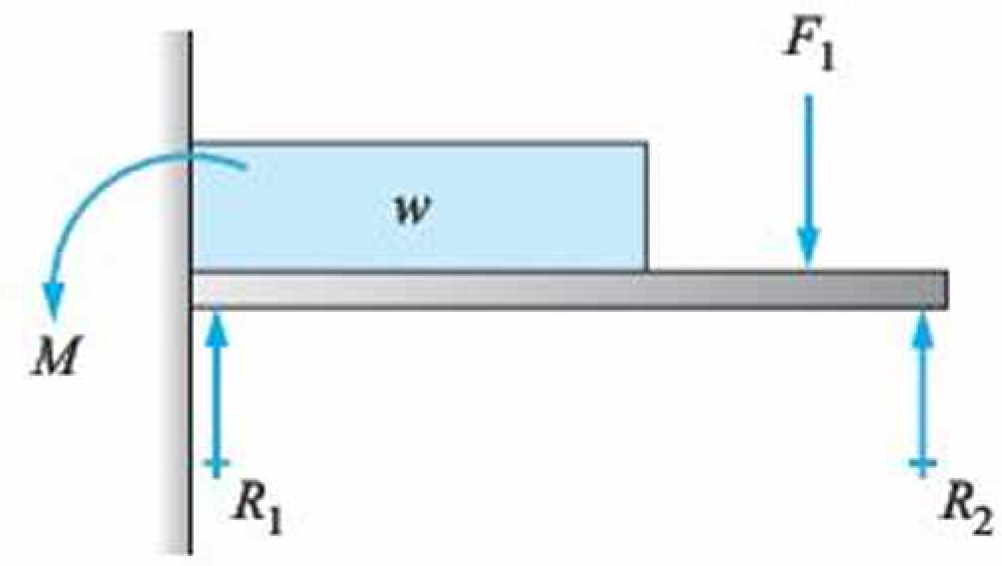


FIGURA 5–15 Viga en voladizo apoyada.

Observe que hay dos fuerzas desconocidas y un momento desconocido. Las figuras (5–11(c) y (d) muestran una viga con dos extremos fijos que también es estáticamente indeterminada, porque hay dos fuerzas y dos momentos de reacción que deben ser determinados. Las secciones 5–12 y 9–6 presentan las técnicas de análisis de vigas estáticamente indeterminadas.

5–3 REACCIONES EN LOS APOYOS

El primer paso en el análisis de una viga para determinar su factor de seguridad, bajo un patrón de carga dado, es mostrar en su totalidad las cargas y reacciones en los apoyos en un diagrama de cuerpo libre. Es muy importante ser capaz de construir diagramas de cuerpo libre a partir de la imagen física o descripción de la viga cargada. Esto fue lo que se hizo en cada uno de los casos ilustrados en las figuras 5–1 a 5–15.

Tras construir el diagrama de cuerpo libre, es preciso calcular la magnitud de todas las reacciones en los apoyos. Se presume que los métodos utilizados para determinar reacciones ya se estudiaron con anterioridad. Por consiguiente, se presentarán sólo algunos ejemplos como repaso e ilustración de las técnicas utilizadas en este libro.

Se recomienda el siguiente procedimiento general para determinar las reacciones en vigas simples y salientes.

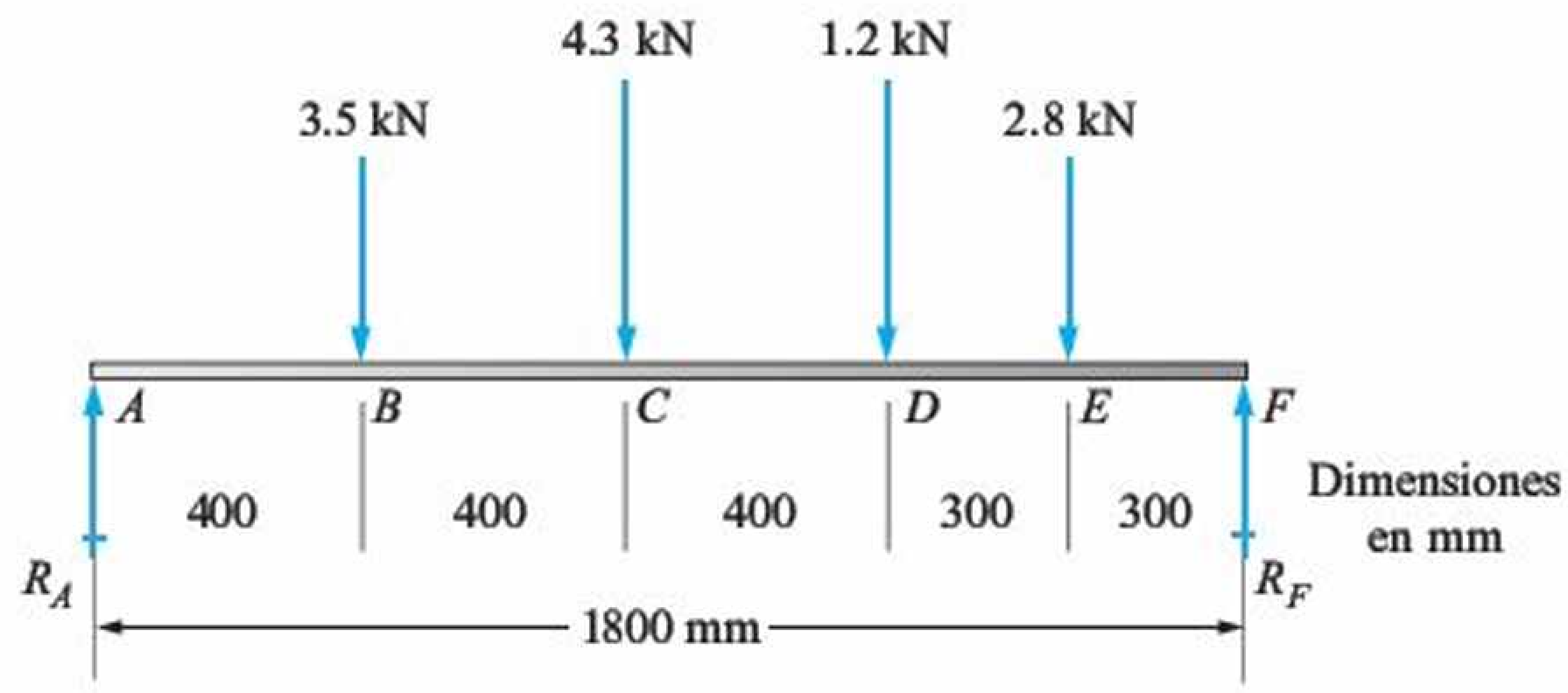
Indicaciones para determinar las reacciones

1. Trace el diagrama de cuerpo libre.
2. Use la ecuación de equilibrio $\Sigma M = 0$ sumando los momentos con respecto al punto de aplicación de una reacción de apoyo. La ecuación resultante se puede resolver entonces para la otra reacción.
3. Use $\Sigma M = 0$ sumando los momentos con respecto al punto de aplicación de la segunda reacción para determinar la primera.
4. Use $\Sigma F = 0$ para comprobar la exactitud de sus cálculos.

Problema de ejemplo 5–1

La figura 5–16 muestra el diagrama de cuerpo libre de la viga cargada de tubos, la que originalmente se mostró en la figura 5–2. Calcule las fuerzas de reacción en las varillas de apoyo.

FIGURA 5–16 Cargas sobre una viga.



Solución Objetivo Calcular las fuerzas de reacción en los extremos de la viga.

Datos La ilustración de la viga mostrada en la figura 5–2. El diagrama de cuerpo libre que muestra las cargas es la figura 5–16. Las cargas actúan en los puntos B, C, D y E. Las reacciones actúan en los puntos A y F y se designan R_A y R_F.

Análisis Se utilizarán las *Indicaciones para determinar las reacciones* para calcular las reacciones. La figura 5–16 es el diagrama de cuerpo libre, así que comenzaremos con el paso 2.

Resultados Para determinar la reacción R_F, sume los momentos con respecto al punto A.

$$\sum M_A = 0 = 3.5(400) + 4.3(800) + 1.2(1200) + 2.8(1500) - R_F(1800)$$

Observe que todas las fuerzas están en kN y las distancias en mm. Los momentos están en kN·mm. Ahora resuelva para R_F.

$$R_F = \frac{[3.5(400) + 4.3(800) + 1.2(1200) + 2.8(1500)]\ \text{kN}\cdot\text{mm}}{1800\ \text{mm}} = 5.82\ \text{kN}$$

Ahora para determinar R_A, sume los momentos con respecto al punto F.

$$\sum M_F = 0 = 2.8(300) + 1.2(600) + 4.3(1000) + 3.5(1400) - R_A(1800)$$

$$R_A = \frac{[2.8(300) + 1.2(600) + 4.3(1000) + 3.5(1400)]\ \text{kN}\cdot\text{mm}}{1800\ \text{mm}} = 5.98\ \text{kN}$$

Ahora aplique $\Sigma F = 0$ en la dirección vertical como comprobación.

Fuerzas dirigidas hacia abajo: $(3.5 + 4.3 + 1.2 + 2.8)\ \text{kN} = 11.8\ \text{kN}$

Reacciones dirigidas hacia arriba: $(5.82 + 5.98)\ \text{kN} = 11.8$ kn (comprobación)

Comentario Muestre las fuerzas de reacción R_A y R_F en los puntos de la viga donde actúan y las direcciones en que lo hacen.

Problema de ejemplo 5–2 Calcule las reacciones en la viga mostrada en la figura 5–17(a).

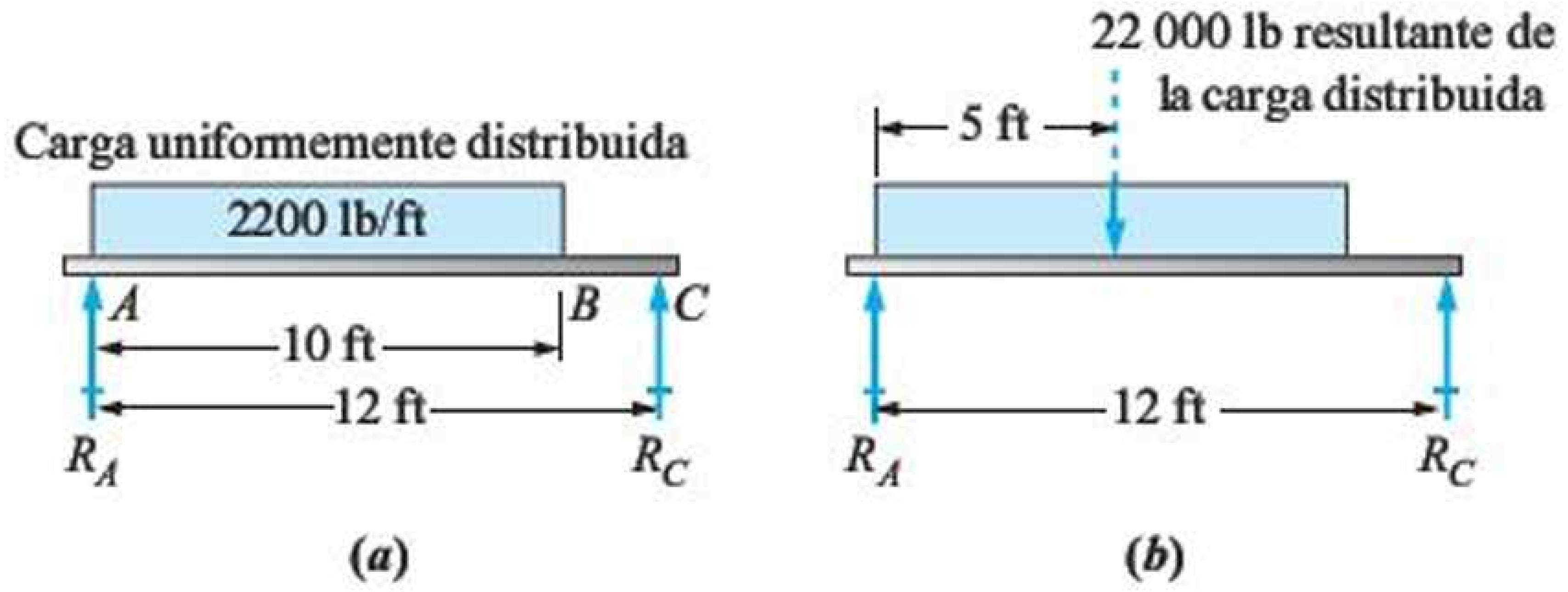


FIGURA 5–17 Carga sobre una viga.

Solución Objetivo Calcular las fuerzas de reacción en los extremos de la viga.

Datos La ilustración de la viga mostrada en la figura 5–17(a). La carga distribuida de 2200 lb/ft actúa a lo largo de 10 ft en el extremo izquierdo de la viga. Las reacciones actúan en los puntos A y C y se designan R_A y R_C.

Análisis Se utilizarán las *Indicaciones para determinar reacciones* para calcularlas. La figura 5–17(b) es un diagrama de cuerpo libre equivalente, con la resultante de la carga distribuida mostrada actuando en el centroide de la carga.

Resultados

$$\sum M_A = 0 = 22\,000\,\text{lb}(5\text{ ft}) - R_C(12\text{ ft})$$

$$R_C = \frac{22\,000\,\text{lb}(5\text{ ft})}{12\text{ ft}} = 9167\text{ lb}$$

$$\sum M_C = 0 = 22\,000\,\text{lb}\,(7\text{ ft}) - R_A(12\text{ ft})$$

$$R_A = \frac{22\,000\,\text{lb}\,(7\text{ft})}{12\text{ ft}} = 12\,833\text{ lb}$$

Por último, como comprobación en la dirección vertical,

$$\sum F = 0$$

Fuerzas dirigidas hacia abajo: 22 000 lb

Fuerzas dirigidas hacia arriba: $R_A + R_C = 12833 + 9167 = 22\,000$ lb (comprobación)

Comentario *Observe que la resultante se utiliza sólo para determinar las reacciones*. Más adelante, cuando determinemos las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes, se utilizará la carga distribuida misma.

Problema de ejemplo 5–3

Calcule las reacciones de la viga saliente de la figura 5–18.

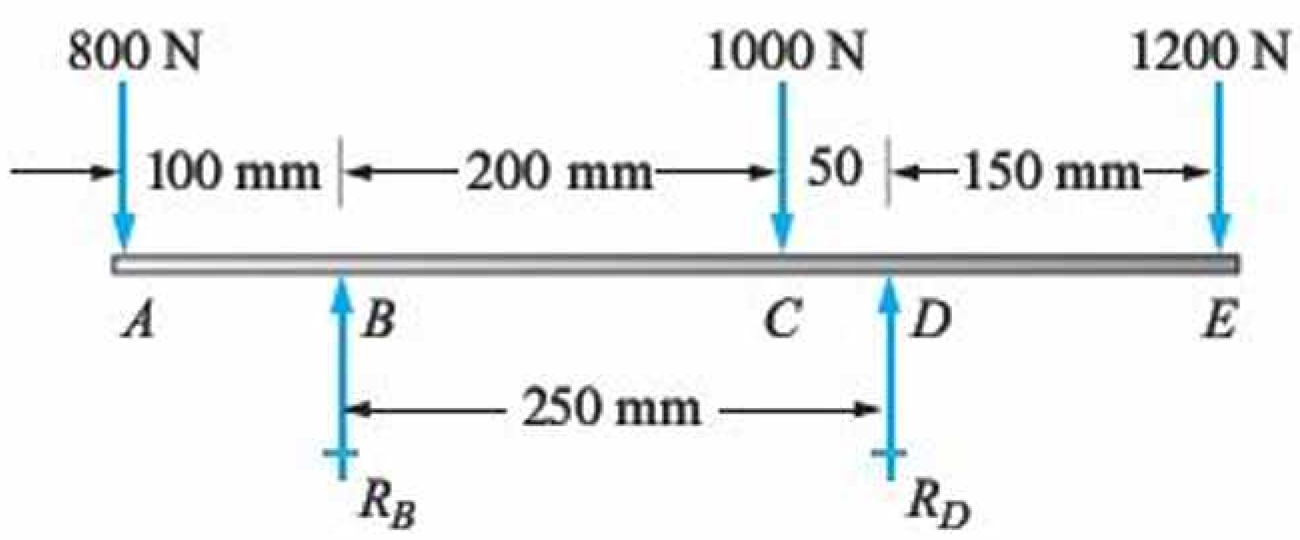


FIGURA 5–18 Carga sobre una viga.

Solución

Objetivo Calcular las fuerzas de reacción en los puntos B y D.

Datos Las cargas que actúan en la viga de la figura 5–18. Las reacciones son R_B y R_D.

Análisis Se utilizarán las *Indicaciones para determinar las reacciones* para calcularlas.

Resultados En primer lugar, se suman los momentos con respecto al punto B.

$$\sum M_B = 0 = 1000(200) - R_D(250) + 1200(400) - 800(100)$$

Observe que las fuerzas que tienden a producir momentos en el sentido de las manecillas del reloj con respecto a B se consideran positivos en este cálculo, Ahora. si se resuelve para R_D se obtiene

$$R_D = \frac{[1000(200) + 1200(400) - 800(100)]\text{ N}\cdot\text{mm}}{250\text{ mm}} = 2400\text{ N}$$

La suma de los momentos con respecto a D permite calcular R_B.

$$\sum M_D = 0 = 1000(50) - R_B(250) + 800(350) - 1200(150)$$

$$R_B = \frac{[1000(50) + 800(350) - 1200(150)]\text{ N}\cdot\text{mm}}{250\text{ mm}} = 600\text{ N}$$

Compruebe con $\Sigma F = 0$ en la dirección vertical:

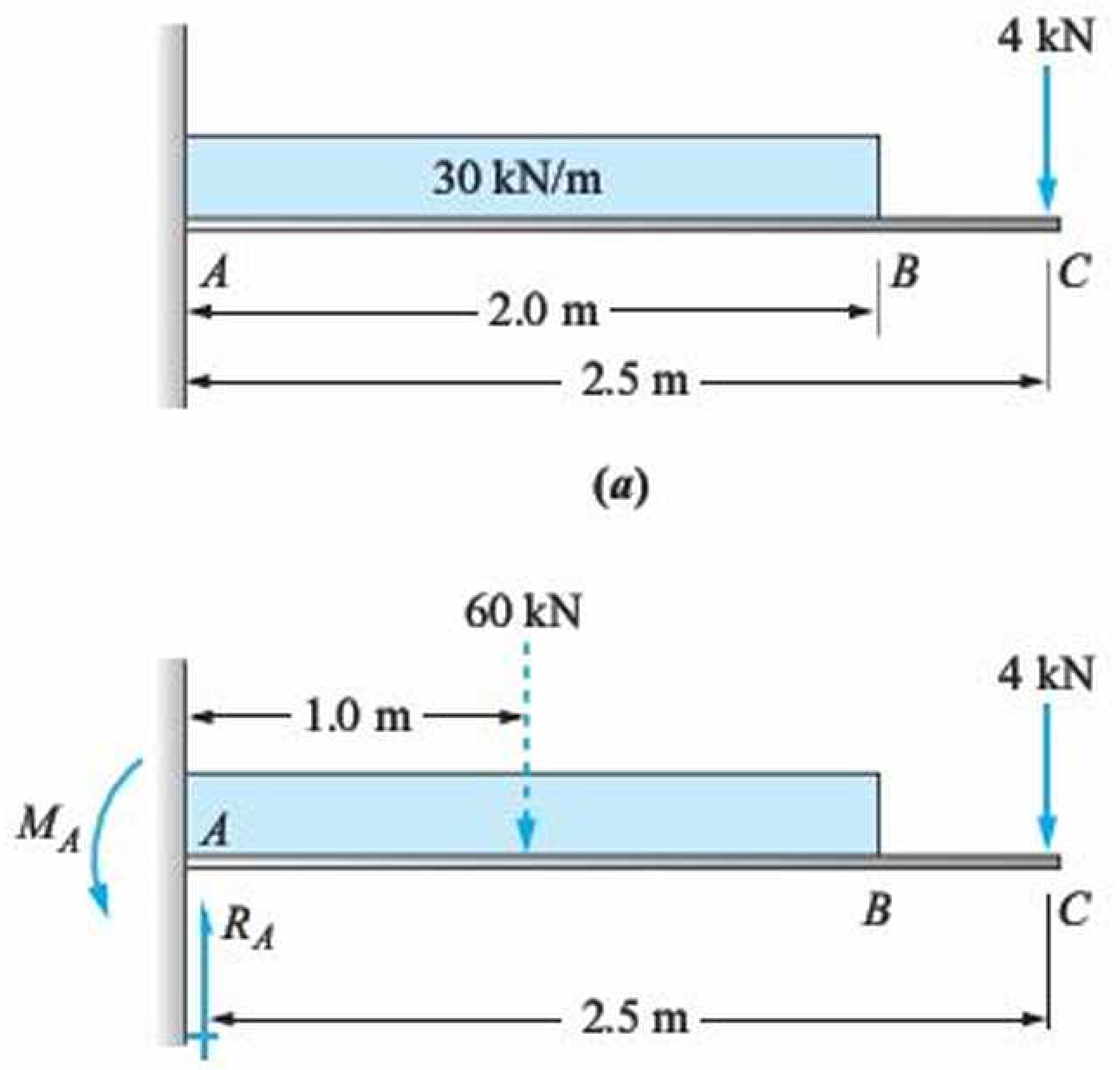
Fuerzas dirigidas hacia abajo: $(800 + 1000 + 1200)\text{N} = 3000\ \text{N}$

Fuerzas dirigidas hacia arriba: $R_B + R_D = (600 + 2400)\text{N} = 3000\ \text{N}$ (comprobación)

Comentario En resumen, la reacción izquierda, R_B, es 600 N y la reacción derecha, R_D es 2400 N.

Problema de ejemplo 5–4 Calcular las reacciones en la viga en voladizo mostrada en la figura 5–19.

FIGURA 5–19 Carga sobre una viga.



(b) Diagrama de cuerpo libre

Solución Objetivo Calcular las reacciones en el punto A del muro.

Datos Las cargas que actúan en la viga de la figura 5–19(a).

Análisis Se utilizarán las *Indicaciones para determinar reacciones*.

En el caso de vigas en voladizo, las reacciones en el muro se componen de una fuerza dirigida hacia arriba R_A que debe equilibrar todas fuerzas dirigidas hacia abajo que actúan en la viga, y un momento de reacción M_A que debe equilibrar la tendencia de las cargas aplicadas para hacer girar la viga. Todas las fuerzas y reacciones se muestran en la figura 5–19(b). También se muestra la resultante, 60 kN, de la carga distribuida.

Resultados Por consiguiente, si sumamos las fuerzas en la dirección vertical, obtenemos

$$R_A = 60\ \text{kn} + 4\ \text{kN} = 64\ \text{kN}$$

Si se suman los momentos con respecto al punto A se obtiene

$$M_A = 60\ \text{kN}(1.0\text{m}) + 4\ \text{kN}(2.5\ \text{m}) = 70\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

Comentario La reacción en el apoyo de la viga en voladizo mostrada en la figura 5–19 incluye una fuerza vertical $R_A = 64$ kN y un momento en sentido contrario al de las manecillas del reloj, $M_A = 70$ kN·m.

De nueva cuenta, observe que la resultante de la carga distribuida se utiliza sólo para determinar reacciones. La carga distribuida original que actúa a lo largo de toda su longitud se considerará cuando se analicen fuerzas cortantes y momentos flexionantes en secciones subsiguientes.

5–4 FUERZAS CORTANTES Y MOMENTOS FLEXIONANTES EN EL CASO DE CARGAS CONCENTRADAS

Los capítulos 7 y 8 demostrarán que en una viga se desarrollan dos clases de esfuerzos, *esfuerzos cortantes* y *esfuerzos flexionantes*. Los esfuerzos cortantes se desarrollan en la viga porque las fuerzas cortantes tienden a cizallar, o cortar, la viga. El esfuerzo flexionante se desarrolla porque los momentos flexionantes internos tienen tienden a flexionar la viga de tal modo que ésta adopte una forma curva. Las fuerzas cortantes y momentos flexionantes internos se producen en reacción a las fuerzas y momentos externos aplicados a la viga. Recuerde lo que hizo en la actividad.

Antes de estudiar las esfuerzos flexionantes y las fuerzas cortantes propiamente dichas, este capítulo le ayudará a visualizar y a calcular los valores de las fuerzas cortantes y momentos flexionantes internos. Cada uno depende de la naturaleza de las cargas aplicadas en la viga y la forma en que está apoyada.

Definimos las fuerzas cortantes como sigue:

> ***Las fuerzas cortantes son fuerzas internas generadas en el material de una viga para equilibrar las fuerzas externas aplicadas y garantizar el equilibrio de todas sus partes.***

Aun cuando las fuerzas cortantes internas pueden actuar en cualquier dirección, tenemos que considerar primero aquellas que actúan perpendiculares al eje largo de la viga. Como en general visualizamos vigas en posición horizontal que soportan cargas que actúan verticalmente dirigidas hacia abajo, estas fuerzas cortantes internas en general actúan verticalmente. Por lo tanto, nos referimos a ellas como *fuerzas cortantes verticales*, indicadas por el símbolo V. Desde luego, las vigas en general pueden estar orientadas en cualquier dirección, como se muestra en las figuras 5–3 y 5–4.

Los momentos flexionantes se definen como sigue:

> ***Los momentos flexionantes son momentos internos que se generan en el material de una viga para equilibrar la tendencia de las fuerzas externas de hacer que gire cualquier parte de ella.***

Los momentos flexionantes hacen que la viga asuma su forma "flexionada", una curva característica. Tal como lo hizo en la actividad al principio de este capítulo, es conveniente utilizar una viga plana flexible para visualizar el comportamiento general de una viga en respuesta a diferentes patrones de carga y condiciones de apoyo.

La figura 5–20 muestra un viga simplemente apoyada con una sola carga que actúa a la mitad de su longitud, similar a la mostrada en la figura 5–1 y utilizada en la actividad. Nuestro objetivo ahora es obtener datos y observaciones con los que podamos preparar gráficas completas de las variaciones de las fuerzas cortantes y momentos flexionantes que actúan a todo lo largo de la viga. Utilizamos el método del diagrama de cuerpo libre, tal como lo hicimos en la actividad, considerando segmentos distribuidos equidistantes entre sí a lo largo de la viga en los puntos A, B, C, D y E. Las partes (b), (c), (d) y (e) de la figura 5–20 muestran los diagramas de cuerpo libre resultantes, con sólo segmentos a la izquierda de los cortes en las posiciones dadas.

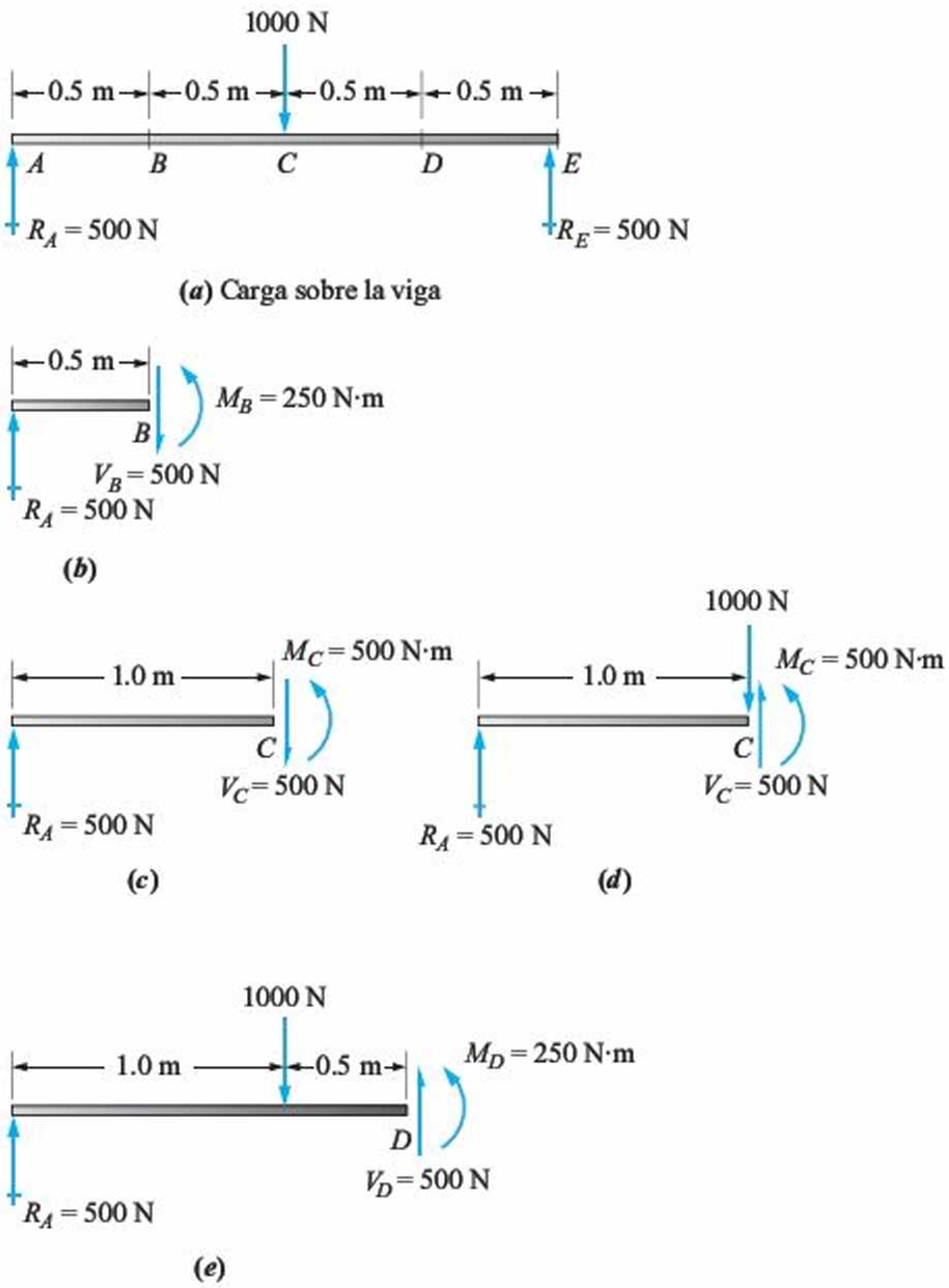
Los diagramas en las partes (b) y (c) producen fuerzas cortantes verticales que actúan dirigidas hacia abajo en la sección cortada. A continuación establecemos la siguiente convención de signos para fuerzas cortantes:

> Las fuerzas cortantes internas que actúan *dirigidas hacia abajo* se consideran *positivas*.
> Las fuerzas cortantes internas que actúan *dirigidas hacia arriba* se consideran *negativas*.

Podemos generalizar el método utilizado para determinar la magnitud de la fuerza cortante en cualquier sección de una viga de la siguiente manera:

> La magnitud de la fuerza cortante en cualquier parte de una viga es igual a la suma algebraica de todas las fuerzas externas que actúan a la izquierda de la sección de interés.

FIGURA 5–20
Diagramas de cuerpo libre utilizados para determinar fuerzas cortantes y momentos flexionantes.



Como se puede ver en las partes (b) y (c) de la figura 5–20, está claro que si considera una sección cortada en cualquier parte entre la posición *A* y la posición *C*, la fuerza cortante interna sería 500 N. La regla general aquí demostrada es:

> En cualquier segmento de una viga donde no hay cargas aplicadas, el valor de la fuerza cortante permanece constante.

Observe que los diagramas (c) y (d) corresponden a la posición *C*. Sin embargo, uno es exactamente antes del punto de aplicación de la fuerza de 1000 N y el otro es exactamente después de la fuerza aplicada. El resultado es que la fuerza cortante vertical interna cambia de dirección (signo) repentinamente de positiva (dirigida hacia abajo) a negativa (dirigida hacia arriba) donde actúa la fuerza concentrada. Ahora se puede establecer la siguiente regla.

> Una carga concentrada (o reacción) en una viga provoca un cambio abrupto de la fuerza cortante que actúa en la viga en una cantidad igual a la magnitud de la carga y de su dirección.

Ahora consideremos la variación de los momentos flexionantes en diferentes puntos a lo largo de la viga. Si la cortamos en un punto bastante cerca de A en el apoyo izquierdo, el momento en el interior de la viga sería cero porque, la fuerza de reacción actúa allí, el brazo de momento de esta fuerza es cero. Esto conduce a la siguiente regla para momentos flexionantes:

> Los momentos flexionantes en los extremos de una viga simplemente apoyada son cero.

A continuación establecemos la siguiente convención de signos para momentos flexionantes:

> Los momentos flexionantes internos en sentido contrario al de las manecillas del reloj se consideran positivos. En el sentido de las manecillas del reloj se consideran negativos.

Estudie los diagramas (b), (c), (d) y (e) en la figura 5–20 y demuéstrese cómo se determinaron los valores el momento flexionante, sumando momentos con respecto a la posición del corte como se hizo en la actividad al principio de este capítulo. La regla general es, por lo tanto:

> La magnitud del momento flexionante interno en cualquier sección de una viga es igual a la suma algebraica de los momentos, considerados con respecto al corte, de todas las fuerzas que actúan a la izquierda de la sección de interés.

Podemos resumir los resultados de los análisis en las varias secciones cortadas de la viga:

Sección A:	$V_A = 500$ N	$M_A = 0$
Sección B:	$V_B = 500$ N	$M_B = 250$ N·m
Sección C a la izquierda de la carga:	$V_C = 500$ N	$M_C = 500$ N·m
Sección C a la derecha de la carga:	$V_C = -500$ N	$M_C = 500$ N·m
Sección D:	$V_D = -500$ N	$M_D = 250$ N·m
Sección E:	$V_E = -500$ N	$M_E = 0$ N·m

Es útil graficar estos valores como se muestra en la figura 5–21. El diagrama de la parte superior se llama *diagrama de carga*. El de en medio es el *diagrama de fuerza cortante* y el de la parte inferior es el *diagrama de momento flexionante*. Los tres diagramas deberán alinearse para recalcar las relaciones de las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes a las posiciones a lo largo de la viga. *También deberá designar los ejes verticales, como se muestra, para que cualquier usuario sepa con exactitud qué valores se graficaron y en qué unidades están expresados*.

Repase, ahora, las reglas dadas en los cuadros de texto sombreados durante este análisis. Observe cómo se ilustran los efectos de dichas reglas en los diagramas de la figura 5–21. También el momento flexionante aparece como una línea recta con pendiente positiva entre *A* y *C*. Luego aparece como una línea recta con pendiente negativa entre *C* y *E*. Estas observaciones conducen a otras reglas generales:

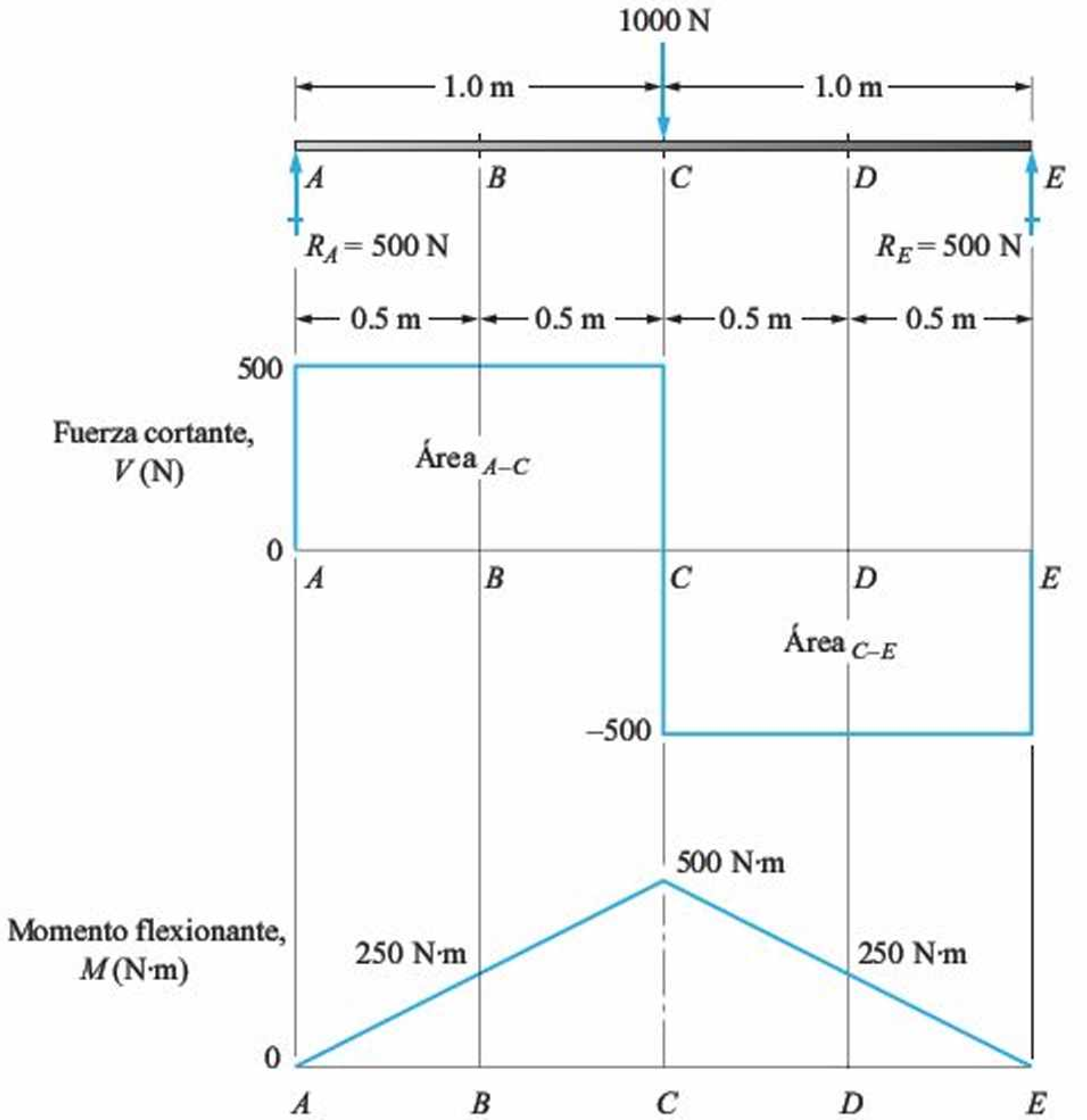


FIGURA 5–21
Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.

> La gráfica de la curva de momento flexionante será una línea recta a lo largo de los segmentos de la viga donde la fuerza cortante tiene un valor constante. Si la fuerza cortante en el segmento es positiva, la curva del momento flexionante tendrá una pendiente positiva constante. A la inversa, si la fuerza cortante en el segmento es negativa, la curva del momento flexionante tendrá una pendiente constante negativa.

Se puede establecer una regla más que permite preparar el diagrama de momento flexionante directamente con los datos que aparecen en el diagrama de fuerza cortante. Primero establecemos la regla, luego la aplicamos al patrón de carga de la viga mostrada en la figura 5–21. En seguida demostramos la base matemática de la regla.

> El cambio del momento flexionante entre dos puntos de una viga es igual al área bajo la fuerza cortante entre los mismos dos puntos.

En la mayoría de los casos, es fácil calcular las áreas requeridas para poner en ejecución esta regla. Esta regla, llamada la *regla del área*, puede aplicarse a lo largo de un segmento de un segmento de una viga de cualquier longitud para determinar el cambio del momento flexionante.

Considere el segmento *A–C* en la figura 5–21. La fuerza cortante es un valor constante de 500 a lo largo de 1.0 de este segmento. Entonces el área bajo la curva de fuerza cortante es,

$$\text{Área}_{A-C} = (500\ \text{N})(1.0\ \text{m}) = 500\ \text{N·m}$$

Primero observamos que el momento flexionante en A en el extremo izquierdo de la viga es cero, con base en la regla previamente desarrollada. Por consiguiente el *cambio del momento flexionante* de A a C es 500 N·m. Entonces,

$$M_C = M_A + \text{Área}_{A-C} = 0 + 500 \text{ N·m} = 500 \text{ N·m}$$

Podemos graficar los valores de M_A y M_C en el diagrama de momento flexionante; una regla previamente establecida enuncia que la curva de momento flexionante es una línea recta con pendiente positiva cuando la fuerza cortante es un valor positivo constante, como lo es en el segmento A–C. En tal caso, simplemente puede dibujar una línea recta desde 0 en A hasta 500 N·m en C.

Continuando hacia la mitad derecha de la viga, segmento C–E, calculamos el área como

$$\text{Área}_{C-E} = (-500 \text{ N})(1.0 \text{ m}) = -500 \text{ N·m}$$

Este valor es el *cambio del momento flexionante* desde C hasta E. Sin embargo, el momento flexionante en C se inicia en 500 N·m. Entonces,

$$M_E = M_C + \text{Área}_{C-E} = 500 \text{ N·m} - 500 \text{ N·m} = 0 \text{ N·m}$$

También se demuestra en este caso la regla de que el momento flexionante en los extremos de una viga simplemente apoyada es cero.

Si M_C y M_E se grafican y unen con una línea recta con pendiente negativa se completa el diagrama de momento flexionante.

Después de un poco de práctica, deberá ser capaz de preparar los tres diagramas aplicando directamente las reglas desarrolladas en esta sección sin la necesidad de trazar los diagramas de cuerpo libre individuales.

Desarrollo de la regla del área para trazar diagramas de cuerpo libre. En general, la regla del área puede expresarse como

$$dM = V\,dx \tag{5–1}$$

donde dM es el cambio de momento provocado por una fuerza cortante que actúa a lo largo de un pequeño segmento dx. La figura 5–22 ilustra la ecuación (5–1).

A lo largo de un segmento de mayor longitud, se puede utilizar el proceso de integración para determinar el cambio total del momento a lo largo del segmento. Entre dos puntos, A y C,

$$\int_{M_A}^{M_C} dM = \int_{x_A}^{x_C} V\,dx \tag{5–2}$$

Si la fuerza cortante V permanece constante a lo largo del segmento, como en el segmento A–C en la figura 5–22, la ecuación se escribe

$$\int_{M_A}^{M_C} dM = V\int_{x_A}^{x_C} dx \tag{5–3}$$

Completando la integración se obtiene

$$M_C = M_A = V(x_C - x_A) \tag{5–4}$$

Este resultado es compatible con la regla previamente formulada. Observe que $M_C - M_A$ es el *cambio* de momento entre los puntos A y C. El lado derecho de la ecuación (5–4) es el área bajo la curva de la fuerza cortante entre A y C.

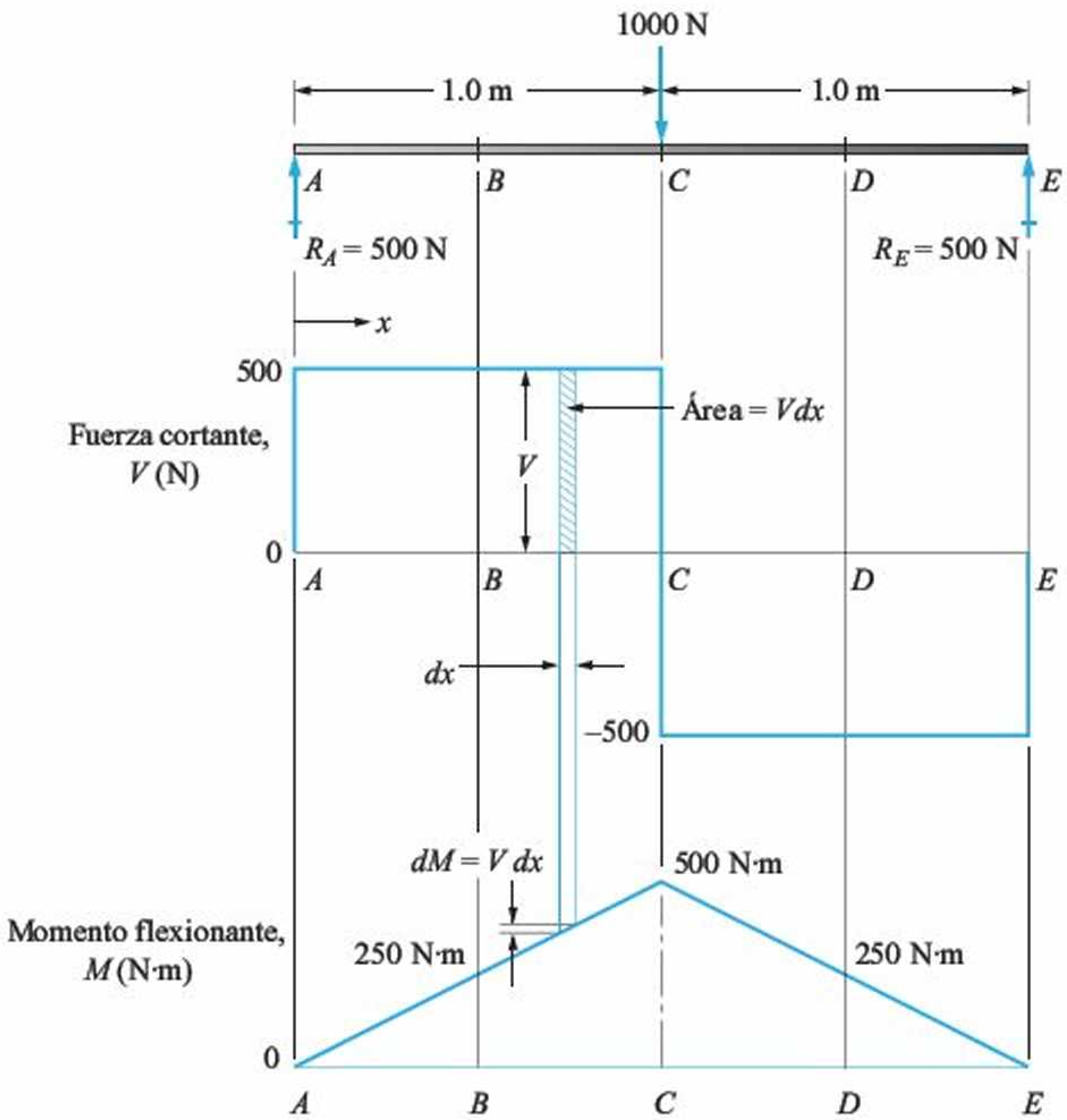


FIGURA 5–22 Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante: regla del área.

5–5 INDICACIONES PARA TRAZAR DIAGRAMAS DE VIGAS CON CARGAS CONCENTRADAS

Los principios desarrollados e ilustrados en la sección precedente pueden generalizarse en la forma de un conjunto de indicaciones que pueden ser utilizadas para trazar diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante de prácticamente cualquier viga simplemente apoyada sometida a cargas concentradas.

Las indicaciones se dan en el siguiente cuadro de texto sombreado. Deberá repasarlas ahora y relacionarlas con las reglas desarrolladas en la sección 5–4. Entonces las aplicaremos a problemas nuevos y más complejos.

Indicaciones para trazar diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante de vigas simplemente apoyadas que soportan sólo cargas concentradas.

A. Diagrama de carga
   1. Trace la viga y muestre las cargas y las fuerzas de reacción que actúan en ella.
   2. Rotule con letras los puntos en la viga donde actúan las cargas y reacciones.
   3. Resuelva para las magnitudes y direcciones de las fuerzas de reacción y muéstrelas en el diagrama de carga.

B. Diagrama de fuerza cortante
   1. Trace los ejes vertical y horizontal del diagrama en relación con el diagrama de carga de la viga, de una manera similar a la mostrada en la figura 5–21.
   2. Rotule el eje vertical como *fuerza cortante, V*, y dé las unidades de fuerza.
   3. Proyecte líneas desde cada carga aplicada o fuerza de reacción en el diagrama de carga de la viga hacia abajo hasta el diagrama de fuerza cortante. Rotule los puntos de interés como referencia. Rotule los puntos donde actúan las cargas y fuerzas de reacción como lo hizo en el diagrama de carga.

4. Construya la gráfica de fuerza cortante comenzando en el extremo izquierdo de la viga y procediendo a la derecha, aplicando las reglas siguientes.
   a. *Los diagramas de fuerza cortante se inician y terminan en cero en los extremos de la viga.*
   b. *Una carga concentrada o reacción en una viga provoca un cambio abrupto de la fuerza cortante en la viga en una cantidad igual a la magnitud de la carga o reacción y en la misma dirección.*
   c. *En cualquier segmento de la viga donde no hay cargas aplicadas, el valor de la fuerza cortante permanece constante, y el resultado es una línea recta horizontal en el diagrama de fuerza cortante.*
   d. *Muestre el valor de la fuerza cortante en puntos clave en el diagrama, por lo general en puntos donde actúan las cargas o reacciones.*

C. Diagrama de momento flexionante.
1. Trace los ejes vertical y horizontal del diagrama en relación con el diagrama de fuerzo cortante de una manera similar a la mostrada en la figura 5–21.
2. Rotule el eje vertical como *momento flexionante*, *M*, y dé las unidades de momento.
3. Proyecte líneas verticales en puntos de interés desde el diagrama de fuerza cortante, incluidos todos los puntos utilizados para el diagrama de fuerza cortante, hacia abajo hasta el eje de momento flexionante.
4. Construya la gráfica de momento flexionante a partir del extremo izquierdo y prosiguiendo hacia la derecha, aplicando las reglas siguientes:
   a. *En los extremos de una viga simplemente apoyada, el momento flexionante es cero.*
   b. *El cambio del momento flexionante entre dos puntos de una viga es igual al área bajo la curva de fuerza cortante entre dichos puntos. Por lo tanto, cuando el área bajo la curva de fuerza cortante es positiva (sobre el eje), el momento flexionante se incrementa, y viceversa.*
   c. *El momento flexionante máximo ocurre en un punto donde la curva de fuerza cortante cruza su eje cero.*
   d. *En la sección de la viga donde no hay cargas aplicadas, el diagrama de momento flexionante será una línea recta.*
   e. *La pendiente de la curva de momento flexionante en cualquier punto es igual a la magnitud de la fuerza cortante en dicho punto.*
   f. *Rotule los valores del momento flexionante en la gráfica en cada punto de interés.*

Problema de ejemplo 5–5

Trace los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante completos de la viga mostrada en la figura 5–23.

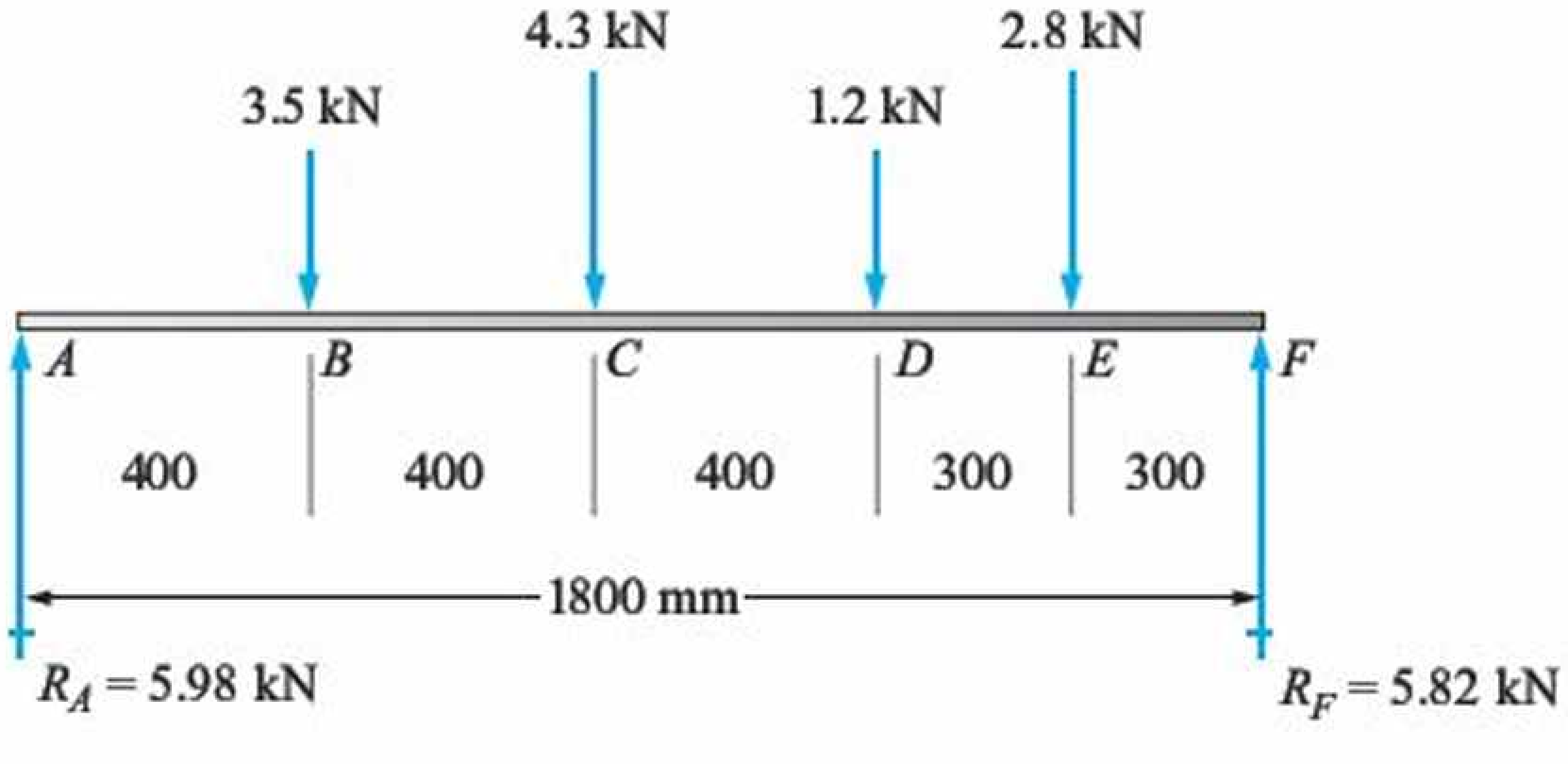


FIGURA 5–23 Carga sobre una viga.

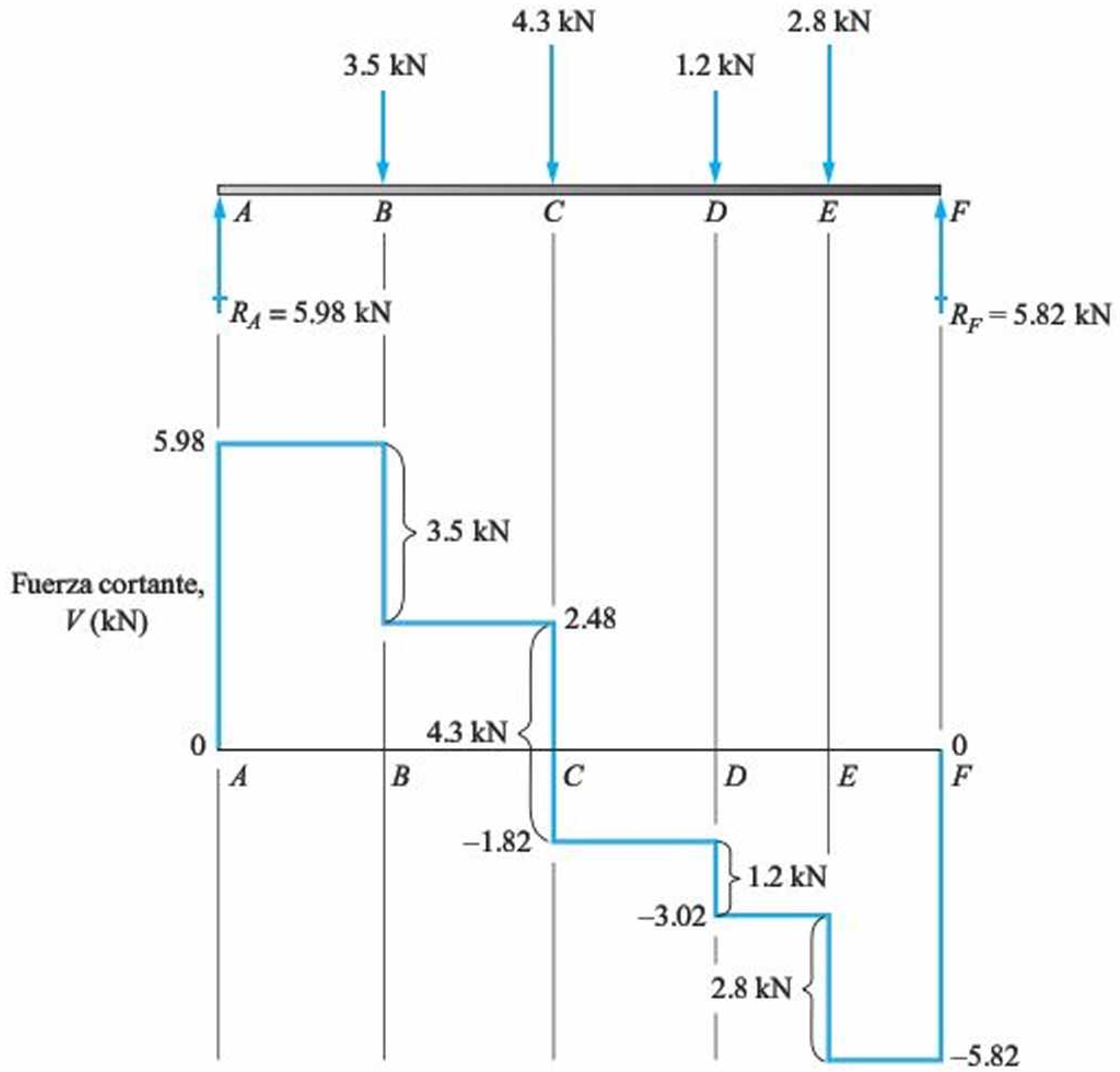


FIGURA 5–24
Diagrama de fuerza cortante.

Solución

Objetivo Trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante completos.

Datos Las cargas que actúan en la viga mostrada en la figura 5–23. Es una viga simplemente apoyada sometida a cargas concentradas. Ésta es la misma viga para la cual se calcularon fuerzas cortantes en el Problema de ejemplo 5–1. Los resultados de la parte A de las indicaciones se muestran en la figura 5–23.

Análisis Se utilizarán las *indicaciones para trazar diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de vigas simplemente apoyadas sometidas sólo a cargas concentradas*.

Resultados de la parte B El diagrama de fuerza cortante terminado se muestra en la figura 5–24. Se describe el proceso utilizado para determinar cada una de las partes del diagrama.

Punto A: La reacción R_A se determina de inmediato. Entonces,

$$V_A = R_A = 5.98 \text{ kN}$$

Entre A y B: Como no hay cargas aplicadas, la fuerza cortante permanece constante. Es decir,

$$V_{A-B} = 5.98 \text{ kN}$$

Punto B: La carga aplicada de 3.5 kN provoca una reducción repentina de V.

$$V_B = 5.98 \text{ kN} - 3.5 \text{ kN} = 2.48 \text{ kN}$$

Entre B y C: La fuerza cortante permanece constante.

$$V_{B-C} = 2.48 \text{ kN}$$

Punto C: La carga aplicada de 4.3 kN provoca una reducción repentina de V.

$$V_C = 2.48 \text{ kN} - 4.3 \text{ kN} = -1.82 \text{ kN}$$

Entre C y D: La fuerza cortante permanece constante.

$$V_{C-D} = -1.82 \text{ kN}$$

Punto D: La carga aplicada de 1.2 kN provoca una reducción repentina de V.

$$V_D = -1.82 \text{ kN} - 1.2 \text{ kN} = -3.02 \text{ kM}$$

Entre D y E: La fuerza cortante permanece constante.

$$V_{D-E} = -3.02 \text{ kN}$$

Punto E: La carga aplicada provoca una reducción repentina de V.

$$V_E = -3.02 \text{ kN} - 2.8 \text{ kN} = -5.82 \text{ kN}$$

Entre E y F: La fuerza cortante permanece constante.

$$V_{E-F} = -5.82 \text{ kN}$$

Punto F: La fuerza de reacción de 5.82 provoca una reducción repentina de V.

$$V_F = -5.82 \text{ kN} + 5.82 \text{ kN} = 0$$

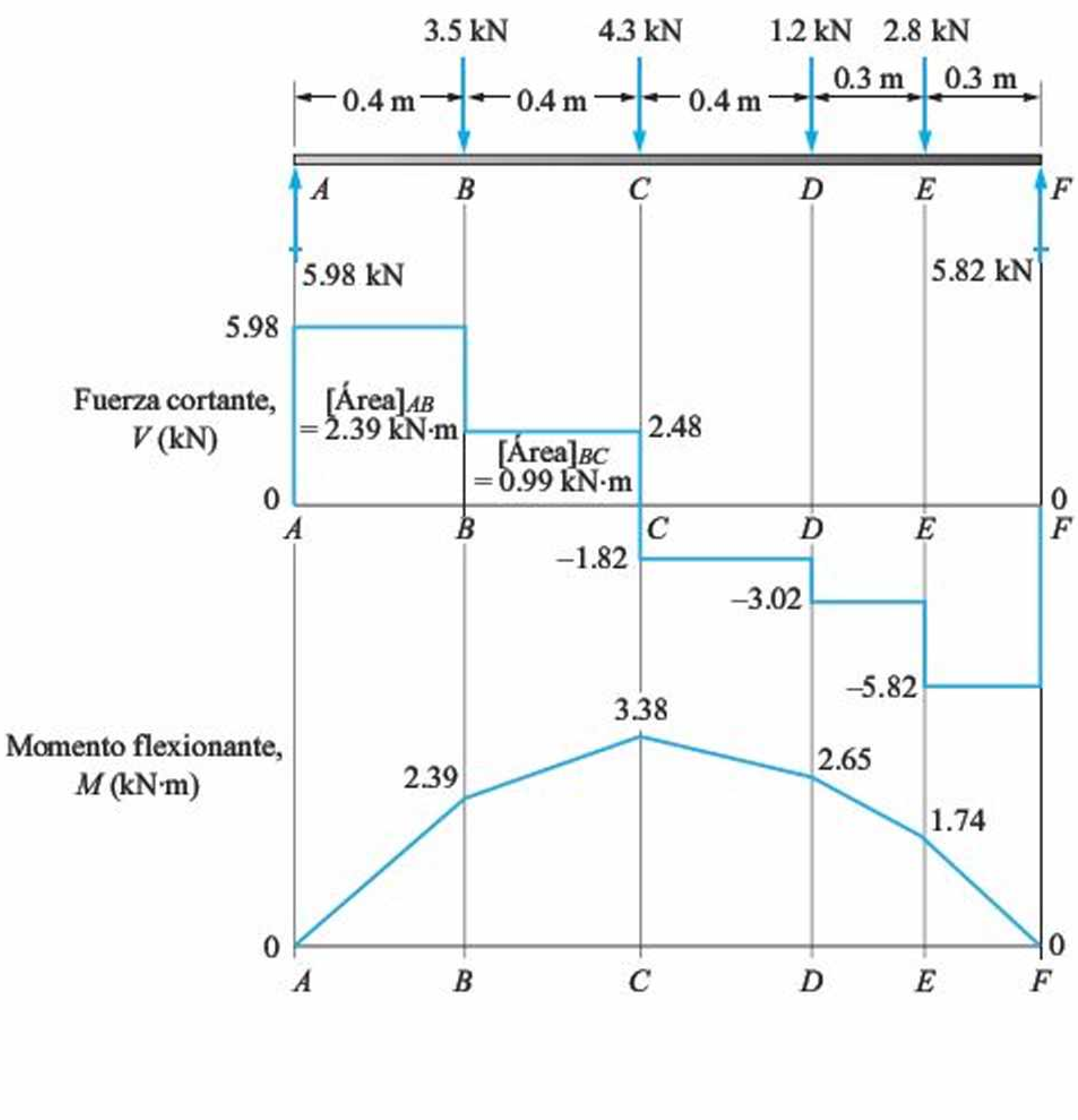
Comentario

Observe que los valores de las fuerzas cortantes en puntos clave se muestran en el diagrama en dichos puntos.

Resultados de la parte C

El diagrama del momento flexionante se traza directamente bajo el diagrama de fuerza cortante, de modo que la relación entre puntos del diagrama de carga de la viga puedan relacionarse a ambos. Vea la figura 5–25. Es conveniente prolongar las líneas verticales desde los puntos de interés de la viga (puntos A a F en este ejemplo) hacia abajo hasta el eje horizontal del diagrama de momento flexionante.

FIGURA 5–25
Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.



Es más conveniente comenzar a trazar el diagrama de momento flexionante en el extremo izquierdo de la viga y proseguir hacia la derecha, considerando cada segmento por separado. En el caso de vigas como ésta sometida a sólo cargas concentradas, los segmentos deberán seleccionarse como aquellos para los cuales la fuerza cortante es constante. En este caso, los segmentos son AB, BC, CD, DE y EF.

En el punto A: Utilizamos la regla de que el momento es cero en los extremos de una viga simplemente apoyada. Es decir, $M_A = 0$.

Punto B: En éste y cada punto subsiguiente, aplicamos la regla del área. El patrón general es

$$M_B = M_A[\text{Área}]_{AB}$$

donde $[\text{Área}]_{AB}$ = área bajo la curva de fuerza cortante entre A y B. Con datos tomados de la curva de fuerza cortante,

$$[\text{Área}]_{AB} = V_{AB} \times \text{ancho del segmento } AB$$

Pero, $V_{AB} = 5.98$ kN a lo largo del segmento AB de 0.40 m de largo. Entonces, como se muestra en la figura 5–25,

$$[\text{Área}]_{AB} = 5.98 \text{ kN}(0.40 \text{ m}) = 2.39 \text{ kN·m}$$

Por último,

$$M_B = M_A + [\text{Área}]_{AB} = 0 + 2.39 \text{ kN·m} = 2.39 \text{ kN·m}$$

Este valor se localiza en el punto B en el diagrama de momento flexionante. En seguida se traza una línea recta de M_A a M_B porque la fuerza cortante es constante a lo largo del segmento. Los valores del momento flexionante en C, D, E y F se encuentran de la misma manera. Consulte la figura 5–25.

Punto C:

$$M_C = M_B + [\text{Área}]_{BC}$$
$$[\text{Área}]_{BC} = 2.48 \text{ kN}(0.40 \text{ m}) = 0.99 \text{ kN·m}$$
$$M_C = 2.39 \text{ kN·m} + 0.99 \text{ kN·m} = 3.38 \text{ kN·m}$$

Punto D:

$$M_D = M_C + [\text{Área}]_{CD}$$
$$[\text{Área}]_{CD} = -1.82 \text{ kN}(0.40 \text{ m}) = -0.73 \text{ kN·m}$$
$$M_D = 3.38 \text{ kN·m} - 0.73 \text{ kN·m} = 2.65 \text{ kN·m}$$

Observe que el $[\text{Área}]_{CD}$ es negativa porque queda debajo del eje.

Punto E:

$$M_E = M_D + [\text{Área}]_{DE}$$
$$[\text{Área}]_{DE} = -3.02 \text{ kN}(0.30 \text{ m}) = -0.91 \text{ kN·m}$$
$$M_E = 2.65 \text{ kN·m} - 0.91 \text{ kN·m} = 1.74 \text{ kN·m}$$

Punto F:

$$M_F = M_E + [\text{Área}]_{EF}$$

$$[\text{Área}]_{EF} = -5.82 \text{ kN}(0.30 \text{ m}) = -1.74 \text{ kN·m}$$

$$M_F = 1.74 \text{ kN·m} - 1.74 \text{ kN·m} = 0 \text{ kN·m}$$

Resumen y Comentario

Los valores del momento flexionante se muestran en el diagrama en sus puntos respectivos, de tal suerte que los usuarios puedan ver los valores relativos. El hecho de que $M_T = 0$ comprueba los cálculos porque la regla para vigas simplemente apoyadas establece que el momento flexionante en F debe ser cero. El objetivo de trazar el diagrama de momento flexionante con frecuencia es localizar el punto donde ocurre el momento flexionante máximo. En este caso vemos que $M_C = 3.38$ kN es el valor máximo.

Problema de ejemplo 5–6

Trace los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante completos de la viga mostrada en la figura 5–26.

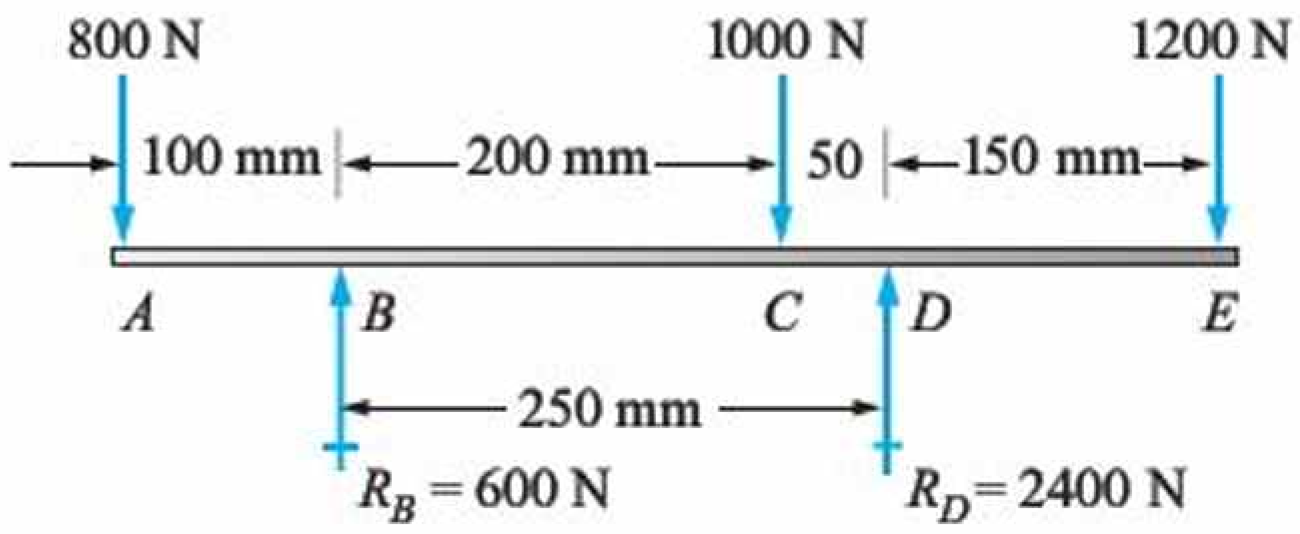


FIGURA 5–26
Carga sobre una viga.

Solución

Objetivo: Trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante completos.

Datos: Las cargas que actúan en la viga de la figura 5–26. En una viga saliente sometida a cargas concentradas. Esta es la misma viga para la cual se calcularon las fuerzas de reacción en el problema de ejemplo 5–3. Los resultados de la parte A de las indicaciones se muestran en la figura 5–26. $R_B = 600$ N, $R_D = 2400$ N.

Análisis: Se utilizarán las *indicaciones para trazar diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de vigas sometidas a sólo cargas concentradas*.

Resultados: Se utilizaron los pasos de la parte B de las indicaciones para preparar el diagrama de fuerza cortante terminado mostrado en la figura 5–27. El proceso se escribe a continuación.

Punto A: La fuerza aplicada dirigida hacia debajo de 800 N hace que el diagrama de fuerza cortante caiga de inmediato a –800 N. Es decir, $V_A = -800$ N.

Entre A y B: En este segmento no hay cargas aplicadas. Entonces $V_{A-B} = -800$ N.

Punto B: La fuerza de reacción dirigida hacia arriba actúa en B. Entonces

$$V_B = -800 \text{ N} + 600 \text{ N} = -200 \text{ N}$$

Entre B y C: En este segmento no hay cargas aplicadas. Entonces $V_{B-C} = -200$ N.

Punto C: La fuerza aplicada dirigida hacia debajo de 1000 N hace que el diagrama de fuerza cortante se reduzca de inmediato en esa cantidad. Entonces,

$$V_C = 200 \text{ N} - 1000 \text{ N} = -1200 \text{ N}$$

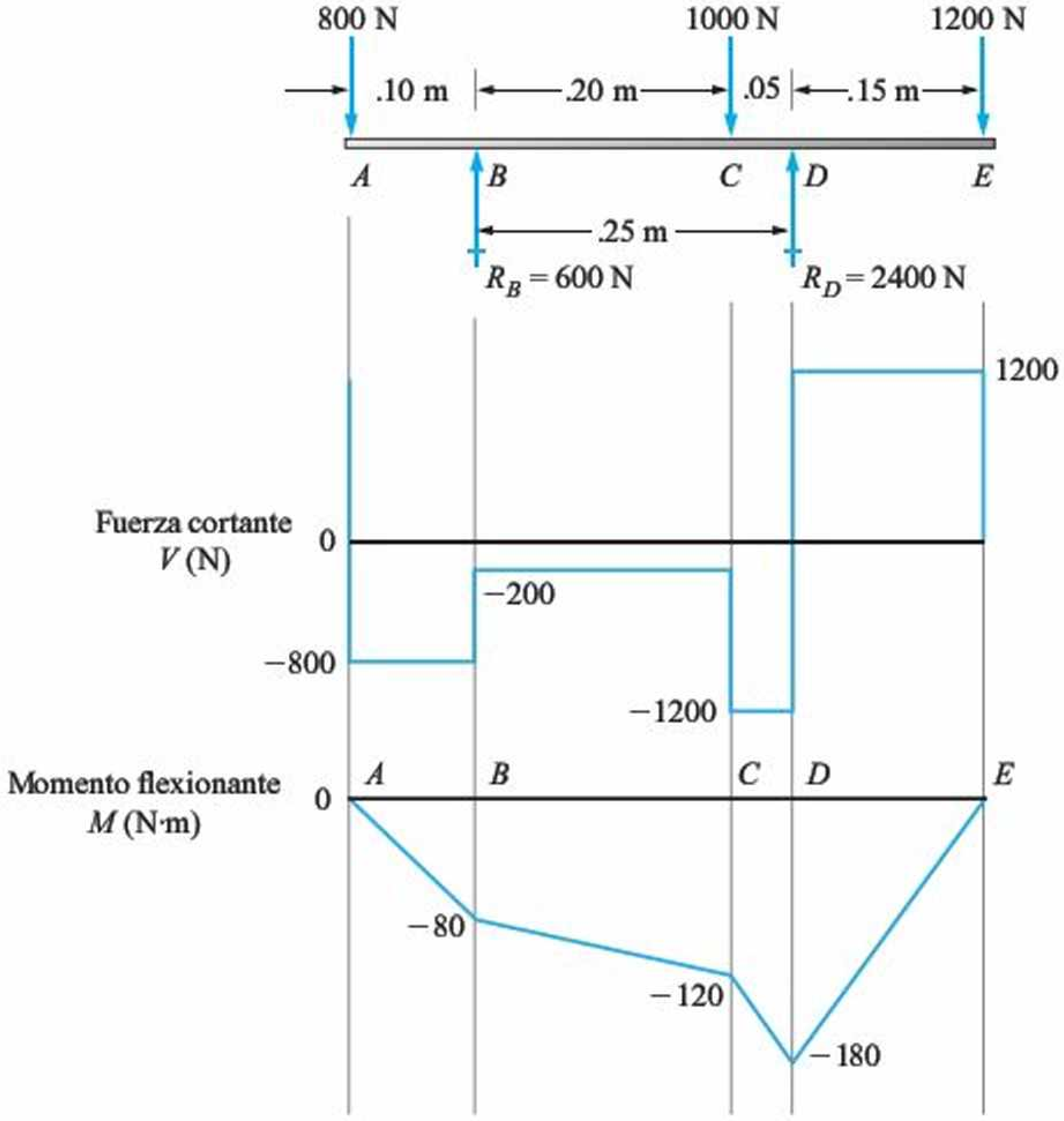


FIGURA 5–27 Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para el ejemplo 5–6.

Entre C y D: En este segmento no hay cargas aplicadas. Entonces $V_{C\text{–}D} = -1200$ N.

Punto D: La fuerza de reacción de 2400 N dirigida hacia arriba actúa en D. Entonces

$$V_D = -1200 \text{ N} + 2400 \text{ N} = +1200 \text{ N}$$

Entre D y E: En este segmento no hay cargas aplicadas. Entonces $V_{D-E} = +1200$ N.

Punto E: La fuerza aplicada de 1200 N dirigida hacia abajo hace que el diagrama de fuerza cortante se reduzca de inmediato en esa cantidad. Entonces,

$$V_E = 1200 \text{ N} - 1200 \text{ N} = 0 \text{ N}$$

Se utilizaron los pasos de la parte C de las indicaciones para preparar el diagrama de momento flexionante completo terminado, mostrado en la figura 5–27. El proceso se describe a continuación.

En el punto A: Éste es un extremo libre de la viga. Por consiguiente, $M_A = 0$ N·m.

Aplicamos la regla del área por cada punto subsiguiente de la viga.

Punto B: $M_B = M_A + [\text{Área}]_{AB} = 0 + (-800 \text{ N})(0.10 \text{ m}) = -80 \text{ N·m}$

Punto C: $M_C = M_B + [\text{Área}]_{BC} = -80 \text{ N·m} + (-200 \text{ N})(0.20 \text{ m}) = -120 \text{ N·m}$

Punto D: $M_D = M_C + [\text{Área}]_{CD} = -120 \text{ N·m} + (-1200 \text{ N})(0.05 \text{ m}) = -180 \text{ N·m}$

Punto E: $M_E = M_D + [\text{Área}]_{DE} = -180 \text{ N·m} + (1200 \text{ N})(0.15 \text{ m}) = 0 \text{ N·m}$

Resumen y Comentario

Cuando buscamos el momento flexionante máximo, en realidad buscamos el valor absoluto máximo. El momento flexionante máximo es de –180 N·m en el punto D. Observe que el dia-grama de momento flexionante resultante en este problema queda debajo del eje. Esto

indica la *deflexión negativa* por lo que la deflexión de la viga sería cóncava hacia abajo. Las fuerzas en A y E en los extremos salientes son la causa. Compare este resultado con el del Problema de ejemplo 5–5 donde todo el diagrama de momento flexionante queda arriba del eje, lo que indica un momento flexionante positivo. La deflexión de esa viga sería cóncava hacia arriba.

5–6 FUERZAS CORTANTES Y MOMENTOS FLEXIONANTES EN EL CASO DE CARGAS DISTRIBUIDAS

A continuación consideramos vigas que soportan cargas uniformemente distribuidas y las analizaremos para determinar la fuerza cortante y el momento flexionante que existen en una parte cualquiera de la viga. Utilicemos el método del diagrama de cuerpo libre similar al utilizado en la sección 5–5 para vigas con sólo cargas concentradas.

La figura 5–28 muestra una viga simplemente apoyada sometida a una carga uniformemente distribuida de 1500 N/m a lo largo de un segmento de 6 m de longitud de A a B. El segmento de 3 m de longitud de B a C no soporta carga. Se utilizó un método similar al del Problema de ejemplo 5–2 para determinar la magnitud de las fuerzas de reacción en A y C, como se muestra. Deberá poner prueba su habilidad de verificar estos valores.

Ahora consulte la figura 5–29, que incluye cuatro diagramas de cuerpo libre de partes de la viga en incrementos de longitud de 2.0 m. Se podría haber elegido cualquier incremento.

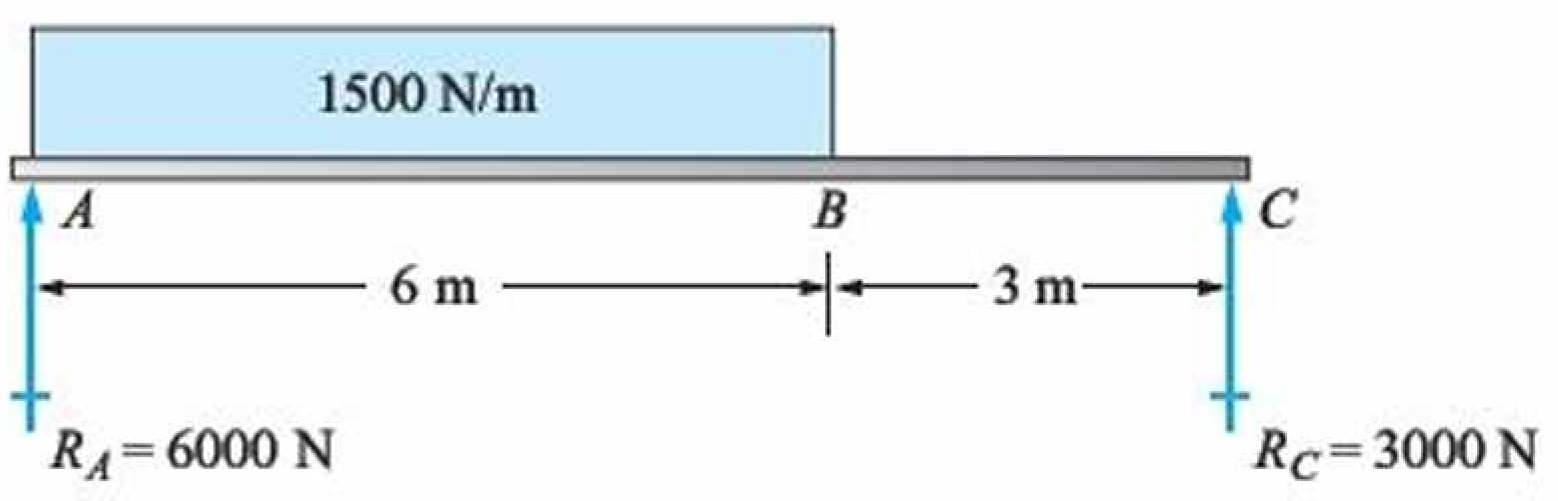


FIGURA 5–28 Carga sobre una viga.

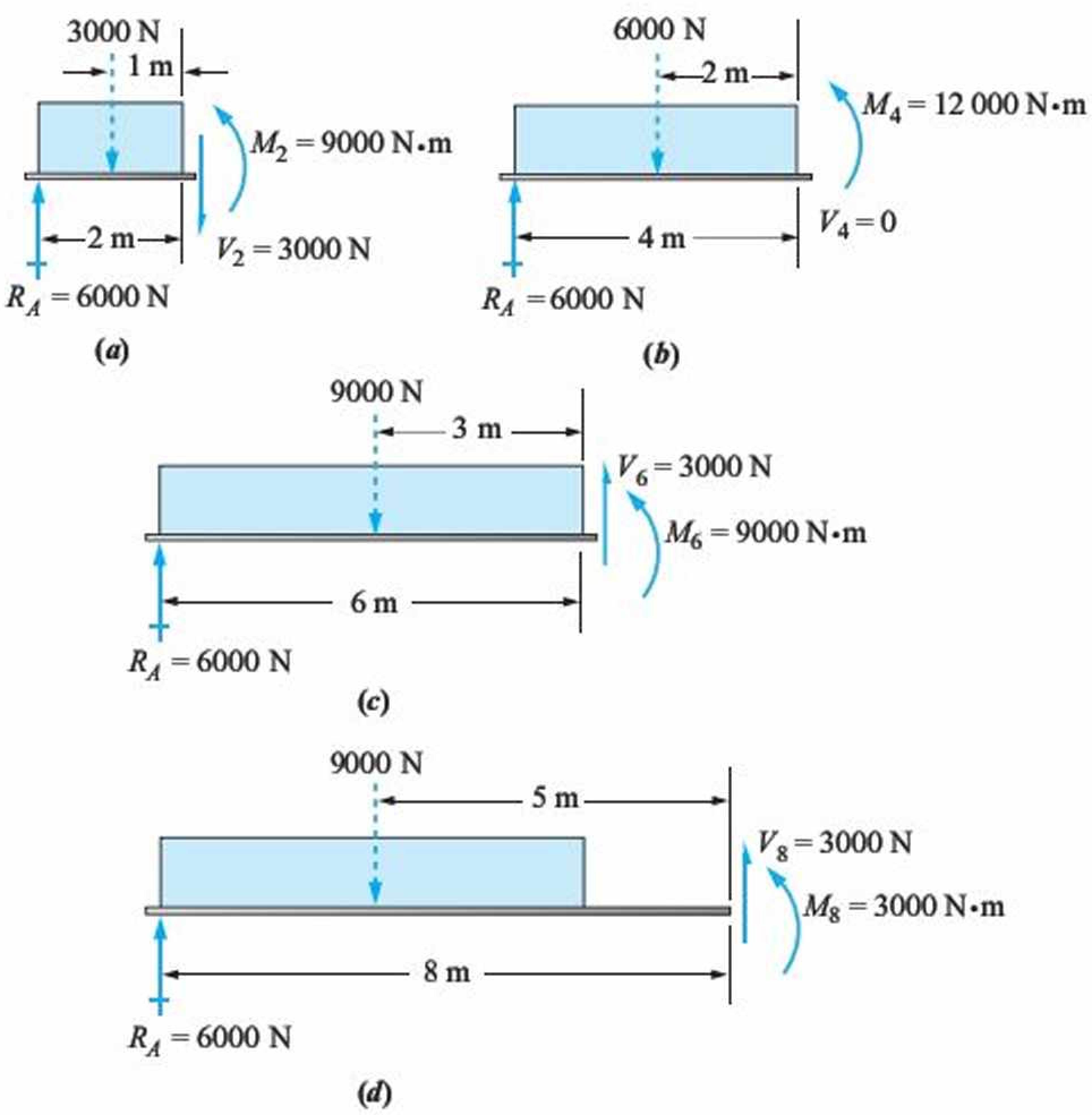


FIGURA 5–29 Diagramas de cuerpo libre utilizados para determinar fuerzas cortantes y momentos flexionantes.

Los incrementos de 2.0 proporcionan un número suficiente de puntos para trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante por medio de un método similar al utilizado en secciones precedentes. Pero la forma de la curva será diferente a causa de la carga distribuida. Continúe con el desarrollo de los valores de la fuerza cortante y el momento flexionante. En seguida generalizamos el método de producir los diagramas directamente sin utilizar los diagramas de cuerpo libre.

Parte (a) de la figura 5–29: Éste es el diagrama de cuerpo libre del primer segmento de 2.0 m. La fuerza de reacción, $R_A = 6000$ N, actúa en el extremo izquierdo de la viga, punto A. En seguida, determinamos que el segmento de 2.0 de la carga distribuida de 1500 N/m ejerce una fuerza resultante de 3000 N y se puede visualizar que actúa a la mitad del segmento. Entonces,

En A: Fuerza cortante $= V_A = 6000$ N.
Momento flexionante $= M_A = 0$.

***En la sección cortada*:** $V_2 = 6000\text{ N} - 3000\text{ N} = 3000\text{ N}$ (dirigida hacia abajo)
$M_2 = (6000\text{ N})(2.0\text{ m}) - (3000\text{ N})(1.0\text{ m}) = 9000\text{ N·m}$
en sentido contrario al de las manecillas del reloj

El subíndice 2 indica que la sección cortada está a 2.0 m del punto A.

Parte (b) de la figura 5–29: Éste es el segmento de 4.0 m de longitud. La resultante de la carga distribuida es de 6000 N y actúa a la mitad del segmento. Entonces,

En la sección cortada: $V_4 = 6000\text{ N} - 6000\text{ N} = 0$
$M_4 = (6000\text{ N})(4.0\text{ m}) - (6000\text{ N})(2.0\text{ m}) = 12\,000\text{ N·m}$
en sentido contrario al de las manecillas del reloj

Parte (c) de la figura 5–29: En este segmento de 6.0 m de longitud actúa una carga resultante de 9000 N a 3.0 m de A. Ésta es toda la carga distribuida.

***En la sección cortada*:** $V_6 = 6000\text{ N} - 9000\text{ N} = -3000\text{ N}$ (dirigida hacia arriba)
$M_6 = (6000\text{ N})(6.0\text{ m}) - (9000\text{ N})(3.0\text{ m}) = 9000\text{ N·m}$
en sentido contrario al de las manecillas del reloj

Parte (d) de la figura 5–29: Este segmento de 8.0 m de la viga soporta toda la carga distribuida cuya resultante es de 9000 N, que actúa a 3.0 de A como antes. En el segmento final no actúa ninguna carga.

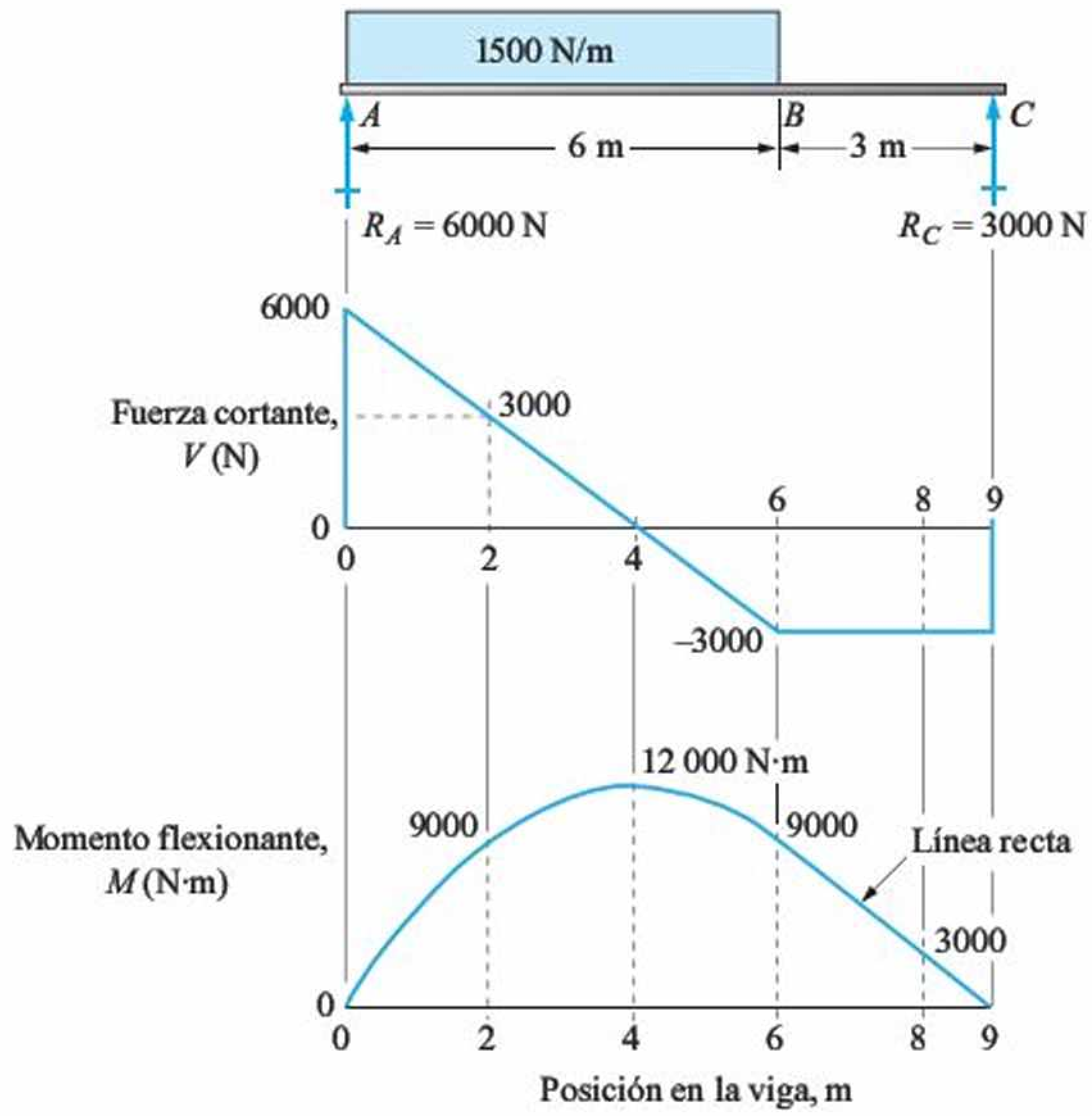
***En la sección cortada*:** $V_8 = 6000\text{ N} - 9000\text{ N} = -3000\text{ N}$ (dirigida hacia arriba)
$M_8 = (6000\text{ N})(8.0\text{ m}) - (9000\text{ N})(5.0\text{ m}) = 3000\text{ N·m}$
en sentido contrario al de las manecillas del reloj

Recuerde que el momento flexionante en C en el extremo derecho de la viga es cero.

Ahora podemos graficar estos puntos, como se muestra en la figura 5–30. Podemos hacer algunas observaciones con respecto a la forma de las curvas de fuerza cortante y momento flexionante en la parte de la viga que soporta la carga distribuida.

- La fuerza cortante varía linealmente con la posición. La pendiente de la línea recta es igual a la carga por unidad de longitud de la carga distribuida. Es decir, la pendientes es –1500 N/m. Observe que cada segmento de 1.0 m de longitud de la viga soporta una carga de 1500 N.
- El momento flexionante se incrementa a lo largo de la curva a lo largo del primer segmento de 4.0 de la viga, en tanto que la fuerza cortante es positiva. Luego se reduce a lo largo de una curva en el siguiente segmento de 2.0 donde la fuerza cortante es negativa.

FIGURA 5–30
Diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante.



Estas observaciones son compatibles con las indicaciones para diagramas de vigas de la sección 5–6. Podríamos haber utilizado la *regla del área* para producir los valores de momento flexionante en cualquier punto. Consulte la regla 4b en la sección C de las indicaciones. Por ejemplo, considere el primer segmento de 4.0 m de la viga. La fuerza cortante de 6000 N es *A* y se reduce a cero en el punto correspondiente a 4.0 m. El área bajo esa parte de la curva es positiva, sobre el eje del diagrama de fuerza cortante. Por consiguiente, el momento flexionante se incrementará desde cero en el extremo libre de la viga en *A* en una cantidad igual al área del triángulo de 6000 N de altura y 4.0 m de longitud. Es decir,

$$M_4 = M_A + [\text{Área}]_{0-4} = 0 + (1/2)(4.0 \text{ m})(6000 \text{ N}) = 12\,000 \text{ N·m}$$

Podríamos haber utilizado la regla de área para determinar el valor del momento flexionante en *B* donde termina la carga distribuida. Llamamos a este valor M_6. Observe que la fuerza cortante se reduce desde cero hasta –3000 N a lo largo de esta longitud. En ese caso el momento flexionante en *B* es

$$M_B = M_6 = M_4 + [\text{Área}]_{4-6} = 12\,000 \text{ N·m} + (1/2 \text{ N})(2.0 \text{ m})(-3000 \text{ N}) = 9000 \text{ N·m}$$

Se puede trazar el segmento final de los diagramas de la viga siguiendo las indicaciones antes dadas porque no hay cargas aplicadas a lo largo de los últimos 3.0 m de la viga. La fuerza cortante es un valor constante de –3000 N. Por consiguiente, el momento flexionante se traza como una línea recta con una pendiente constante negativa. El cambio del momento flexionante en el punto 9 es,

$$M_9 = M_6 + [\text{Área}]_{6-9} = 9000 \text{ N·m} + (-3000 \text{ N})(3.0 \text{ m}) = 0$$

A continuación establecemos nuevas reglas que se anexarán a las indicaciones para trazar diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.

Siempre que actúan cargas uniformemente distribuidas en una viga:

1. A lo largo de una viga sometida a una carga uniformemente distribuida, la curva de la fuerza cortante es una línea recta de pendiente negativa igual a la cantidad de carga por unidad de longitud.
2. El cambio de la fuerza cortante entre dos puntos cualquiera de una viga donde actúa una carga uniformemente distribuida es igual a la resultante de la carga distribuida a lo largo de dicha longitud. Es decir, el cambio de la fuerza cortante es:

$$\Delta V = \text{(carga por unidad de longitud)(longitud del segmento)}$$

3. A lo largo de una viga que soporta una carga uniformemente distribuida, el momento flexionante se traza como una línea curva donde su pendiente en cualquier punto es igual a la magnitud de la fuerza cortante en dicho punto.
4. El cambio del momento flexionante entre dos puntos cualquiera de una viga es igual al área bajo la curva de fuerza cortante entre esos dos puntos.

Analicemos la regla 3, que define la pendiente de la curva de momento flexionante. Remítase de nuevo a la figura 5–30 y observe la forma de la curva del momento flexionante.

Comenzando en el extremo izquierdo de la viga, el punto A, observamos que la fuerza cortante en dicho punto es de 6000 N, el valor máximo en la viga. La regla 3 establece que la curva del momento flexionante deberá tener una pendiente positiva muy alta en dicho punto, y que así se traza la curva.

Ahora consideremos el punto 2, a 2.0 m de A. La magnitud de la fuerza cortante se redujo a 3000 N. Por consiguiente, la pendiente de la curva del momento flexionante deberá ser menos inclinada pero aún positiva. De hecho, si avanzamos del punto A al punto 4, la pendiente de la curva del momento flexionante deberá tener un valor positivo elevado y reducirse gradualmente a cero en el punto 4 donde la fuerza cortante cruza el eje. Recuerde, una línea tangente a un punto de una curva de pendiente cero es horizontal. Esto identifica la cresta de la curva, y el valor del momento flexionante allí es un valor máximo en ese segmento particular. Esta lógica ilustra la regla 4c en la sección C de las indicaciones de antes. *El momento flexionante máximo ocurre en un punto donde la fuerza cortante cruza su eje cero.* Es necesario que determine el punto donde la curva de la fuerza cortante cruza el eje. El ejemplo siguiente ilustra el proceso.

Problema de ejemplo 5–7

Trace los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante completos de la viga mostrada en la figura 5–31.

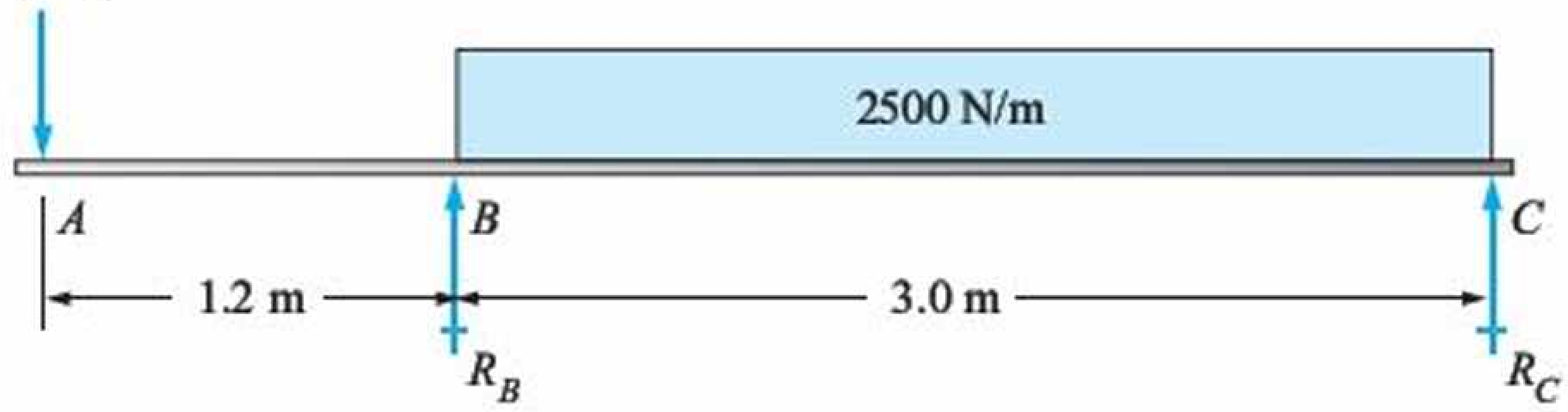


FIGURA 5–31 Carga sobre una viga para el Problema de ejemplo 5–7.

Solución

Objetivo: Trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante completos.

Datos: Las cargas que actúan en la viga de la figura 5–31. La viga tiene una carga distribuida a lo largo del segmento entre los dos apoyos.

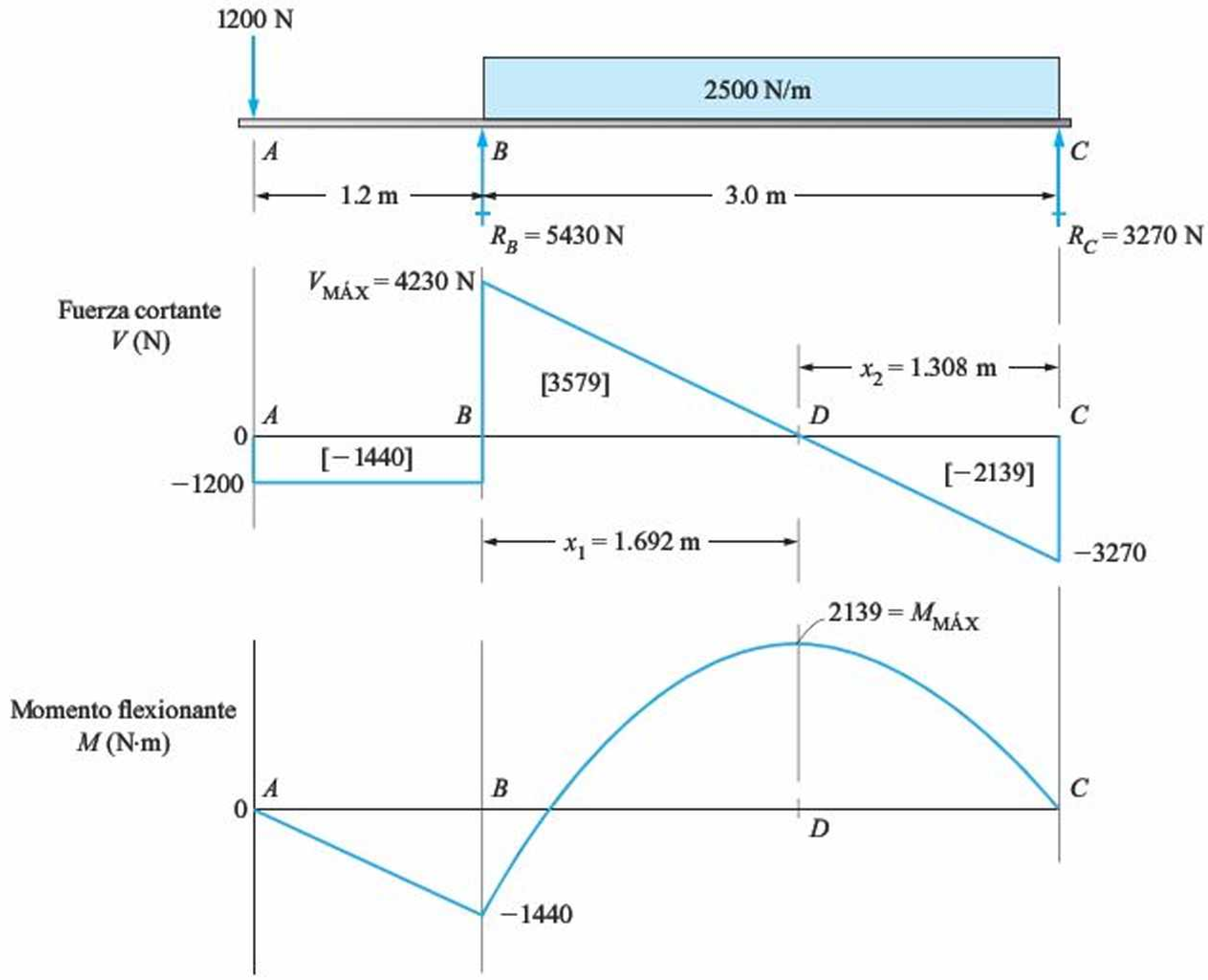


FIGURA 5–32 Resultados del problema de ejemplo 5–7.

Análisis Utilizaremos las indicaciones para trazar diagramas de vigas presentados por primera vez en la sección 5–5 y suplementadas con indicaciones adicionales para cargas distribuidas desarrolladas en esta sección.

Resultados Los diagramas de viga terminados se muestran en la figura 5–32. Los detalles se explican a continuación.

Reacciones en los apoyos: La resultante de la carga distribuida es

$$(2500 \text{ N/m})(3.0) = 7500 \text{ N}$$

La resultante actúa a la mitad de la carga distribuida, a 1.5 m de B.

$$\sum M_B = 0 = (7500 \text{ N})(1.5 \text{ m}) - (1200 \text{ N})(1.2 \text{ m}) - R_C(3.0 \text{ m})$$
$$R_C = 3270 \text{ N dirigida hacia arriba}$$
$$\sum M_C = 0 = (7500 \text{ N})(1.5 \text{ m}) + (1200 \text{ N})(4.2 \text{ m}) - R_B(3.0 \text{ m})$$
$$R_B = 5430 \text{ N dirigida hacia arriba}$$

***Diagrama de fuerza cortante*:** En el segmento de A a B actúa sólo una carga concentrada. La fuerza cortante es una constante negativa de 1200 N hasta el punto un poco antes de la aplicación de la fuerza de reacción en B.

En B: La reacción en B hace que se eleve la fuerza cortante a

$$V_B = -1200 \text{ N} + 5430 \text{ N} = 4230 \text{ N}$$

***Entre B y C*:** La curva de la fuerza cortante se reduce 2500 N por cada 1.0 m, un total de 7500 N en el segmento de 3.0 m. Por consiguiente,

$$V_C = V_B = -7500 \text{ N} = 4230 \text{ N} - 7500 \text{ N} = -3270 \text{ N}$$

La curva de la fuerza cortante es una línea recta de pendiente negativa constante de –2500 N/m, igual a la cantidad de carga por unidad de longitud aplicada a la viga.

***En C*:** La fuerza de reacción en C, 3270 N, regresa a la curva de fuerza cortante a cero en *C*.

En D donde la curva de la fuerza cortante cruza el eje: Es necesario determinar la ubicación del punto *D* porque en éste ocurre el momento flexionante máximo. La distancia de *B* a *D* se llama x_1 en la figura. Ésta es la distancia requerida para que la fuerza cortante se reduzca de $V_B = 4230$ N a cero.

Nos valemos del hecho de que la curva se reduce 2500 N por cada 1.0 de distancia a *B* de forma lineal. Definamos la magnitud de la carga distribuida como *w*. Entonces,

$$w = 2500 \text{ N/m}$$

Podemos para x_1 como sigue

$$x_1 = \frac{V_B}{w} = \frac{4230 \text{ N}}{2500 \text{ N/m}} = 1.692 \text{ m}$$

Es apropiado determinar la distancia de *D* a *C* en este punto, porque se requerirá en los cálculos del momento flexionante. Ésta se llama x_2 en la figura.

$$x_2 = 3.0 \text{ m} - x_1 = 3.0 \text{ m} - 1.692 \text{ m} = 1.308 \text{ m}$$

Esto completa el desarrollo de la curva de fuerza cortante.

***Diagrama de momento flexionante*:**

***Entre A y B*:** El momento en *A* es cero porque ocurre en el extremo de la viga. El cambio del momento de *A* a *B* es igual al área rectangular bajo la curva de la fuerza cortante entre *A* y *B*.

$$M_B = M_A + [\text{Área}]_{A-B} = 0 + (-1200 \text{ N})(1.2 \text{ m}) = -1440 \text{ N}\cdot\text{m}$$

La curva es una línea recta porque el valor de la fuerza cortante es constante en el segmento de *A* a *B*.

Entre B y D: Tenemos que determinar el momento flexionante en *D* porque ése será el valor máximo que ocurrirá en la viga. El cambio del momento en el segmento de *B* a *D* es igual al área triangular bajo la curva de la fuerza cortante entre *B* y *D*. Pero el valor del momento en *B* es de –1440 N·m. Por consiguiente, si la base del triángulo es $x = 1.692$ m.

$$M_D = M_B + [\text{Área}]_{B-D} = -1440 \text{ N}\cdot\text{m} + (1/2)(4230 \text{ N})(1.692 \text{ m}) = 2139 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Estudie con cuidado la forma de la curva. En *B* la fuerza cortante tiene un valor positivo elevado. Luego se reduce a cero en *D*. En seguida la curva se inicia en *B* con una pendiente positiva elevada indicada por la tangente a la curva. La pendiente se reduce de forma constante hasta que se vuelve cero (horizontal) en *D*.

***Entre D y C*:** El área triangular bajo la curva de la fuerza cortante entre D y C es el cambio del momento flexionante entre esos dos puntos. Luego, si la altura del triángulo es de –3270 N y la base es $x_2 = 1.308$ m,

$$M_C = M_D + [\text{Área}]_{D\text{–}C} = 2139\ \text{N·m} + (1/2)(-3270\ \text{N})(1.308\ \text{m}) = 0\ \text{N·m}$$

En realidad ésta es una comprobación de los cálculos porque el momento flexionante en C, un extremo libre de la viga simplemente apoyada, *debe* ser cero. Si se encuentra cualquier otro resultado, es que se cometió un error en los cálculos.

La forma de la curva de D a C deberá ser estudiada nuevamente con cuidado. En el punto D el valor de la fuerza cortante es cero, y, por lo tanto, la pendiente de la curva del momento flexionante en D es cero. Por consiguiente, continúa desde el extremo a partir del extremo de la curva previa trazada de B a D. Entonces la fuerza cortante se vuelve negativa y cada vez se vuelve más negativa conforme avanza al punto C. La curva es cóncava hacia abajo y termina con una pendiente negativa bastante inclinada.

Esto completa el desarrollo del diagrama del momento flexionante.

Comentario

En la figura 5–32 deberá observar algunos datos clave. Observará los valores máximos de la fuerza cortante y el momento flexionante y dónde ocurren. En resumen, entonces,

Fuerza cortante máxima: $V_B = 4230$ N

localizada en el punto B en el apoyo izquierdo.

Momento flexionante máximo: $M_D = 2139$ N·m

localizado a 1.692 m del apoyo izquierdo.

Para algunos tipos de viga, es importante conocer tanto los valores positivos máximos como los negativos máximos del momento flexionante, porque el material o el perfil de la viga pueden funcionar de forma diferente con cada tipo de momento. En esta viga,

Momento flexionante negativo máximo: $M_B = -1440$ N·m

5–7 FORMAS GENERALES ENCONTRADAS EN DIAGRAMAS DE MOMENTO FLEXIONANTE

Es probable que requerirá práctica para que se vuelva experto en el trazo de diagramas de fuerza cortante y momento flexionante, y en la aplicación de las indicaciones descritas en las secciones 5–4 y 5–6. Una técnica útil es aprender las relaciones generales entre la forma de la curva del momento flexionante y la curva de la fuerza cortante en el mismo segmento de la viga.

La figura 5–33 permite visualizar esas relaciones. Una habilidad fundamental es aplicar correctamente la regla 4e en la sección incluida en el cuadro de texto sombreado de la sección 5–5. La indicación citada establece que:

La pendiente de la curva del momento flexionante en cualquier punto es igual a la magnitud de la fuerza cortante en dicho punto.

Hemos visto ejemplos de muchas de estas formas en segmentos de los diagramas de momento flexionante en las figuras 5–21, 5–25, 5–27, 5–30 y 5–32.

Por ejemplo, las formas de las partes 1 y 3 de la figura 5–33 aparecen en cualquier viga sometida a sólo cargas concentradas, como en las figuras 5–21, 5–25 y 5–27. Estas mismas formas se aplican a partes de vigas sometidas a sólo cargas concentradas, tales como el último segmento de la figura 5–30 y el primer segmento de la figura 5–32. En cada uno de estos casos, el valor de la fuerza cortante es constante y el resultado es una curva de momento flexionante de pendiente constante. Es decir, la curva del momento flexionante será una línea recta.

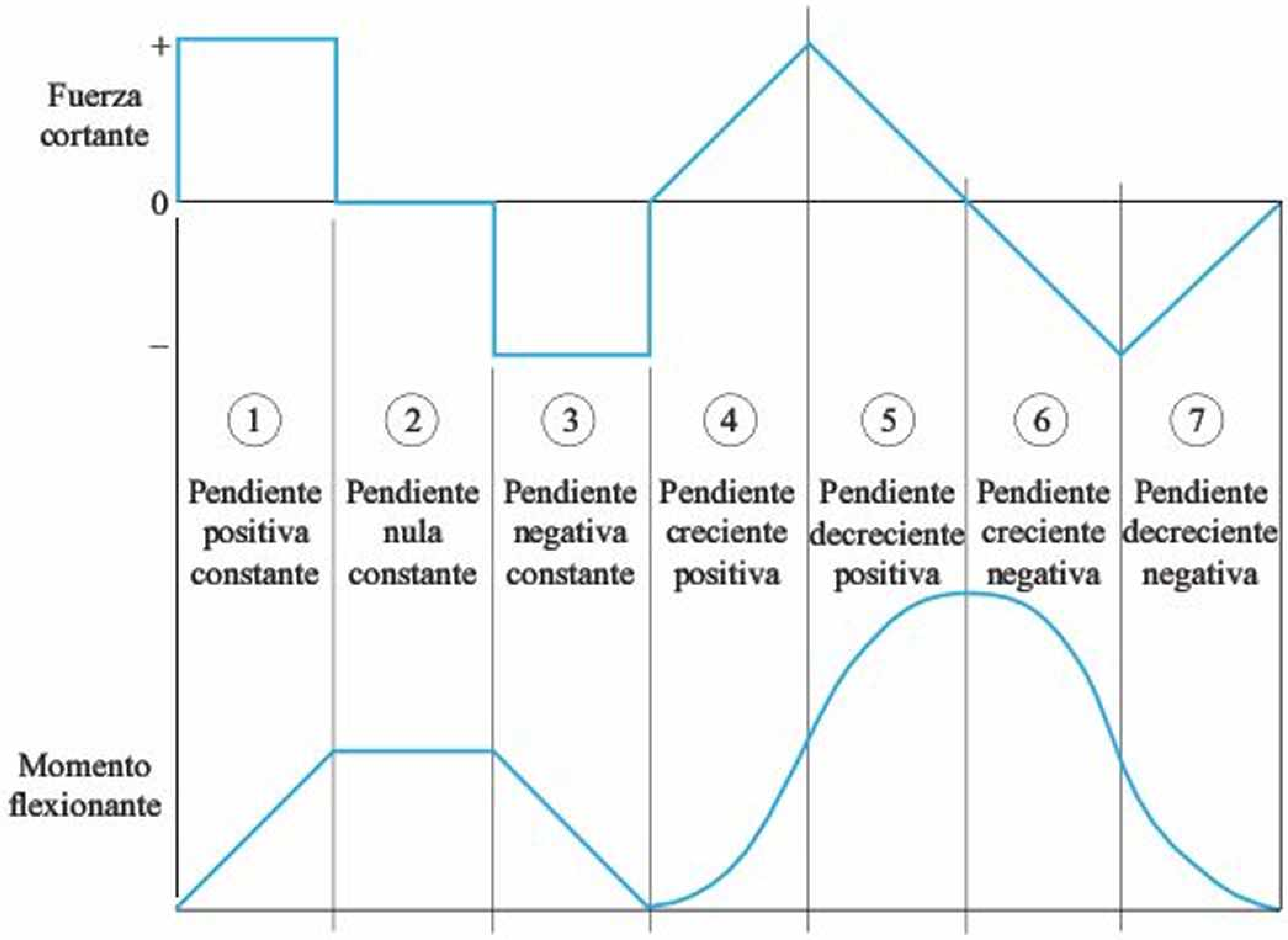


FIGURA 5–33
Formas generales de las curvas de momento en relación con las curvas de fuerza cortante correspondientes.

Las partes 4, 5, 6 y 7 de la figura 5–33 se aplican a segmentos de una viga sometida a cargas uniformemente distribuidas. Por ejemplo, los primeros 6 m de la viga en la figura 5–30 se parecen a las partes 5 y 6. Asimismo, en la figura 5–32, el segmento de 3.0 m entre los apoyos se parece a las partes 5 y 6. En cada caso la carga uniformemente distribuida reduce la fuerza cortante en una cantidad constante por unidad de longitud, y la curva de fuerza cortante se inicia con un valor positivo y continúa como una línea recta de pendiente negativa. El diagrama de momento flexionante correspondiente se inicia con una pendiente positiva bastante grande y luego se comba y adopta una forma cóncava hacia abajo, como se muestra en la parte 5. Si la curva de fuerza cortante cruza el eje cero, la curva de momento flexionante alcanza un valor máximo donde la pendiente es cero. Entonces, si la fuerza cortante continúa hacia la región negativa, como en la parte 6, la pendiente del momento flexionante correspondiente cada vez será más negativa.

En la mayoría de las aplicaciones, en los problemas incluidos en este libro, es adecuado trazar la forma general de las curvas de fuerza cortante y momento flexionante, e indicar las magnitudes en puntos clave de interés. En general éstos son los siguientes:

- puntos donde se aplican cargas concentradas
- puntos donde comienzan y terminan cargas distribuidas
- en cualquier punto donde pueda ocurrir un valor máximo o mínimo de fuerza cortante o momento flexionante.

5–8 FUERZAS CORTANTES Y MOMENTOS FLEXIONANTES EN VIGAS EN VOLADIZO

El tipo de apoyo de una viga en voladizo hace que el análisis de sus fuerzas cortantes y momentos flexionantes sea algo diferente del de vigas simplemente apoyadas. La diferencia más notable es que el apoyo de la viga es fijo y, por consiguiente, puede resistir momentos. Por eso, en el extremo fijo de la viga, el momento flexionante no es cero, como en las vigas simplemente apoyadas. De hecho, el momento flexionante en el extremo fijo de la viga por lo general es el *máximo*.

Considere la viga en voladizo mostrada en la figura 5–34. En el problema de ejemplo 5–4 se demostró que las reacciones en el apoyo A son una fuerza vertical $R_A = 64$ kN y un momento en sentido contrario al de las manecillas del reloj $M_A = 70$ kN·m. Estos valores son iguales a los valores de la fuerza cortante y el momento flexionante en el extremo izquierdo de la viga. De acuerdo con la convención, la fuerza de reacción dirigida hacia arriba, R_A, es positiva y el

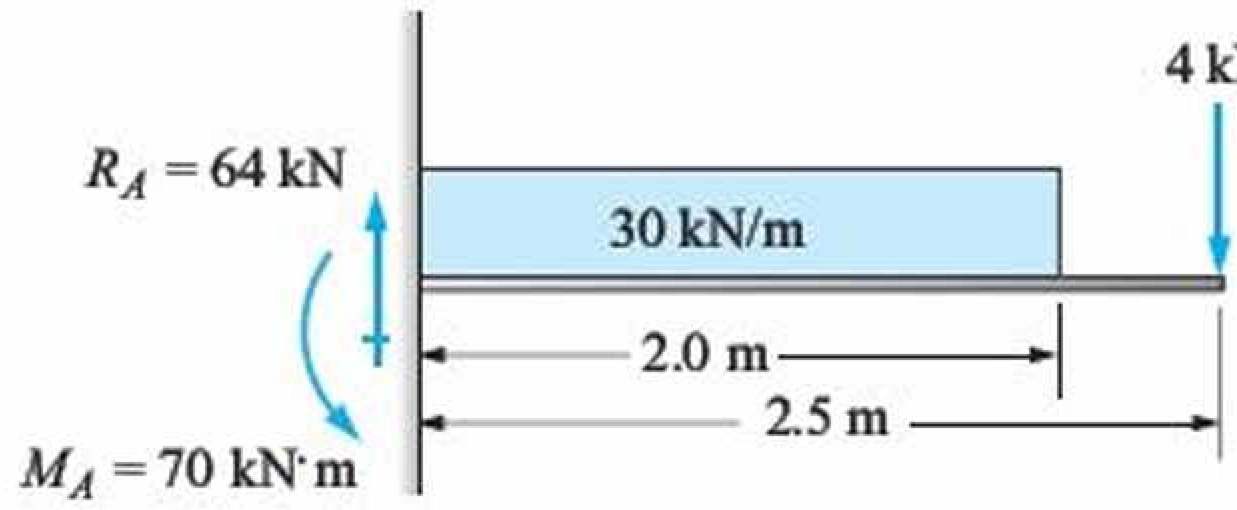


FIGURA 5–34
Carga sobre una viga y las reacciones correspondientes.

momento M_A en sentido contrario al de las manecillas del reloj es negativo, y así se obtienen los valores iniciales de los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante mostrados en la figura 5–35. Las reglas desarrolladas con anterioridad en relación con los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante se pueden utilizar entonces para completar los diagramas.

La fuerza cortante se reduce en forma de línea recta de 64 kN a 4 kN en el intervalo entre A y B. Observe que el cambio de la fuerza cortante es igual a la cantidad de la carga distribuida, 60 kN. La fuerza cortante permanece constante entre B y C, donde no hay cargas aplicadas. La carga de 4 kN en C regresa la curva a cero.

El diagrama de momento flexionante se inicia en –70 kN·m debido al momento de reacción M_A. Entre los puntos A y B la pendiente de la curva es positiva decreciente (tipo 5 en la figura 5–33). El cambio del momento entre A y B es igual al área bajo la curva de la fuerza cortante entre A y B. El área es una combinación de un rectángulo y un triángulo.

$$[\text{Área}]_{A-B} = 4\text{ kN (2 m)} + \frac{1}{2}(60\text{ kN})(2\text{ m}) = 68\text{ kN}\cdot\text{m}$$

Por lo tanto, el momento en B es

$$M_B = M_A + [\text{Área}]_{A-B} = -70\text{ kN}\cdot\text{m} + 68\text{ kN}\cdot\text{m} = -2\text{ kN}\cdot\text{m}$$

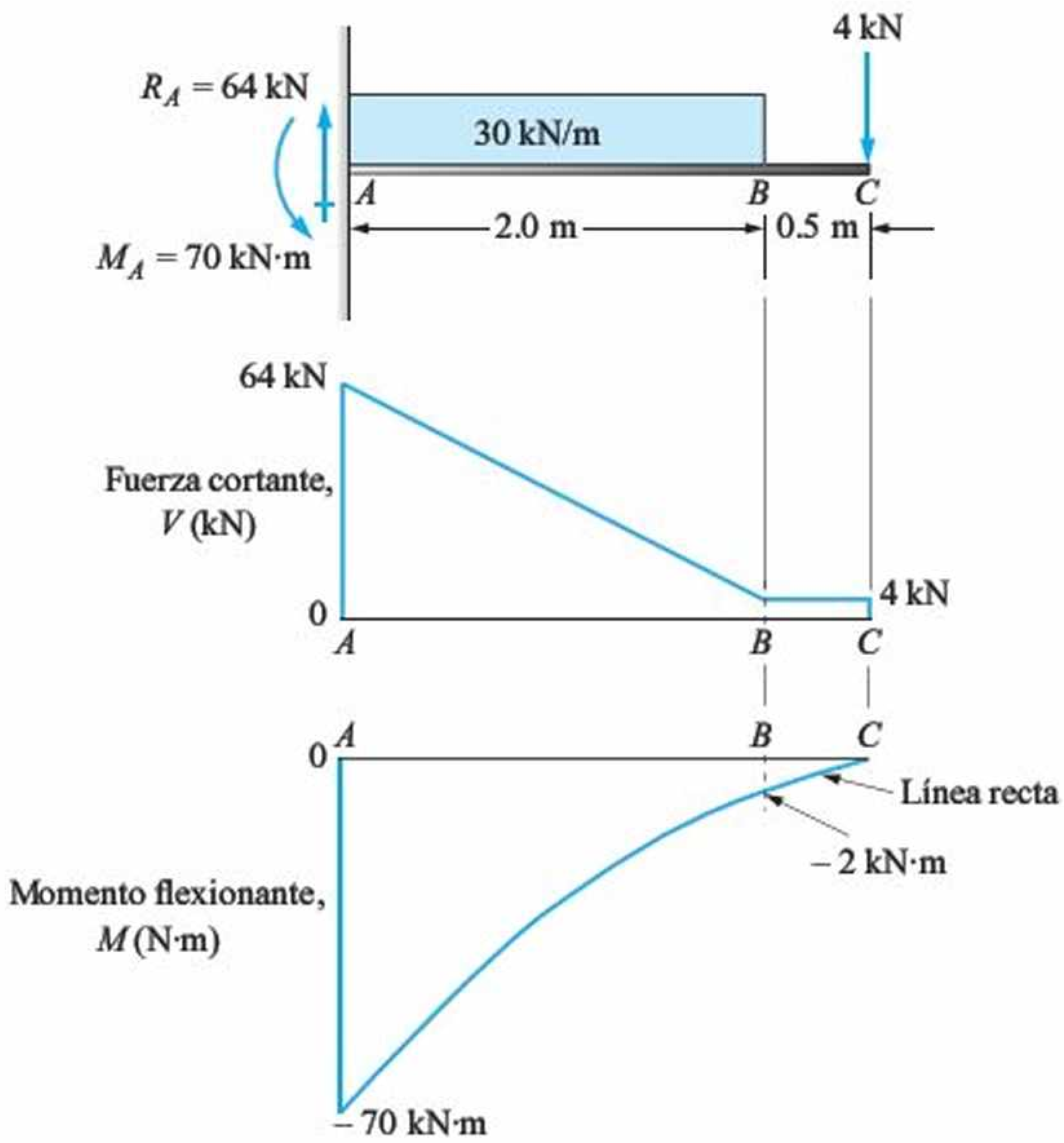


FIGURA 5–35
Diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante.

Por último, entre B y C,

$$M_C = M_B + [\text{Área}]_{B-C} = -2\,\text{kN}\cdot\text{m} + 4\,\text{kN}(0.5\text{ m}) = 0$$

Como el punto C es el extremo *libre* de la viga, el momento allí debe ser cero.

5–9 VIGAS CON CARGAS DISTRIBUIDAS LINEALMENTE VARIABLES

Las figuras 5–6 y 5–7 en la sección 5–2 muestran dos ejemplos de vigas sometidas a cartas distribuidas linealmente variables. A continuación demostramos el método de trazar la forma general de los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de vigas como ésas, y de cómo determinar los valores máximos de la fuerza cortante máxima y el momento flexionante. En muchos problemas prácticos estos son los objetivos principales. Más adelante, en las sección 5–11 se presenta un método matemático que define de una manera más completa la forma de los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.

Consulte la figura 5–36 donde se muestra el diagrama de carga de la viga en voladizo de la figura 5–6. La cantidad de carga por unidad de longitud varía linealmente desde w = –200 lb/ft (dirigida hacia abajo) en el apoyo A hasta w = cero en el extremo derecho B. Esta curva en línea recta se llama *curva de primer grado* porque la carga varía directamente con la posición, x, en la viga. Con una carga como ésa, la reacción en A, llamada R_A, es la resultante de la carga distribuida total, la cual se determina calculando el área bajo la curva de carga de forma triangular. Es decir,

$$R_A = \tfrac{1}{2}(-200\,\text{lb/ft})(8\text{ ft}) = -800\text{ lb}$$

El momento flexionante en el apoyo, llamado M_A, debe ser igual al momento de toda la carga aplicada a la derecha de A. Éste se determina considerando que la resultante actúa en el centroide de la carga distribuida. En la curva de carga de forma triangular, el centroide está a 1/3 de la longitud de la viga a partir del punto A. Si x denota esta distancia, entonces:

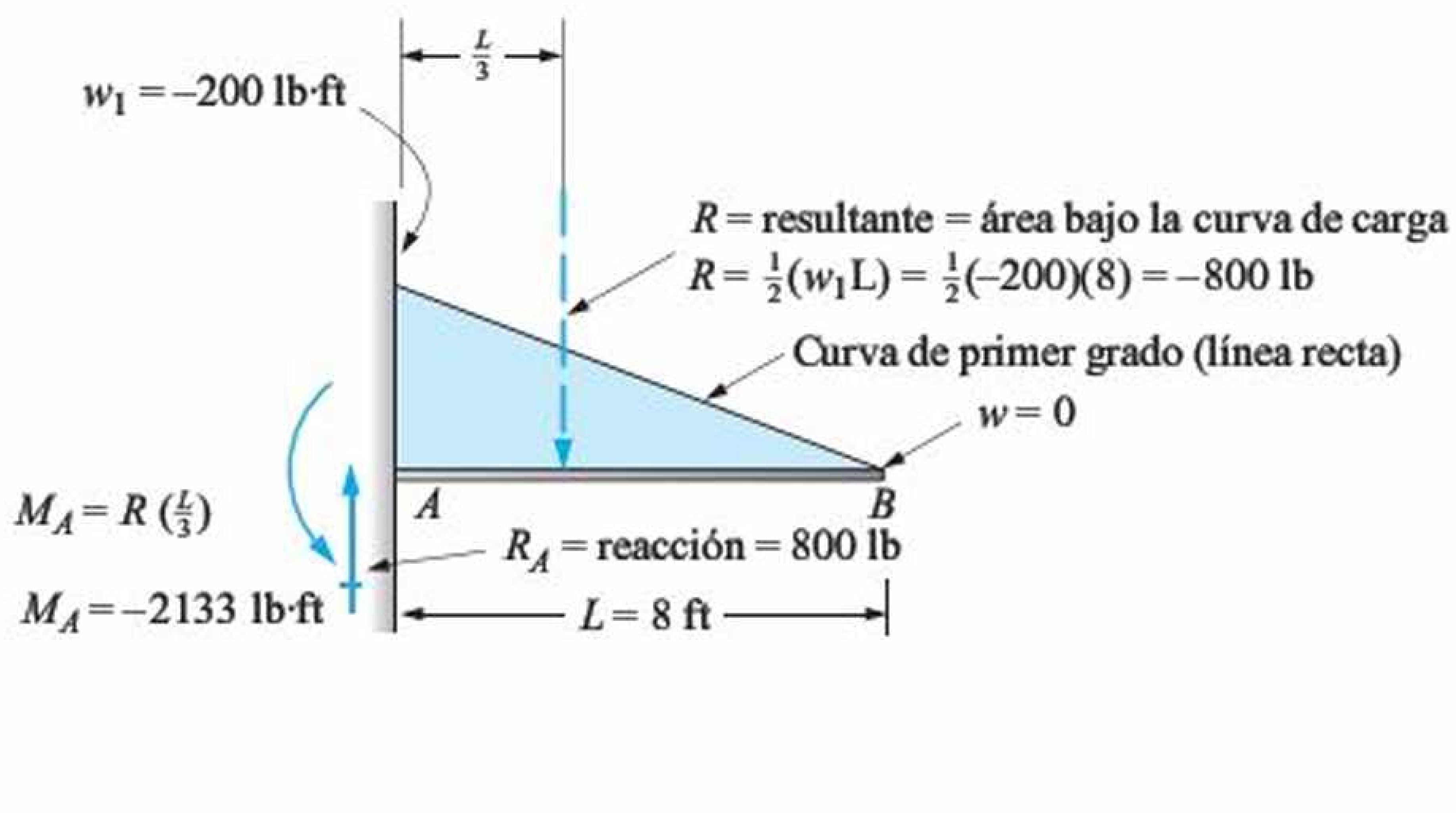
$$x = L/3 = (8\text{ ft})/3 = 2.667\text{ ft}$$

Por consiguiente, el momento en A es el producto de la resultante por x. Es decir,

$$M_A = R_A x = (800\text{ lb})(2.667\text{ ft}) = 2133\text{ lb}\cdot\text{ft}$$

Estos valores, R_A = 800 lb y M_A = 2133 lb·ft, son los valores máximos de la fuerza cortante y el momento flexionante, respectivamente. En la mayoría de los casos, ése es el objetivo del análisis. De ser así, el análisis se puede dar por terminado.

FIGURA 5–36
Diagrama de carga, reacción y momento de una viga en voladizo sometida a una carga distribuida linealmente variable.



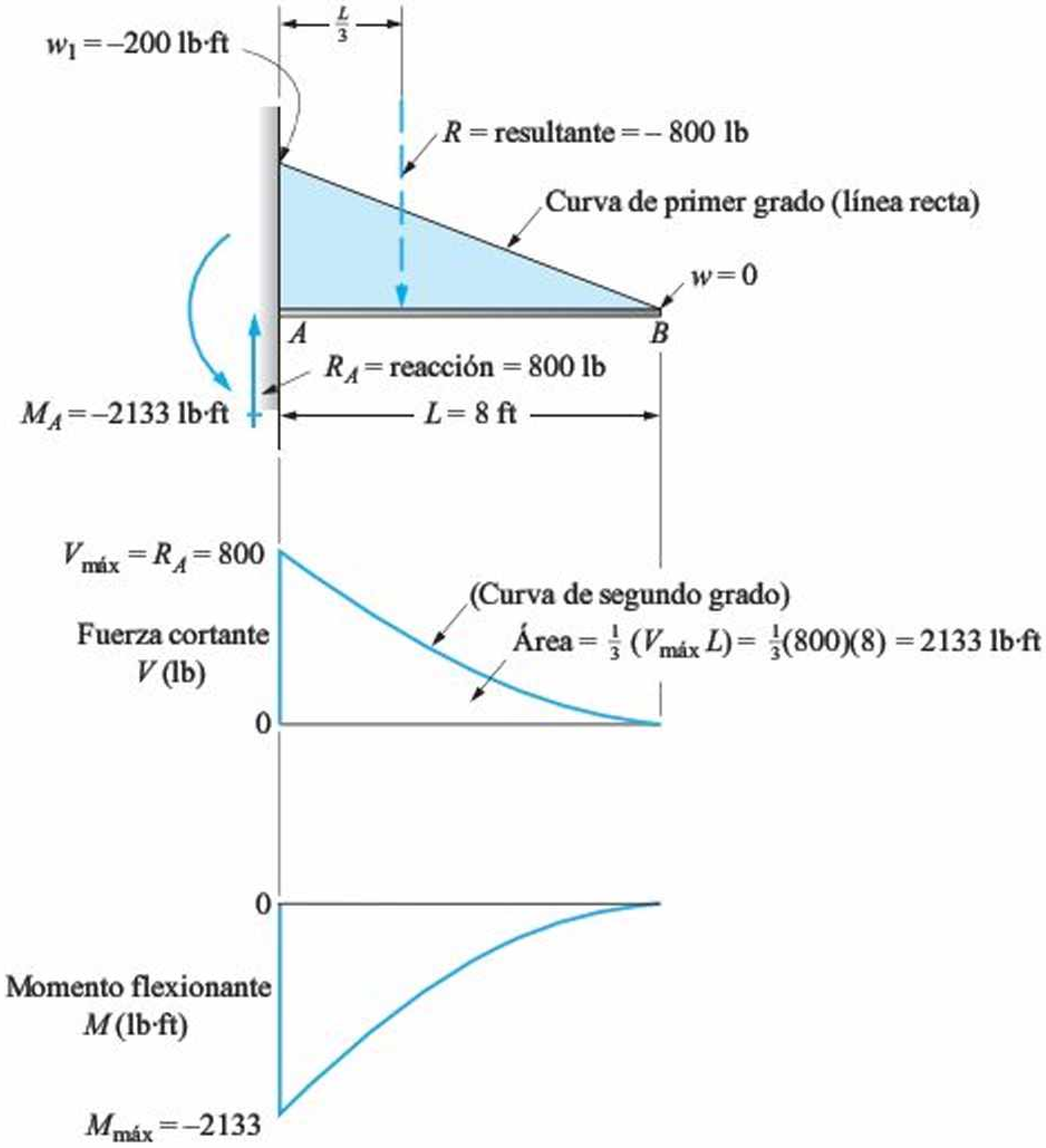


FIGURA 5–37 Diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante de la carga sobre la viga de la figura 5–35.

Sin embargo, si se requieren los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante, se pueden trazar siguiendo los principios desarrollados al inicio de este capítulo. La figura 5–37 muestra los resultados. El diagrama de fuerza cortante se inicia en A con el valor de 800 lb, igual a la reacción, R_A. El valor de la fuerza cortante se reduce entonces en puntos situados a la derecha de A conforme se aplican cargas adicionales. Observe que la curva de la fuerza cortante no es una línea recta, porque la cantidad de carga se reduce de A a B. En B la carga es cero, por lo que el valor de la fuerza cortante en B es cero. La pendiente de la curva de fuerza cortante en cualquier punto es igual a la cantidad de carga por unidad de longitud en el punto correspondiente del diagrama de carga. Así pues, la curva de fuerza cortante se inicia en A con una pendiente negativa relativamente grande, la cual se reduce progresivamente a medida que se aproxima a B. Esta curva en general se conoce como *curva de segundo grado* porque el valor varía con el *cuadrado* de la distancia x.

El diagrama de momento flexionante se traza teniendo en cuenta en primer lugar que $M_A = -2133$ lb·ft. La curva tiene una pendiente positiva relativamente grande en A debido al gran valor positivo de la fuerza cortante en dicho punto. Luego la pendiente se reduce progresivamente, a medida que se incrementa la distancia, hasta cero en B. El hecho de que el valor del momento flexionante es igual a cero en B se puede demostrar también calculando el área bajo la curva de fuerza cortante de A a B. El apéndice A–1 incluye las fórmulas para calcular el área bajo una curva de segundo grado del tipo mostrado en el diagrama de fuerza cortante. Es decir,

$$\text{Área} = (1/3)(800\ \text{lb})(8\ \text{ft}) = 2133\ \text{lb·ft}$$

Éste es el *cambio* del momento flexionante de A a B, que hace que la curva del momento flexionante sea cero en B.

5–10 DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE DE COMPONENTES DE ESTRUCTURAS

Los ejemplos considerados hasta ahora han sido de vigas generalmente rectas con todas las cargas transversales, es decir, cargas que actúan perpendiculares al eje de la viga. Muchos elementos de máquinas y estructuras son más complejos, ya que disponen de partes que se extienden más allá de la parte principal en forma de viga.

Por ejemplo, considere el poste simple con un brazo extendido, mostrado en la figura 5–38, compuesto de un elemento vertical y uno horizontal. El poste vertical está rígidamente fijo en su base. En el extremo del brazo horizontal extendido se aplica una carga dirigida hacia abajo. Un ejemplo de una carga de ese tipo es un sistema de sustentación de una señalización de carretera. Otro sería el poste de sustentación de un aro de básquetbol donde la fuerza dirigida hacia abajo sería un jugador que se cuelga del aro después de realizar una clavada. Una aplicación de diseño mecánico es una repisa que sostiene las piezas de una máquina durante el procesamiento.

En esas condiciones, conviene analizar el elemento de una estructura o máquina considerando cada parte por separado y creando un diagrama de cuerpo libre de cada una de las partes. En las juntas entre partes, cada una de éstas ejerce fuerzas y momentos en la otra. Con este método será capaz de diseñar cada una las partes con base en su patrón de carga si utiliza los principios básicos de análisis de vigas de este capítulo y los de los siguientes.

Poste con un brazo extendido. El objetivo del análisis es trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante completos de los componentes horizontal y vertical de la estructura poste/brazo mostrada en la figura 5–38. El primer paso es "desprender" el brazo del poste en el codo a 90°.

La figura 5–39 muestra el brazo horizontal como un cuerpo libre con la carga F, aplicada en su extremo derecho. El resultado se parece al de la viga en voladizo analizada con anterioridad en este capítulo. Sabemos que el brazo está en equilibrio como parte de la estructura total y, por consiguiente, debe estarlo cuando se lo considera solo. Entonces, en el extremo izquierdo donde se une al poste vertical, debe haber una fuerza igual a F que actúa verticalmente dirigida hacia arriba para mantener la suma de las fuerzas verticales igual a cero. Pero las dos fuerzas verticales forman un par que tiende a hacer girar el brazo en el sentido de las manecillas del reloj.

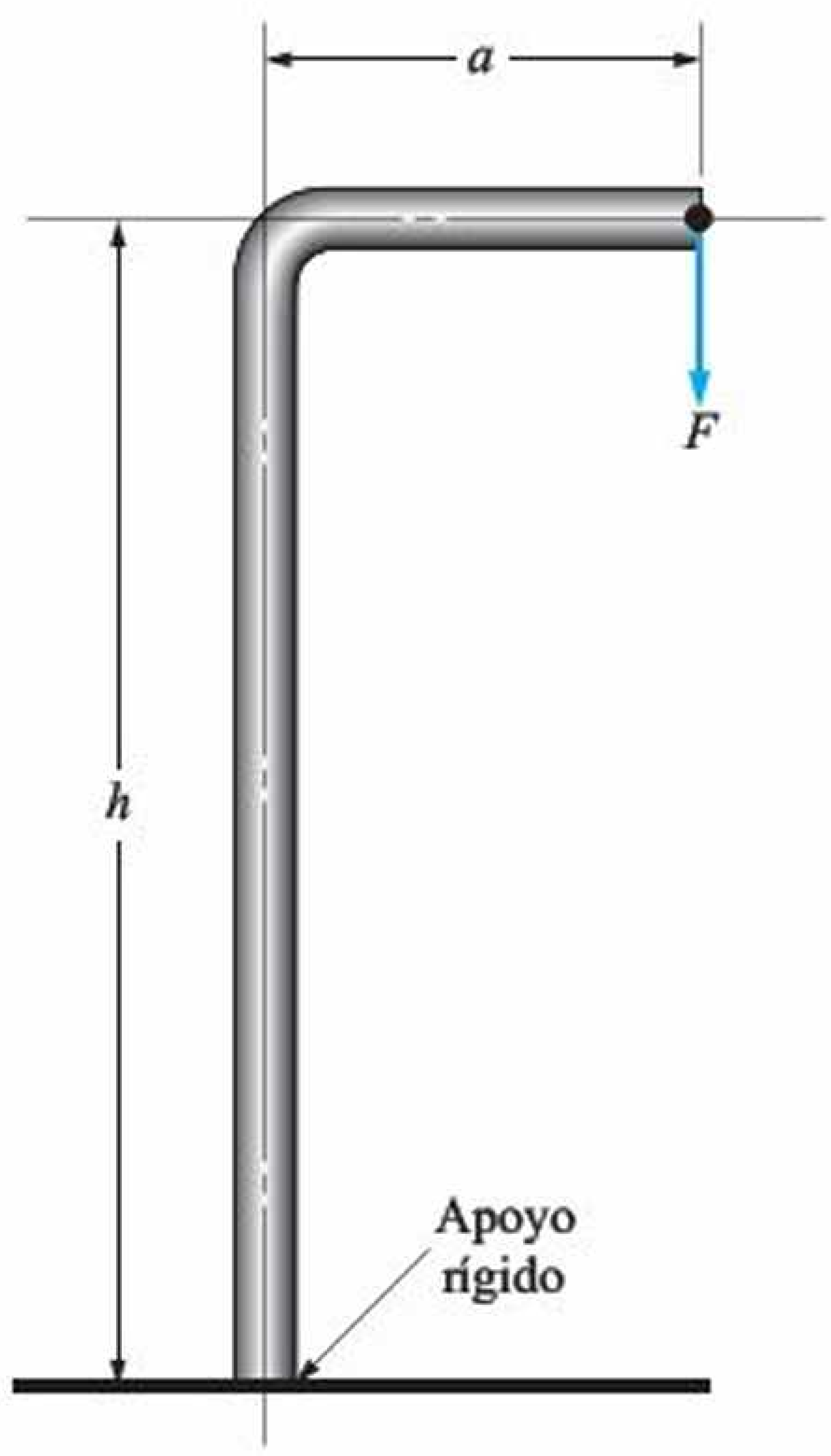


FIGURA 5–38 Poste con un brazo extendido.

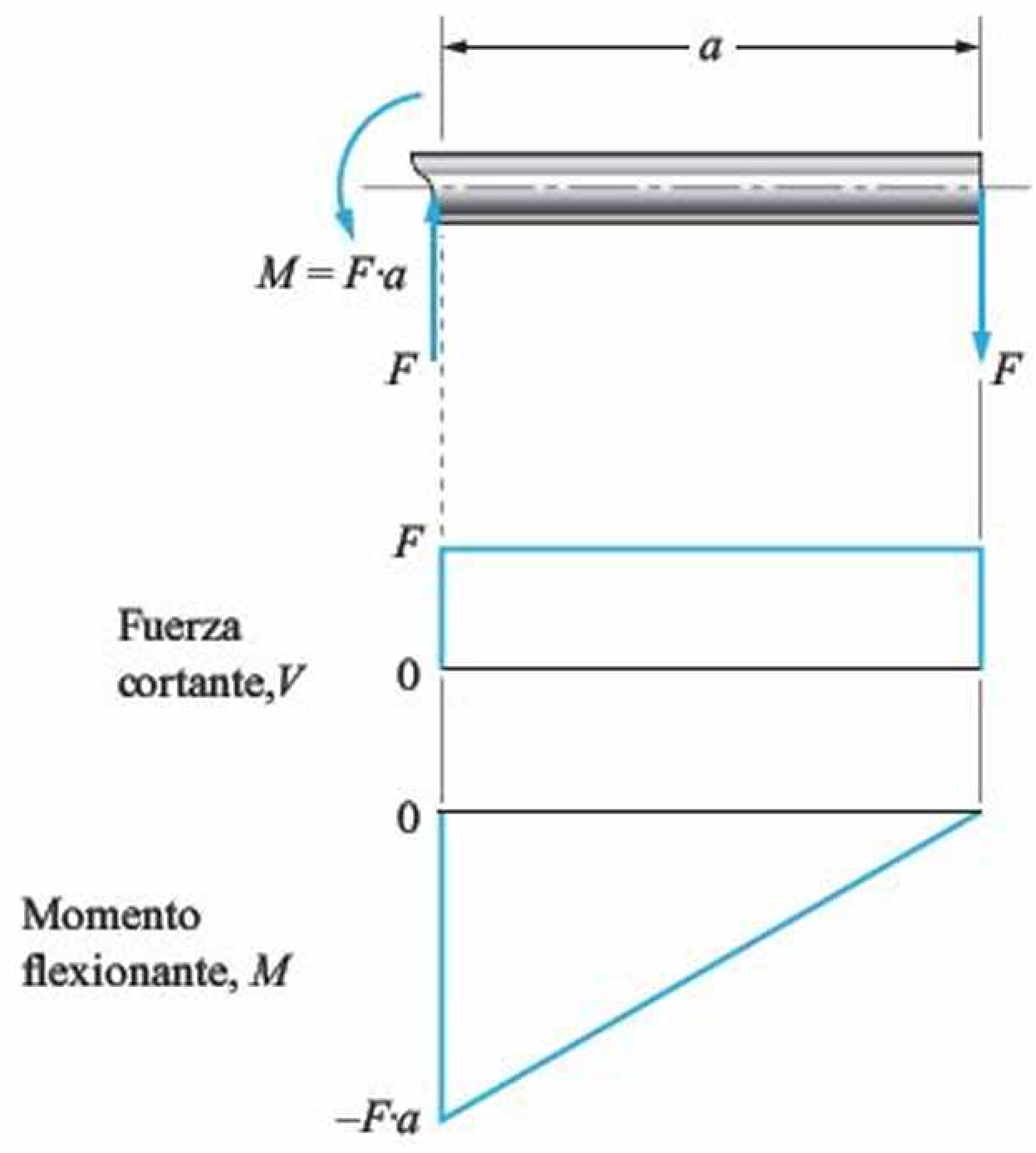


FIGURA 5–39 Diagramas de cuerpo libre, fuerza cortante y momento flexionante del brazo horizontal.

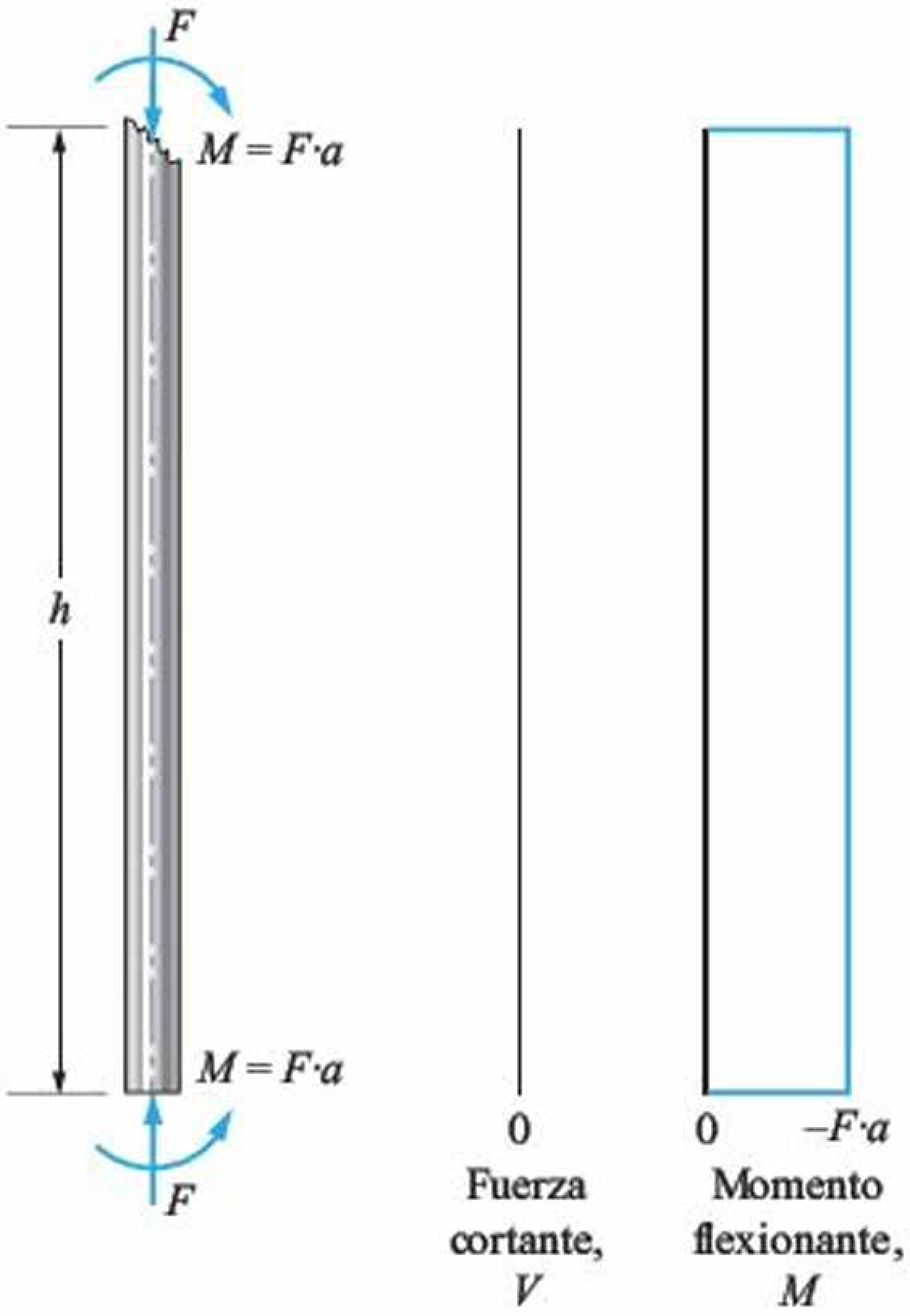


FIGURA 5–40 Diagramas de cuerpo libre, fuerza cortante y momento flexionante del poste vertical.

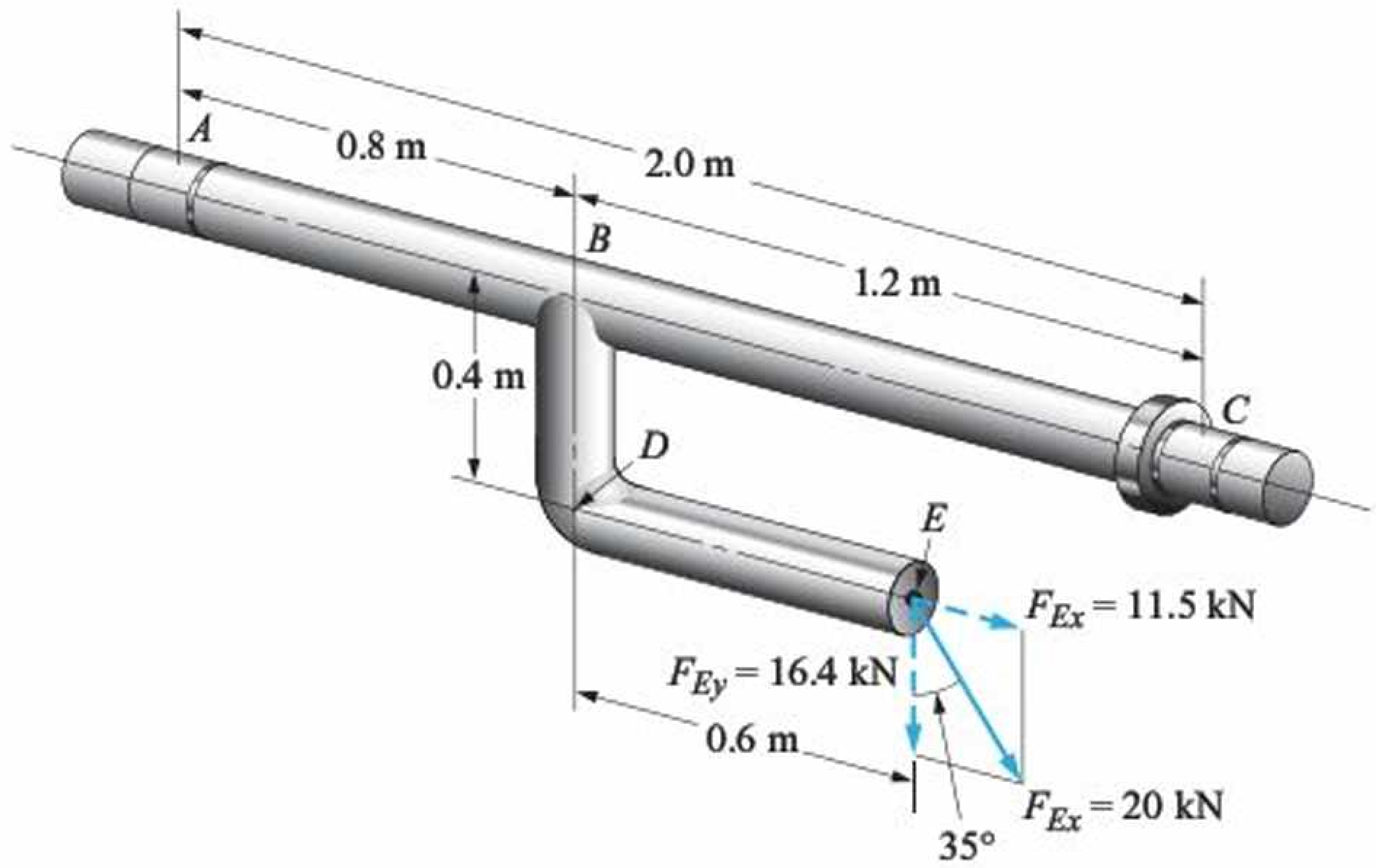


FIGURA 5–41 Viga con un brazo en forma de L.

Para que se mantenga el equilibrio rotacional, en el extremo izquierdo del brazo debe haber un momento en sentido contrario al de las manecillas del reloj de magnitud $M = F \cdot a$, donde a es la longitud del brazo. Con el diagrama de cuerpo libre completo se pueden trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante, como se muestra en la figura 5–39. La fuerza cortante es igual a F a todo lo largo del brazo. El momento flexionante máximo ocurre en el extremo izquierdo del brazo donde $M = F \cdot a$.

En la figura 5–40 se muestra el diagrama de cuerpo libre del poste vertical. En el extremo superior del poste, se muestran una fuerza dirigida hacia abajo y un momento en el sentido de las manecillas del reloj, ejercidos en el poste vertical por el brazo horizontal. *Observe el par de acción-reacción que existe en las uniones entre las partes. En las dos partes actúan fuerzas y momentos iguales pero opuestos.* Para completar el diagrama de cuerpo libre del poste se requiere una fuerza dirigida hacia arriba y un momento en sentido contrario al de las manecillas del reloj en su extremo inferior, generados por el mecanismo de sujeción en su base. Por último, la figura 5–40 muestra los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante del poste, trazados en posición vertical para relacionar los valores con las posiciones en el poste. Donde no existe fuerza cortante, el momento flexionante no cambia y se mantiene uniforme a lo largo del poste.

Viga con un brazo en forma de L. La figura 5–41 muestra un brazo en forma de L que se extiende por debajo de la viga principal sometida a una fuerza inclinada. La viga principal descansa sobre apoyos simples en A y C. El apoyo C está diseñado para que reaccione a cualquier fuerza horizontal desequilibrada. El objetivo es trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante completos de la viga principal y los diagramas de cuerpo libre de todas las partes del brazo.

En este caso conviene utilizar tres diagramas de cuerpo libre: uno de la parte horizontal del brazo, otro de la parte vertical del brazo y uno más de la viga principal. Pero primero conviene descomponer la fuerza aplicada en sus componentes vertical y horizontal, como se indica por medio de los vectores punteados en el extremo del brazo.

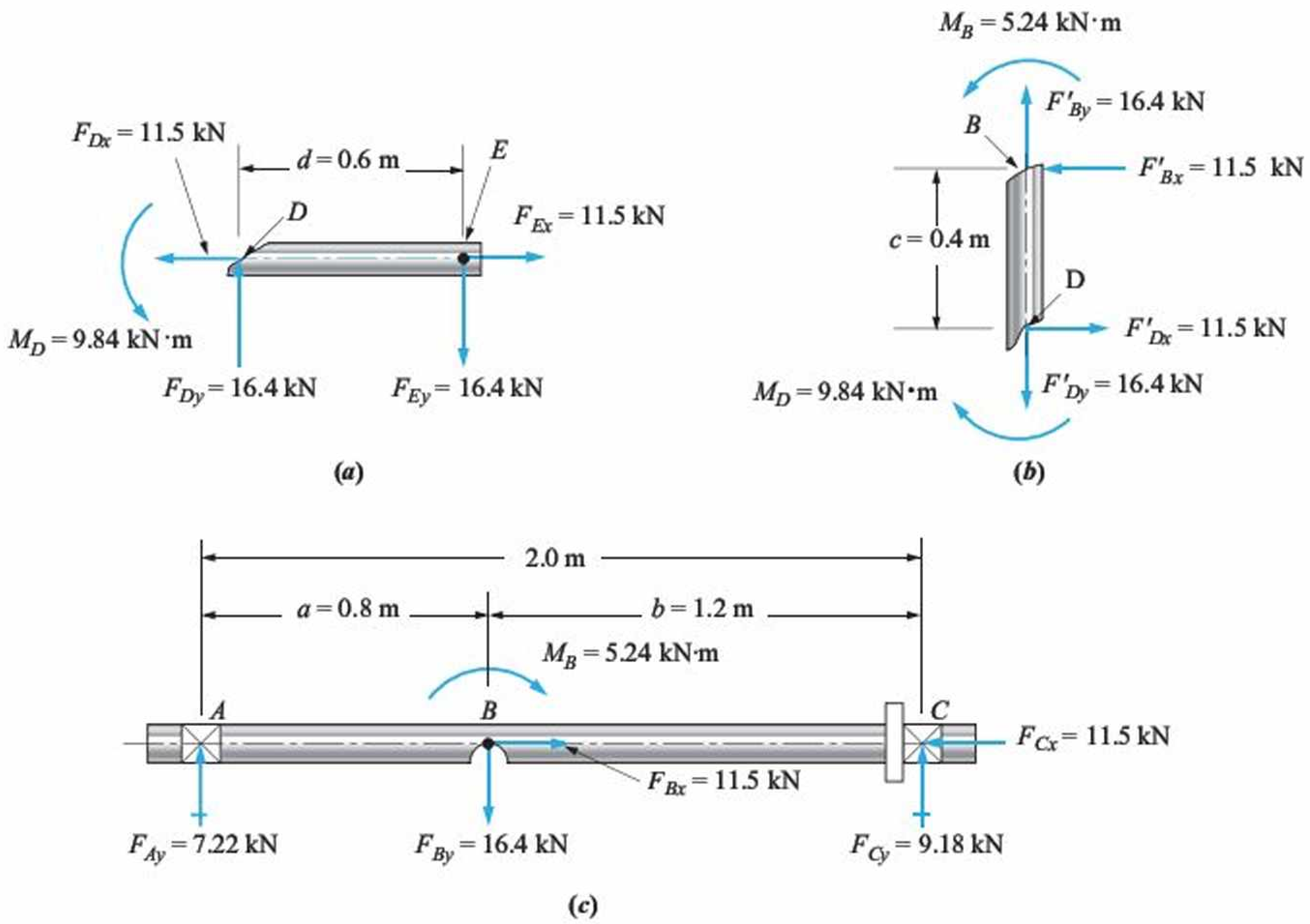


FIGURA 5–42 Diagramas de cuerpo libre. (a) Diagrama de cuerpo libre de la parte *DE*. (b) Diagrama de cuerpo libre de la parte *BD*. (c) Diagrama de cuerpo libre de la parte *ABC*, la viga principal.

La figura 5–42 muestra los tres diagramas de cuerpo libre. Comenzando con la parte *DE* mostrada en (a), las fuerzas aplicadas en *E* deben estar equilibradas en las direcciones vertical y horizontal por las fuerzas que actúan en *D* en dirección opuesta. Pero el equilibrio rotacional debe ser producido por un momento interno en *D*. Si se suman los momentos con respecto al punto *D* se demuestra que

$$M_D = F_{Ey} \cdot d = (16.4\,\text{kN})(0.6\,\text{m}) = 9.84\,\text{kN}\cdot\text{m}$$

En la figura 5–42(b) las fuerzas y momentos que actúan en *D* tienen los mismos valores pero direcciones opuestas de los que actúan en *D* en la parte (a) de la figura. Las condiciones de equilibrio vertical y horizontal muestran que las fuerzas que actúan en *B* son iguales a las que actúan en *D*. El momento en *B* se calcula sumando los momentos con respecto a *B* como sigue:

$$\left(\sum M\right)_B = 0 = M_D - F_{Dx} \cdot c - M_B$$

Entonces

$$M_B = M_D - F_{Dx} \cdot c = 9.84\,\text{kN}\cdot\text{m} - (11.5\,\text{kN})(0.4\,\text{m}) = 5.24\,\text{kN}\cdot\text{m}$$

A continuación se analiza la viga principal *ABC*. Use la figura 5–42(c). Las fuerzas y el momento se muestran actuando en el punto *B* con los valores tomados del punto *B* de la parte *BD*. Ahora tenemos que determinar las reacciones en *A* y *C*. Primero, si se suman los momentos con respecto al punto *C* se obtiene

$$\left(\sum M\right)_C = 0 = F_{By} \cdot b - F_{Ay} \cdot (a + b) - M_B$$

Observe que se debe incluir el momento M_B aplicado en B. Resolviendo para F_{Ay} se obtiene

$$F_{Ay} = \frac{(F_{By} \cdot b) - M_B}{a + b} = \frac{(16.4 \text{ kN})(1.2 \text{ m}) - 5.24 \text{ kN} \cdot \text{m}}{2.0 \text{ m}} = 7.22 \text{ kN}$$

Asimismo, si se suman los momentos con respecto al punto A se obtiene

$$\left(\sum M\right)_A = 0 = F_{By} \cdot a - F_{Cy} \cdot (a + b) + M_B$$

Observe que el momento M_B aplicado en B es positivo, porque actúa en el mismo sentido que el momento derivado de F_{By}. Resolviendo para F_{Cy} se obtiene

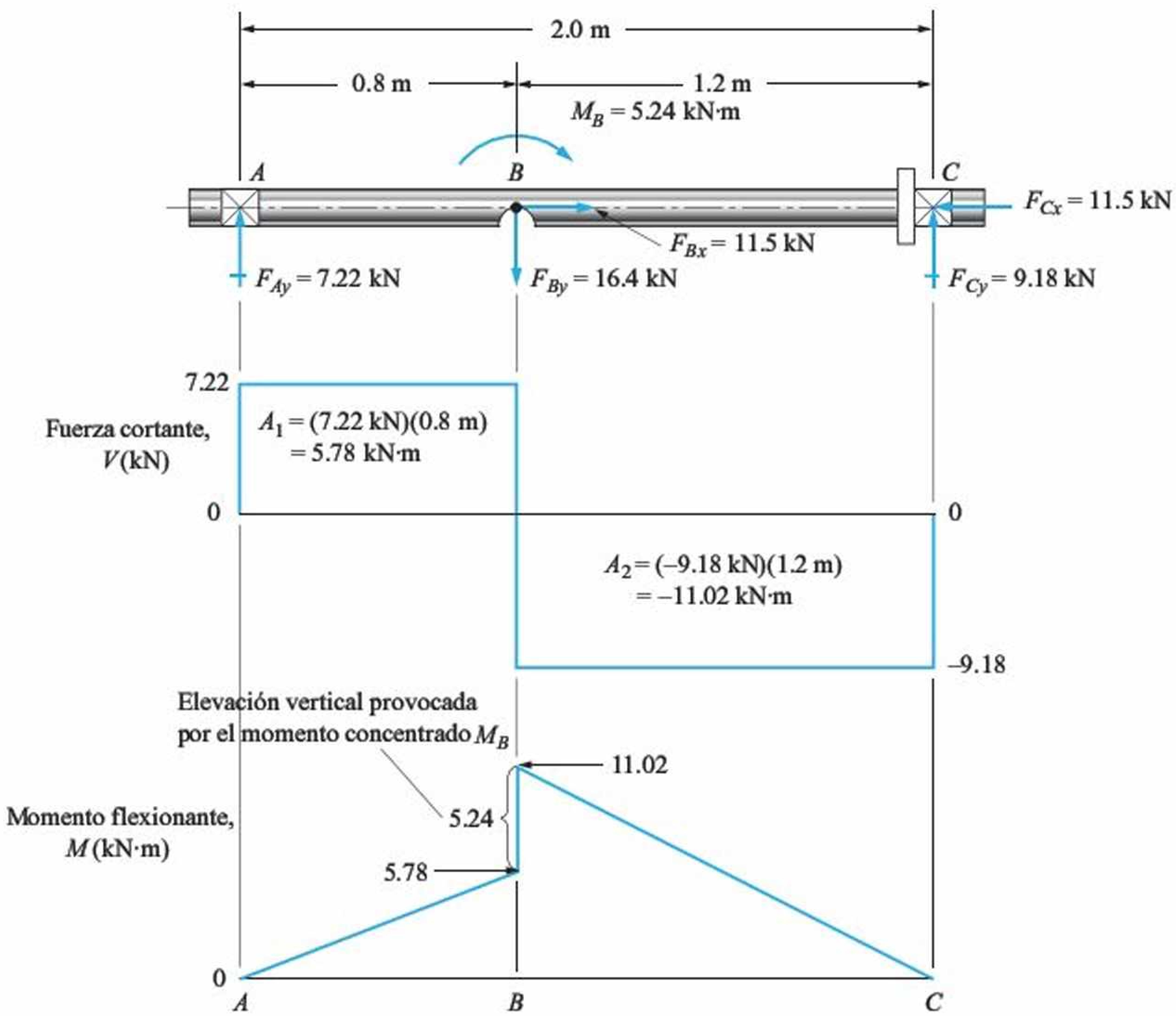
$$F_{Cy} = \frac{(F_{By} \cdot a) - M_B}{a + b} = \frac{(16.4 \text{ kN})(0.8 \text{ m}) + 5.24 \text{ kN} \cdot \text{m}}{2.0 \text{ m}} = 9.18 \text{ kN}$$

El cálculo de estas fuerzas se comprueba sumándolas en la dirección vertical y viendo que la suma sea cero.

La terminación del diagrama de cuerpo libre de la viga principal requiere la inclusión de la reacción horizontal en C igual a la fuerza horizontal en B.

La figura 5–43 muestra los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de la viga principal ABC. El diagrama de fuerza cortante se traza en la forma tradicional con los cambios de la fuerza cortante que ocurren en cada punto de aplicación de la carga. La diferencia del desarrollo anterior radica en el diagrama de momento.

FIGURA 5–43
Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de la viga principal de la figura 5–41.



Se utilizaron los siguientes pasos:

1. El momento en A es igual a cero porque A es un apoyo simple.
2. El incremento del momento de A a B es igual al área bajo la curva de fuerza cortante entre A y B, 5.78 kN·m.
3. En el punto B se considera que el momento M_B es un *momento concentrado* que produce un cambio repentino del valor del momento flexionante igual al valor del momento aplicado, 5.24 kN·m, y de ese modo se produce el valor máximo de 11.02 kN·m. La convención utilizada en este caso es:

> a. Cuando un momento concentrado actúa *en el sentido de las manecillas del reloj*, su diagrama *se eleva*.
> b. Cuando un momento concentrado actúa en *sentido contrario al de las manecillas del reloj*, su diagrama *desciende*.

4. Entre B y C el momento se reduce a cero debido a la fuerza cortante y al área negativa correspondiente bajo la curva de la fuerza cortante.

5–11 ANÁLISIS MATEMÁTICO DE DIAGRAMAS DE VIGAS

En la mayoría de los problemas prácticos, la preparación de los diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante por medio de las técnicas mostradas con anterioridad en este capítulo es adecuada y conveniente. Se puede analizar una amplia variedad de tipos de viga y patrones de carga en una forma suficientemente detallada para lograr un diseño lógico de las vigas con el objeto de garantizar la seguridad y limitar las reflexiones a valores aceptables. En los capítulos del 7 al 11 se presentan los métodos para alcanzar estos objetivos.

Sin embargo, existen algunos tipos de carga y algunos tipos de técnicas que pueden sacar provecho de la representación de los diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante mediante ecuaciones matemáticas. Esta sección presenta los métodos de crear tales ecuaciones.

Las siguientes indicaciones para formular ecuaciones que definan por completo la carga, la fuerza cortante y el momento flexionante en función de la posición en la viga.

Indicaciones para formular ecuaciones de diagramas de vigas

> 1. Trace el diagrama de carga que muestre todas las cargas externas aplicadas y las reacciones.
> 2. Calcule los valores de todas las reacciones.
> 3. Marque los puntos a lo largo de la viga donde actúan cargas concentradas, o donde comienzan o terminan cargas distribuidas.
> 4. Trace los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante valiéndose de las técnicas indicadas con anterioridad en este capítulo, señalando los valores críticos en los puntos críticos definidos en el paso 3.
> 5. Establezca convenciones para denotar posiciones en la viga y los signos de las fuerzas cortantes y el momento flexionante. En la mayoría de los casos, utilizaremos la siguiente convención (vea las figuras 5–20 a 5–32).
>
>   a. La variable x denotará la posición en la viga medida con respecto a su extremo izquierdo.
>   b. Las cargas dirigidas hacia abajo serán negativas.
>   c. Una fuerza cortante positiva actúa dirigida hacia abajo en el interior de una sección dada de la viga. Una forma alternativa de determinar esto es analizar la fuerza vertical interna neta que actúa en esa parte de la viga a la izquierda de la sección de interés, si la fuerza externa neta actúa hacia arriba, la fuerza cortante interna en la viga es positiva.

d. Un momento flexionante positivo actúa en sentido contrario al de las manecillas del reloj en el interior de una sección dada de la viga. Un momento flexionante positivo tenderá a provocar una deflexión cóncava hacia arriba en una viga, propia de una viga simplemente apoyada sometida a cargas dirigidas hacia abajo entre los apoyos.

6. Considere por separado cada segmento de la viga entre los puntos definidos en el paso 3. La curva de la fuerza cortante deberá ser continua dentro de cada segmento.
7. Si el diagrama de fuerza cortante se compone de líneas rectas provocadas por cargas concentradas o uniformemente distribuidas, es posible utilizar los principios fundamentales de geometría analítica para escribir las ecuaciones para la fuerza cortante en comparación con la posición en cada segmento de la viga. Las ecuaciones resultantes serán de la forma

$$V_{AB} = \text{Constante (ecuación de grado cero)}$$
$$V_{BC} = ax + b \text{ (ecuación de primer grado)}$$

Los subíndices definen el comienzo y el final del segmento de interés.

8. Si el diagrama de fuerza cortante contiene segmentos curvos provocados por cargas distribuidas variables, primero escriba ecuaciones para la carga contra la posición en la viga. Luego, derive las ecuaciones para la fuerza cortante contra la posición en la viga de la siguiente manera

$$V_{AB} = \int w_{AB}\,dx + C$$

donde w_{AB} es la ecuación para la carga que actúa en el segmento AB como una función de x, y C es una constante de integración. La ecuación resultante para la fuerza cortante será de segundo grado o mayor, según la complejidad del patrón de carga. Calcule el valor de las constantes de integración por medio de valores conocidos de V en lugares dados x.

9. Derive ecuaciones para el momento flexionante como una función de la posición en cada segmento de la viga, por medio del método.

$$M_{AB} = \int V_{AB}\,dx + C$$

Esta expresión es el equivalente matemático de la *regla del área* utilizada con anterioridad para trazar diagramas de viga, porque el proceso de integración determina el área bajo la curva de la fuerza cortante. Calcule el valor de las constantes de integración por medio de valores conocidos de M en lugares dados x.

10. El resultado en este momento es un conjunto de ecuaciones para fuerza cortante y momento flexionante para cada segmento de la viga. Sería prudente comprobarlas en cuanto a exactitud sustituyendo valores clave de x para los cuales la fuerza cortante y el momento flexionante son conocidos en las ecuaciones, con el fin de asegurarse de que se calculen los valores correctos para V y M.
11. Determine los valores máximos de fuerza cortante y momento flexionante, si aún no se conocen, sustituyendo valores de x en las ecuaciones apropiadas donde se esperan los valores máximos. Recuerde la regla de que el momento flexionante máximo ocurrirá en un punto donde la curva de fuerza cortante cruza el eje x, es decir, donde $V = 0$.

Este procedimiento se ilustra con los cuatro ejemplos siguientes.

Viga simplemente apoyada con una carga concentrada. El objetivo es escribir las ecuaciones de los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de la viga y el patrón de carga mostrados en la figura 5–44, siguiendo las indicaciones dadas en esta sección.

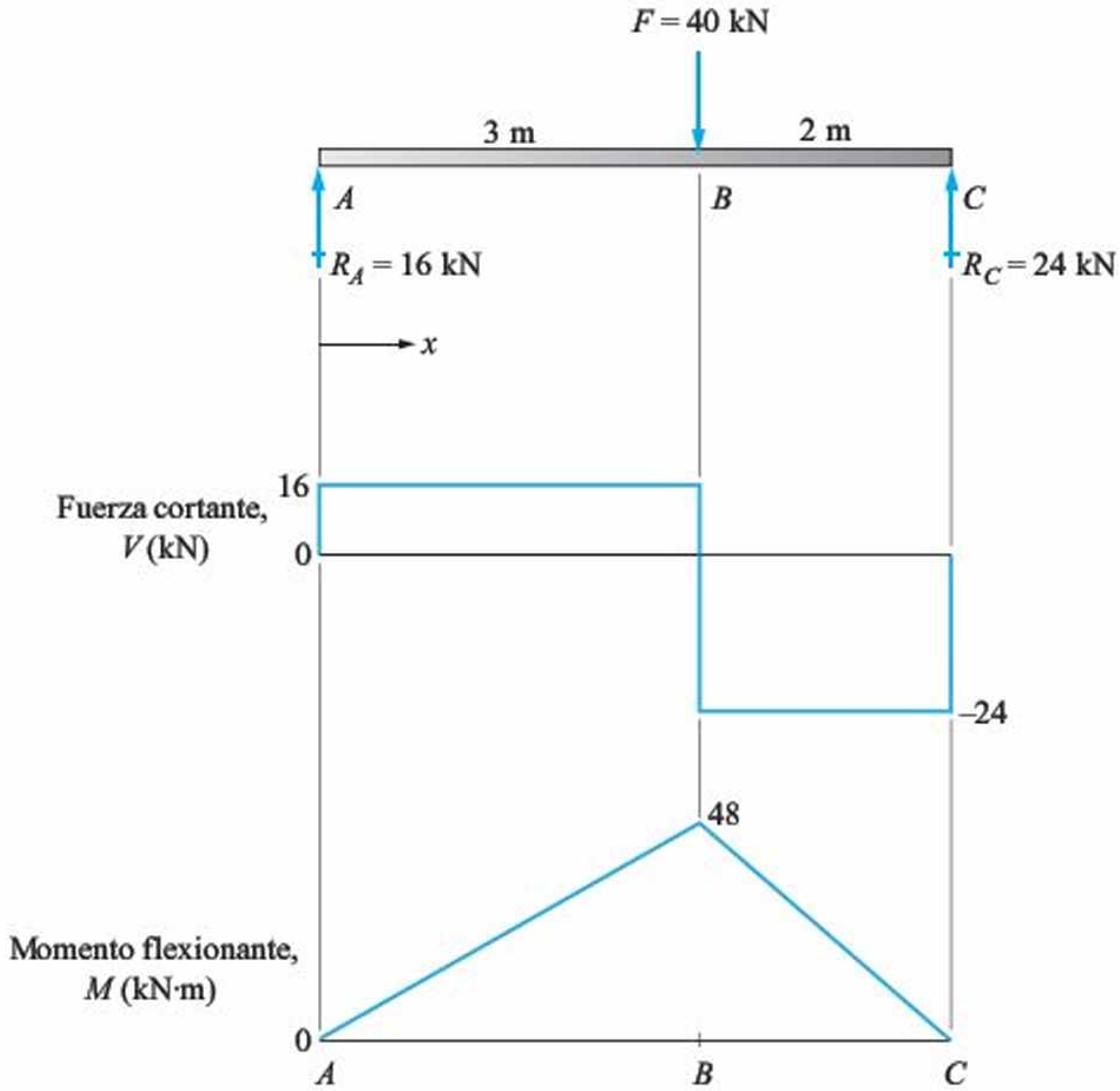


FIGURA 5–44 Viga simplemente apoyada con una carga concentrada.

Los pasos 1 al 4 se completaron y se muestran en la figura 5–44. Los puntos de interés son A en el apoyo izquierdo, B en el punto de aplicación de la carga y C en el apoyo derecho. Se desarrollarán ecuaciones para los dos segmentos, AB y BC, donde AB abarca desde $x = 0$ hasta $x = 3$ m y BC desde $x = 3$ m hasta $x = 5$ m. Los pasos 5 y 6 serán los definidos en las indicaciones.

El paso 7 se aplica para escribir las ecuaciones de la curva de fuerza cortante como sigue:

$$V_{AB} = 16$$
$$V_{BC} = -24$$

Se considera que las unidades de fuerza cortante son kN.

El paso 8 no interviene en este ejemplo.

Ahora se aplica el paso 9 para derivar las ecuaciones del momento flexionante en los dos segmentos.

$$M_{AB} = \int V_{AB} dx + C = \int 16\, dx + C = 16x + C$$

Para evaluar la constante de integración C, observamos que en $x = 0$, $M_{AB} = 0$. Sustituyendo estos valores en la ecuación de momento se obtiene

$$0 = 16(0) + C$$

Entonces, $C = 0$. Ahora se puede escribir la ecuación final como,

$$M_{AB} = 16x$$

Como comprobación, vemos que en $x = 3$ m, el momento flexionante $M_B = 48$ kN·m, como se muestra en el diagrama de momento flexionante. Ahora podemos derivar la ecuación del momento flexionante en el segmento BC.

$$M_{BC} = \int V_{BC}\,dx + C = \int -24\,dx + C = -24x + C$$

Para evaluar la constante C correspondiente a este segmento, utilizamos la condición de que en $x = 5$, $M_{BC} = 0$. Entonces,

$$0 = -24(5) + C$$

Entonces, $C = 120$. La ecuación final es

$$M_{BC} = -24x + 120$$

Para comprobar esta ecuación, sustituya $x = 3$.

$$M_{BC} = -24(3) + 120 = -72 + 120 = 48 \text{ (comprobación)}$$

En resumen, las ecuaciones de los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante son:

En el segmento AB desde $x = 0$ hasta $x = 3$ m:

$$V_{AB} = 16$$
$$M_{AB} = 16x$$

En el segmento BC desde $x = 3$ m hasta $x = 5$ m:

$$V_{BC} = -24$$
$$M_{BC} = -24x + 120$$

Los valores máximos de la fuerza cortante y el momento flexionante son obvios en los diagramas.

$$V_{\text{máx}} = -24 \text{ kN a lo largo de todo el segmento BC}$$
$$M_{\text{máx}} = 48 \text{ kN·m en el punto } B\ (x = 3 \text{ m})$$

Viga simplemente apoyada con una carga parcial uniformemente distribuida. El objetivo es escribir las ecuaciones de los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de la viga y el patrón de carga mostrados en la figura 5–45, siguiendo las indicaciones dadas en esta sección. Observe que ésta es la misma viga y el patrón de carga mostrados en la figura 5–30.

Los pasos 1 a 4 se completaron y se muestran en la figura 5–45. Los puntos de interés son A en el apoyo izquierdo, B en el punto donde termina la carga distribuida y C en el apoyo derecho. Se desarrollarán ecuaciones para los dos segmentos, AB y BC, donde AB abarca desde $x = 0$ hasta $x = 6$ m y BC desde $x = 6$ m hasta $x = 9$ m.

Se puede utilizar el paso 5(b) para escribir una ecuación para la carga en el segmento AB:

$$w_{AB} = -1500 \text{ N/m}$$

Se puede aplicar el paso 7 para escribir las ecuaciones de la curva de fuerza cortante. En el segmento AB, la curva es una línea recta, así que podemos escribirla como sigue,

$$V_{AB} = ax + b$$

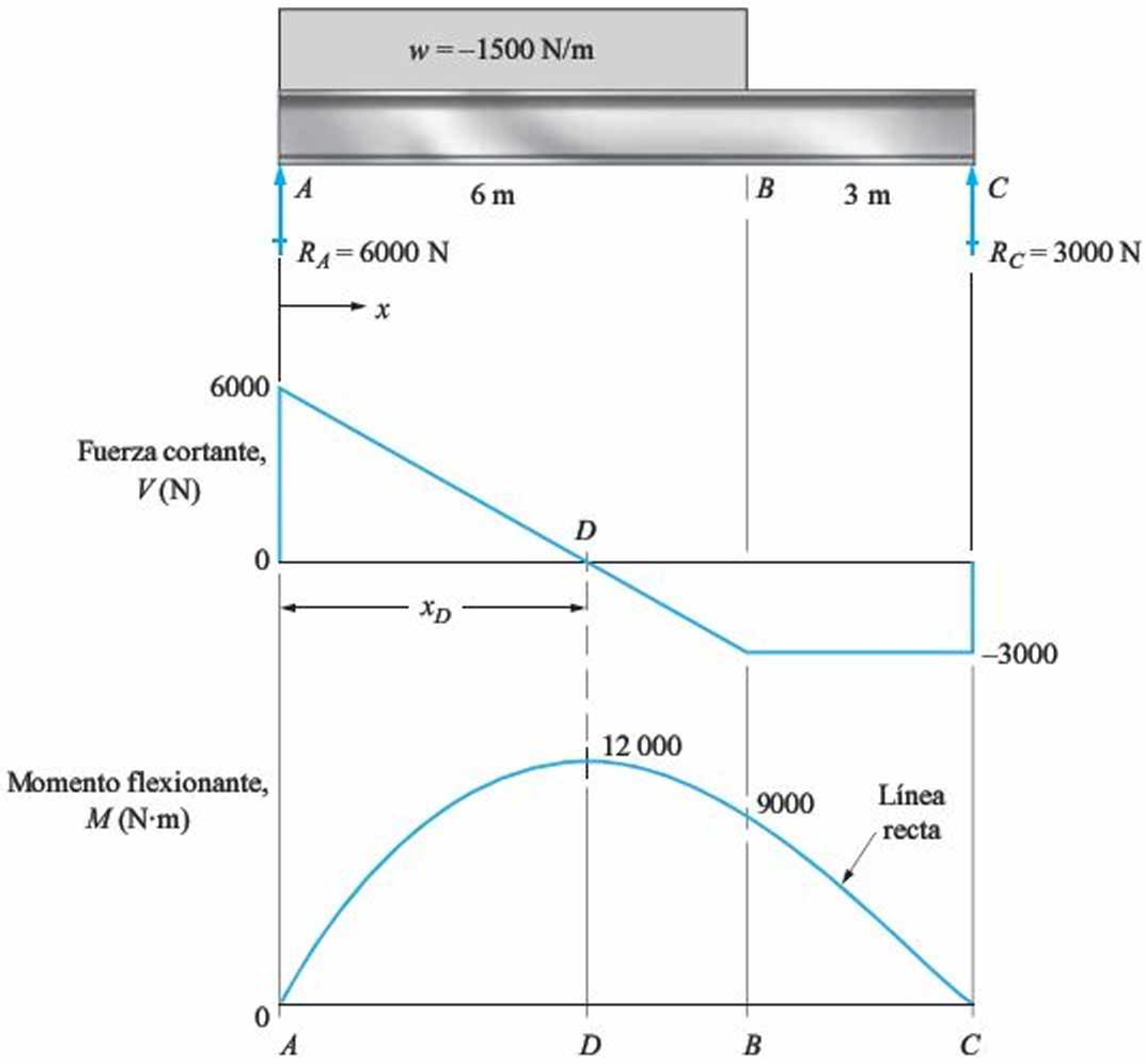


FIGURA 5–45 Viga simplemente apoyada con una carga parcial uniformemente distribuida.

donde a es la pendiente de la línea y b es la intercepción de la línea con el eje V en $x = 0$. Una forma conveniente de determinar la pendiente es observar que la pendiente es igual a la cantidad de carga por unidad de longitud en el caso de una carga distribuida. Es decir, $a = –1500$ N/m. El valor de la intercepción b se determina en el diagrama de fuerza cortante; $b = 6000$ N. Entonces la forma final de la ecuación de fuerza cortante es

$$V_{AB} = -1500x + 6000$$

La ecuación se comprueba sustituyendo $x = 6$ m y calculando V_B

$$V_{AB} = -1500(6) + 6000 = -3000 = V_B$$

Este valor concuerda con el valor conocido de la fuerza cortante en el punto B.

Observe que pudimos haber utilizado el paso 8 para determinar la ecuación de V_{AB}. Observe que,

$$w_{AB} = -1500 \text{ N/m}$$

Entonces,

$$V_{AB} = \int w_{AB}\,dx + C = \int -1500\,dx + C = -1500x + C$$

El valor de C se calcula sustituyendo $V_{AB} = 6000$ en $x = 0$,

$$6000 = -1500(0) + C$$

Entonces, $C = 6000$. Por último,

$$V_{AB} = -1500x + 6000$$

Este valor es idéntico al resultado previo.

En el segmento BC la fuerza cortante es una valor constante,

$$V_{BC} = -3000$$

Antes de proceder a determinar las ecuaciones del diagrama de momento flexionante, recuerde que ocurre un punto crítico donde la curva de la fuerza cortante cruza el eje cero. Ese será un punto de momento flexionante máximo. Llamemos D a este punto y determinemos el valor de x_D donde $V = 0$ igualando la ecuación de V_{AB} a cero y resolviéndola para x_D.

$$V_{AB} = 0 = -1500x_D + 6000$$
$$x_D = 6000/1500 = 4.0 \text{ m}$$

Más adelante utilizaremos este valor para determinar el momento flexionante en D.

Ahora se utiliza el paso 9 de las indicaciones para determinar las ecuaciones del diagrama del momento flexionante. Primero, en el segmento AB,

$$M_{AB} = \int V_{AB}\,dx + C = \int (-1500\,x + 6000)\,dx + C$$
$$M_{AB} = -750x^2 + 6000x + C$$

a

Para evaluar C, observe que en $x = 0$, $M_{AB} = 0$. Entonces $C = 0$. Y

$$M_{AB} = -750x^2 + 6000x$$

La ecuación se comprueba determinando M_B en $x = 6$ m.

$$M_B = -750(6)^2 + 6000(6) = 9000 \quad \text{(comprobación)}$$

Además requerimos el valor del momento máximo en D donde $x = 4.0$ m.

$$M_D = -750(4)^2 + 6000(4) = 12\,000 \quad \text{(comprobación)}$$

En el segmento BC:

$$M_{BC} = \int V_{BC}\,dx + C = \int -3000\,dx + C = -3000x + C$$

Pero, en $x = 9$ m, $M_{BC} = 0$. Entonces,

$$0 = -3000(9) + C$$

y $C = 27\,000$. Por último,

$$M_{BC} = -3000x + 27000$$

Compruebe esta ecuación en el punto B donde $x = 6$ m.

$$M_B = -3000(6) + 27000 = -18\,000 + 27000 = 9000 \quad \text{(comprobación)}$$

En resumen, las ecuaciones de los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante son: En el segmento AB desde $x = 0$ hasta $x = 6$ m:

$$V_{AB} = -1500x + 6000$$
$$M_{AB} = -750x^2 + 6000x$$

En el segmento BC desde $x = 6$ m hasta $x = 9$ m:

$$V_{BC} = -3000$$
$$M_{BC} = -3000x + 27000$$

Los valores máximos de la fuerza cortante y el momento flexionante son evidentes en los diagramas.

$$V_{\text{máx}} = 6000\,\text{N en el extremo izquierdo } A$$
$$M_{\text{máx}} = 12000\,\text{N·m en el punto } D\ (x = 4\text{ m})$$

Viga en voladizo con una carga distribuida variable. El objetivo es escribir las ecuaciones de los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de la viga y carga mostradas en la figura 5–46, siguiendo las indicaciones dadas en esta sección. Observe que la viga y la carga son las mismas que se mostraron en la figura 5–37.

En este ejemplo habrá sólo un segmento, que comprende toda la longitud de la viga, porque las curvas de la carga, la fuerza cortante y el momento flexionante son continuas.

Primero debemos escribir una ecuación de la carga que varía linealmente desde un valor de –200 lb/ft en el extremo izquierdo A hasta cero en el punto B donde $x = 8$ ft. Notará que la carga se muestra sobre la cara superior de la viga actuando hacia abajo en la forma en que acostumbramos ver las cargas. Pero la carga dirigida hacia abajo en realidad es negativa. Como ayuda al escribir la ecuación, podría volver a trazar el diagrama de carga en la forma de una *gráfica* de carga *versus* posición x, como se muestra en la figura 5–47. Entonces podemos escribir la ecuación de la línea recta,

$$w_{AB} = ax + b$$

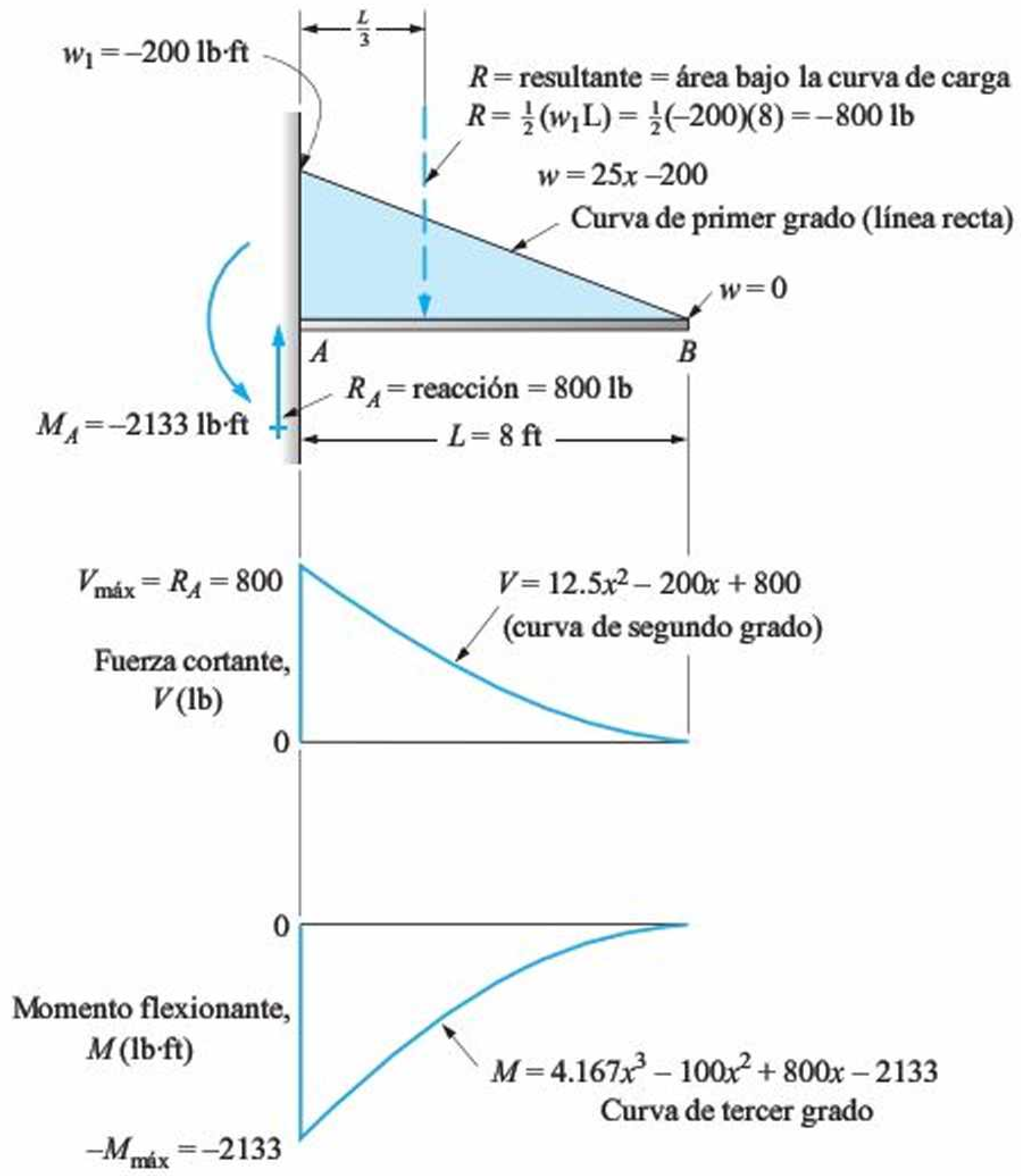
La pendiente, a, se evalúa por medio de la relación del cambio de w a lo largo de una distancia dada x. Si se utiliza toda la longitud de la viga se obtiene

$$a = \frac{w_1 - w_2}{x_1 - x_2} = \frac{-200 - 0}{0 - 8} = 25$$

El valor de $b = -200$ se observa en el diagrama de la figura 5–47. Por consiguiente, la ecuación final de la carga es

$$w_{AB} = 25x - 200$$

FIGURA 5–46
Viga en voladizo con una carga distribuida variable.



Podemos comprobar esta ecuación evaluando w en $x = 8$ ft en el extremo de la viga.

$$w_{AB} = 25(8) - 200 = 0 \quad \text{(comprobación)}$$

Ahora podemos derivar la ecuación del diagrama de fuerza cortante.

$$V_{AB} = \int w_{AB}\,dx + C = \int (25x - 200)\,dx + C = 12.5x^2 - 200x + C$$

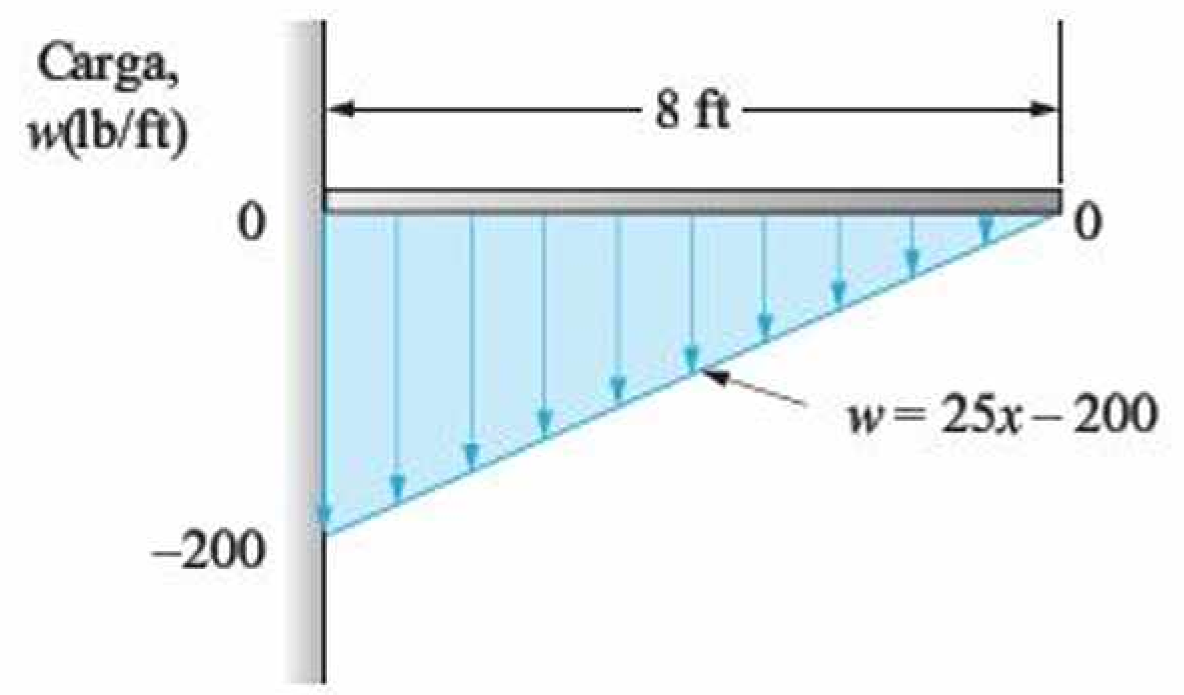
Usamos la condición de que en $x = 0$, $V_{AB} = 800$ para evaluar C.

$$800 = 12.5(0)^2 - 200(0) + C$$

Entonces, $C = 800$. Y la ecuación final de la fuerza cortante es

$$V_{AB} = 12.5x^2 - 200x + 800$$

FIGURA 5–47
Representación alterna de la carga sobre la viga de la figura 5–46.



Podemos comprobar esta ecuación evaluando V en $x = 8$ ft al final de la viga.

$$V_{AB} = 12.5(8)^2 = 200(8) + 800 = 0 \quad \text{(comprobación)}$$

Ahora podemos derivar la ecuación del diagrama de momento flexionante.

$$M_{AB} = \int V_{AB}\,dx + C = \int (12.5x^2 - 200x + 800)dx + C$$
$$M_{AB} = 4.167x^3 - 100x^2 + 800x + C$$

Utilizando la condición de que $x = 0$, $M_{AB} = -2133$, podemos evaluar C.

$$-2133 = 4.167(0)^3 - 100(0)^2 + 800(0) + C$$

Luego, $C = -2133$. La ecuación final del momento flexionante es

$$M_{AB} = 4.167x^3 - 100x^2 + 800x - 2133$$

Podemos comprobar esta ecuación evaluando M en $x = 8$ ft al final de la viga.

$$M_{AB} = 4.167(8)^3 - 100(8)^2 + 800(8) - 2133 = 0 \quad \text{(comprobación)}$$

En resumen, las ecuaciones de los diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante de la viga mostrada en la figura 5–46 son

$w_{AB} = 25x - 200$ una curva de primer grado; línea recta
$V_{AB} = 12.5x^2 - 200x + 800$ una curva de segundo grado
$M_{AB} = 4.167x^3 - 100x^2 + 800x - 2133$ una curva de tercer grado

Viga simplemente apoyada con una carga distribuida variable. El objetivo es escribir las ecuaciones de los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de la viga y la carga mostradas en la figura 5–48, siguiendo las indicaciones dadas en esta sección. En la figura 5–7 se muestra una ilustración de una forma de crear este patrón de carga.

Por la simetría de la carga, las dos reacciones serán de igual magnitud. Cada una será igual al área bajo una mitad del diagrama de carga. Si el área se divide en un rectángulo de 0.2 kN/m de altura por 2.30 m de ancho y en un triángulo de 1.0 kN/m de altura por 2.30 de ancho, podemos calcular:

$$R_A = R_C = (0.2)(2.30) + 0.5(1.0)(2.30) = 0.46 + 1.15 = 1.61\,\text{kN}$$

Las formas generales de los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante se muestran en la figura 5–48. Podemos deducir que la curva de la fuerza cortante cruza el eje cero a la mitad de la viga en $x = 2.30$ m. Por consiguiente, el momento flexionante máximo también ocurrirá en ese punto. En principio, la magnitud del momento flexionante máximo es igual al área bajo la curva de la fuerza cortante entre los puntos A y B. Sin embargo, el cálculo de dicha área es difícil porque la curva es de segundo grado y no se inicia en su vértice. En ese caso no se pueden utilizar directamente las fórmulas del apéndice A–1. Ésta es una razón para desarrollar las ecuaciones de los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.

Escribamos primero la ecuación de la carga que actúa en la mitad izquierda de la viga desde A hasta B. La cantidad de carga por unidad de longitud se inicia en –0.20 kN/m (dirigida

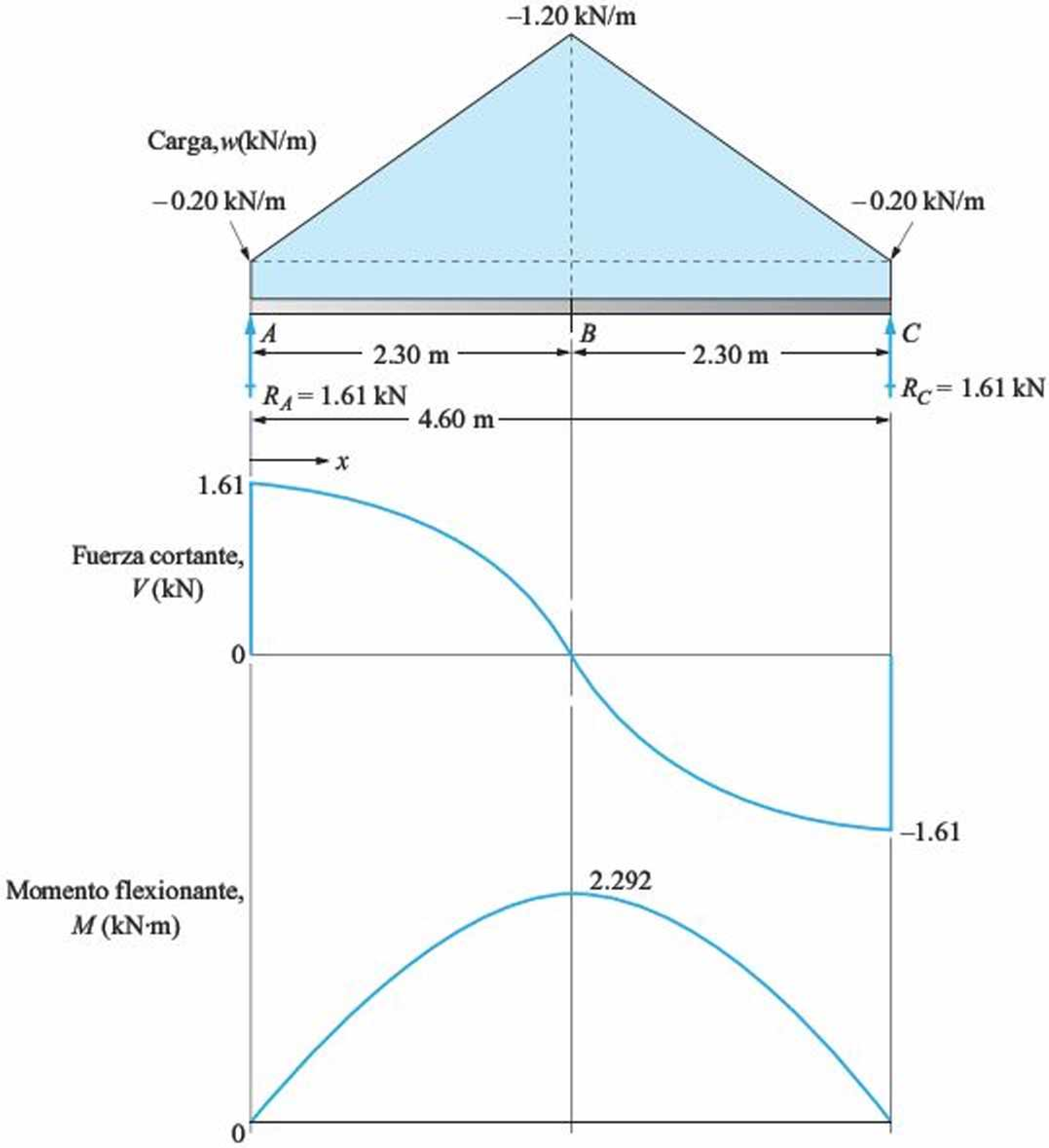


FIGURA 5–48
Viga simplemente apoyada con una carga distribuida variable.

hacia abajo) y se incrementa a −1.20 kN/m. De nueva cuenta, como se hizo en el ejemplo precedente, conviene trazar el diagrama de carga como si fuera una gráfica, como se muestra en la figura 5–49. Entonces podemos escribir las ecuaciones de la línea recta como sigue:

$$w_{AB} = ax + b$$

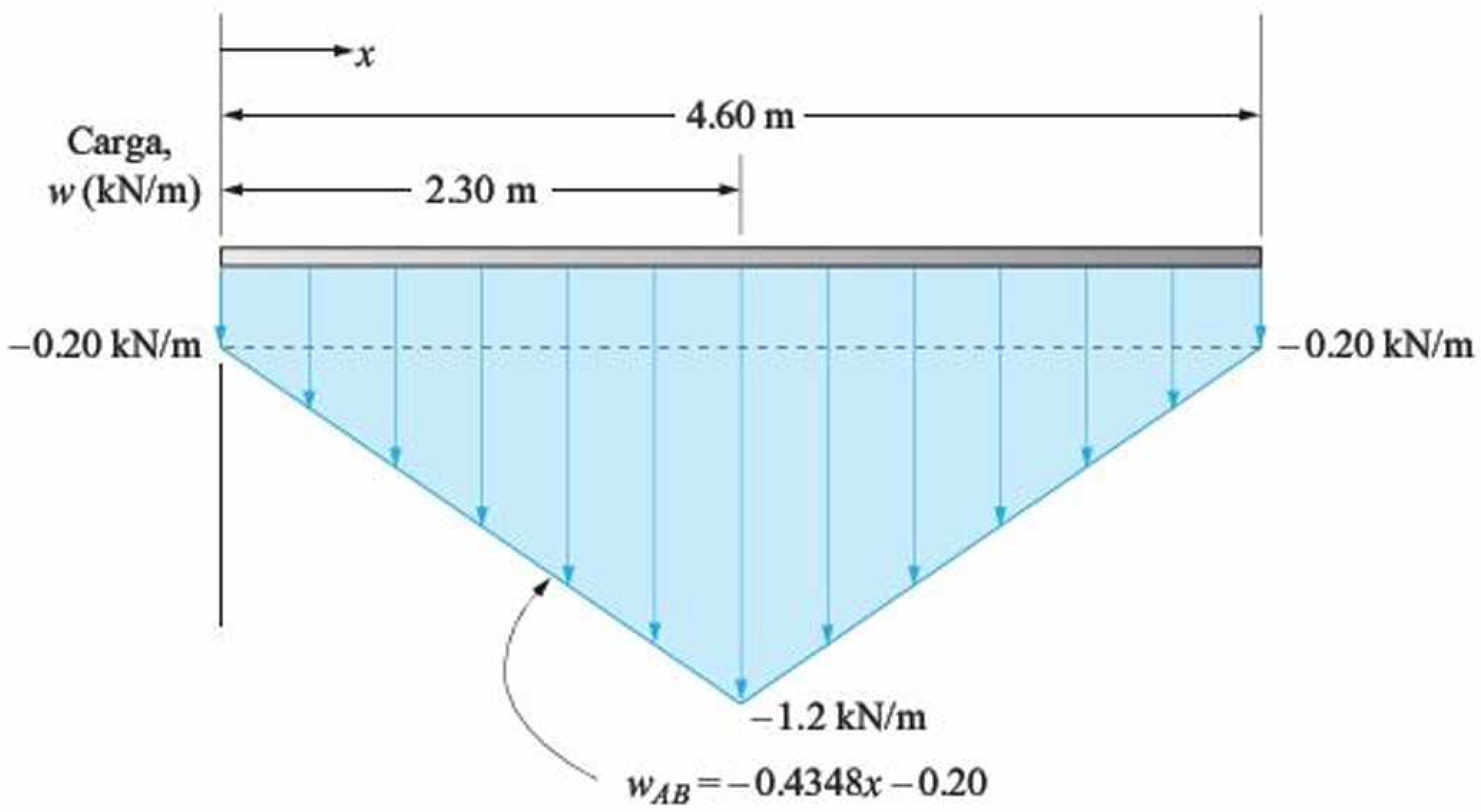


FIGURA 5–49
Representación alterna de la carga sobre la viga de la figura 5–48.

La pendiente, a, se calcula por medio de la razón del cambio de w a lo largo de una distancia dada x. Utilizando la mitad del largo de la viga se obtiene

$$a = \frac{w_1 - w_2}{x_1 - x_2} = \frac{-0.20 - (-1.20)}{0 - 2.30} = -0.4348$$

El valor de $b = 0.20$ se observa en el diagrama de la figura 5–48. Entonces la ecuación final de la carga es

$$w_{AB} = ax + b = -0.4348x - 0.20$$

Podemos comprobar esta ecuación en $x = 2.30$ a la mitad de la viga.

$$w_{AB} = -0.4348x - 0.20 = 0.4348(2.30) - 0.20 = 1.20 \text{ kN/m} \quad \text{(comprobación)}$$

Ahora podemos derivar la ecuación del diagrama de fuerza cortante correspondiente al segmento AB.

$$V_{AB} = \int w_{AB}\,dx + C = \int(-0.4348x - 0.20)dx + C = -0.2174x^2 - 0.20x + C$$

Use la condición de que $x = 0$, $V_{AB} = 1.61$ para evaluar C. Entonces $C = 1.61$ y la forma final de la ecuación es

$$V_{AB} = -0.2174x^2 - 0.20x + 1.61$$

Podemos comprobar esta ecuación a la mitad de la viga sustituyendo $x = 2.30$ m.

$$V_{AB} = -0.2174(2.30)^2 - 0.20(2.30) + 1.61 = 0 \quad \text{(comprobación)}$$

Entonces podemos derivar la ecuación del diagrama del momento flexionante.

$$M_{AB} = \int V_{AB}\,dx + C = \int(-0.2174x^2 - 0.20x + 1.61)\,dx + C$$
$$M_{AB} = -0.07246x^3 - 0.10x^2 + 1.61x + C$$

Utilizando la condición de que en $x = 0$, $M_{AB} = 0$, podemos evaluar $C = 0$. Y

$$M_{AB} = -0.07246x^3 - 0.10x^2 + 1.61x$$

Con $x = 2.30$ m se obtiene $M_B = 2.292$ kN·m. Las ecuaciones para el lado derecho de los diagramas se derivan de la misma manera. Sin embargo, por la simetría de los diagramas, las curvas del lado derecho son iguales a las del lado izquierdo. En resumen, las ecuaciones de la mitad izquierda de la carga, fuerza cortante y momento flexionante son

$$w_{AB} = -0.4348x - 0.20$$
$$V_{AB} = -0.2174x^2 - 0.20x + 1.61$$
$$M_{AB} = -0.07246x^3 - 0.10x^2 + 1.61x$$

La fuerza cortante máxima es de 1.61 kN en cada apoyo y el momento flexionante máximo es de 2.292 kN·m a la mitad de la viga.

5–12 VIGAS CONTINUAS: TEOREMA DE LOS TRES MOMENTOS

Una viga continua sobre cualquier número de apoyos puede ser analizada mediante el *teorema de los tres momentos*. El teorema en realidad relaciona los momentos flexionantes en tres apoyos sucesivos uno con otro y con las cargas que actúan en la viga. En el caso de una viga con sólo tres apoyos, el teorema permite el cálculo directo del momento en apoyo intermedio. Las condiciones conocidas en los extremos aportan datos para calcular momentos en los mismos. Entonces se pueden utilizar los principios de la estática para determinar las reacciones.

Para vigas sobre más de tres apoyos, el teorema se aplica sucesivamente a conjuntos de tres apoyos adyacentes (dos tramos), y de ese modo se obtiene un conjunto de ecuaciones que pueden ser resueltas simultáneamente para los momentos desconocidos.

Se puede utilizar el teorema de los tres momentos con cualquier combinación de cargas. Se han desarrollado formas especiales del teorema para cargas uniformemente distribuidas y cargas concentradas. En este capítulo se utilizarán estas formas.

Cargas uniformemente distribuidas sobre tramos adyacentes. La figura 5–50 muestra la disposición de las cargas y la definición de los términos aplicables a la ecuación (5–5).

Ecuación de los tres momentos–cargas distribuidas

$$M_A L_1 + 2M_B(L_1 + L_2) + M_C L_2 = \frac{-w_1 L_1^3}{4} - \frac{w_2 L_2^3}{4} \qquad \textbf{(5–5)}$$

Los valores de w_1 y w_2 se expresan en unidades de fuerza por unidad de longitud tales como N/m, lb/ft, etc. Los momentos flexionantes en los apoyos A, B y C son M_A, M_B y M_C. Si se conocen los valores de M_A y M_C en los extremos de la viga, M_B se calcula directamente con la ecuación (5–5). Los ejemplos demostrarán la aplicación de esta ecuación.

El caso especial en que dos tramos iguales soportan cargas uniformes iguales permite simplificar la ecuación (5–5). Si $L_1 = L_2 = L$ y $w_1 = w_2 = w$, entonces

$$M_A + 4M_B + M_C = \frac{-wL^2}{2} \qquad \textbf{(5–6)}$$

Cargas concentradas en tramos o claros adyacentes. Si cada uno de los tramos adyacentes soporta una carga concentrada, como se muestra en la figura 5–51, entonces se aplica la ecuación (5–7).

Ecuación de los tres momentos–cargas concentradas

$$M_A L_1 + 2M_B(L_1 + L_2) + M_C L_2 = \frac{-P_1 a}{L_1}(L_1^2 - a^2) - \frac{P_2 b}{L_2}(L_2^2 - b^2) \qquad \textbf{(5–7)}$$

El caso especial de dos tramos iguales sometidos a cargas iguales que actúan en el centro permite simplificar la ecuación (5–7). Si $P_1 = P_2 = P$ y $a = b = L/2$, entonces,

$$M_A + 4M_B + M_C = 3PL/4 \qquad \textbf{(5–8)}$$

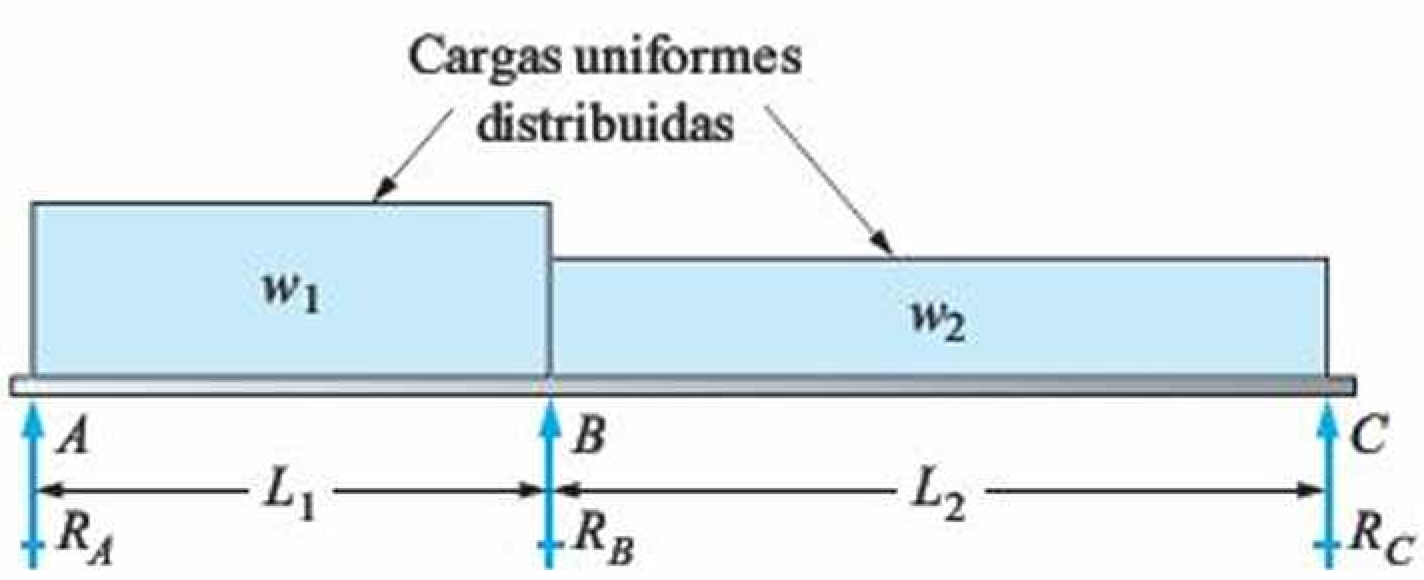


FIGURA 5–50 Cargas uniformemente distribuidas sobre una viga continua de dos claros o tramos.

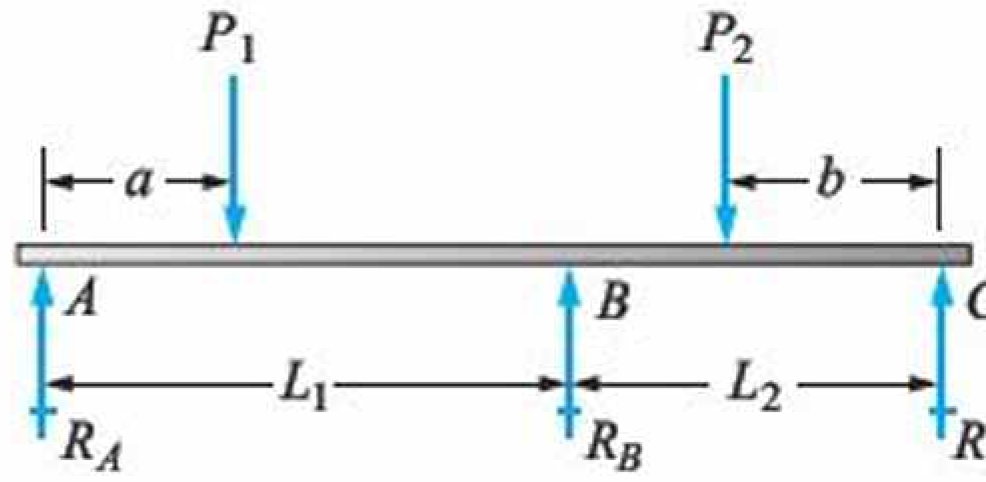
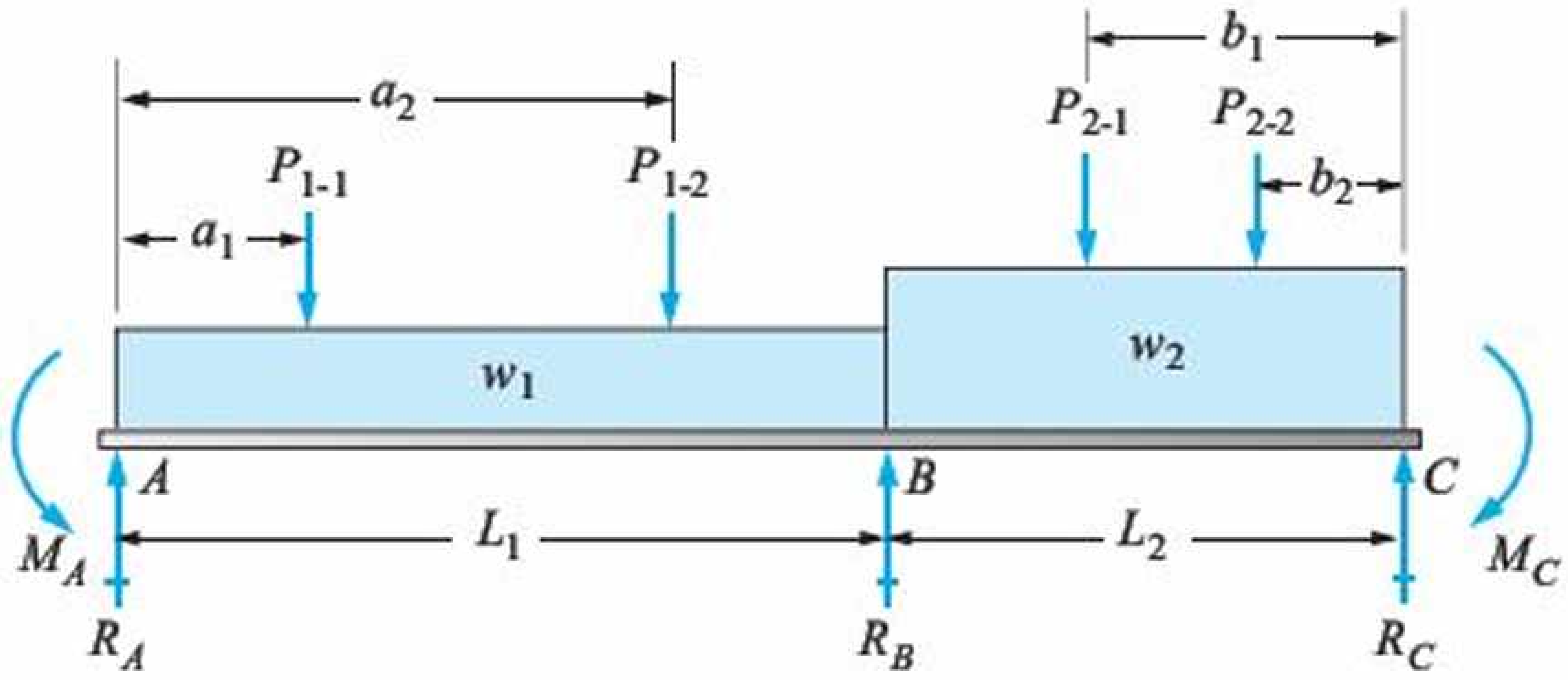


FIGURA 5–51 Viga continua de dos claros con una carga concentrada en cada uno.

FIGURA 5–52 Notación general para los términos de la ecuación (5–9)



Combinaciones de cargas uniformemente distribuidas y varias cargas concentradas. Éste es un caso un tanto general, lo que permite que cada tramo soporte una carga uniformemente distribuida y cualquier número de cargas concentradas, como se sugiere en la figura 5–52. La ecuación general para una carga como ésta es una combinación de las ecuaciones (5–5) y (5–7), dada como la ecuación (5–9).

Ecuación de los tres momentos–forma general

$$M_A L_1 + 2M_B(L_1 + L_2) + M_C L_2 = -\sum\left[\frac{P_i a_i}{L_1}(L_1^2 - a_i^2)\right]_1 - \sum\left[\frac{P_i b_i}{L_2}(L_2^2 - b_i^2)\right]_2 - \frac{w_1 L_1^3}{4} - \frac{w_2 L_2^3}{4} \tag{5–9}$$

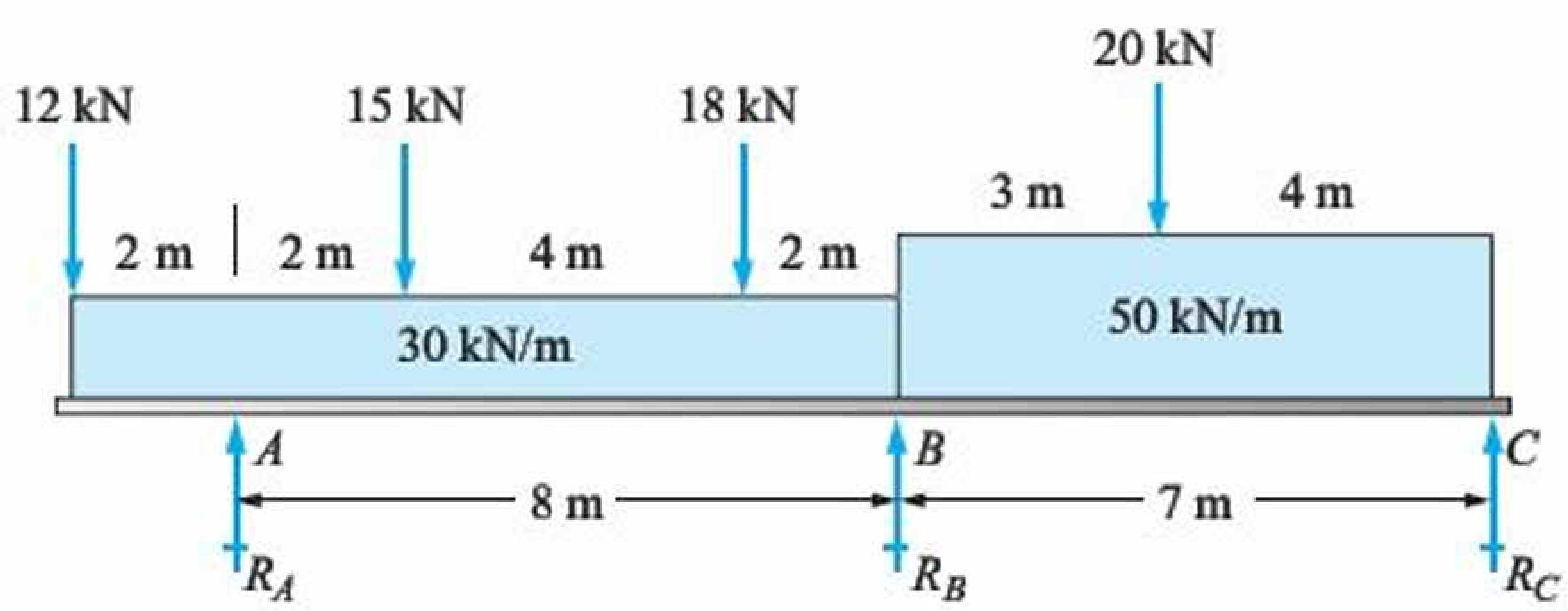
Los términos entre paréntesis con el subíndice 1 tienen que ser evaluados por *cada* carga concentrada en el tramo 1 y luego sumados. Asimismo, el término con el subíndice se aplica repetidamente para todas las cargas en el tramo 2. Observe que las distancias a_i se miden a partir de la reacción en A por cada carga que actúa en el tramo 1, y las distancias b_i se miden a partir de la reacción C por cada carga que actúa en el tramo 2. Los momentos en los extremos A y C pueden deberse a los momentos concentrados aplicados allí o a cargas que actúan en los tramos salientes después de los apoyos. Cualquiera de los términos en la ecuación (5–9) puede dejarse fuera de la solución de un problema si no hay ninguna carga apropiada o momento en una sección particular para la cual se está escribiendo la ecuación. Además, se podrían incluir otras cargas concentradas además de las mostradas en la figura 5–52.

Problema de ejemplo 5–8 La carga compuesta de una combinación de cargas distribuidas y cargas concentradas, mostrada en la figura 5–53, tiene que ser analizada para determinar las reacciones en los tres apoyos y los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante completos. La viga de 17 m tiene que ser utilizada como viga de piso en un edificio industrial.

Solución Objetivo Determinar las reacciones en los apoyos y trace los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.

Datos La carga que actúa en la viga mostrada en la figura 5–53.

FIGURA 5–53 Viga del problema de ejemplo 5–8.



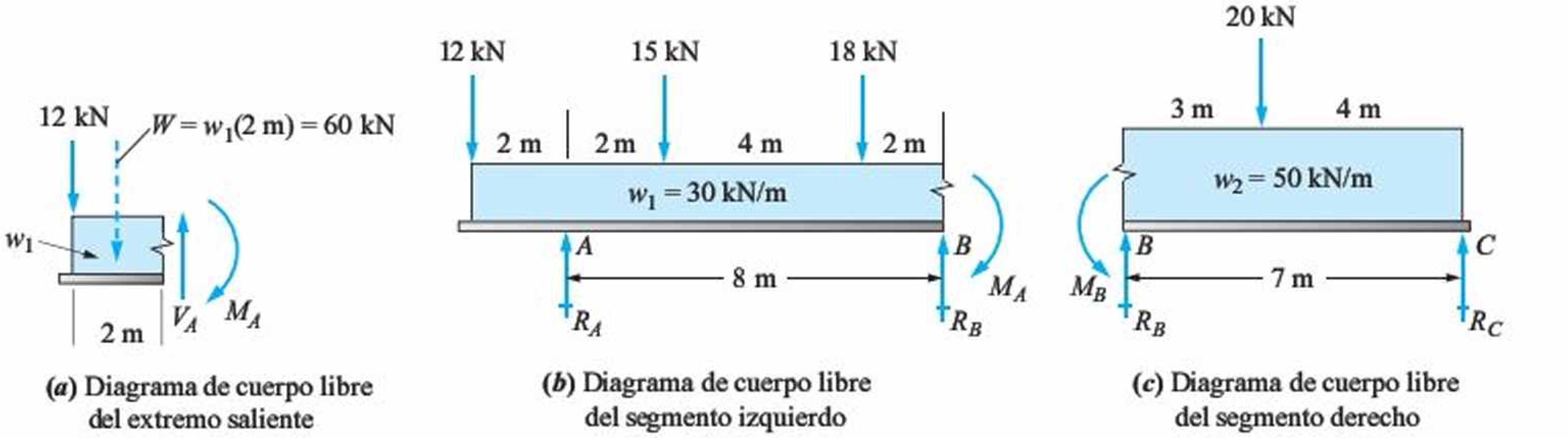


FIGURA 5–54 Diagramas de cuerpo libre de segmentos de viga utilizados para determinar las reacciones R_A, R_B y R_C.

Análisis Como el patrón de carga contiene tanto cargas concentradas como cargas uniformemente distribuidas, utilizaremos la ecuación (5–9). El subíndice *1* se refiere al tramo 1 entre los apoyos A y B, y el subíndice *2* se refiere al tramo 2 entre los apoyos B y C. Evaluaremos la magnitud real de M_A y M_C para facilitar la solución de la ecuación (5–9). Como el punto C es el extremo de un tramo simplemente apoyado, $M_C = 0$. En el punto C consideramos la parte saliente de la viga a la izquierda de A como el cuerpo libre mostrado en la figura 5–54(a). Luego sumamos los momentos con respecto a A para determinar el momento interno en el punto A de la viga. Junto con la carga de 12 kN que actúa a 2.0 m de A, una resultante de 60 kN provocada por la carga distribuida actúa a una distancia de 1.0 m de A. Por consiguiente,

$$M_A = -12\text{ kN}\,(2\text{m}) - 60\text{ kN}\,(1\text{m}) = -84\text{ kN}\cdot\text{m}$$

Se evaluará cada uno de los términos restantes de la ecuación (5–9).

$$M_A L_1 = -84\text{ kN}\cdot\text{m}(8\text{ m}) = -672\text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

$$2M_B(L_1 + L_2) = 2M_B(8 + 7) = M_B(30\text{ m})$$

$$-\sum\left[\frac{P_i a_i}{L_1}(L_1^2 - a_i^2)\right]_1 = -\frac{15(2)}{8}(8^2 - 2^2) - \frac{18(6)}{8}(8^2 - 6^2)$$

$$= -603\text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

$$-\sum\left[\frac{P_i b_i}{L_2}(L_2^2 - b_i^2)\right]_2 = -\frac{20(4)}{7}(7^2 - 4^2) = -377\text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

$$-\frac{w_1 L_1^3}{4} = -\frac{30(8)^3}{4} = -3840\text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

$$-\frac{w_2 L_2^3}{4} = -\frac{50(7)^3}{4} = -4288\text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

En este punto, si se sustituyen estos valores en la ecuación (5–9) se obtiene

$$-672\text{ kN}\cdot\text{m}^2 + M_B(30\text{ m}) + 0 = (-603 - 377 - 3840 - 4288)\text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

Resolviendo para M_B se obtiene

$$M_B = -281\ \text{kN·m}$$

Reacciones en los apoyos Con los t res momentos en los puntos de apoyo A, B y C se pueden calcular las reacciones en dichos apoyos. El procedimiento de solución se inicia considerando cada uno de los dos tramos como cuerpos libres distintos, como se muestra en la figura 5–54(b) y (c). En cada caso, cuando la viga se desune en B, el momento M_B se muestra actuando en el corte para mantener el equilibrio. Luego, con el segmento izquierdo, podemos sumar momentos con respecto al punto B y resolver para la reacción izquierda, R_A.

$$\sum M_B = 0 = 12\ \text{kN}(10\ \text{m}) + 15\ \text{kN}(6\ \text{m}) + 300\ \text{kN}(5\ \text{m}) + 18\ \text{kN}(2\ \text{m})$$
$$-281\ \text{kN·m} - R_A(8\ \text{m})$$
$$R_A = 183\ \text{kN}$$

Asimismo, si se utiliza el segmento derecho y se suman los momentos con respecto al punto B se puede determinar la reacción derecha, R_C.

$$\sum M_B = 0 = 20\ \text{kN}(3\ \text{m}) + 350\ \text{kN}(3.5\ \text{m}) - 281\ \text{kN·m} - R_C(7\ \text{m})$$
$$R_C = 143\ \text{kN}$$

Ahora podemos utilizar la fórmula $\Sigma F_{v=0}$ para determinar la reacción intermedia, R_B.

$$\sum F_v = 0 = 12\ \text{kN} + 15\ \text{kN} + 18\ \text{kN} + 20\ \text{kN} + 300\ \text{kN} + 350\ \text{kN}$$
$$-183\ \text{kN} - 143\ \text{kN} - R_B$$
$$R_B = 389\ \text{kN}$$

Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante Ya tenemos los datos necesarios para trazar los diagramas completos, como se muestra en la figura 5–55.

Comentario En resumen, las fuerzas de reacción son

$$R_A = 183\ \text{kN}$$
$$R_B = 389\ \text{kN}$$
$$R_C = 143\ \text{kN}$$

La figura 5–55 muestra que los momento flexionantes positivos máximos locales ocurren entre los apoyos y los negativos en los apoyos. El momento flexionante positivo máximo total es de 204 kN·m a 2.86 m de C donde la curva de la fuerza cortante cruza el eje cero. El momento flexionante negativo máximo real es de –281 kN·m en el apoyo B. Si se utiliza una viga de sección transversal uniforme, se tendría que diseñar para que soporte un momento flexionante de 281 kN·m. Pero observe que este valor es un pico bastante evidente en el diagrama de momento flexionante. Puede resultar económico diseñar una viga para que soporte el momento flexionante de 204 kN·m y luego agregarle placas de refuerzo cerca del apoyo B para incrementar su módulo de sección allí a un nivel que fuera seguro para el momento de 281 kN·m. Es posible que se haya percatado de muchos pasos superiores en carreteras diseñados de esta manera.

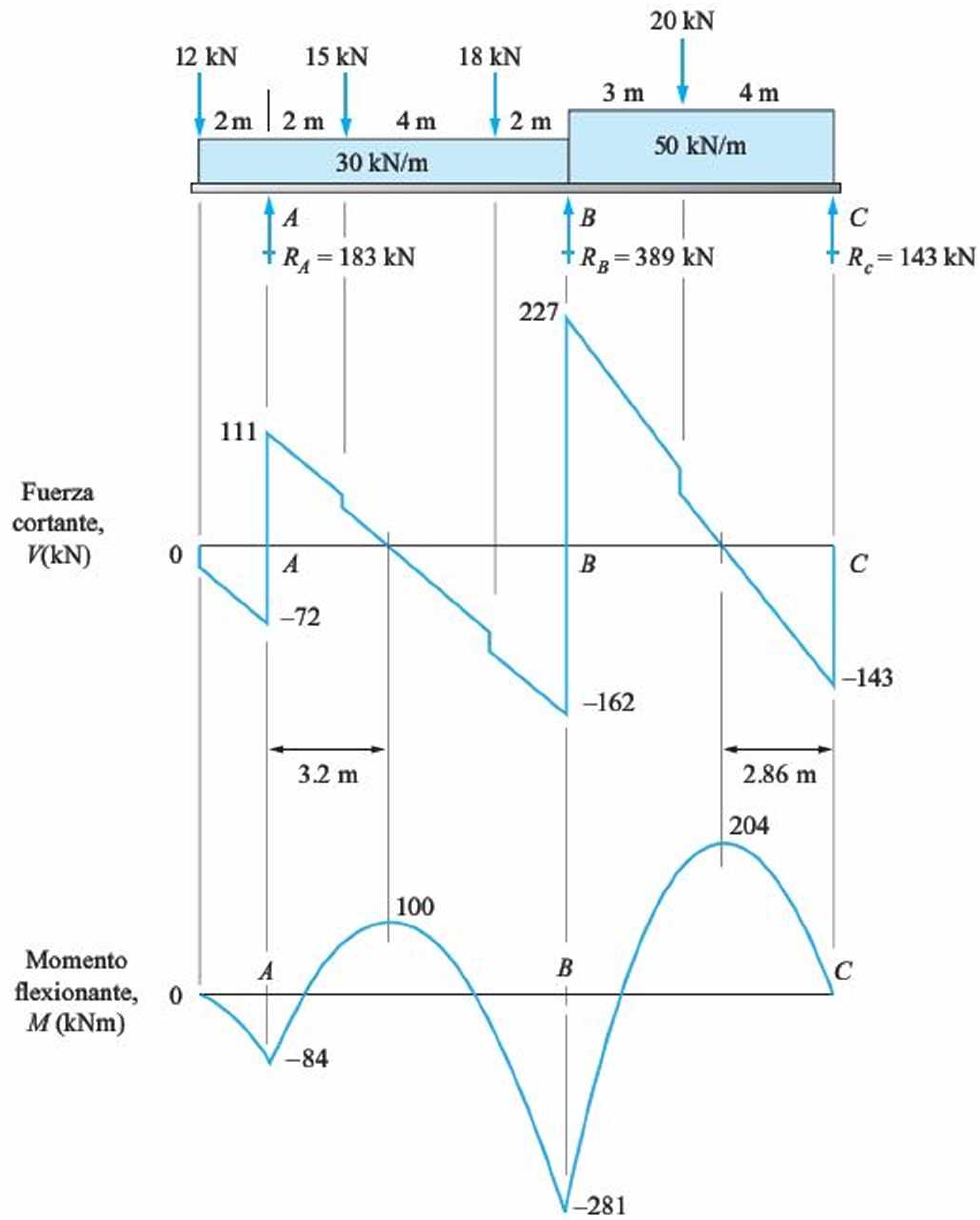


FIGURA 5–55
Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante del problema de ejemplo 5–8.

Fórmulas para patrones comunes de carga y apoyos. El apéndice A–25 contiene ilustraciones y fórmulas para los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de diez casos especiales de vigas continuas. Estos casos corresponden a patrones de carga y apoyo que con frecuencia se presentan en la construcción de edificios, diseño de puentes, estructuras de maquinaria o vehículos y en algunos productos de consumo. Se incluyen:

1. Vigas en voladizo apoyadas: cuatro patrones de carga
2. Vigas con extremos empotrados: tres patrones de carga
3. Vigas continuas: cargas uniformemente distribuidas en dos tramos, tres tramos y cuatro tramos.

Las tablas incluyen:

- Ilustraciones de los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante resultantes.
- La forma general de las deflexiones de vigas.

- Ecuaciones de reacciones en los apoyos, fuerzas cortantes y momentos flexionantes en puntos críticos.
- Ecuaciones de la deflexión de vigas para la mayoría de los patrones de carga.

Consulte en el capítulo 9 un tratamiento más amplio y más técnicas de análisis de deflexiones de vigas.

Es importante entender la forma general de los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante, de modo que sea capaz de diseñar vigas seguras y eficientes como se analiza en los capítulos 7 y 8.

PROBLEMAS

Problemas relacionados con las figuras P5–1 a P5–76

Las figuras P5–1 a P5–76 muestran varios tipos de vigas y condiciones de carga. Para la viga mostrada en cada figura se pueden aplicar cualquiera o todos los enunciados de problema siguientes:

1. Calcule las reacciones en los apoyos por medio de las técnicas mostradas en la sección 5–3.
2. Trace los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante completos por medio de las técnicas mostradas en las secciones 5–4 a 5–9.
3. Determine la magnitud y ubicación del valor absoluto máximo de la fuerza cortante y el momento flexionante.
4. Use el método del diagrama de cuerpo libre mostrado en las secciones 5–4 a 5–6 para determinar la fuerza cortante interna y el momento flexionante en un punto especificado cualquiera en una viga.
5. Escriba ecuaciones para todos los segmentos de los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante siguiendo las indicaciones presentadas en la sección 5–11.

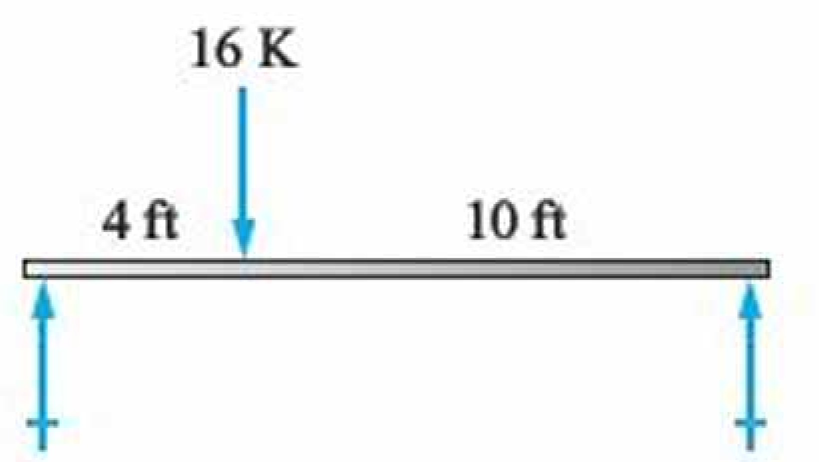


FIGURA P5–3

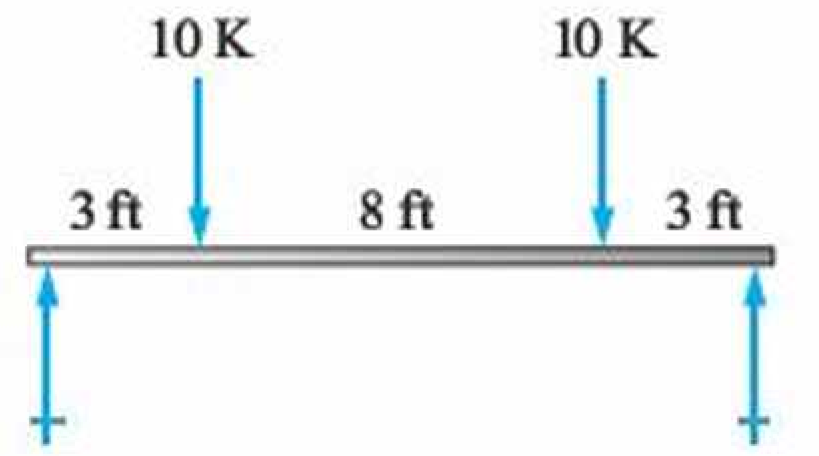


FIGURA P5–4

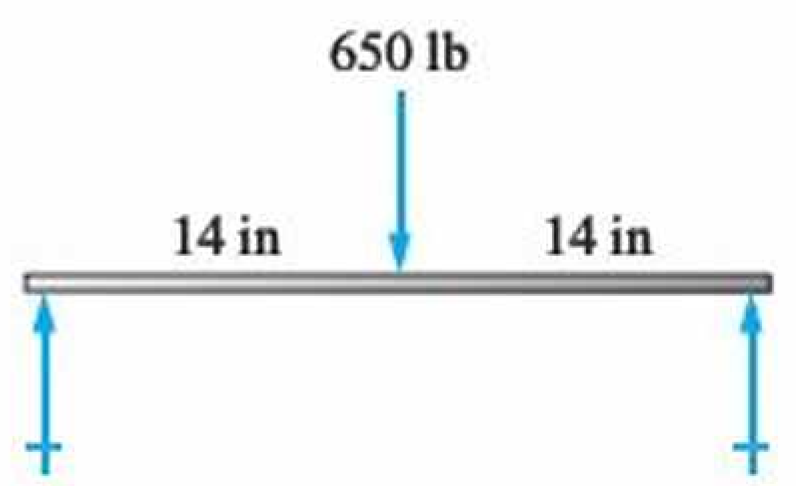


FIGURA P5–1

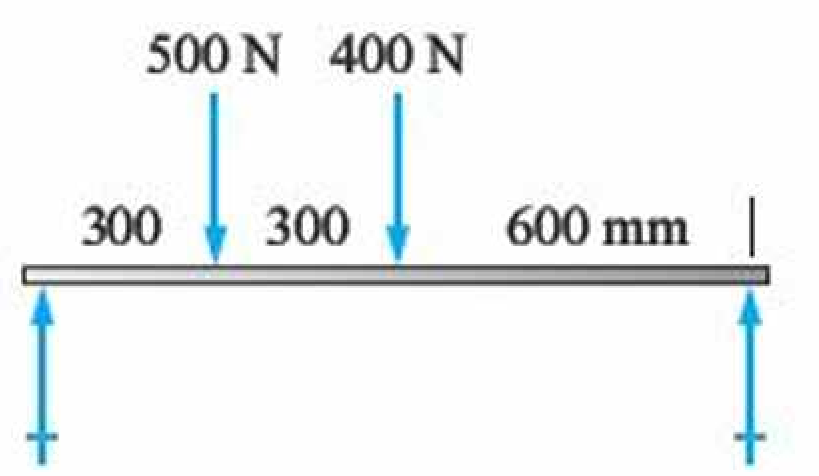


FIGURA P5–5

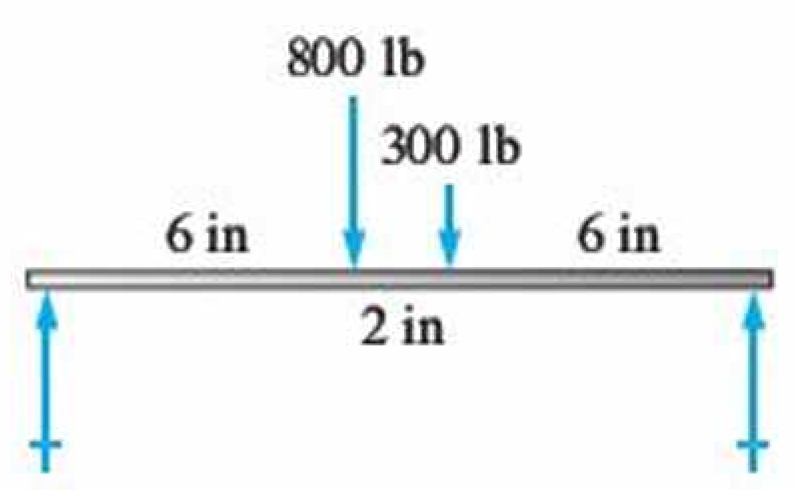


FIGURA P5–2

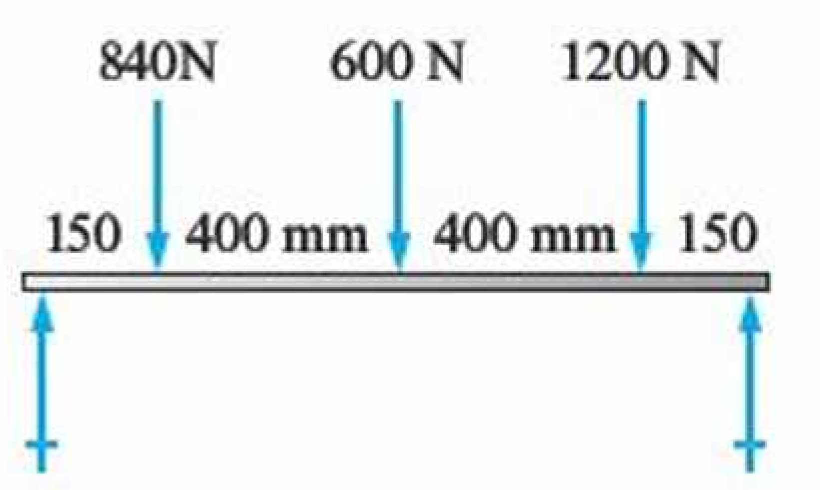


FIGURA P5–6

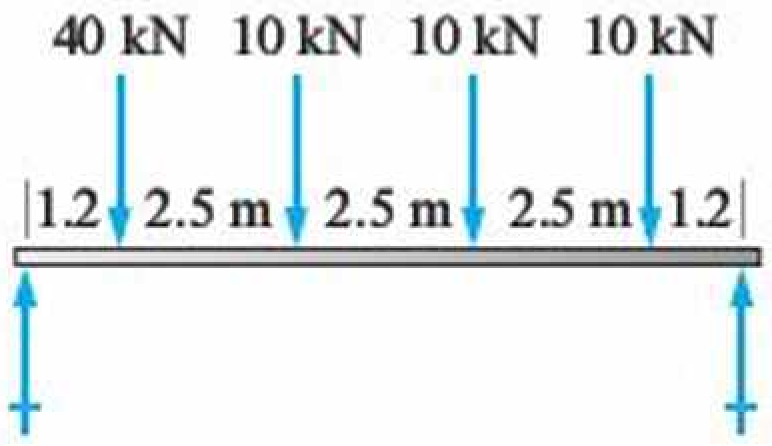


FIGURA P5–7

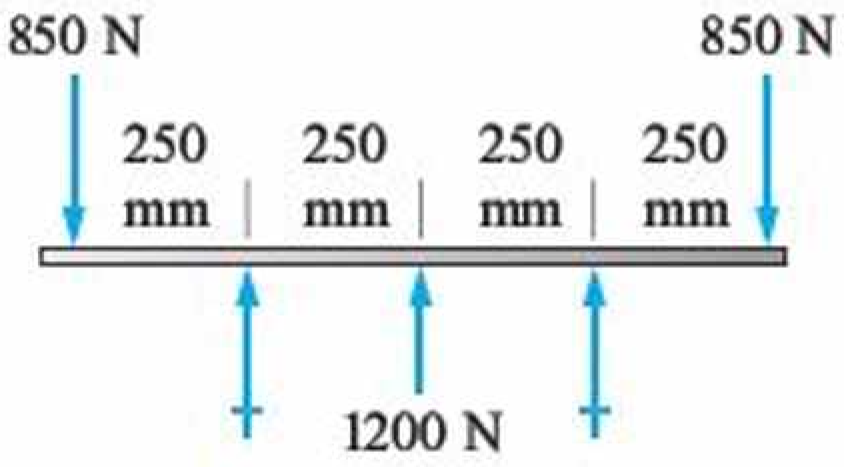


FIGURA P5–13

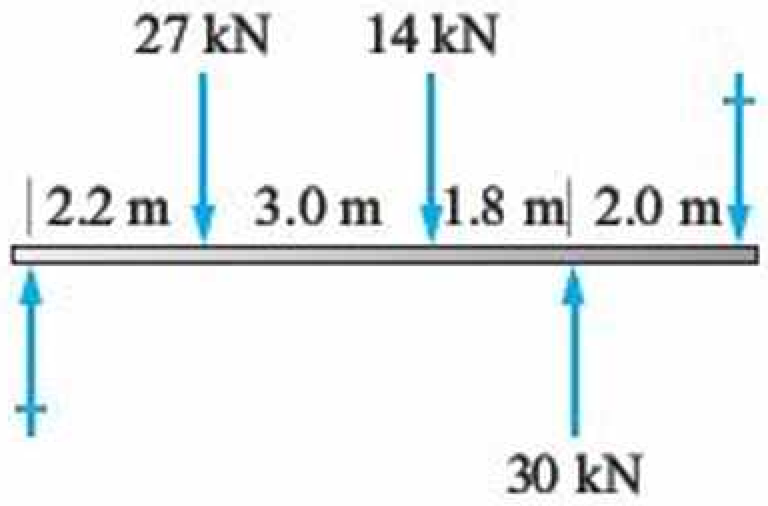


FIGURA P5–8

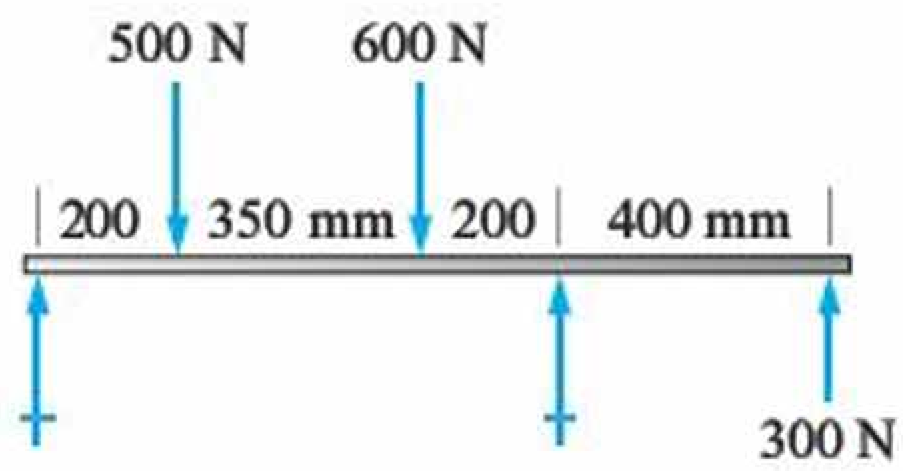


FIGURA P5–14

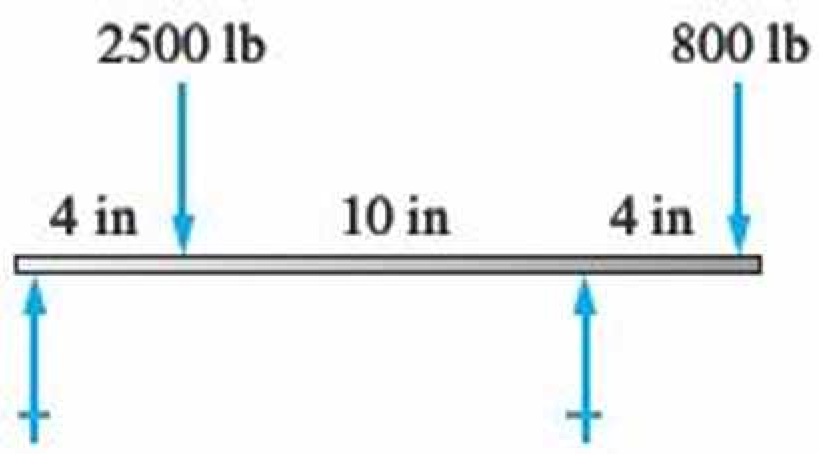


FIGURA P5–9

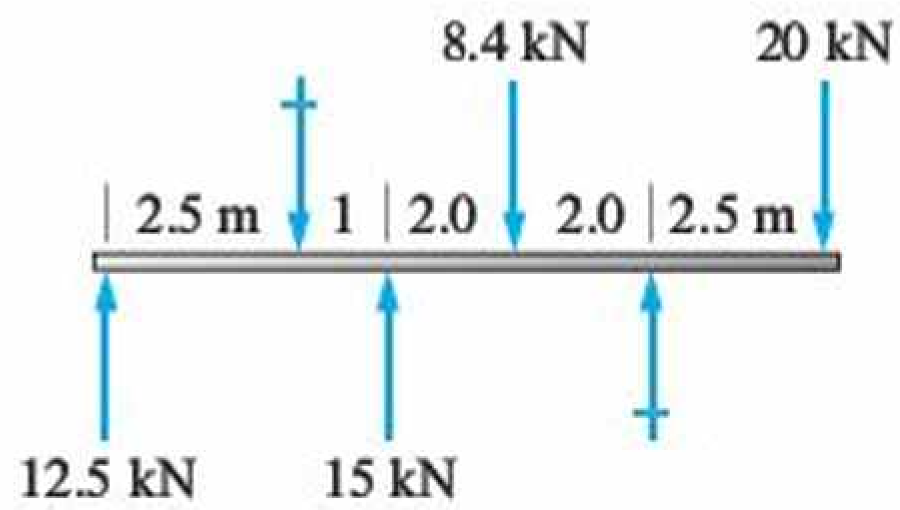


FIGURA P5–15

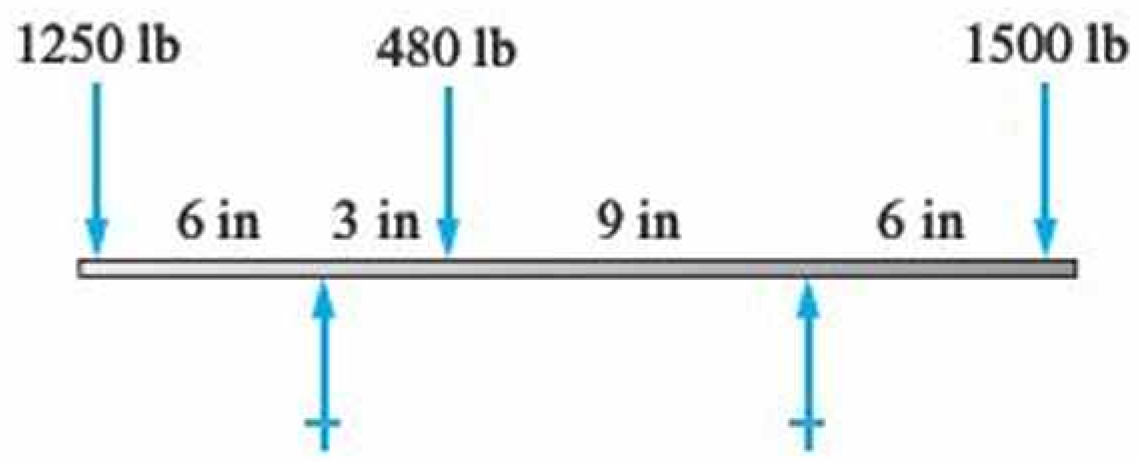


FIGURA P5–10

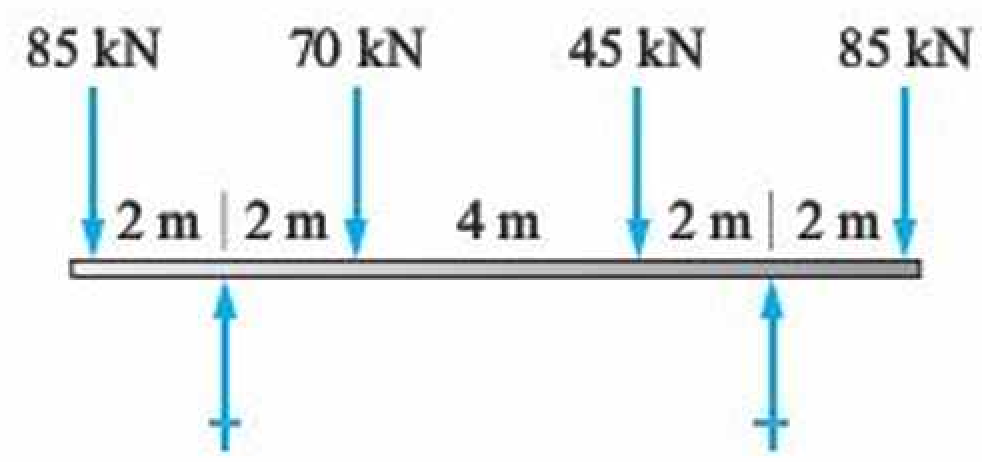


FIGURA P5–16

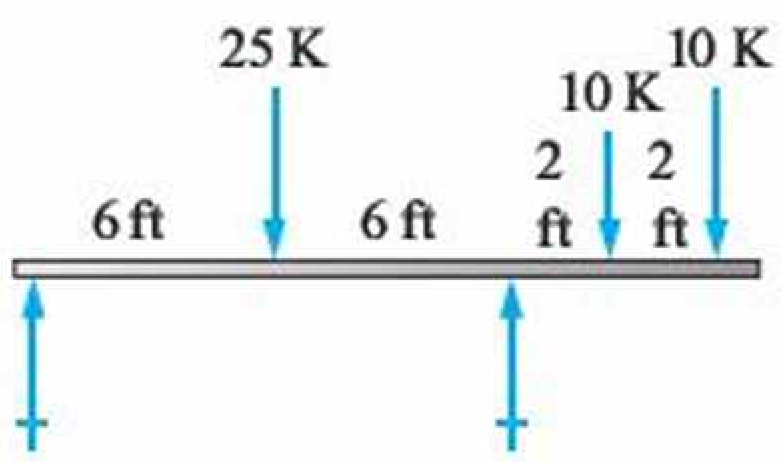


FIGURA P5–11

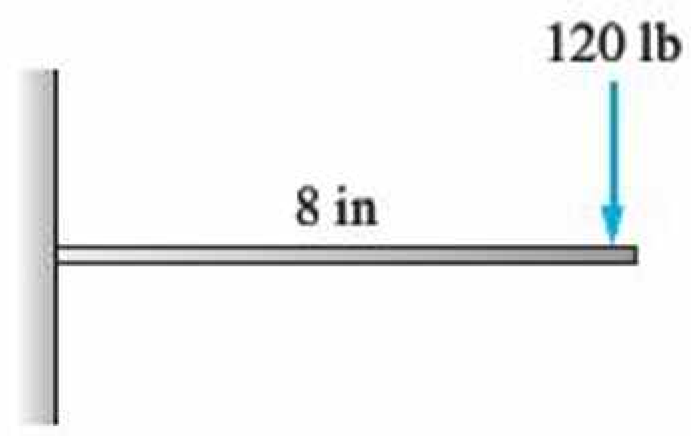


FIGURA P5–17

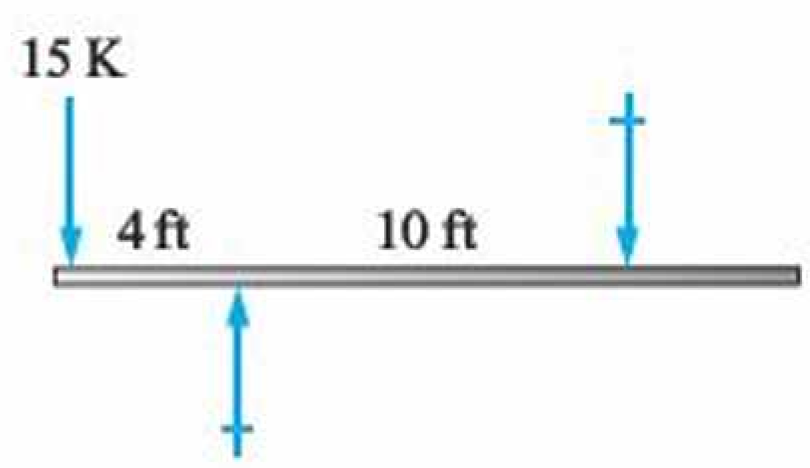


FIGURA P5–12

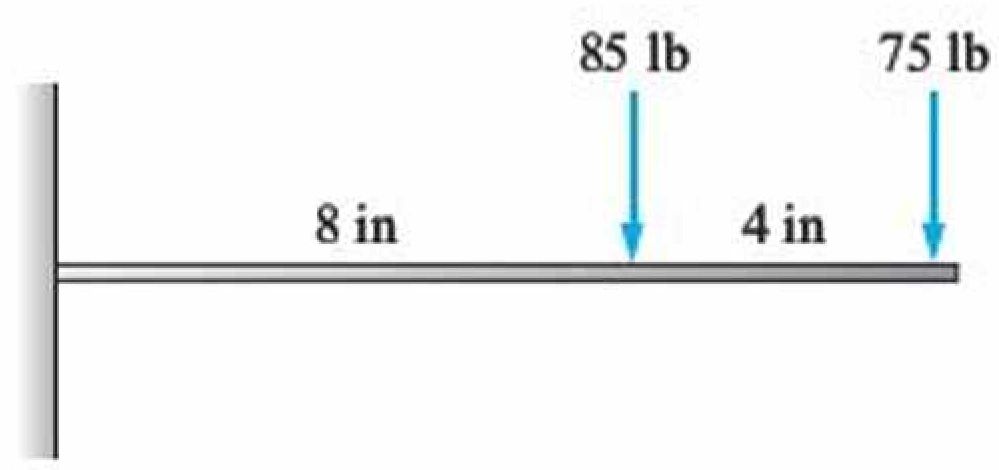


FIGURA P5–18

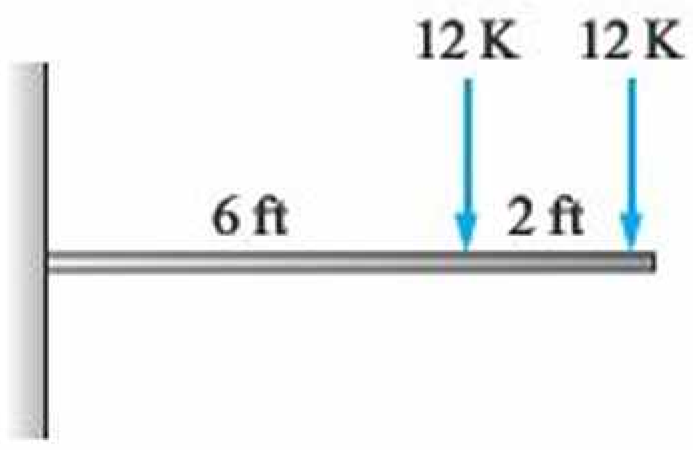


FIGURA P5–19

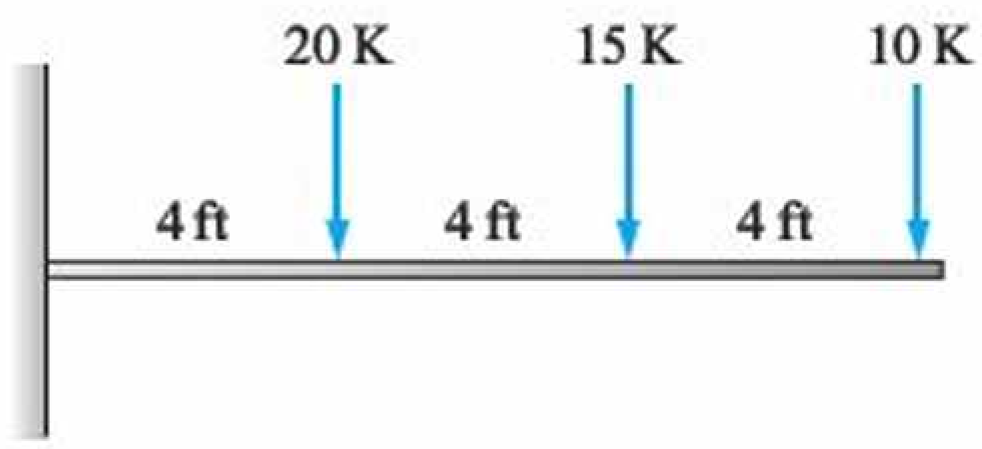


FIGURA P5–20

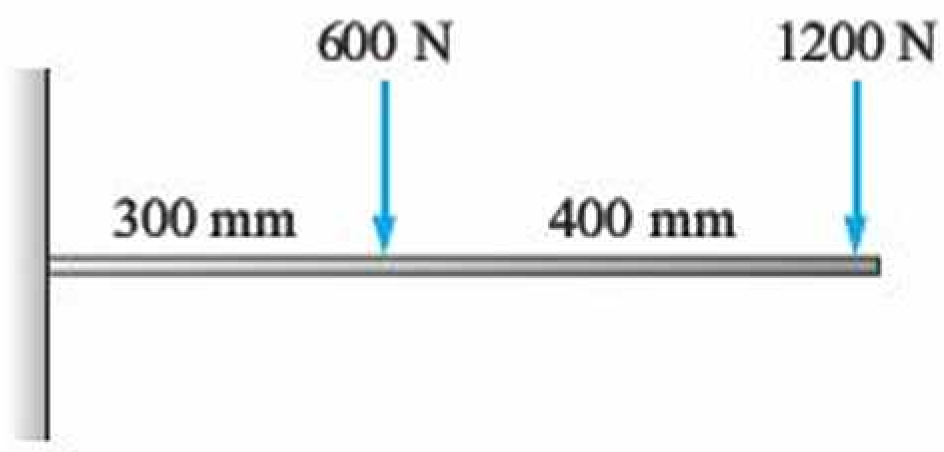


FIGURA P5–21

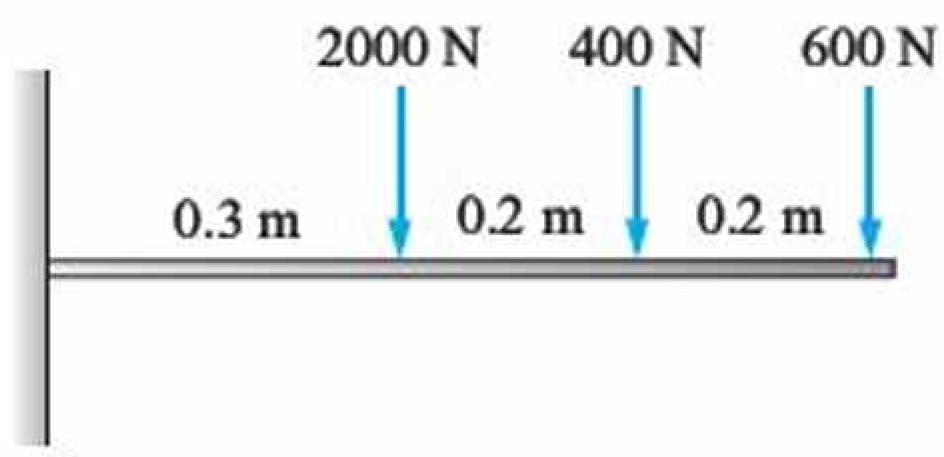


FIGURA P5–22

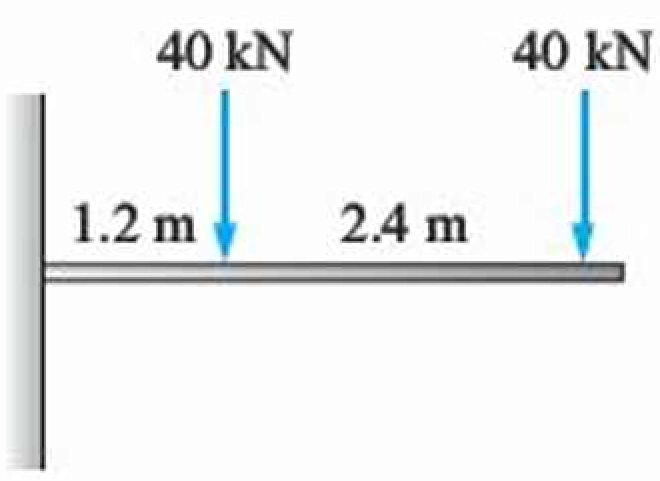


FIGURA P5–23

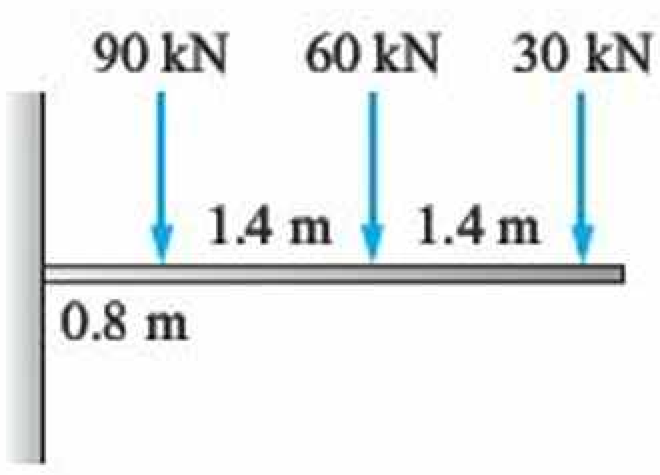


FIGURA P5–24



FIGURA P5–25

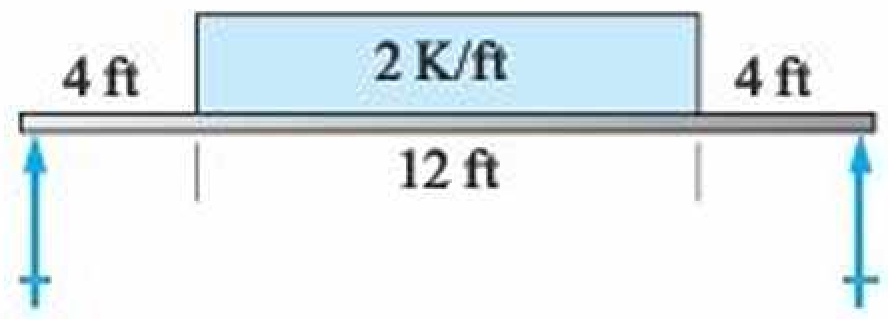


FIGURA P5–26

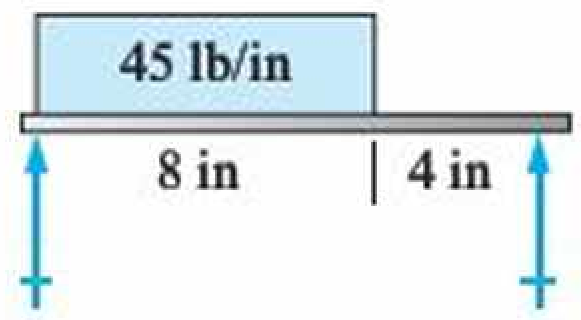


FIGURA P5–27

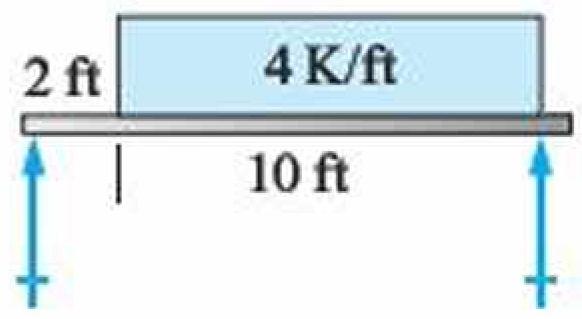


FIGURA P5–28

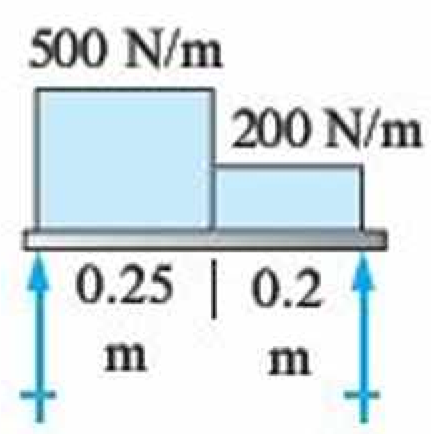


FIGURA P5–29

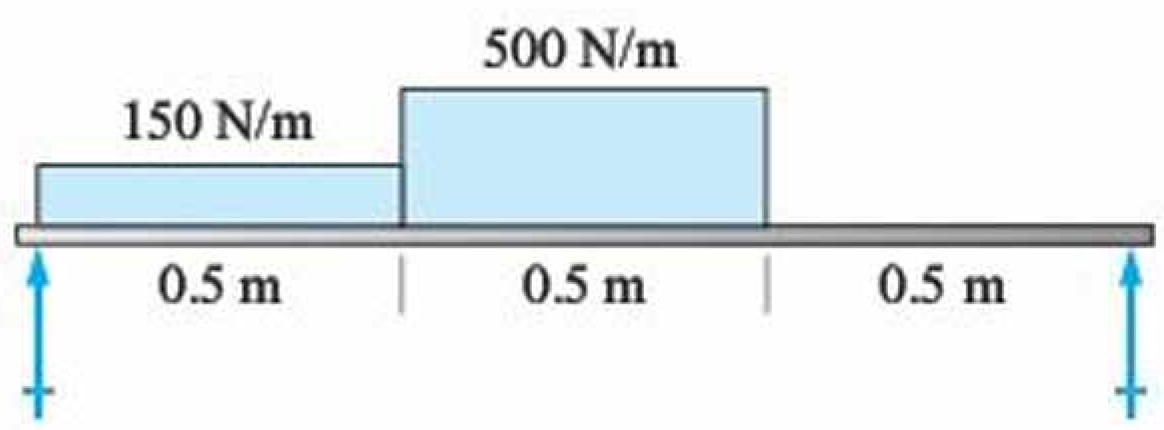


FIGURA P5–30

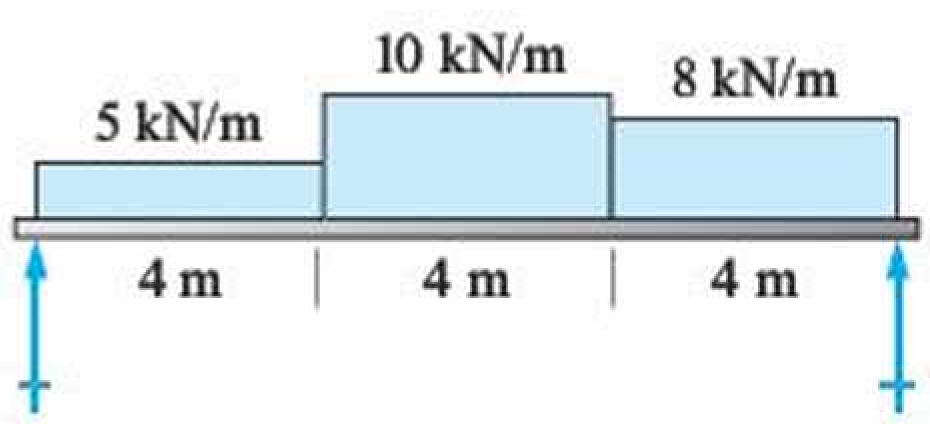


FIGURA P5–31

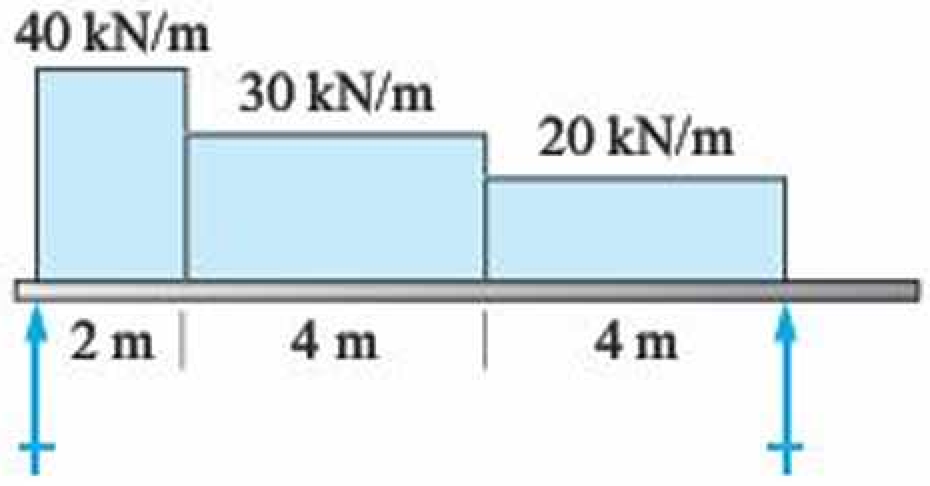


FIGURA P5–32

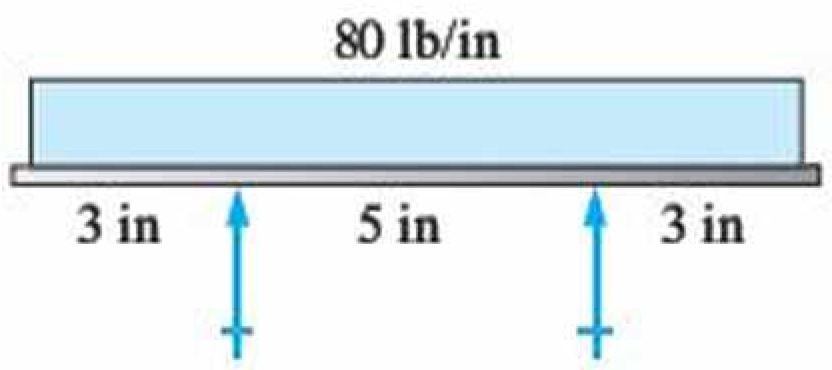


FIGURA P5–33

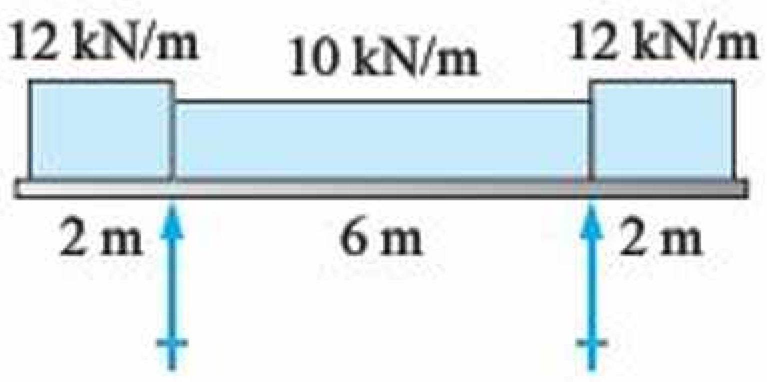


FIGURA P5–34

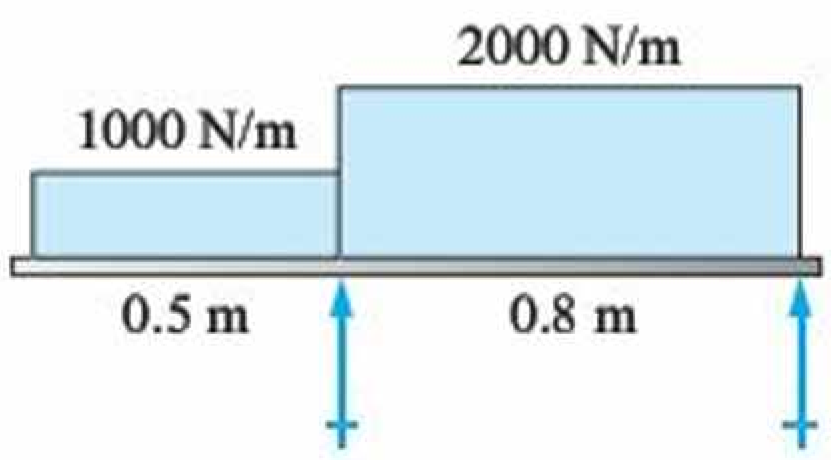


FIGURA P5–35

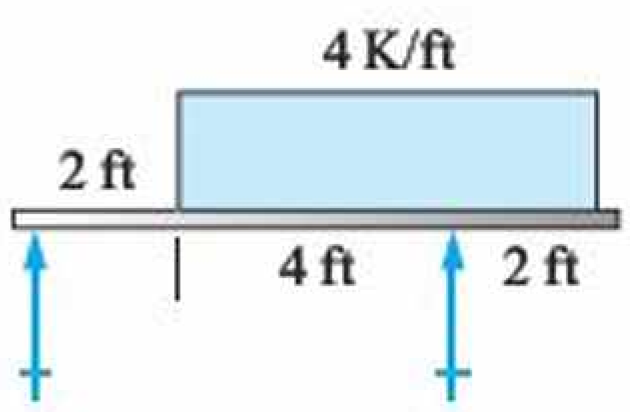


FIGURA P5–36

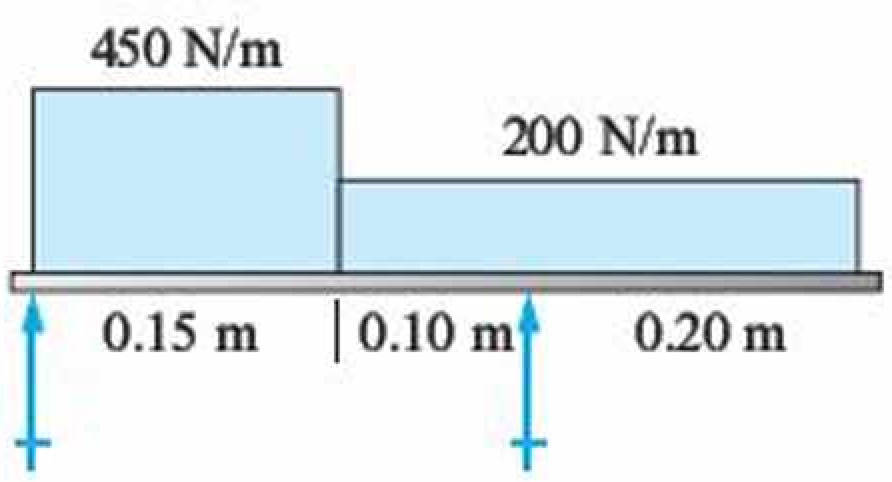


FIGURA P5–37

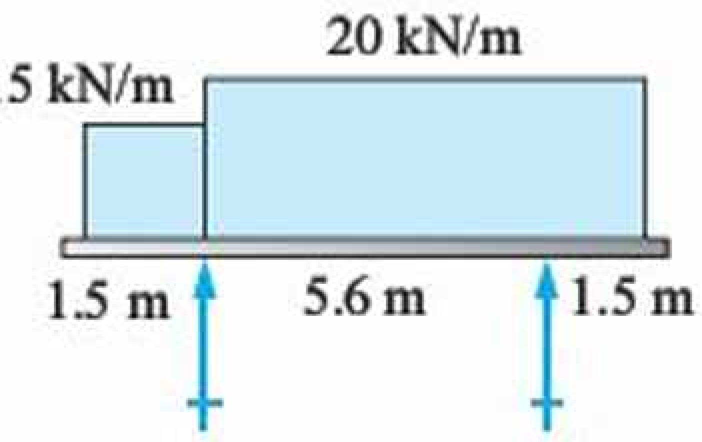


FIGURA P5–38

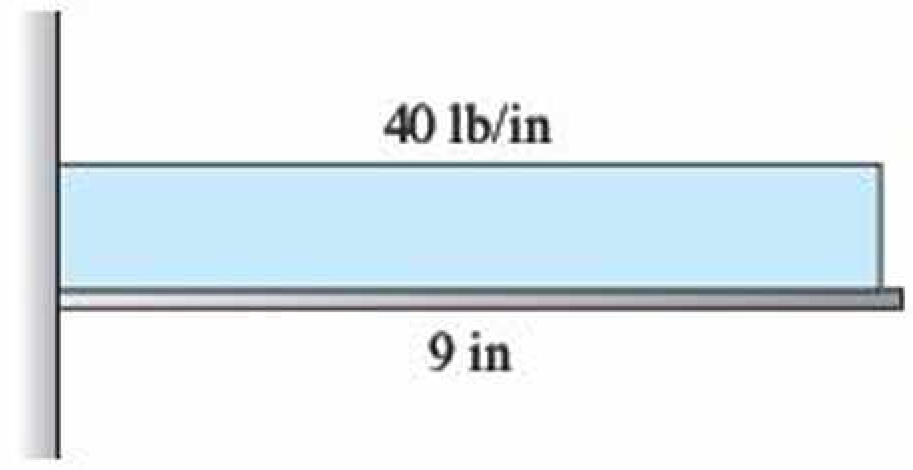


FIGURA P5–39

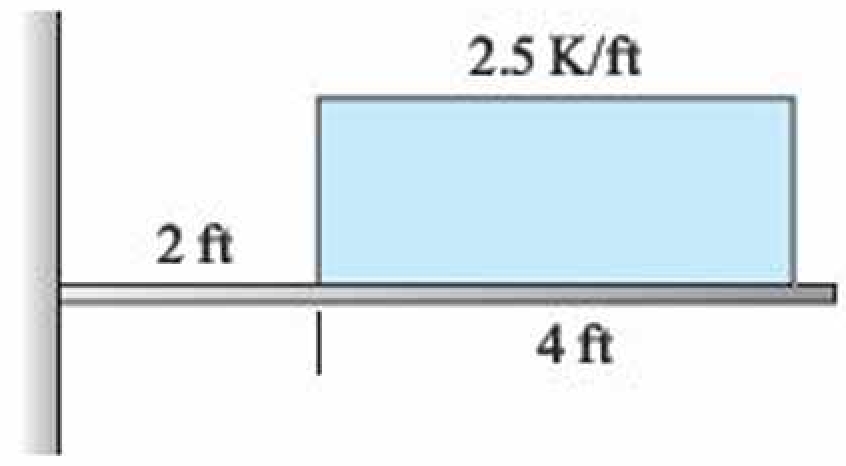


FIGURA P5–40

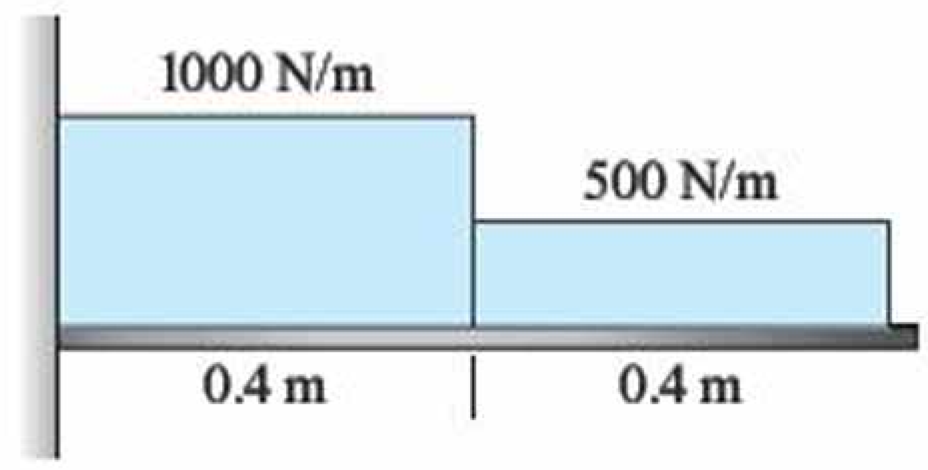


FIGURA P5–41

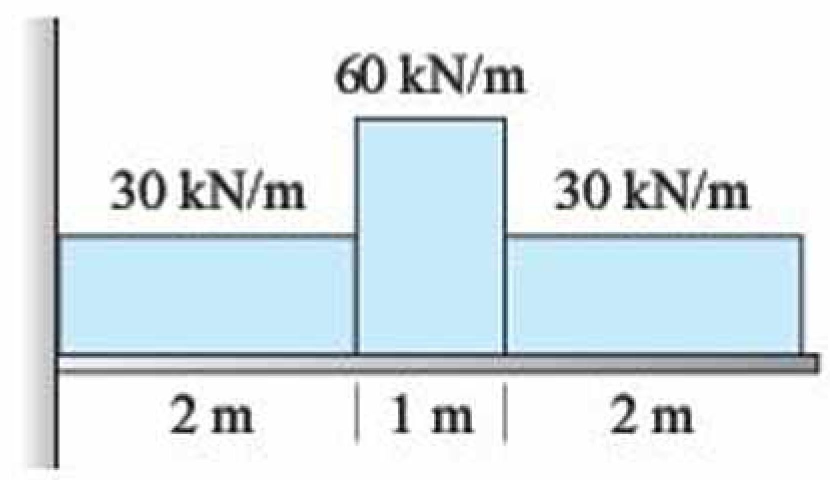


FIGURA P5–42

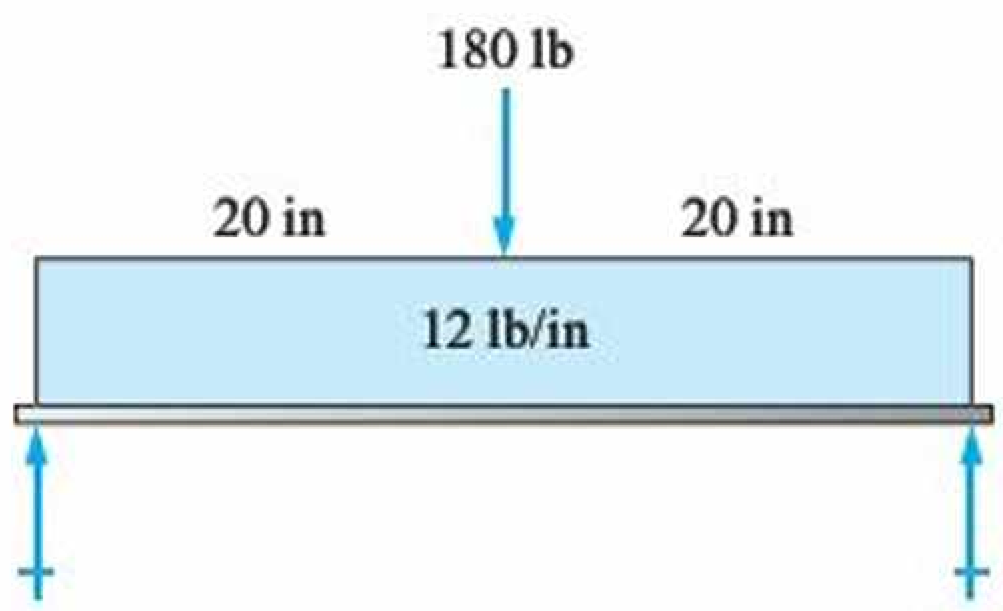


FIGURA P5–43

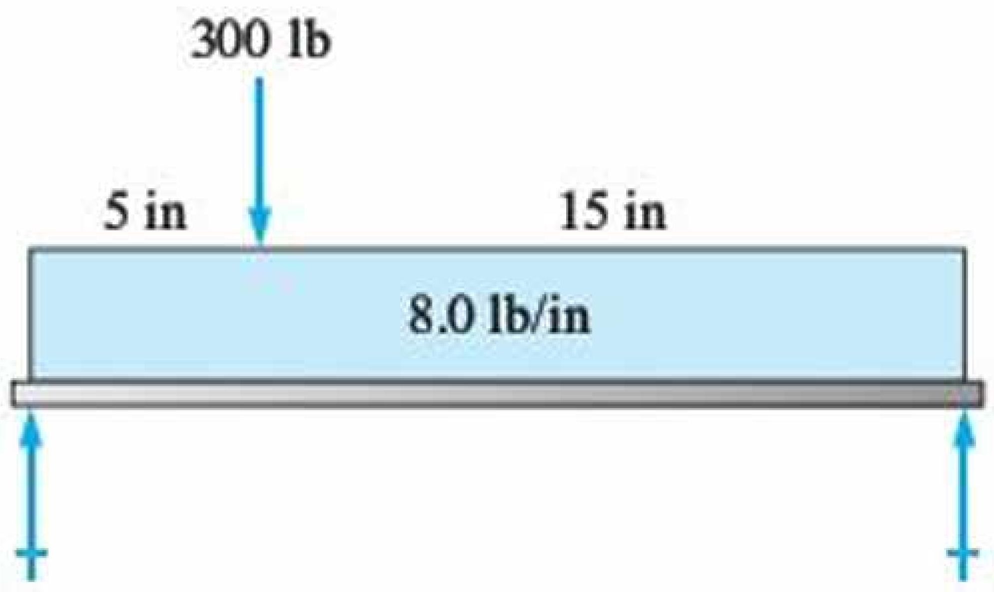


FIGURA P5–44

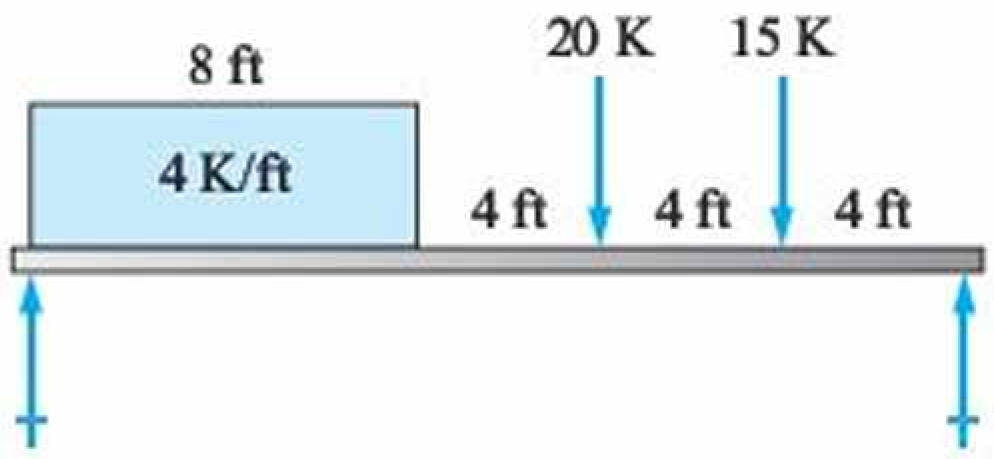


FIGURA P5–45

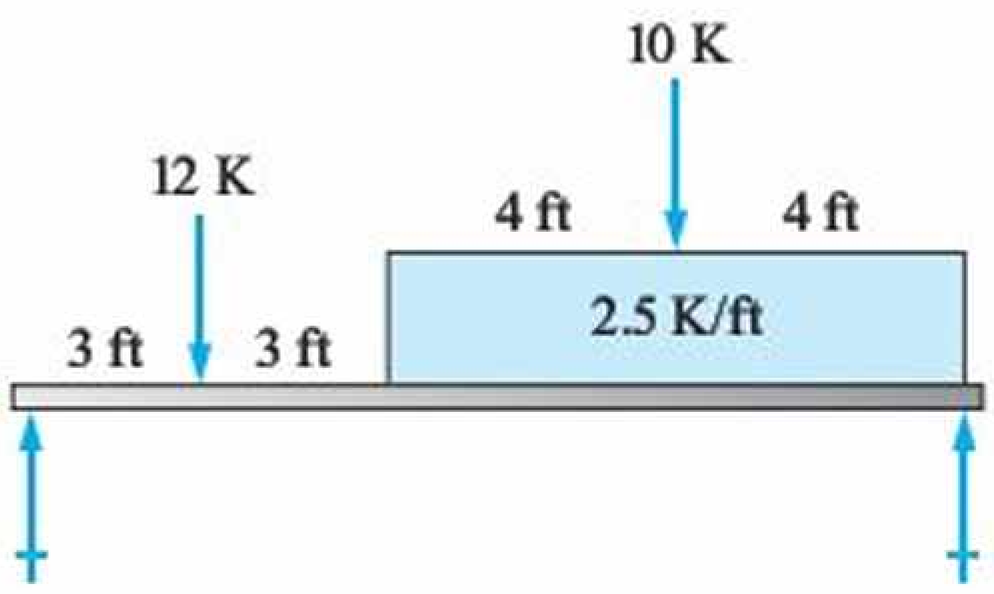


FIGURA P5–46

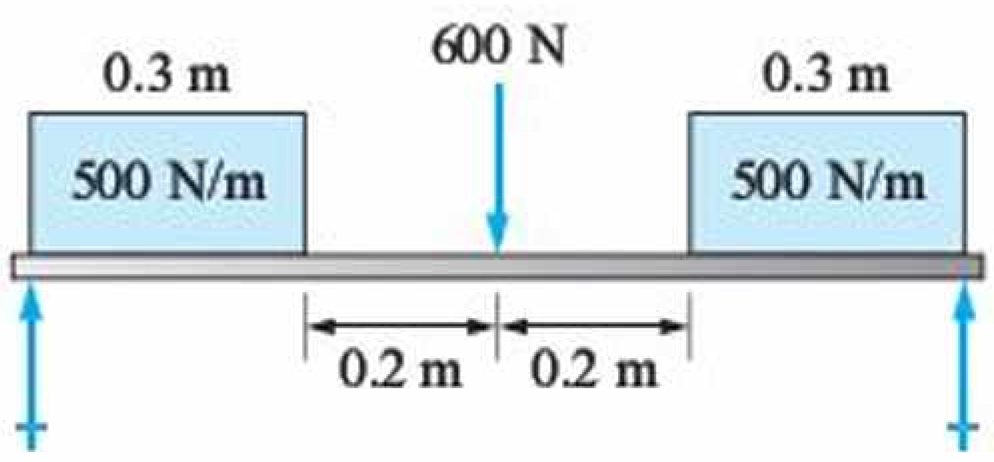


FIGURA P5–47

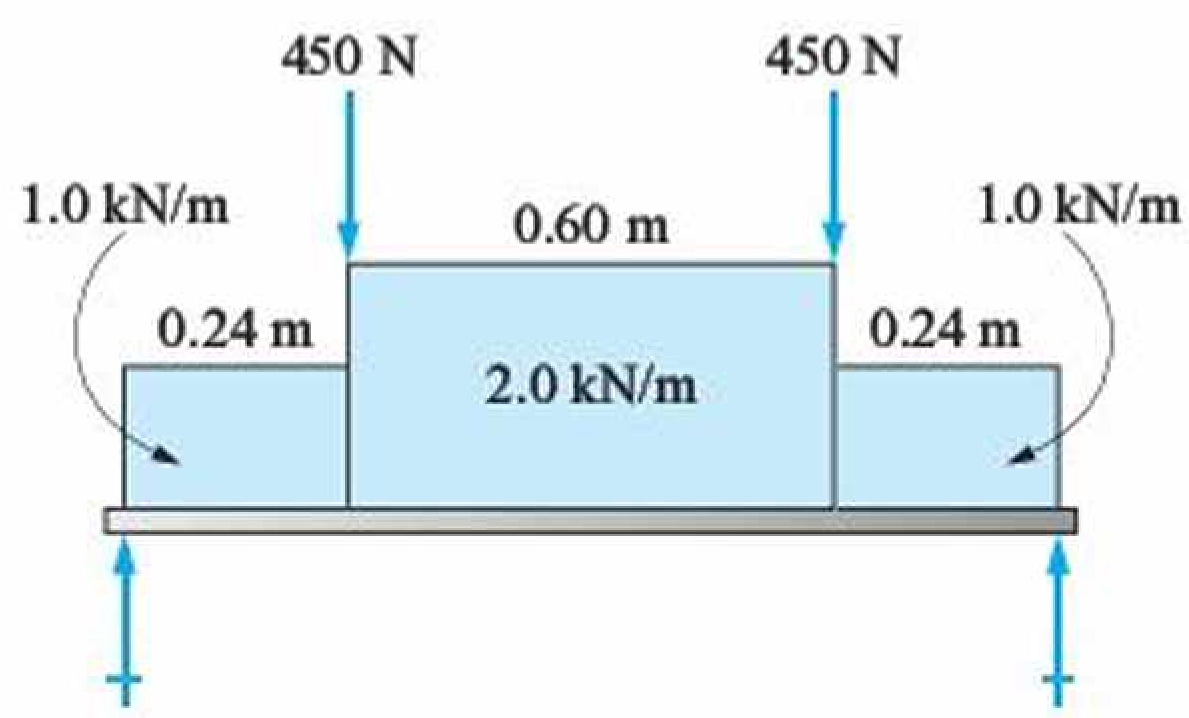


FIGURA P5–48

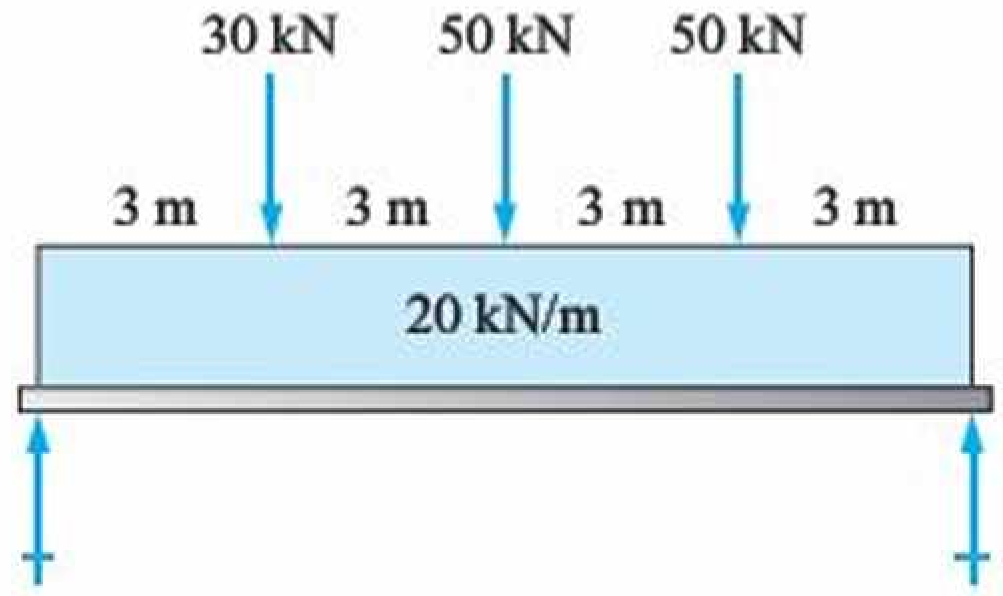


FIGURA P5–49

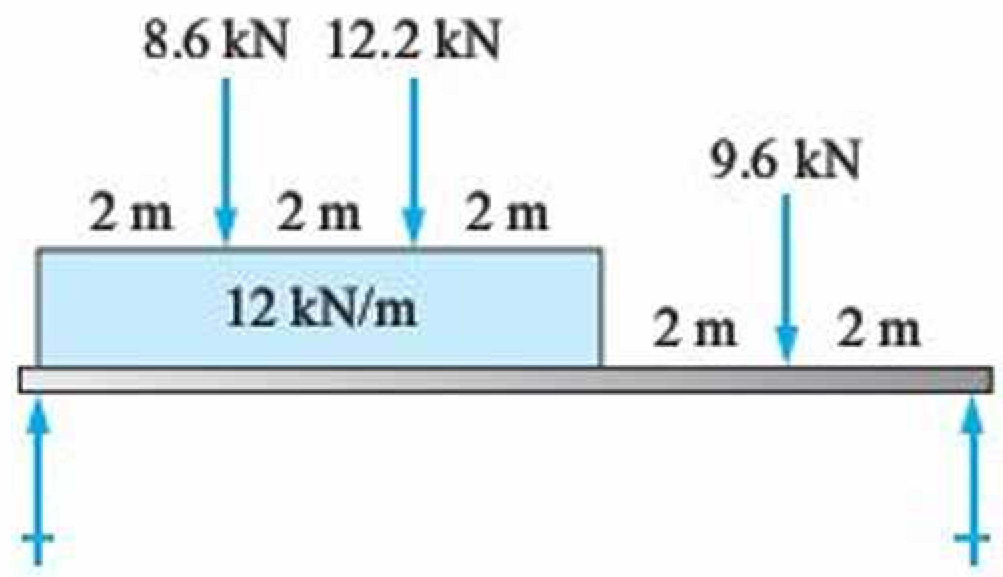


FIGURA P5–50

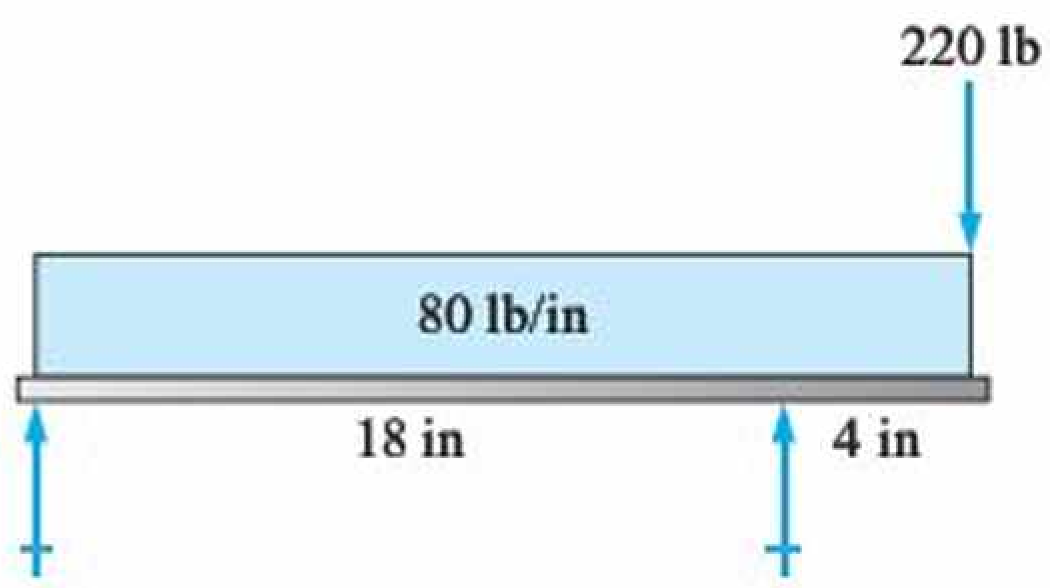


FIGURA P5–51

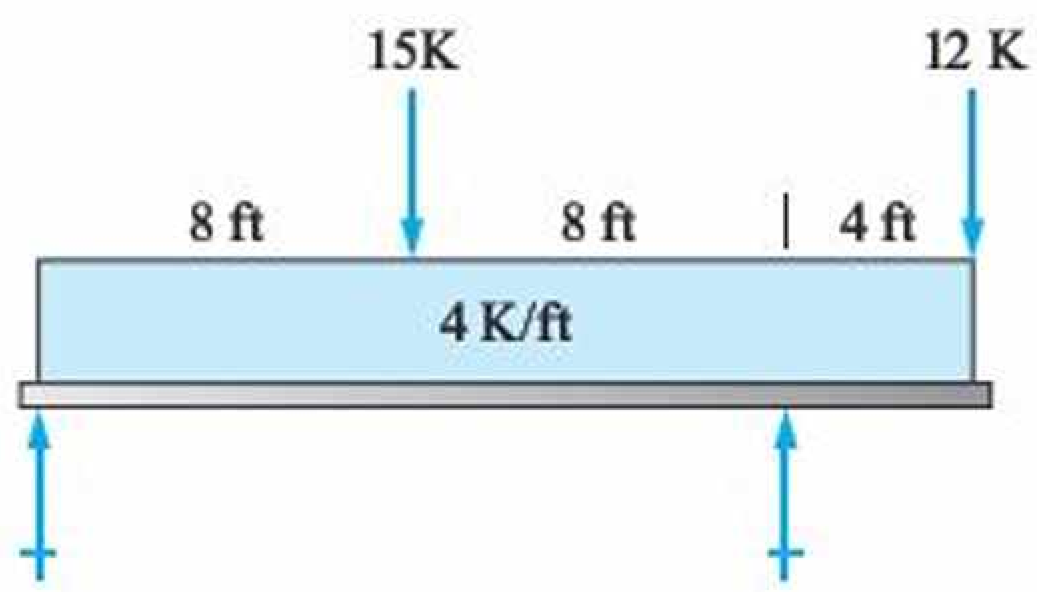


FIGURA P5–52

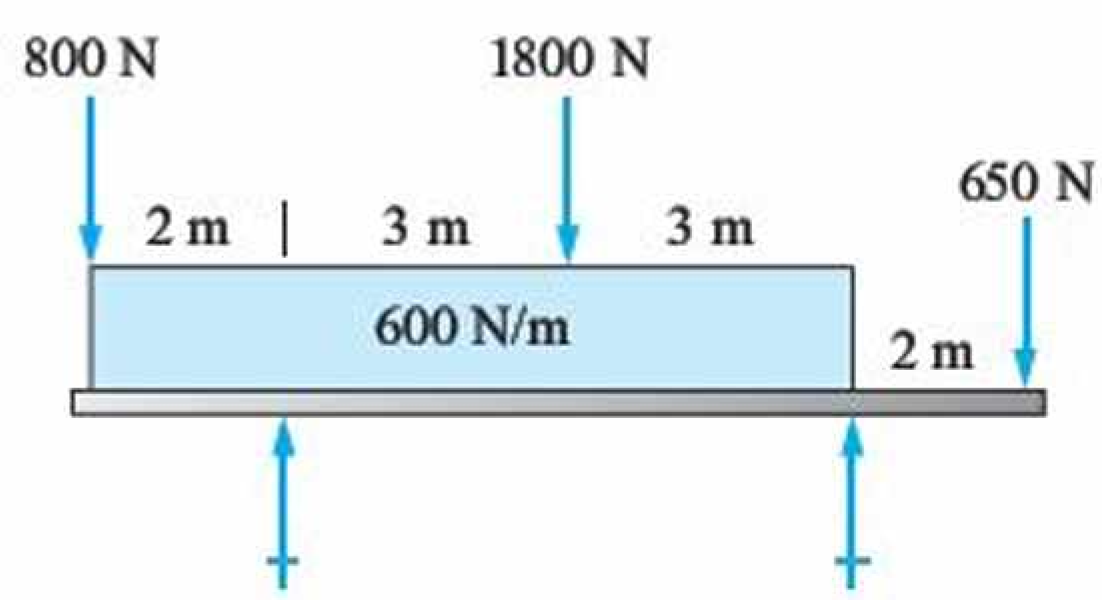


FIGURA P5–53

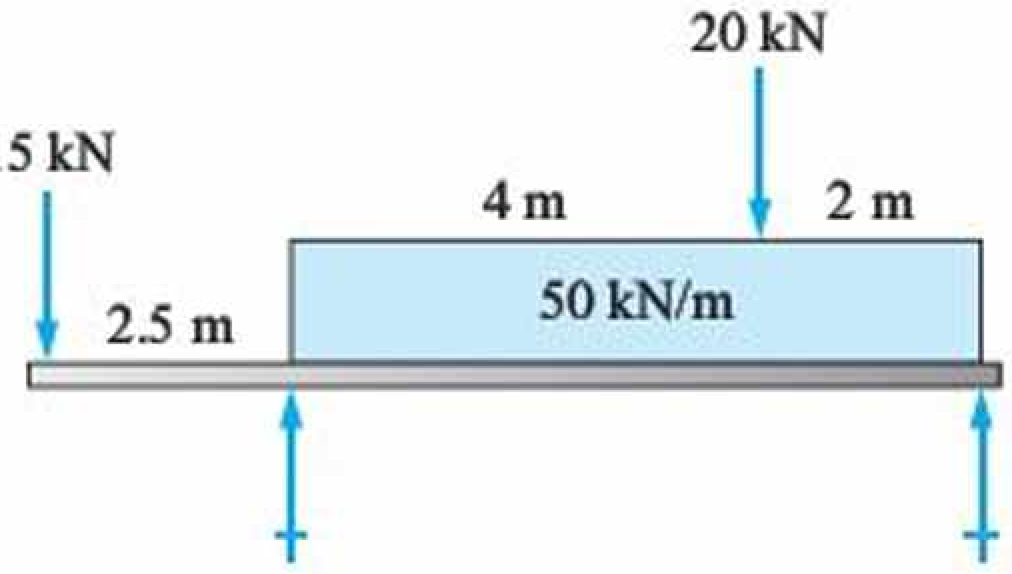


FIGURA P5–54

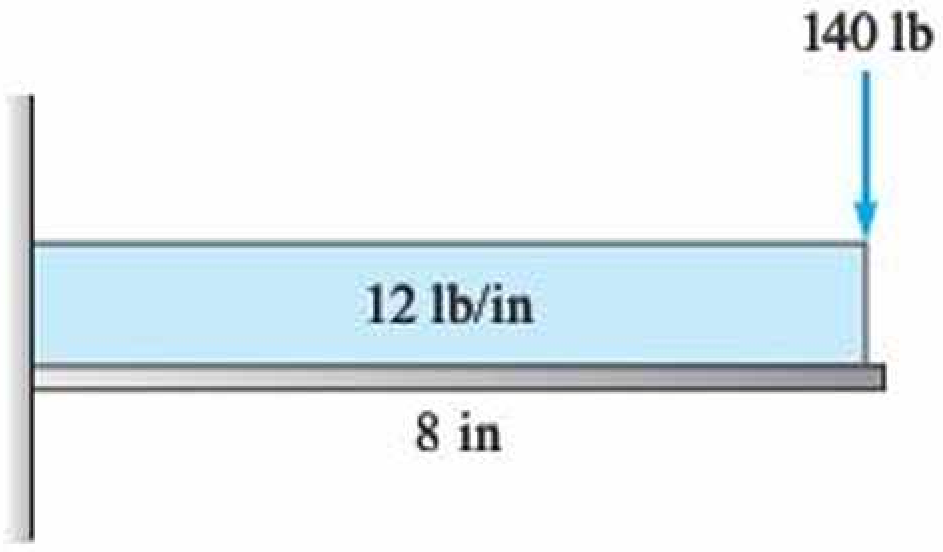


FIGURA P5–55

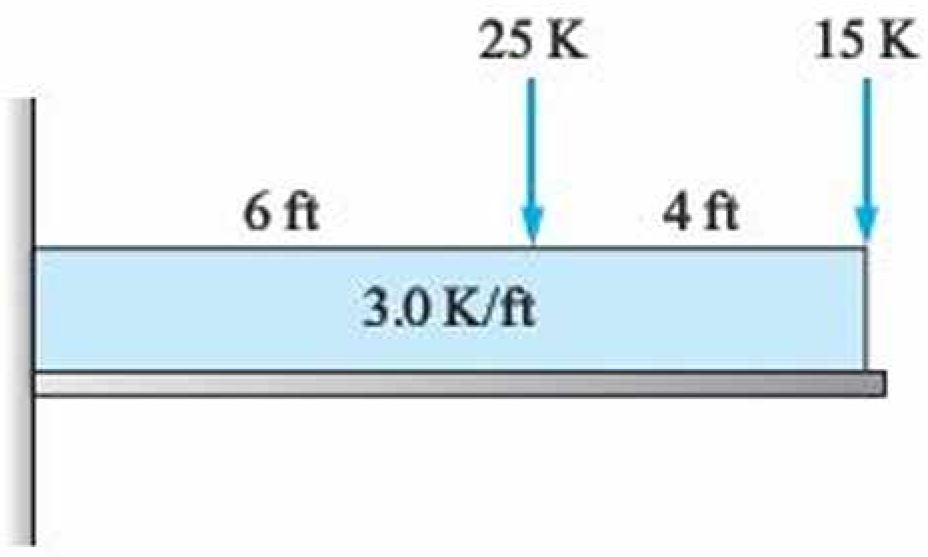


FIGURA P5–56

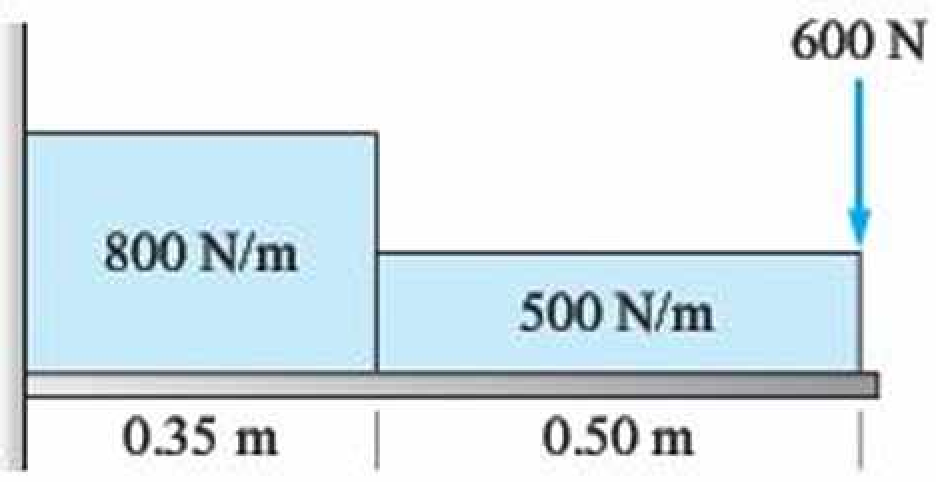


FIGURA P5–57

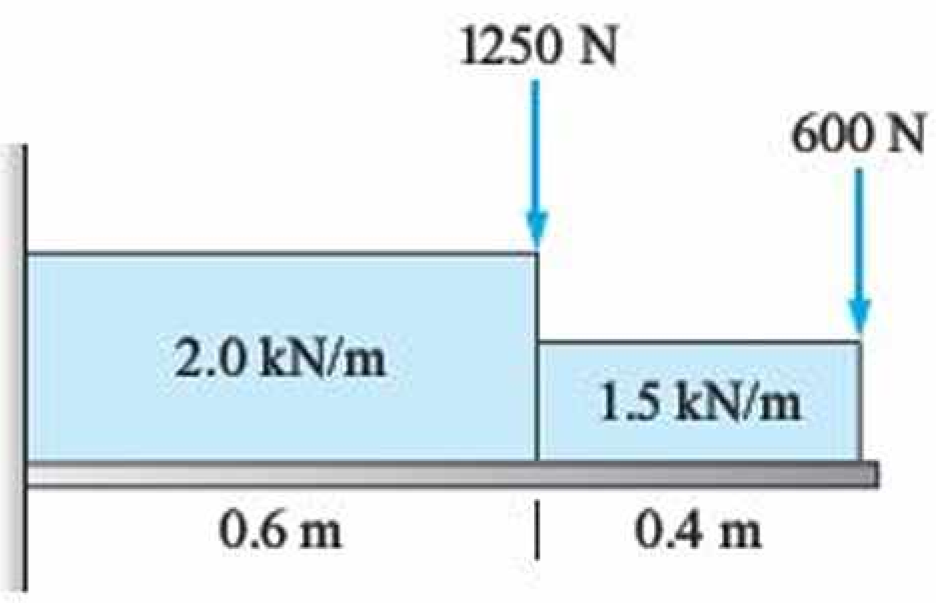


FIGURA P5–58

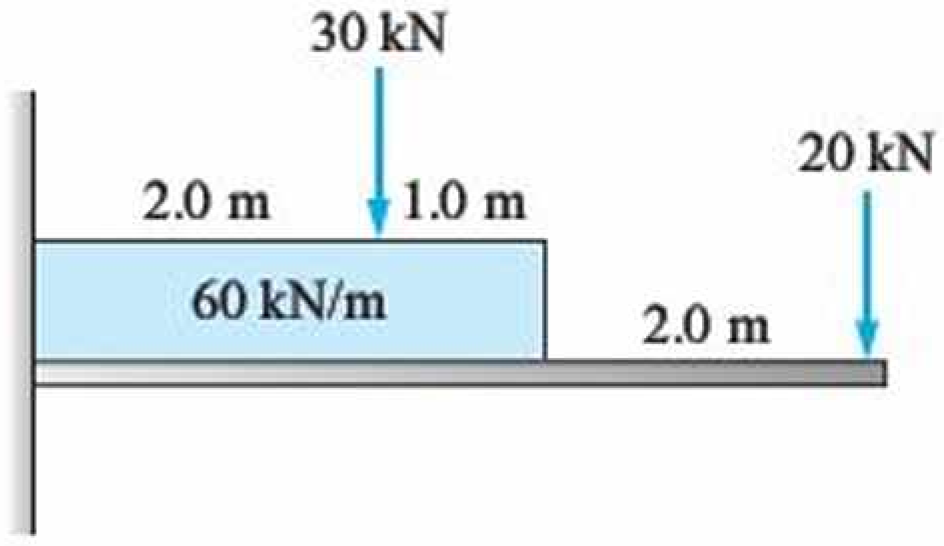


FIGURA P5–59

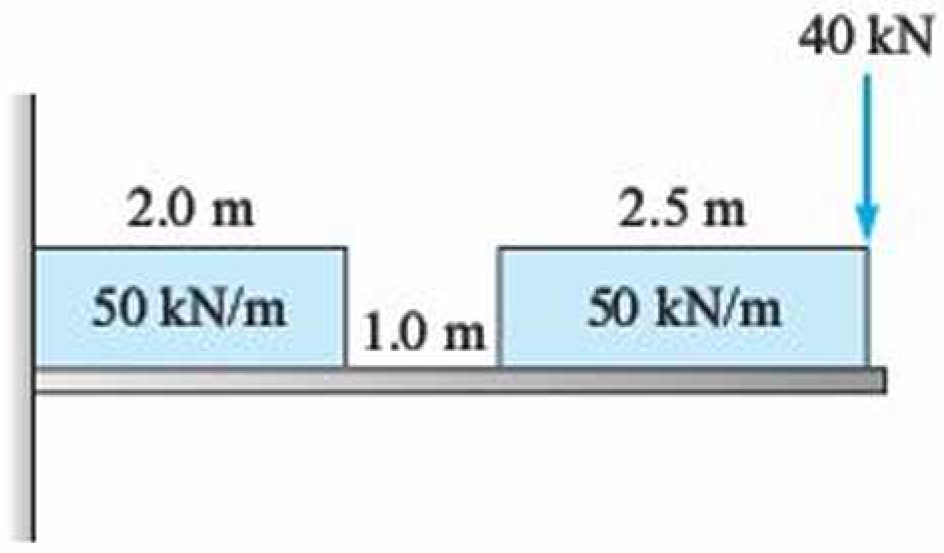


FIGURA P5–60

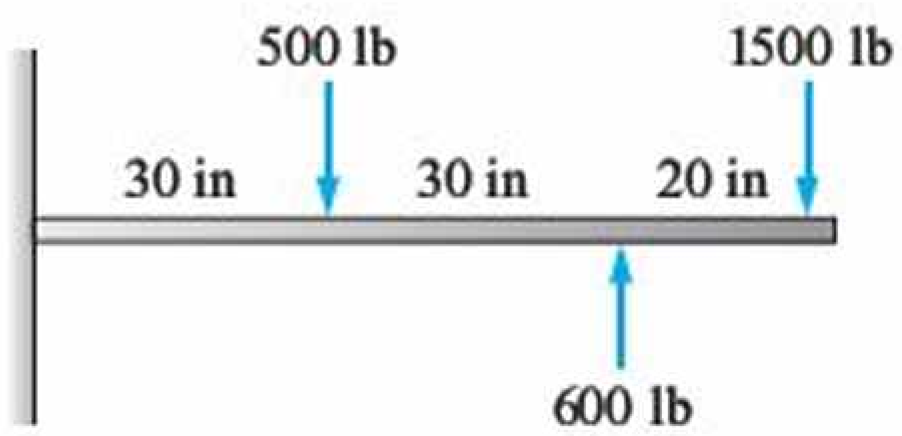


FIGURA P5–61

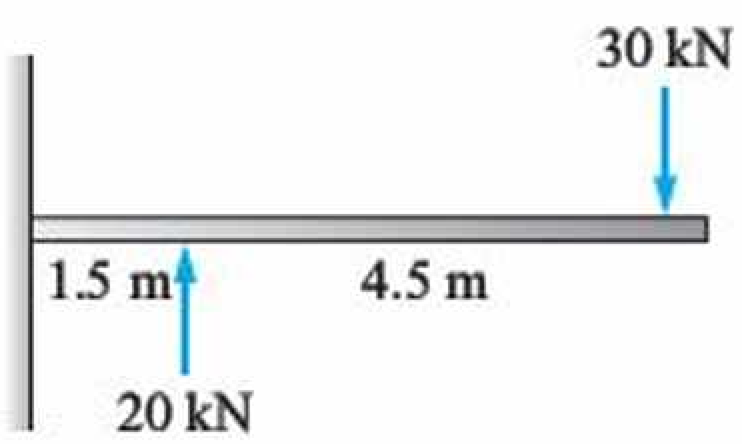


FIGURA P5–62

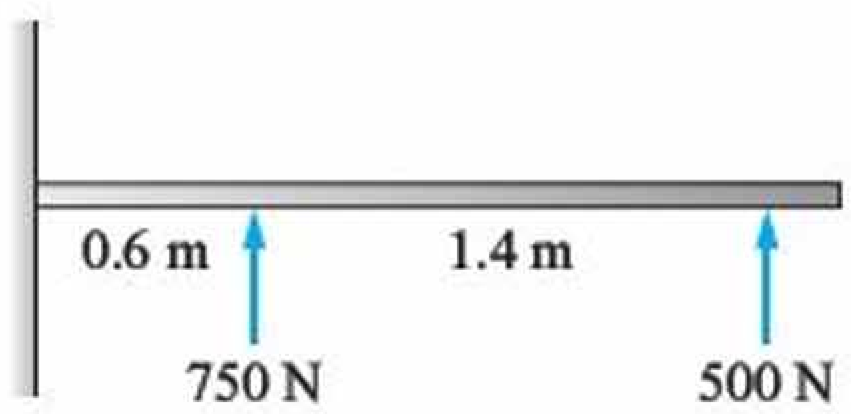


FIGURA P5–63

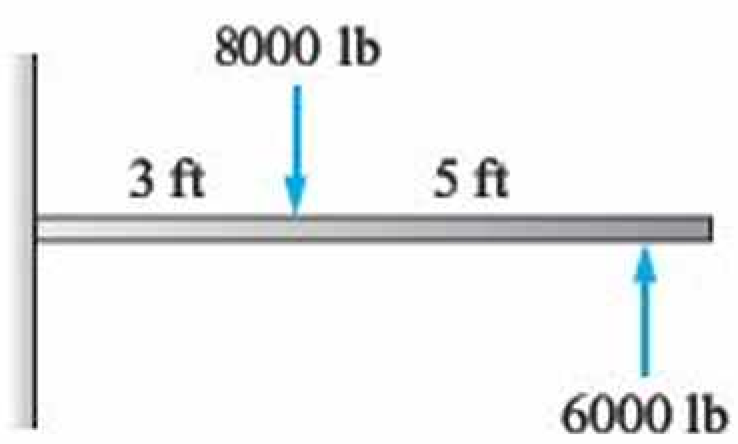


FIGURA P5–64

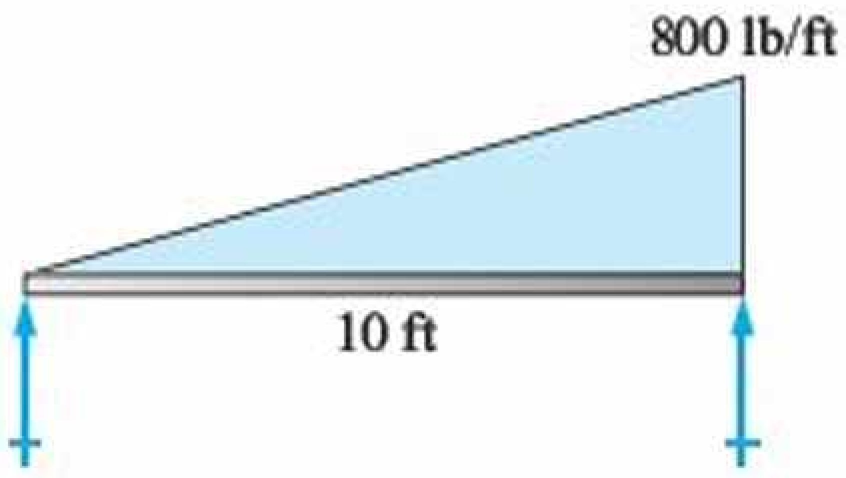


FIGURA P5–65

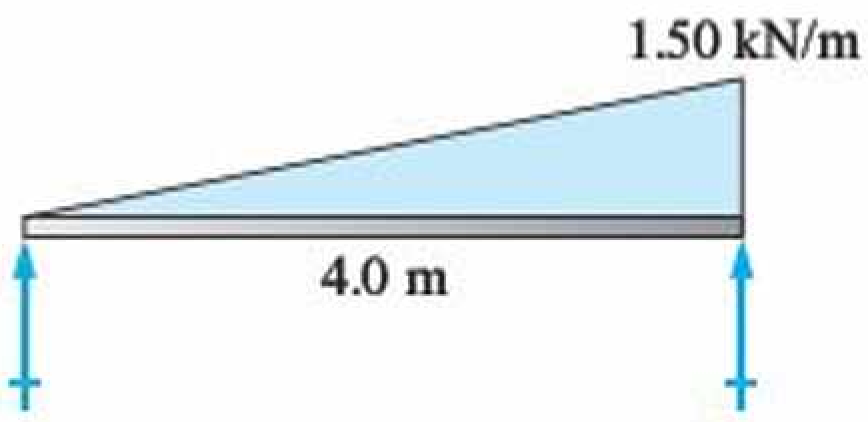


FIGURA P5–66

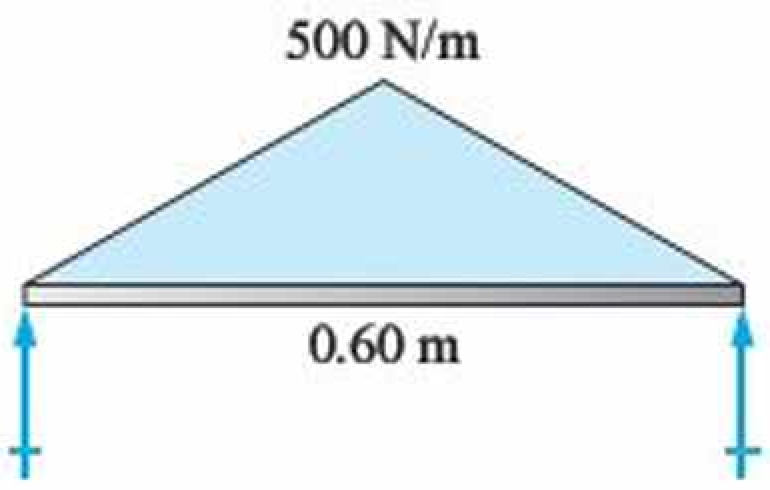


FIGURA P5–67

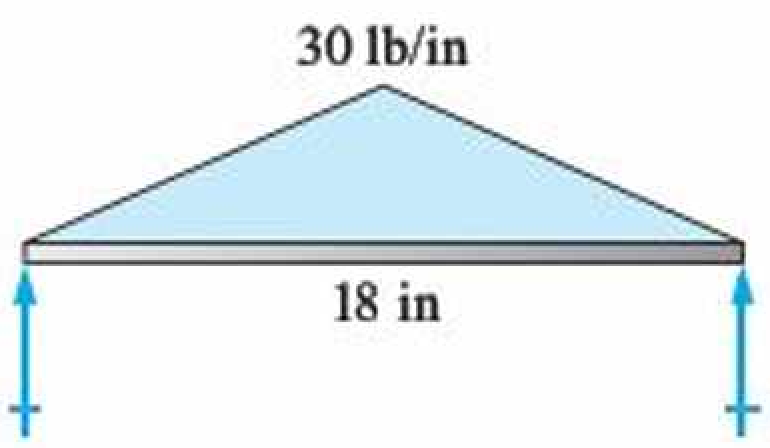


FIGURA P5–68

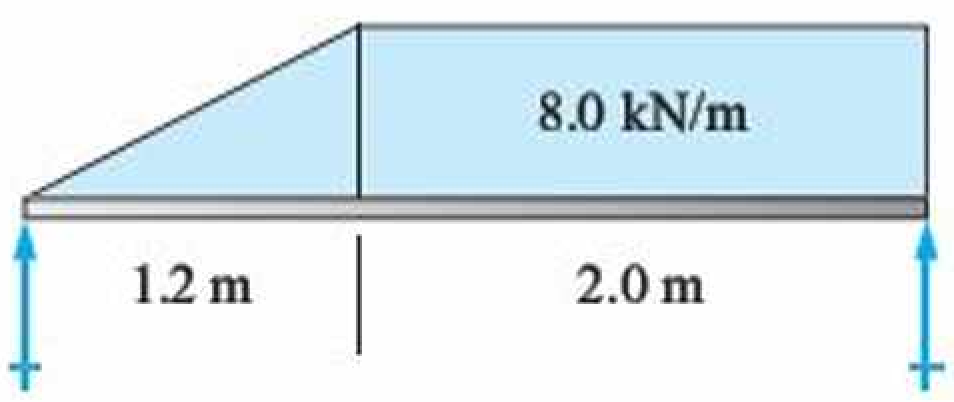


FIGURA P5–69

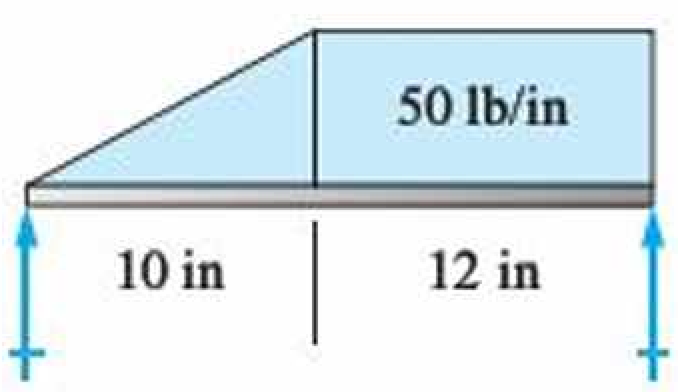


FIGURA P5–70

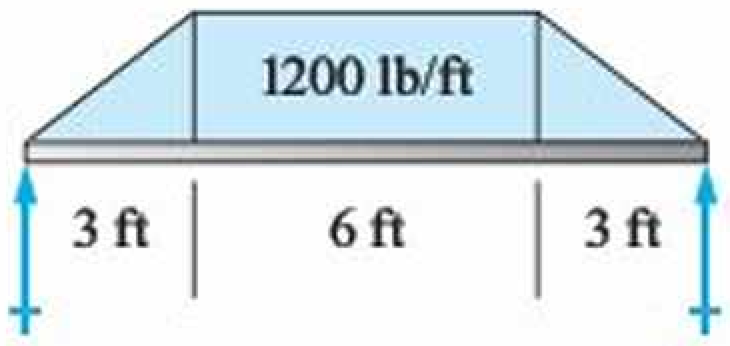


FIGURA P5–71

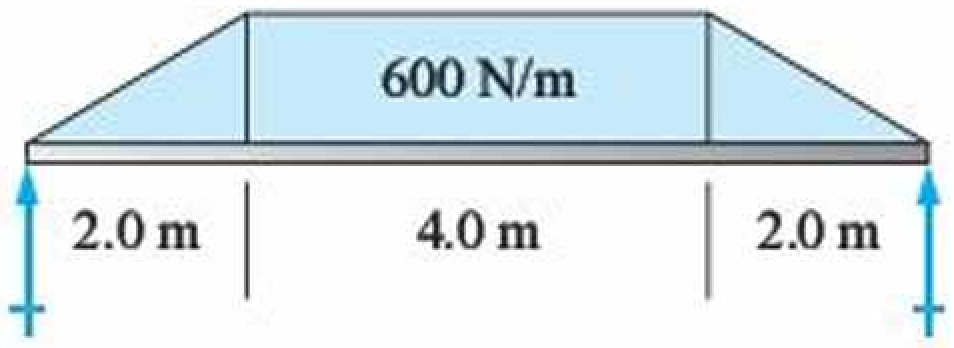


FIGURA P5–72

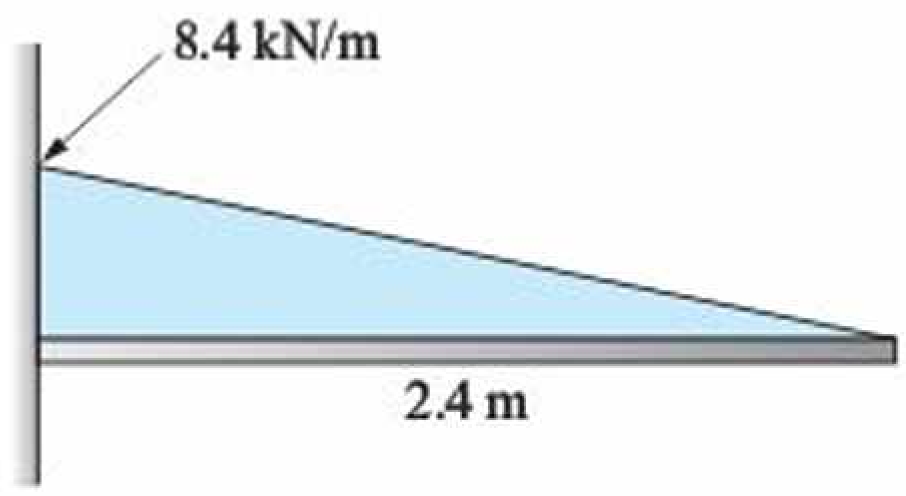


FIGURA P5–73

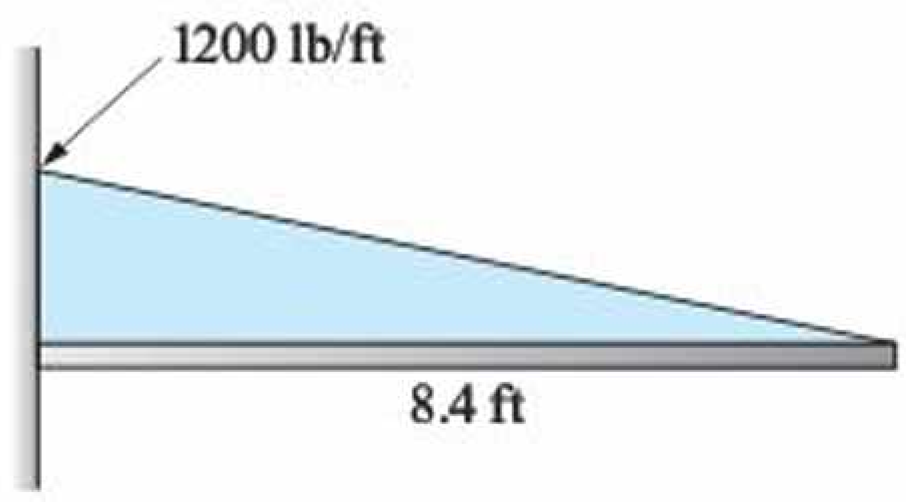


FIGURA P5–74

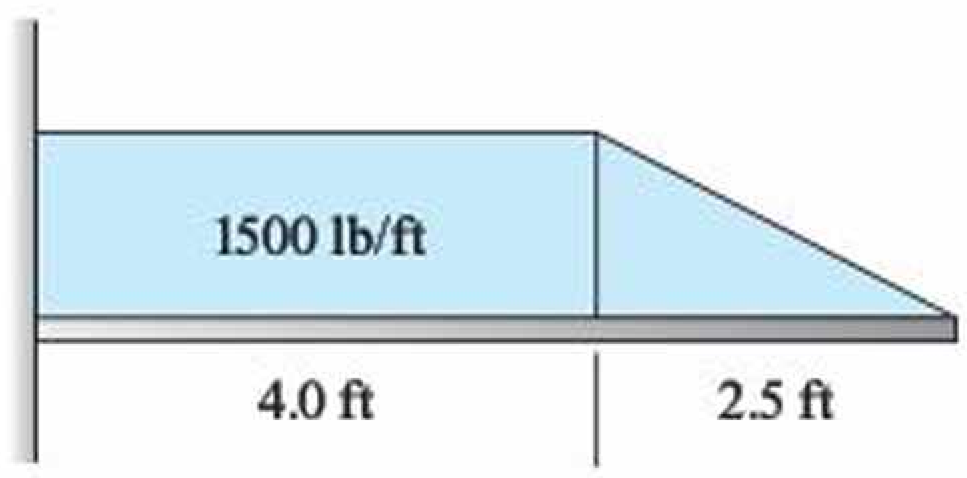


FIGURA P5–75

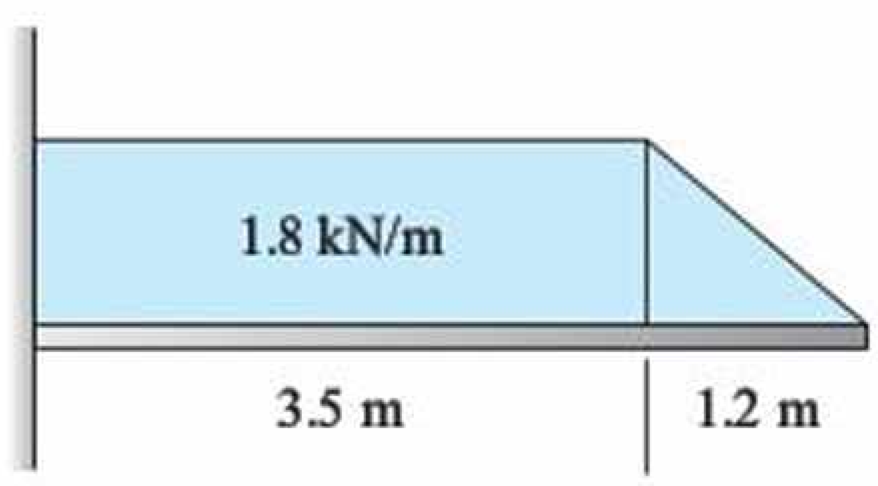


FIGURA P5–76

Problemas correspondientes a las figuras P5–77 a P5–84

Cada figura muestra un dispositivo mecánico donde actúa una o más fuerzas paralelas a y alejadas del eje de parte que se asemeja a una viga. Los dispositivos están soportados por cojinetes en los lugares marcados con una X, los que provocan fuerzas de reacción en cualquier dirección perpendicular al eje de la viga. Uno de los cojinetes es capaz de resistir fuerzas horizontales. Para cada figura los objetivos son:

1. Dividir la viga compuesta en partes que son sus componentes rectos.
2. Mostrar los diagramas de cuerpo libre completos de cada componente incluidas todas las fuerzas externas e internas y los momentos flexionantes requeridos para mantener la parte en equilibrio.
3. Para la parte horizontal principal únicamente, trace los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante completos. Consulte la sección 5–10 por lo que se refiere a ejemplos.

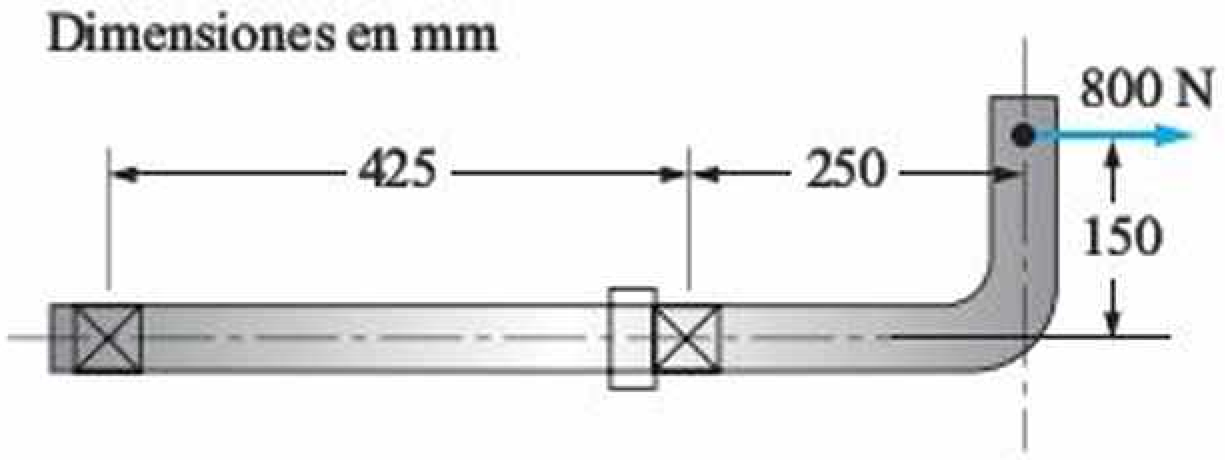


FIGURA P5–77

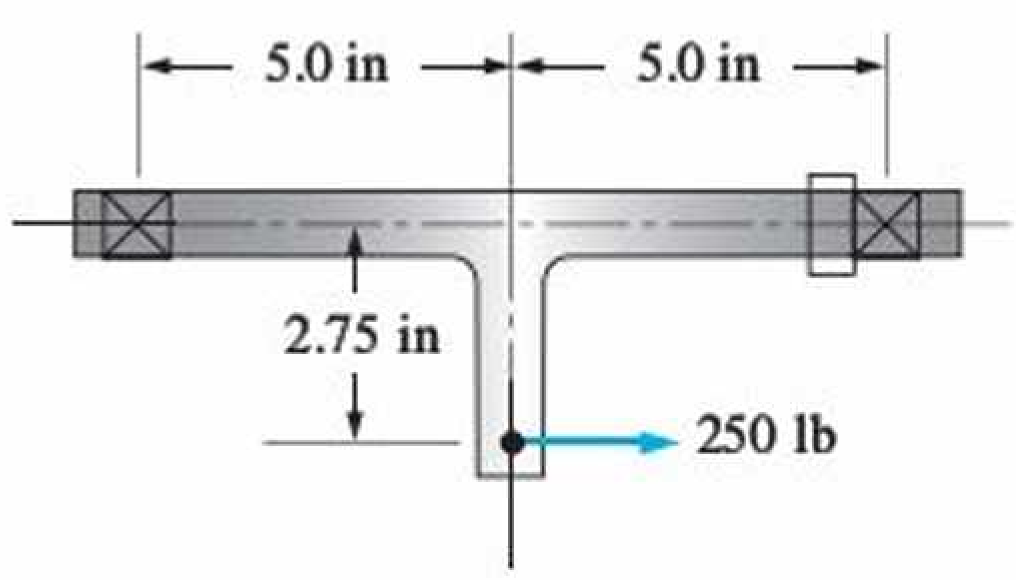


FIGURA P5–78

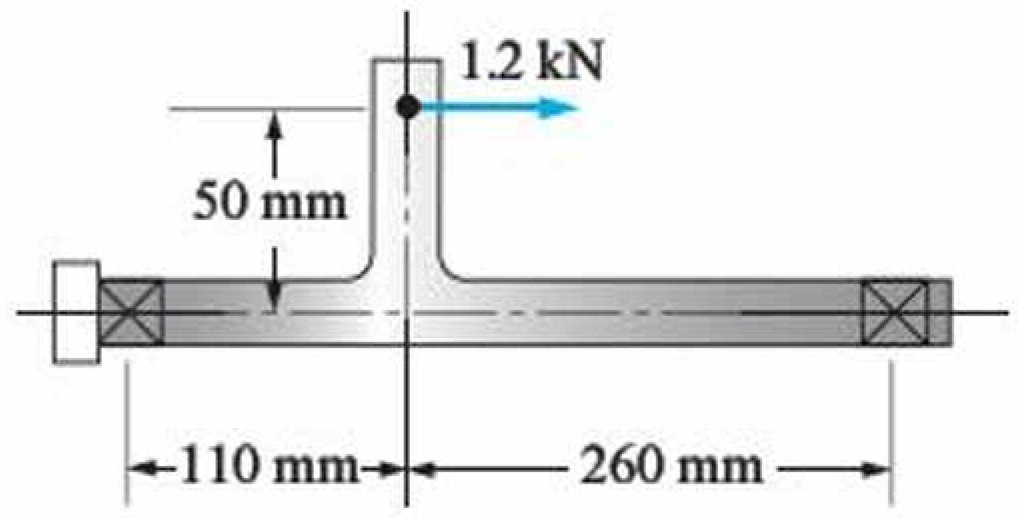


FIGURA P5–79

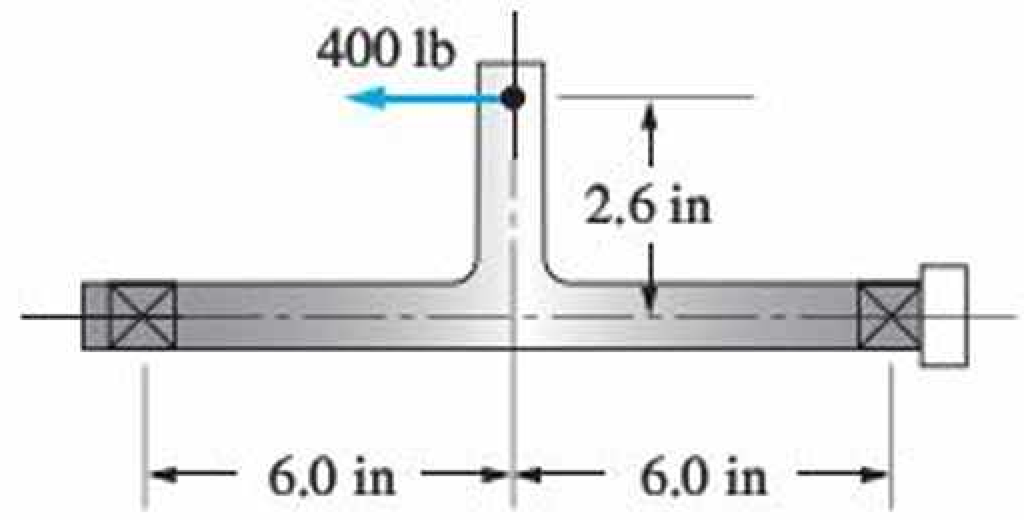


FIGURA P5–80

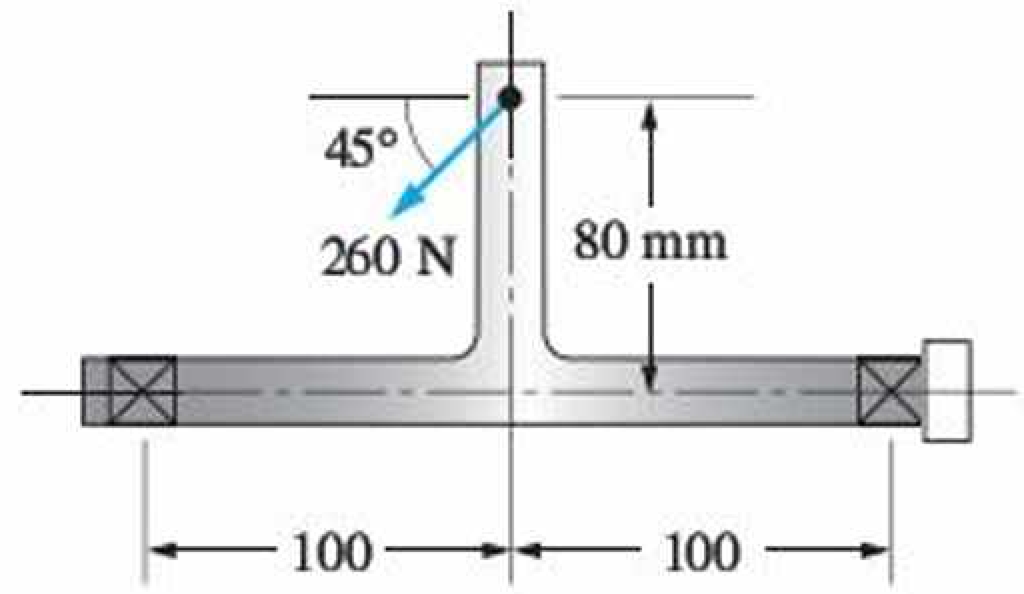


FIGURA P5–81

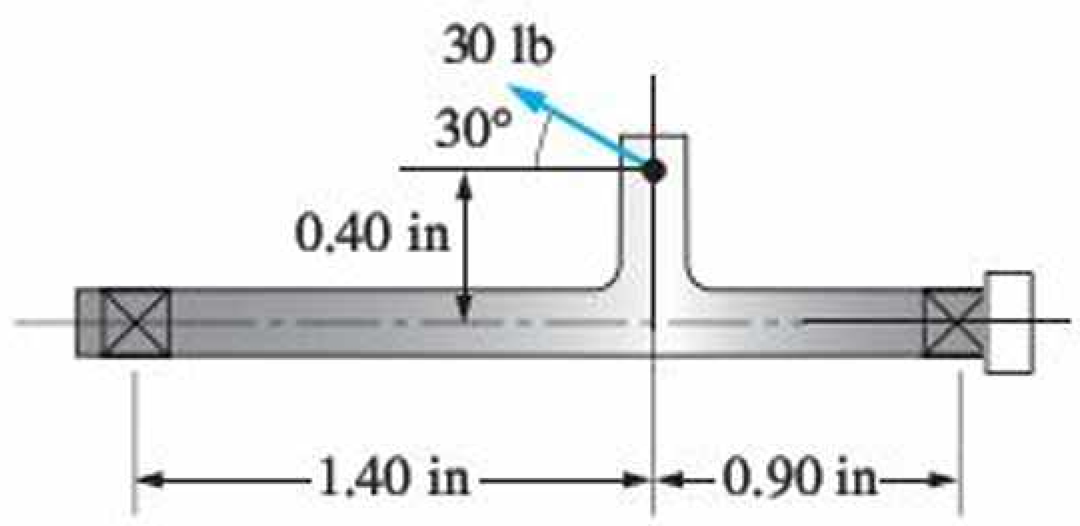


FIGURA P5–82

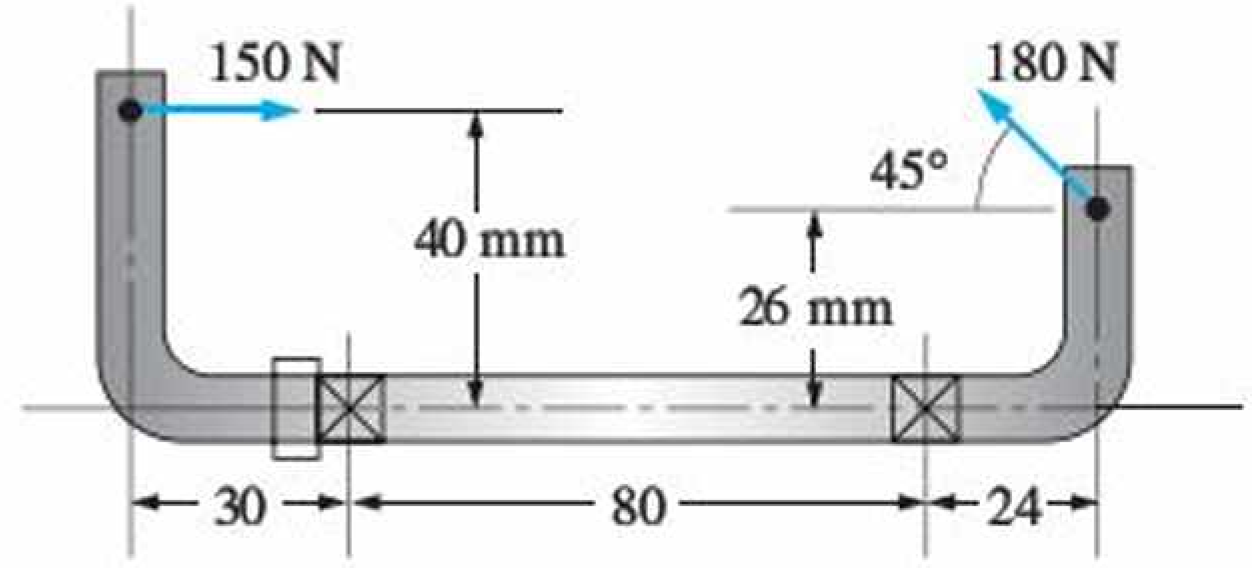


FIGURA P5–83

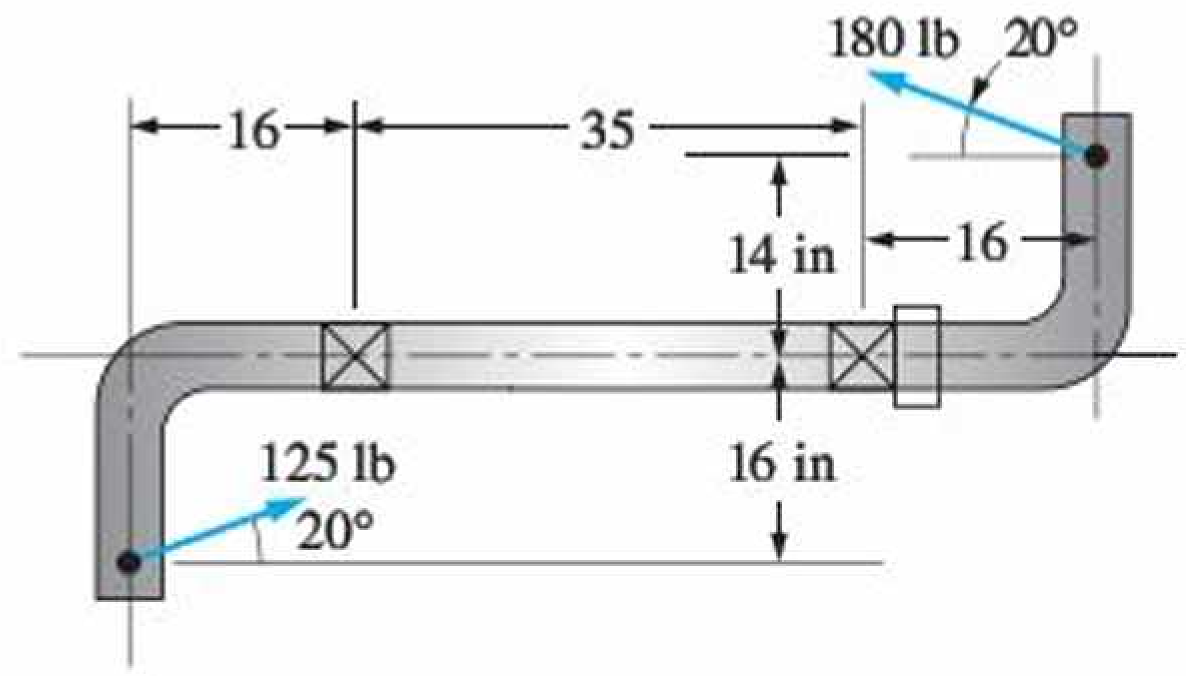


FIGURA P5–84

PROBLEMAS DE PRÁCTICA Y REPASO ADICIONALES

5–85. Para la viga mostrada en la figura P5–8, determine la fuerza cortante y el momento flexionante en un punto localizado a 4.0 m del apoyo izquierdo, por medio del método del diagrama de cuerpo libre.

5–86. Para la viga mostrada en la figura P5–15, determine la fuerza cortante y el momento flexionante en un punto localizado a 1.0 m a la derecha del apoyo derecho, por medio del método del diagrama de cuerpo libre.

5–87. Para la viga mostrada en la figura P5–22, determine la fuerza cortante y el momento flexionante en un punto localizado a 0.45 m del muro, por medio del método del diagrama de cuerpo libre.

5–88. Para la viga mostrada en la figura P5–35, determine la fuerza cortante y el momento flexionante en un punto localizado a 0.9 m del extremo izquierdo de la viga, por medio del método del diagrama de cuerpo libre.

5–89. Para la viga mostrada en la figura P5–53, determine la fuerza cortante y el momento flexionante en un punto localizado a 6.0 m del extremo izquierdo de la viga, por medio del método del diagrama de cuerpo libre.

5–90. Para la viga mostrada en la figura P5–58 determine la fuerza cortante y el momento flexionante en un punto localizado a 0.8 m del muro, por medio del método del diagrama de cuerpo libre.

5–91. Para la viga mostrada en la figura P5–69, determine la fuerza cortante y el momento flexionante en un punto localizado a 2.2 m del apoyo izquierdo, por medio del método del diagrama de cuerpo libre.

5–92. Para la viga mostrada en la figura P5–76, determine la fuerza cortante y el momento flexionante en un punto localizado a 4.0 m del muro, por medio del método del diagrama de cuerpo libre.

Problemas 5–93 a 5–110

Trace los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de las vigas mostradas en las figuras anexas. Reporte la fuerza cortante máxima y el momento flexionante positivo máximo y el momento flexionante negativo máximo. Indique la ubicación de dichos valores en la viga.

Cargas concentradas

P5–93 P5–94 P5–95 P5–96 P5–97 P5–98

Cargas distribuidas

P5–99 P5–100 P5–101 P5–102 P5–103 P5–104
P5–105 P5–106 P5–107 P5–108 P5–109 P5–110

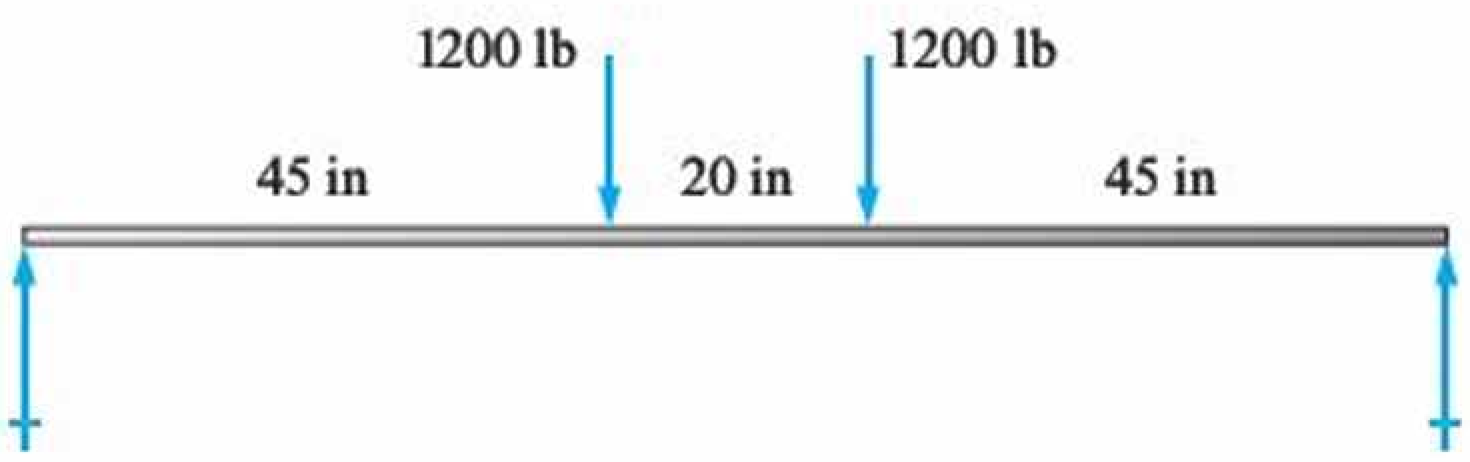


FIGURA P5–93

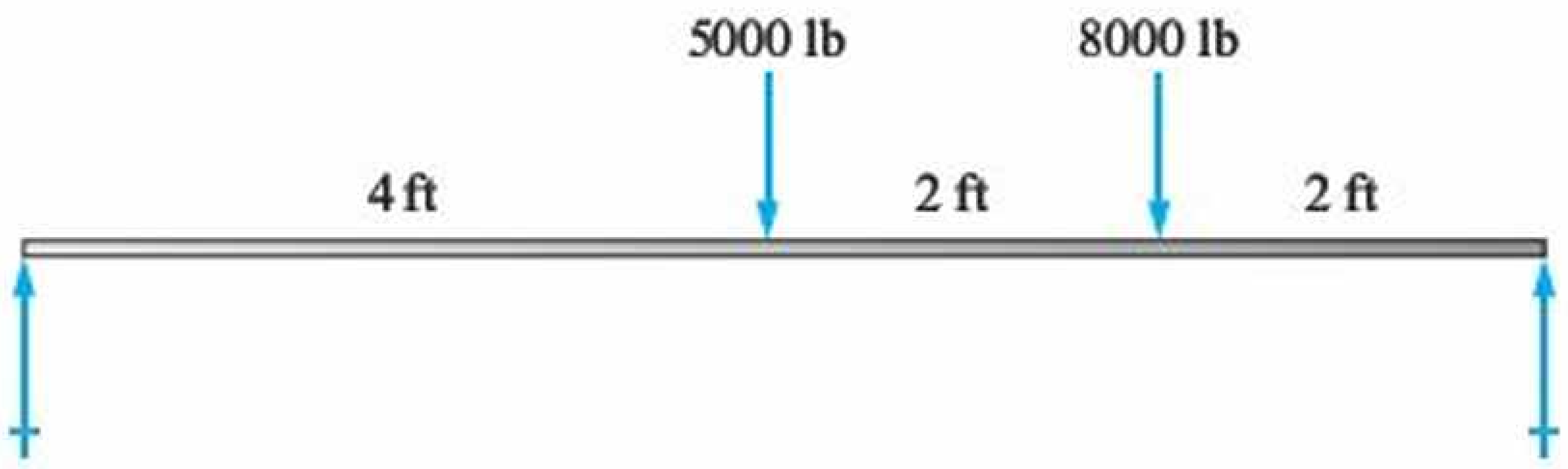


FIGURA P5–94

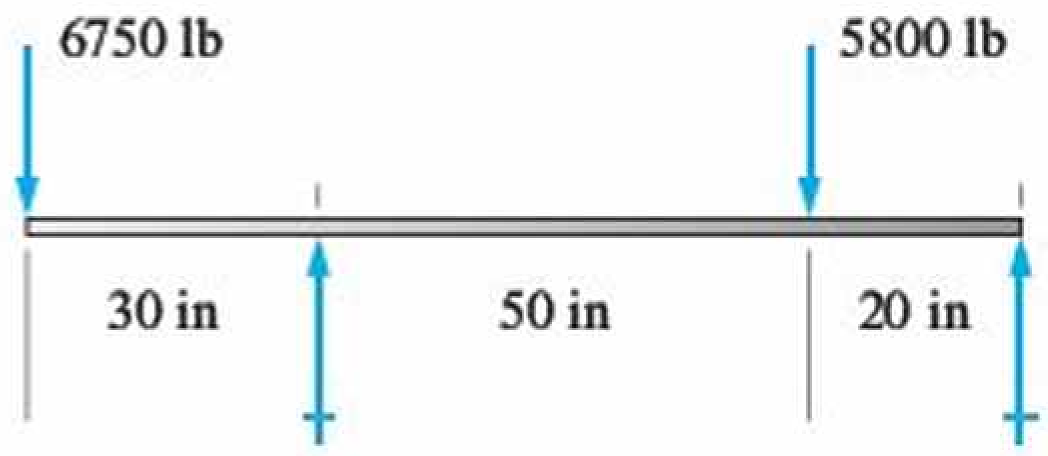


FIGURA P5–95

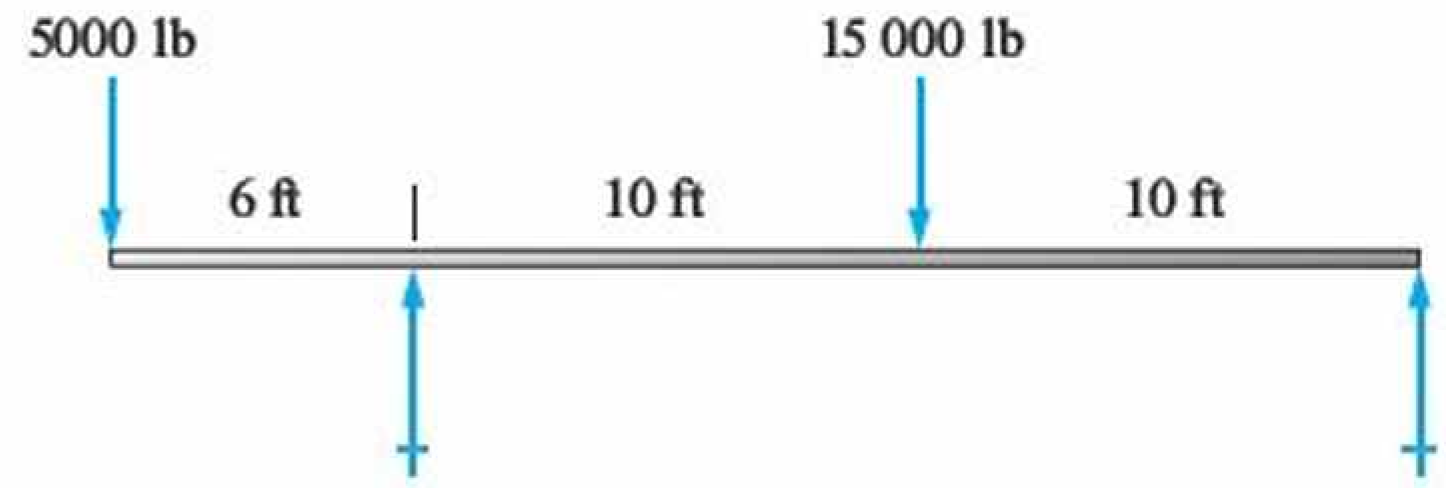


FIGURA P5–96

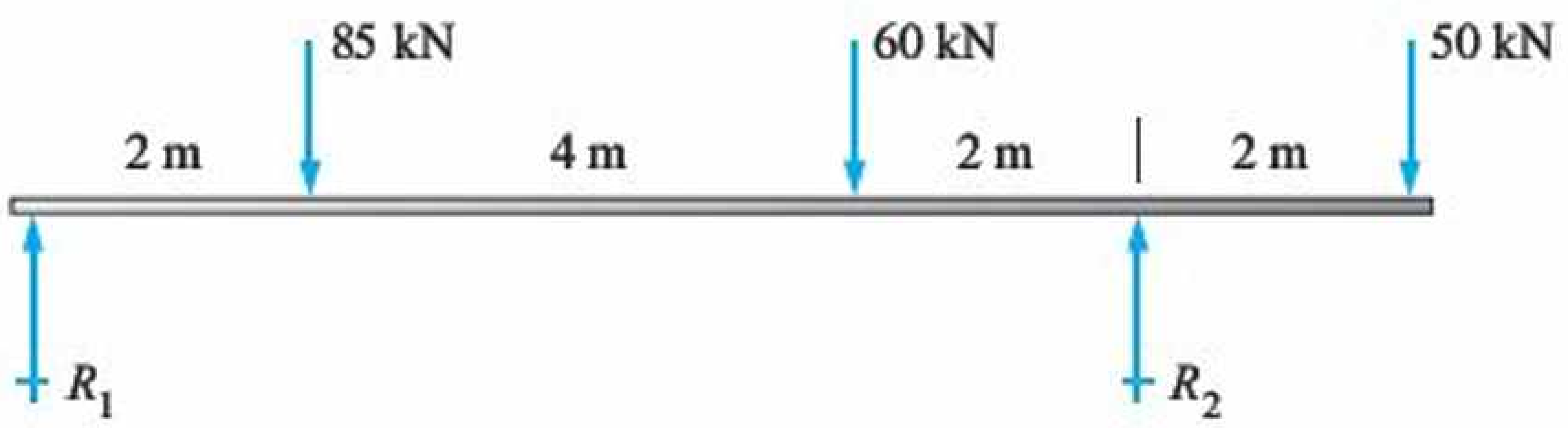


FIGURA P5–97

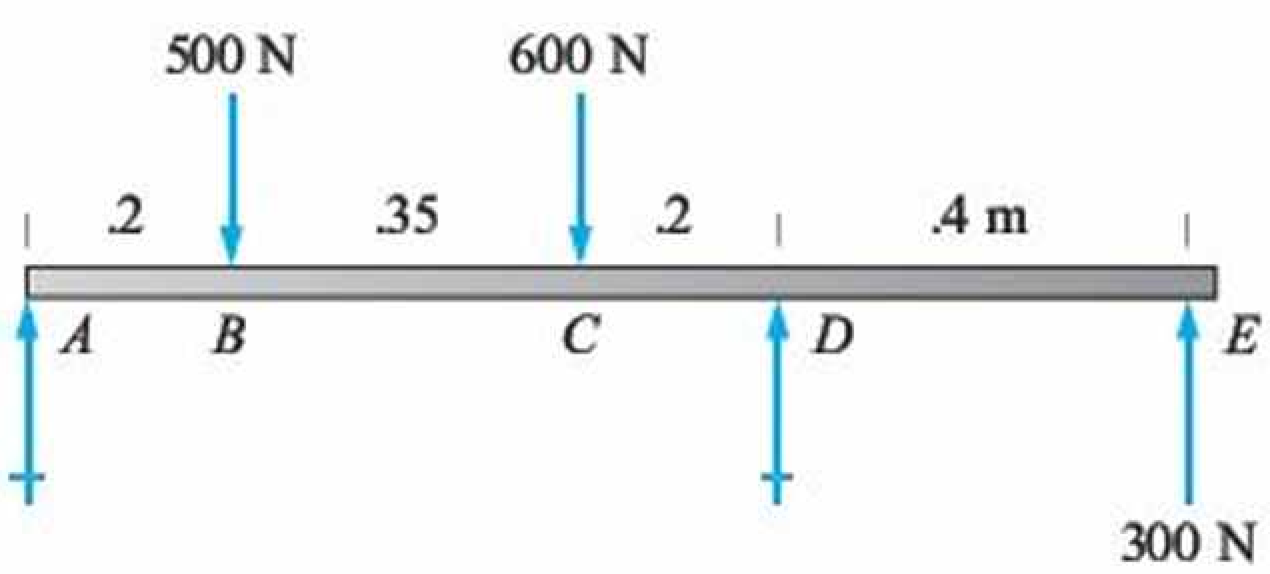


FIGURA P5–98

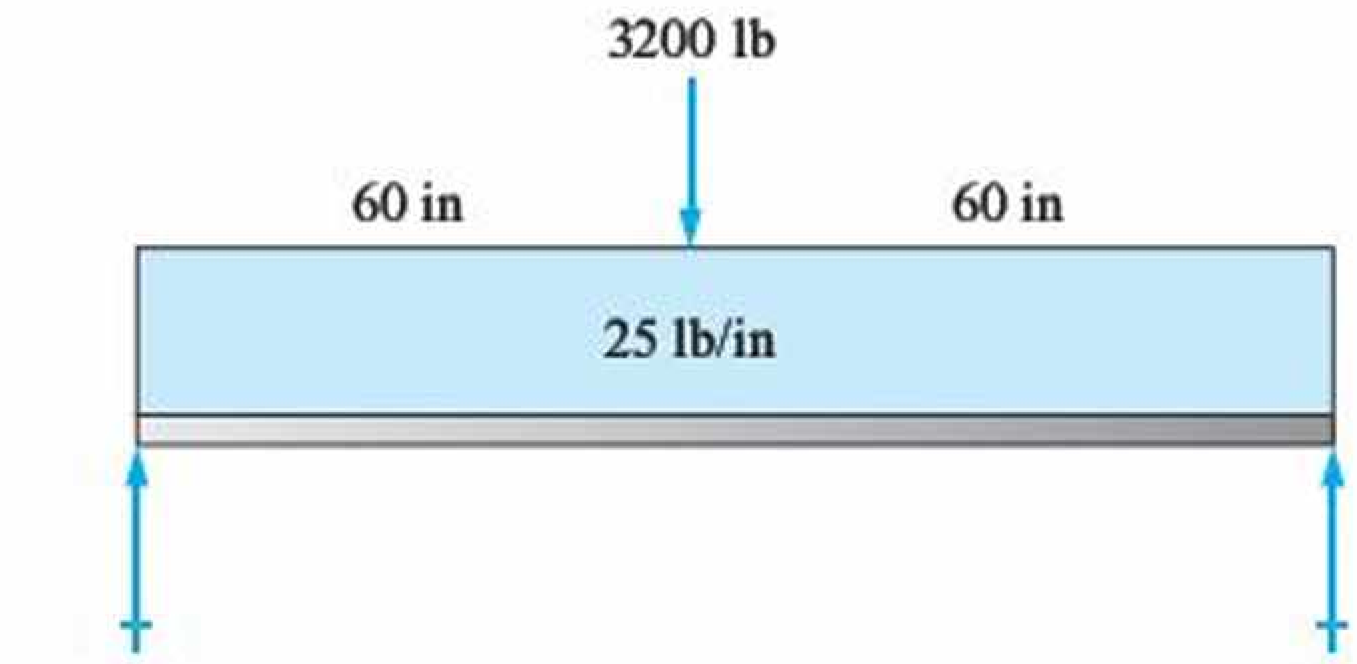


FIGURA P5–99

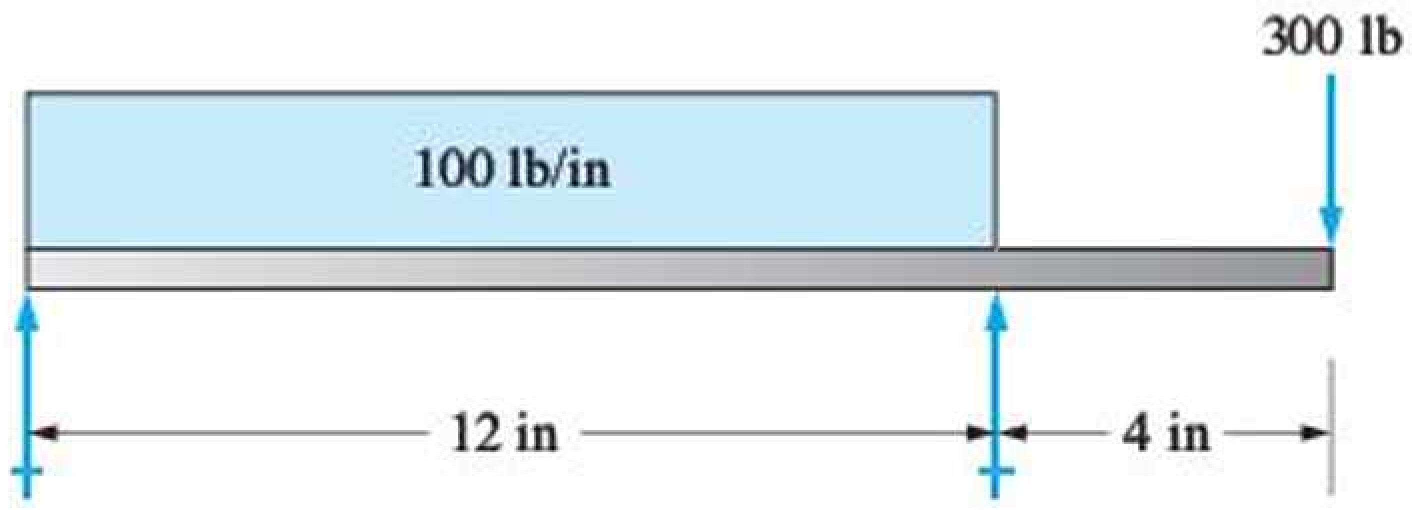


FIGURA P5–104

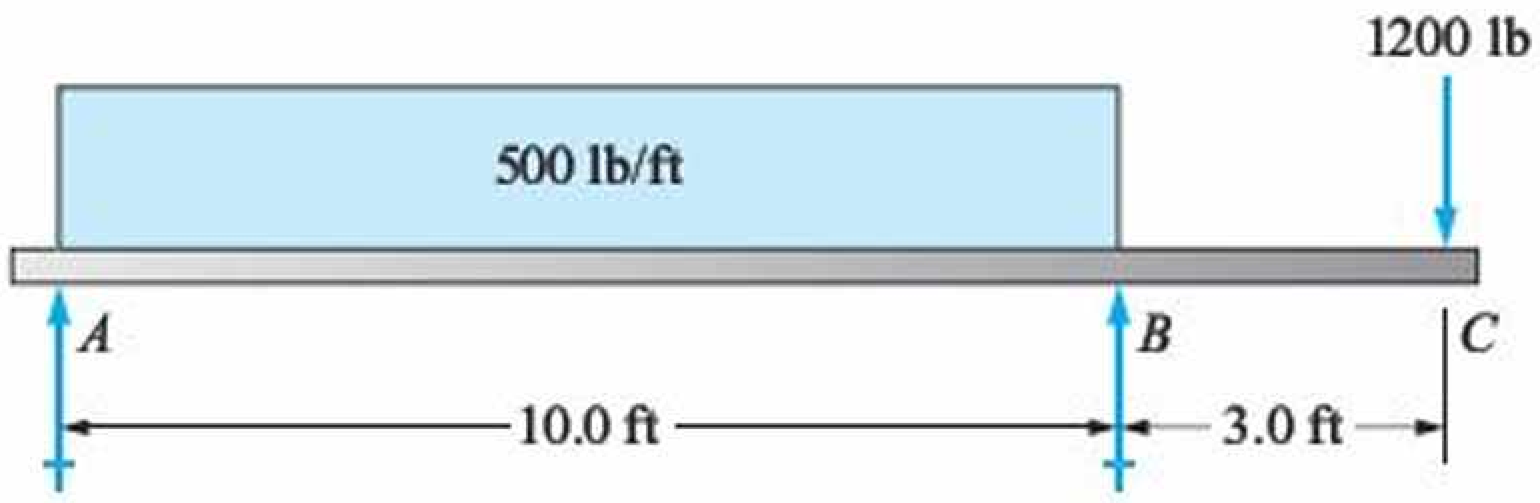


FIGURA P5–100

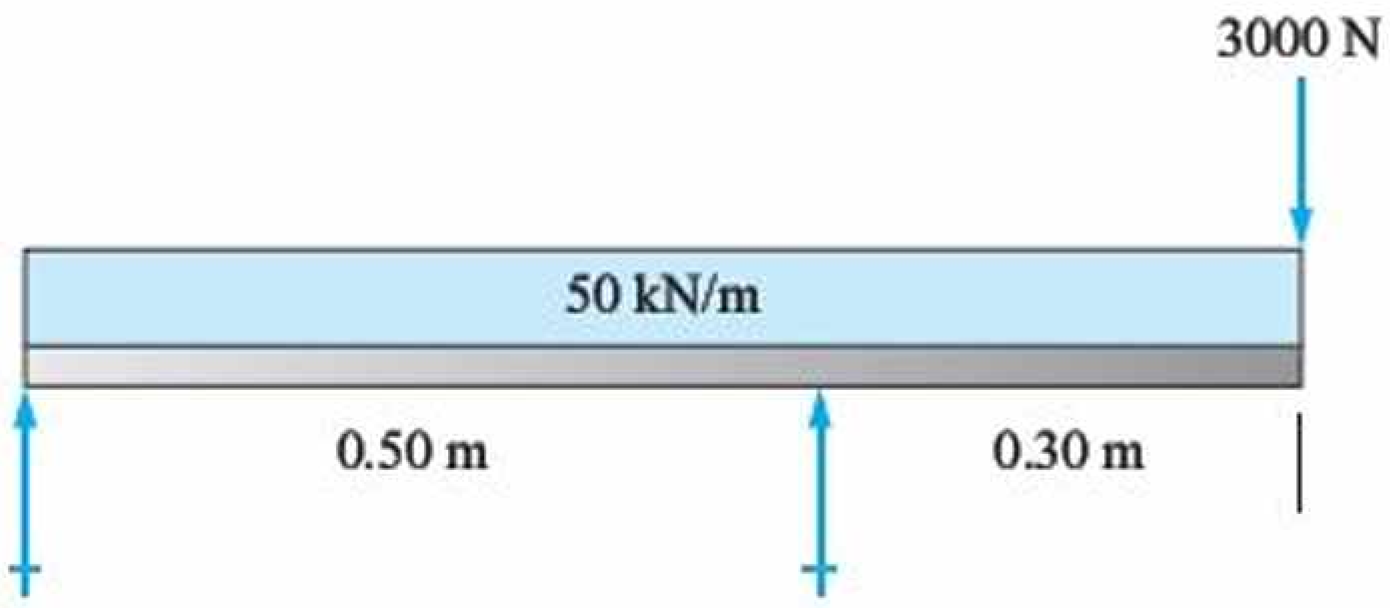


FIGURA P5–105

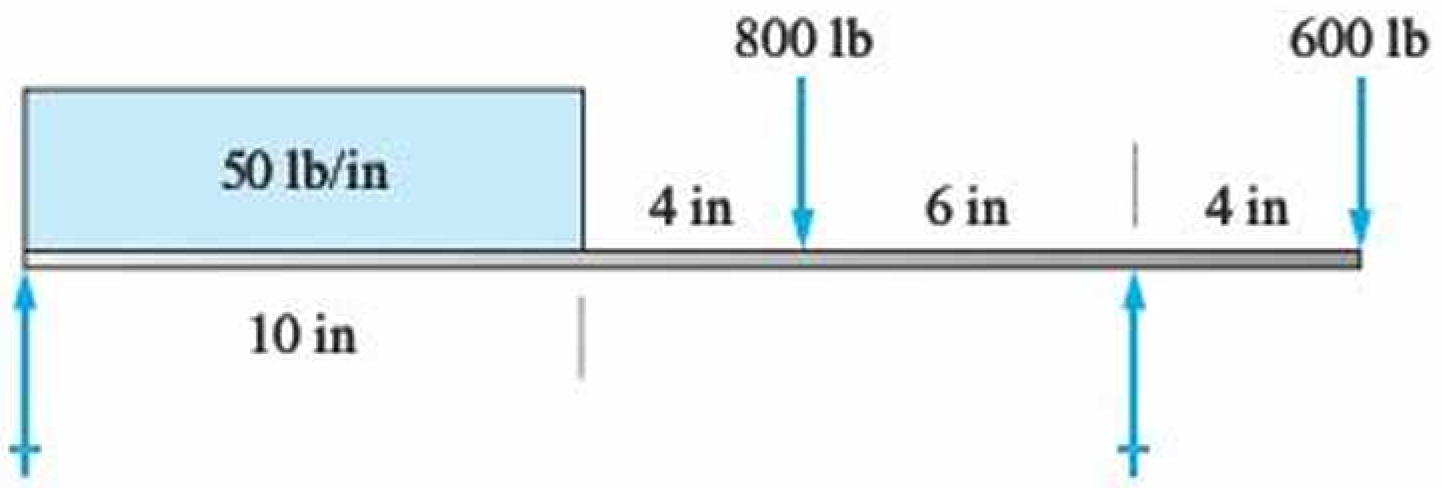


FIGURA P5–101

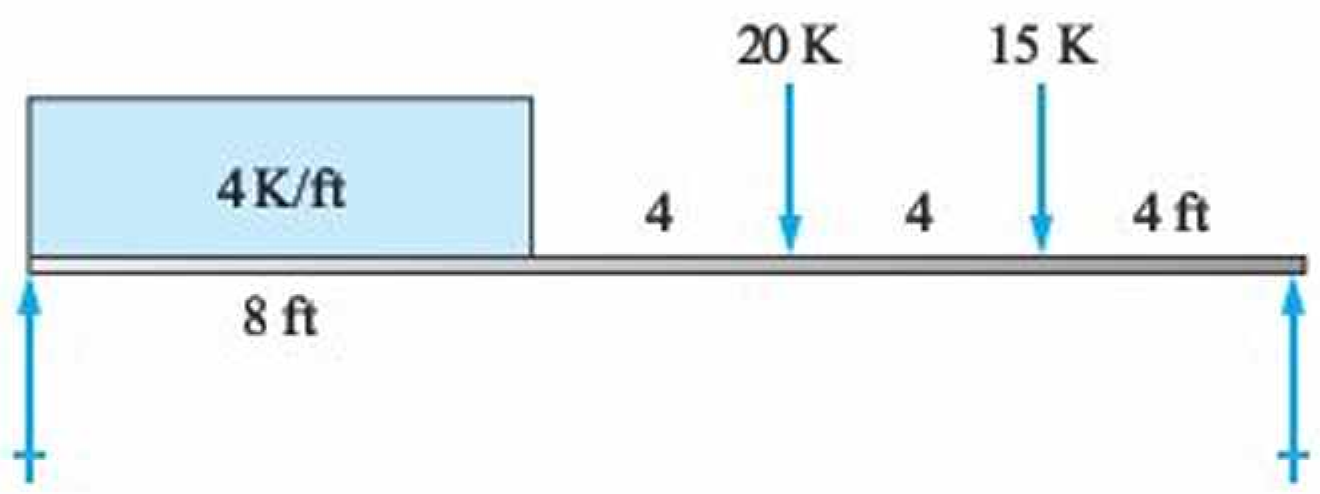


FIGURA P5–106

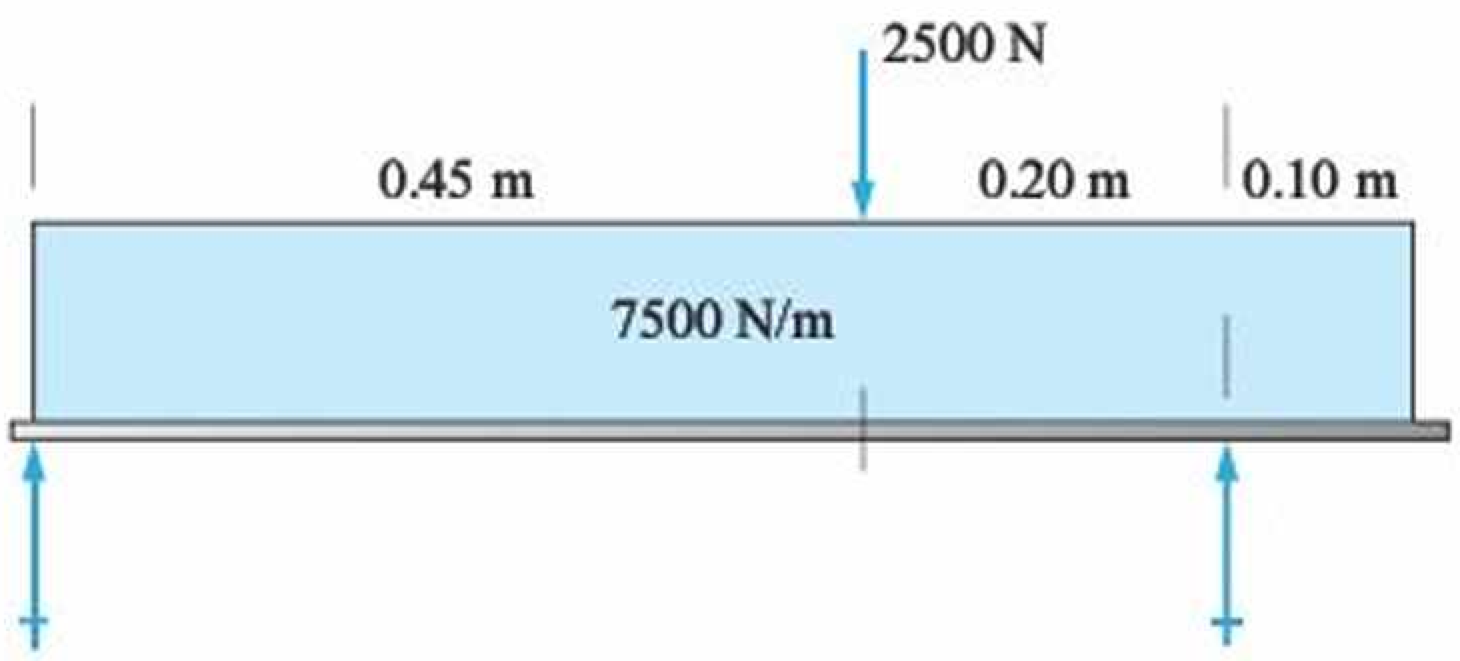


FIGURA P5–102

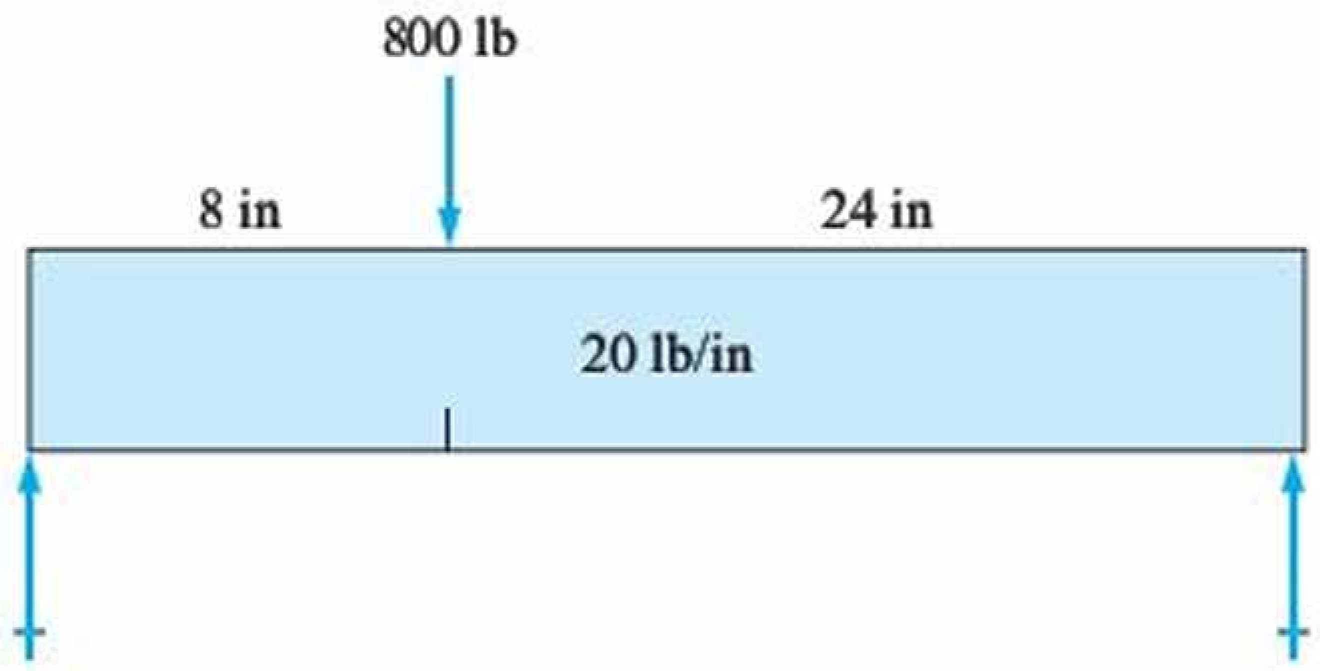


FIGURA P5–107

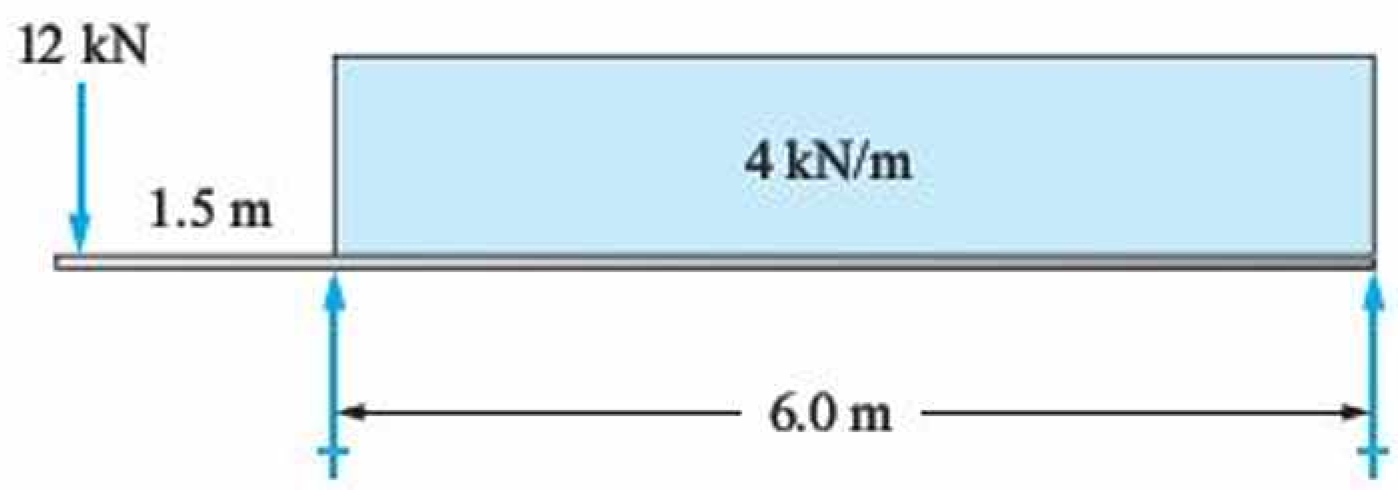


FIGURA P5–103

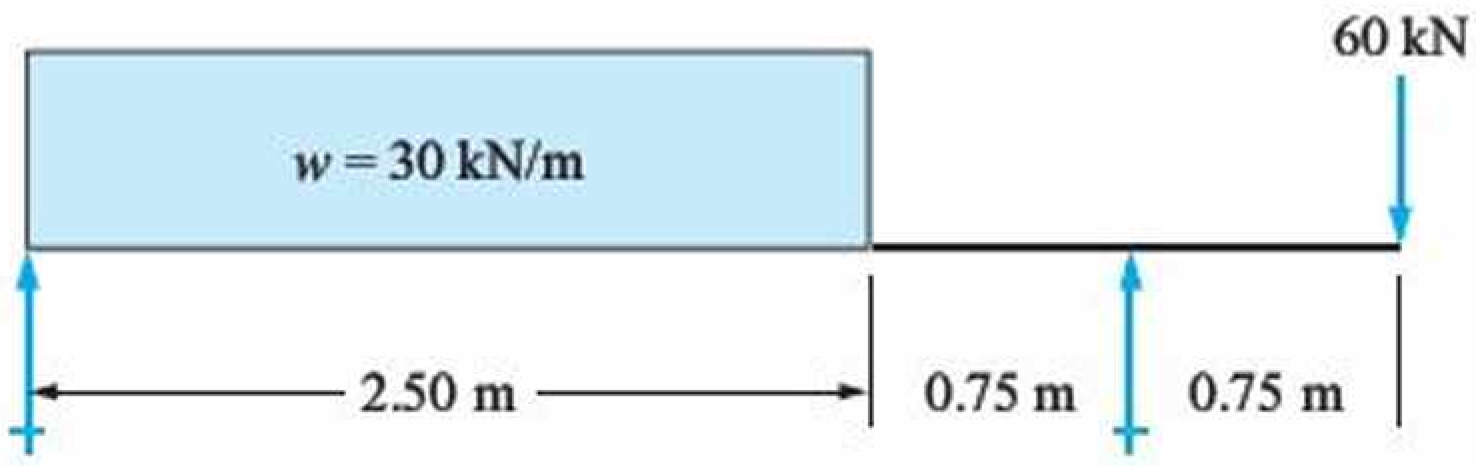


FIGURA P5–108

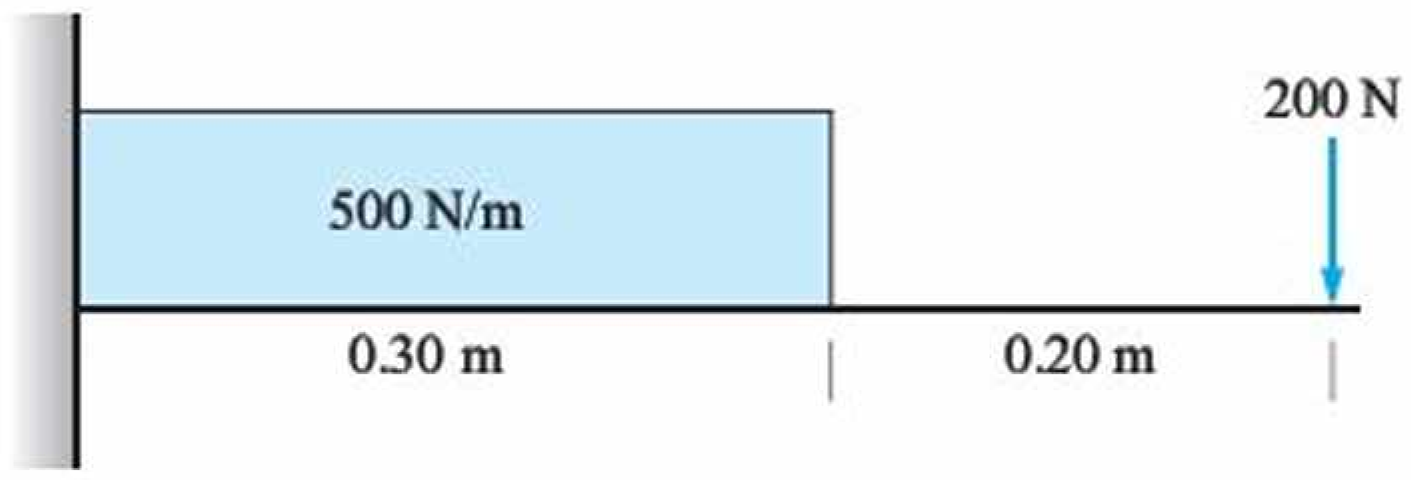


FIGURA P5–109

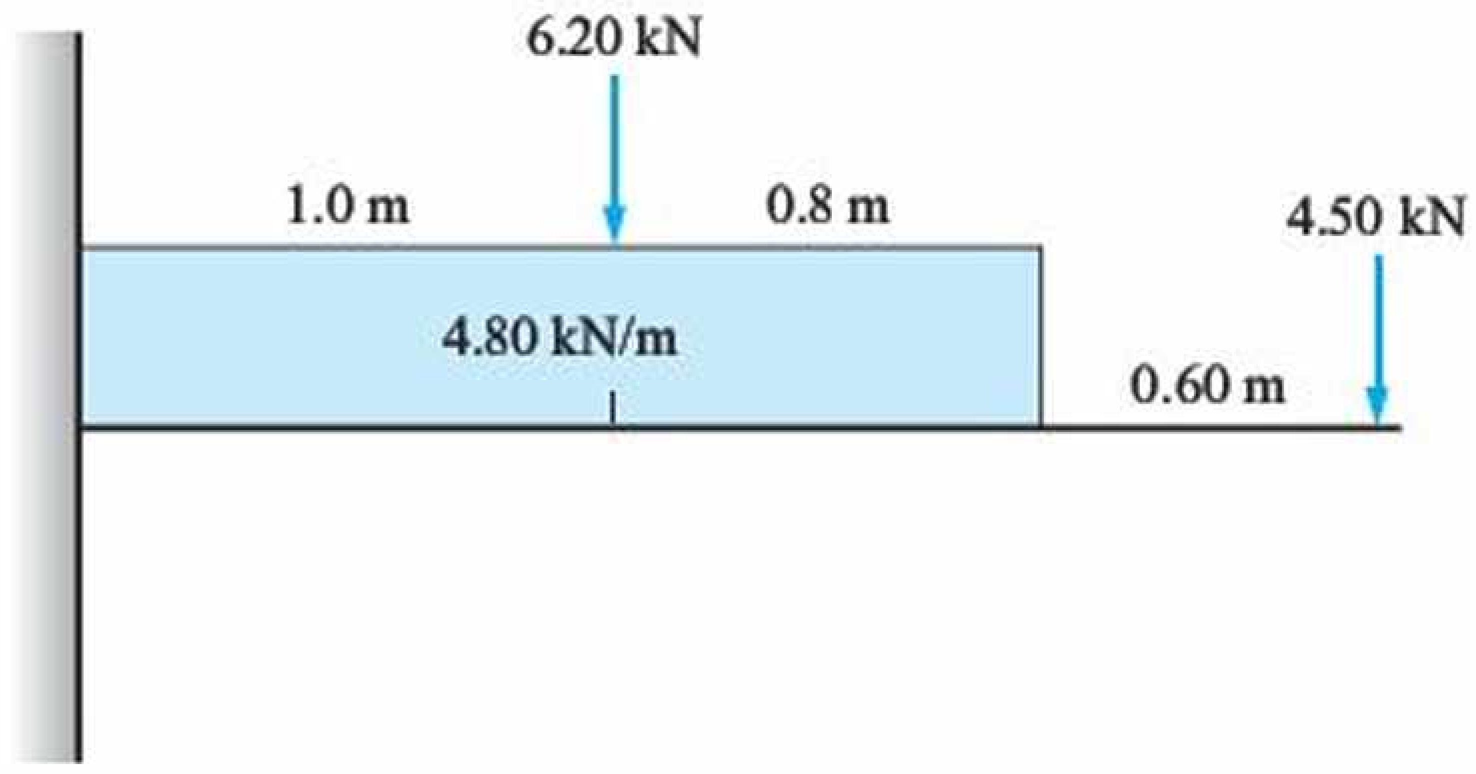


FIGURA P5–110

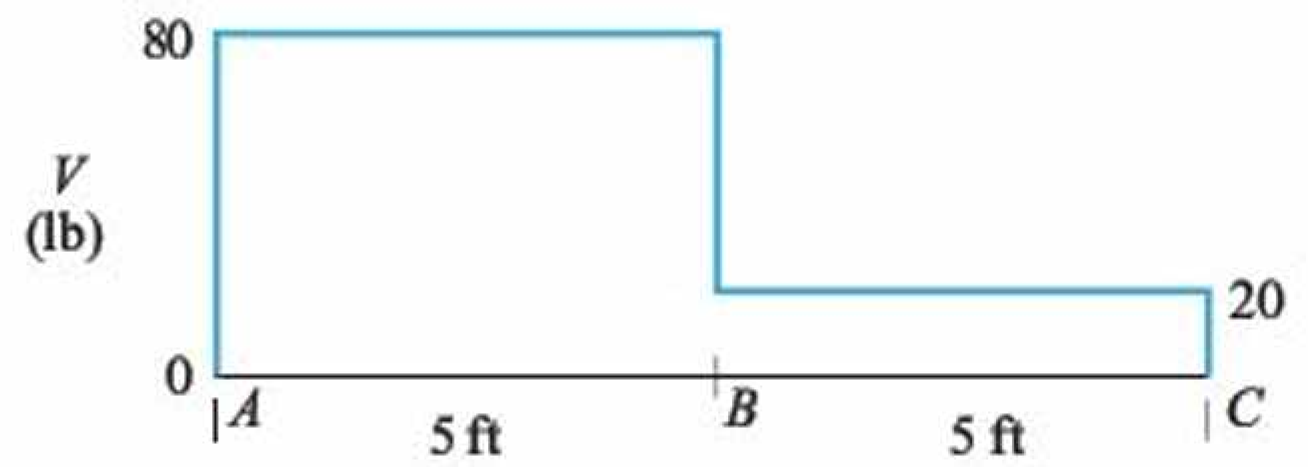


FIGURA P5–113

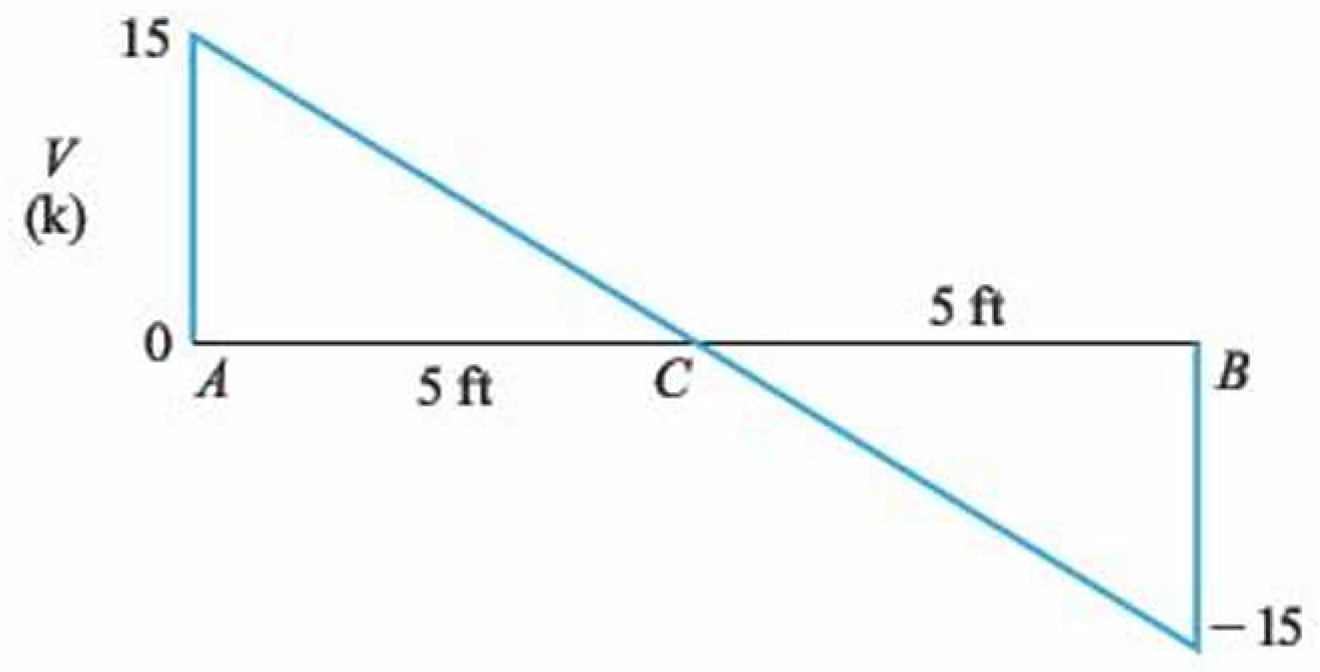


FIGURA P5–114

Problemas 5–111 a 5–116

Las figuras P5–111 a P5–116 muestran diagramas de fuerza cortante terminados de vigas. Desarrolle el diagrama de carga y el diagrama de momento flexionante de cada viga.

Problemas 5–117 a 5–122

Las figuras P5–117 a P5–122 muestran diagramas de momento flexionante terminados de vigas. Desarrolle el diagrama de fuerza cortante y el diagrama de carga de cada viga.

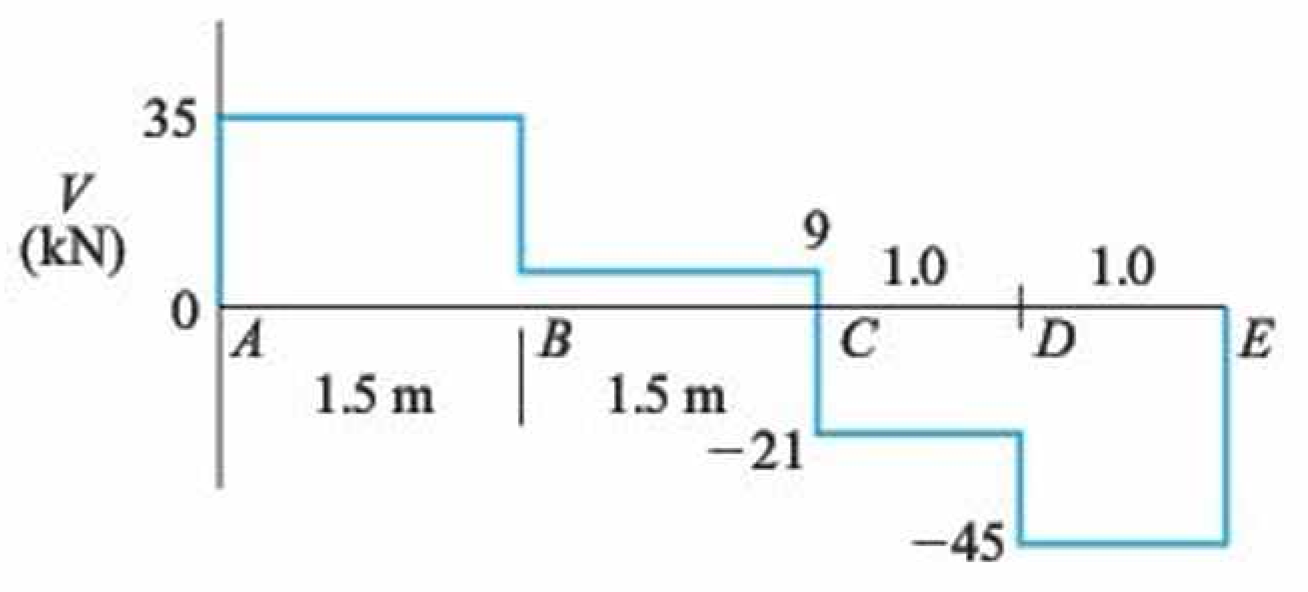


FIGURA P5–111

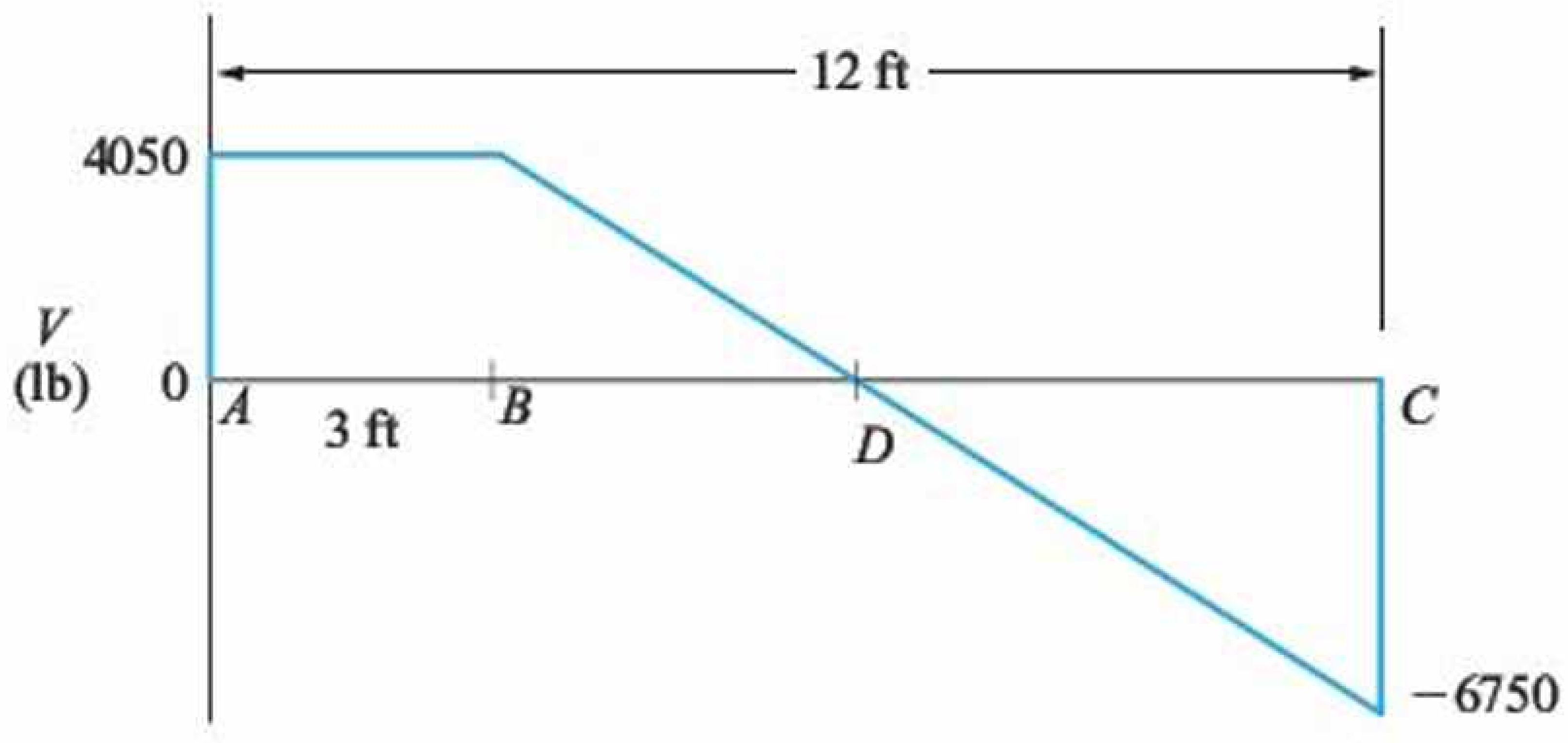


FIGURA P5–115

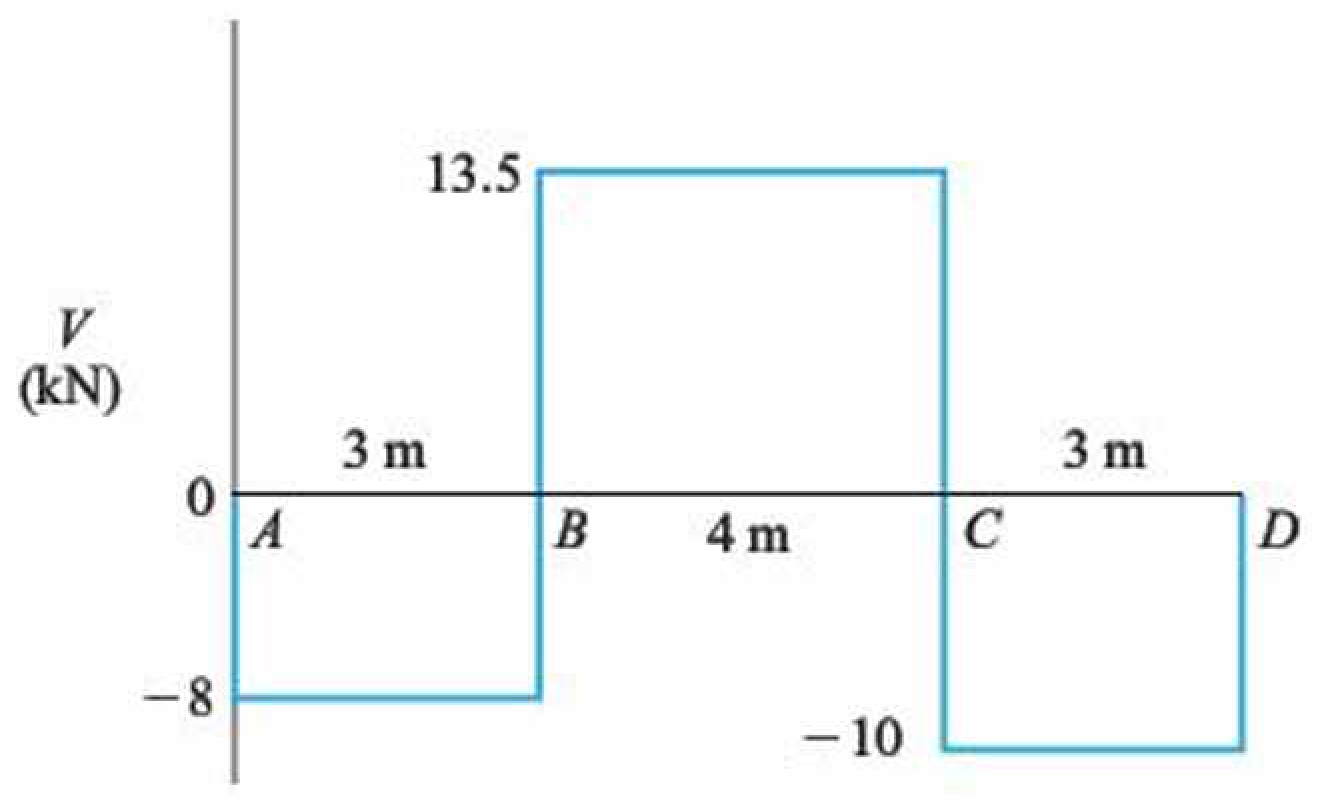


FIGURA P5–112

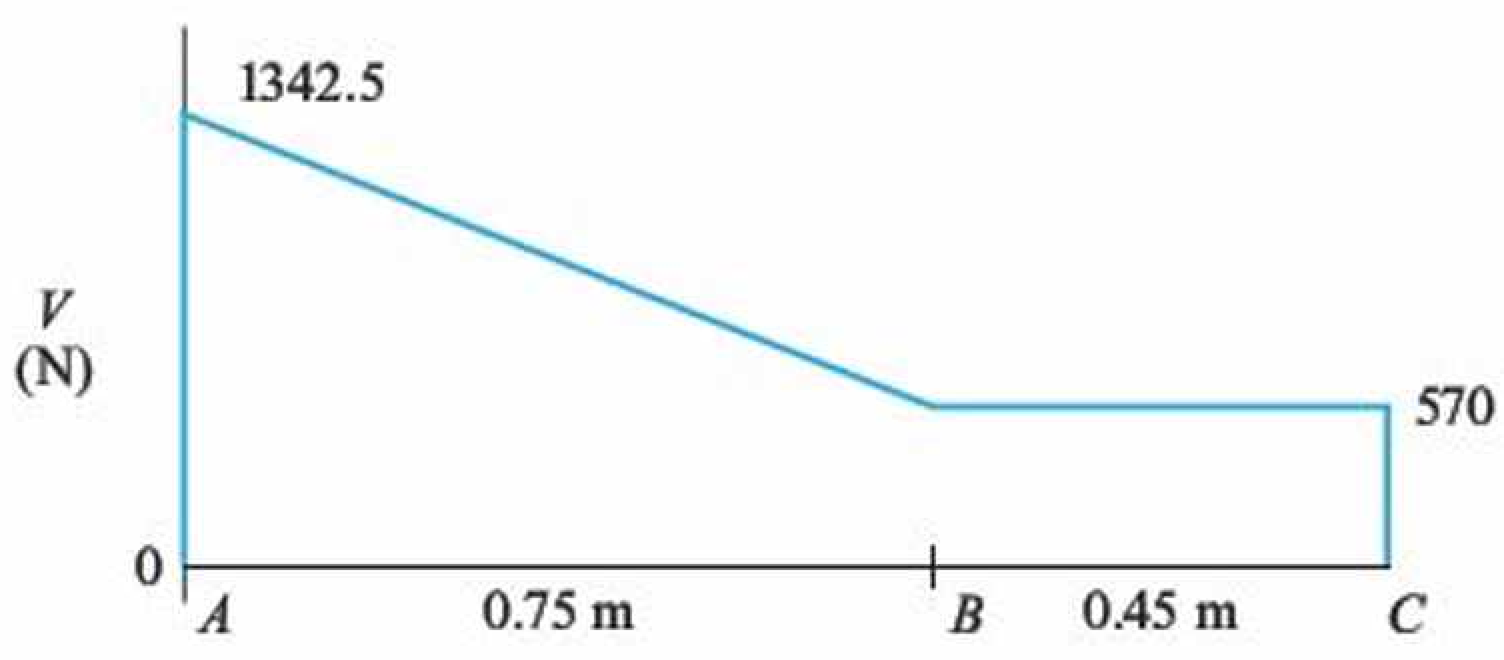


FIGURA P5–116

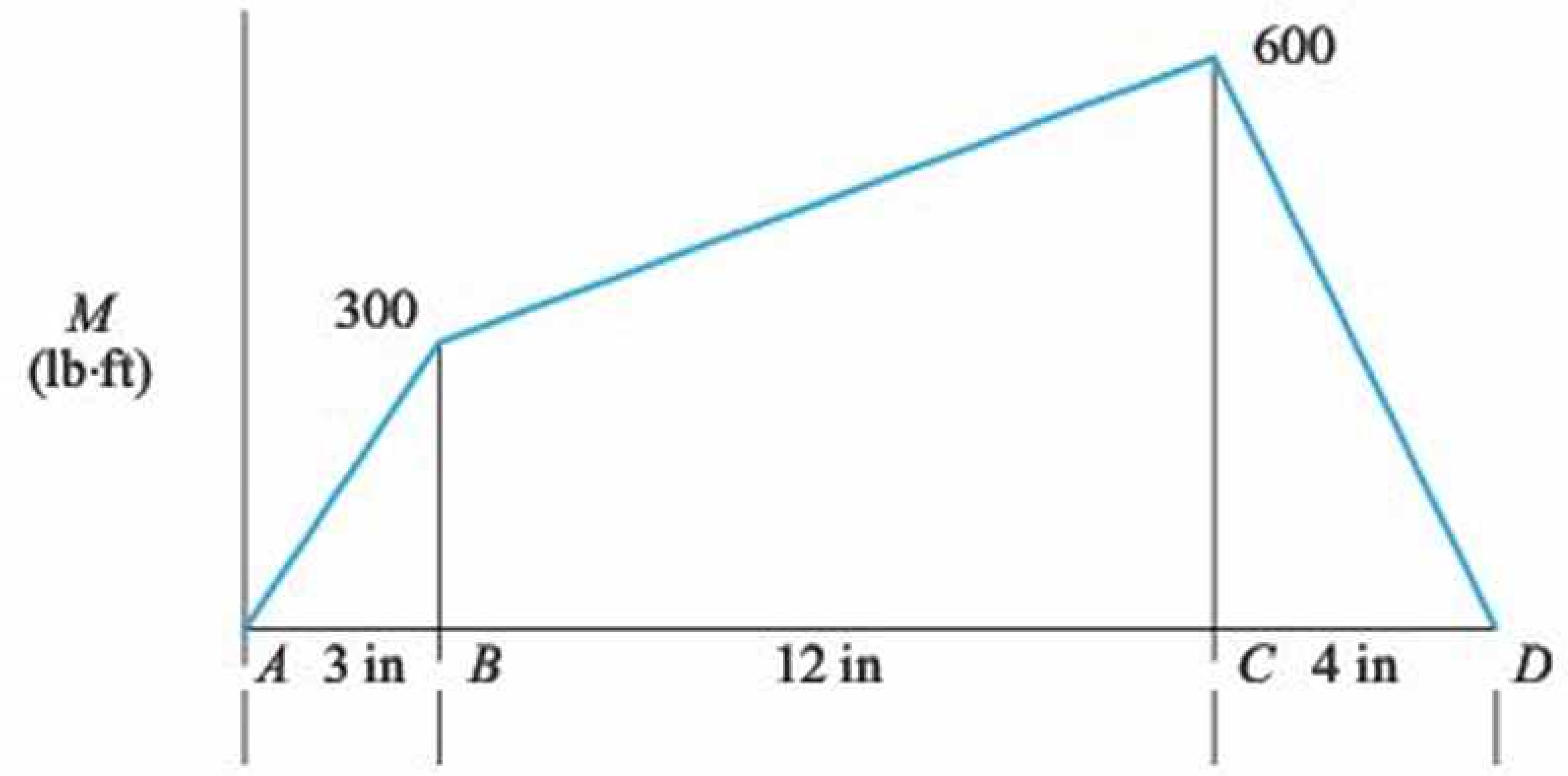


FIGURA P5–117

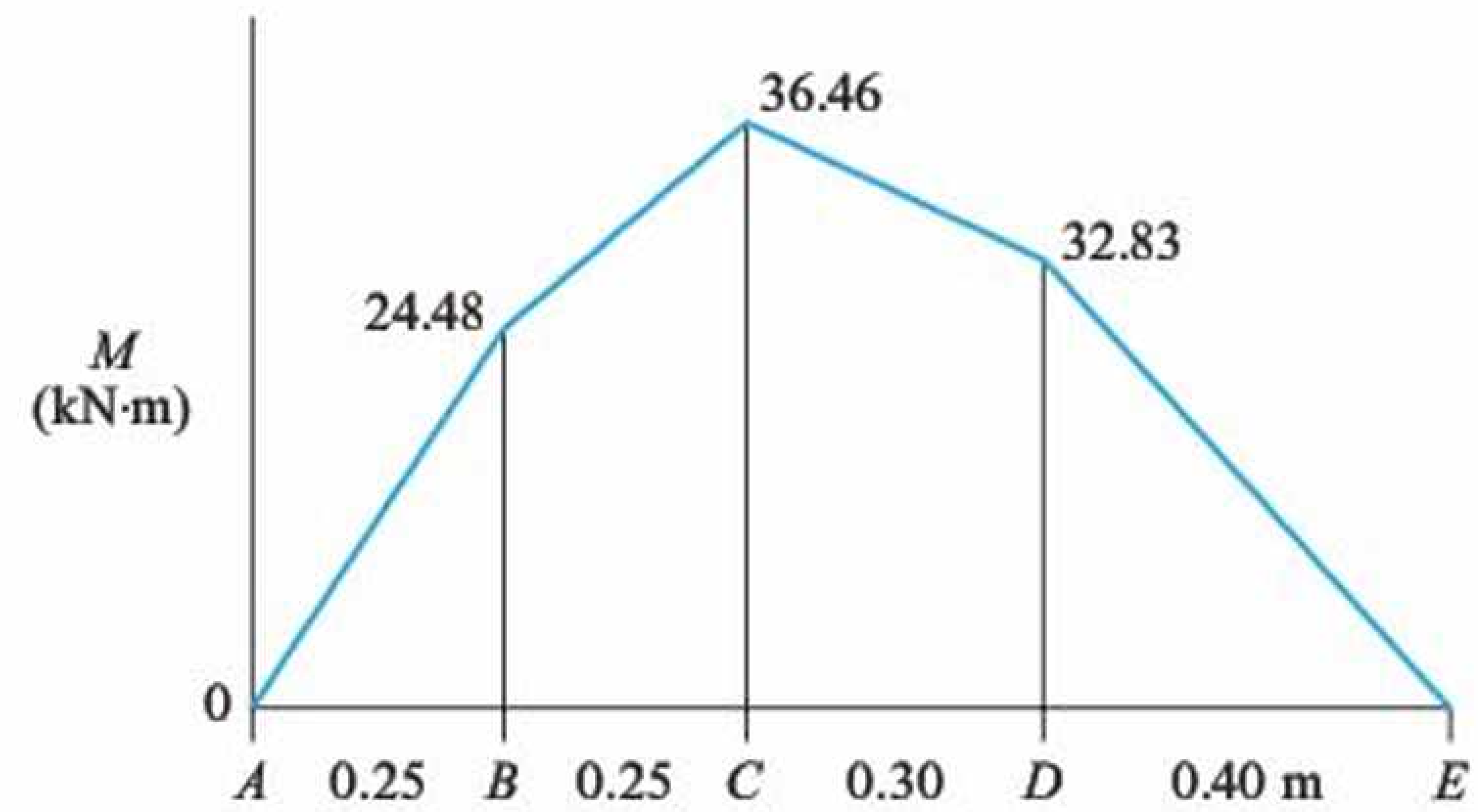


FIGURA P5–118

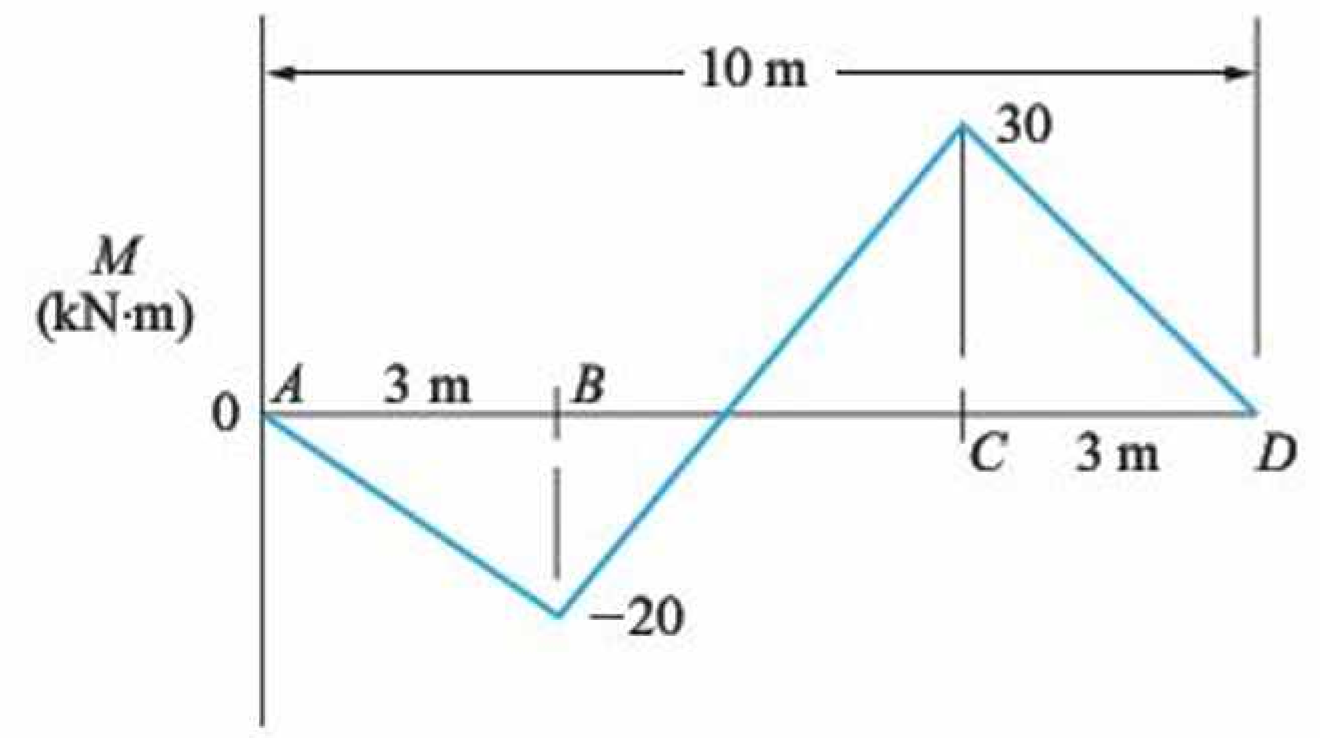


FIGURA P5–119

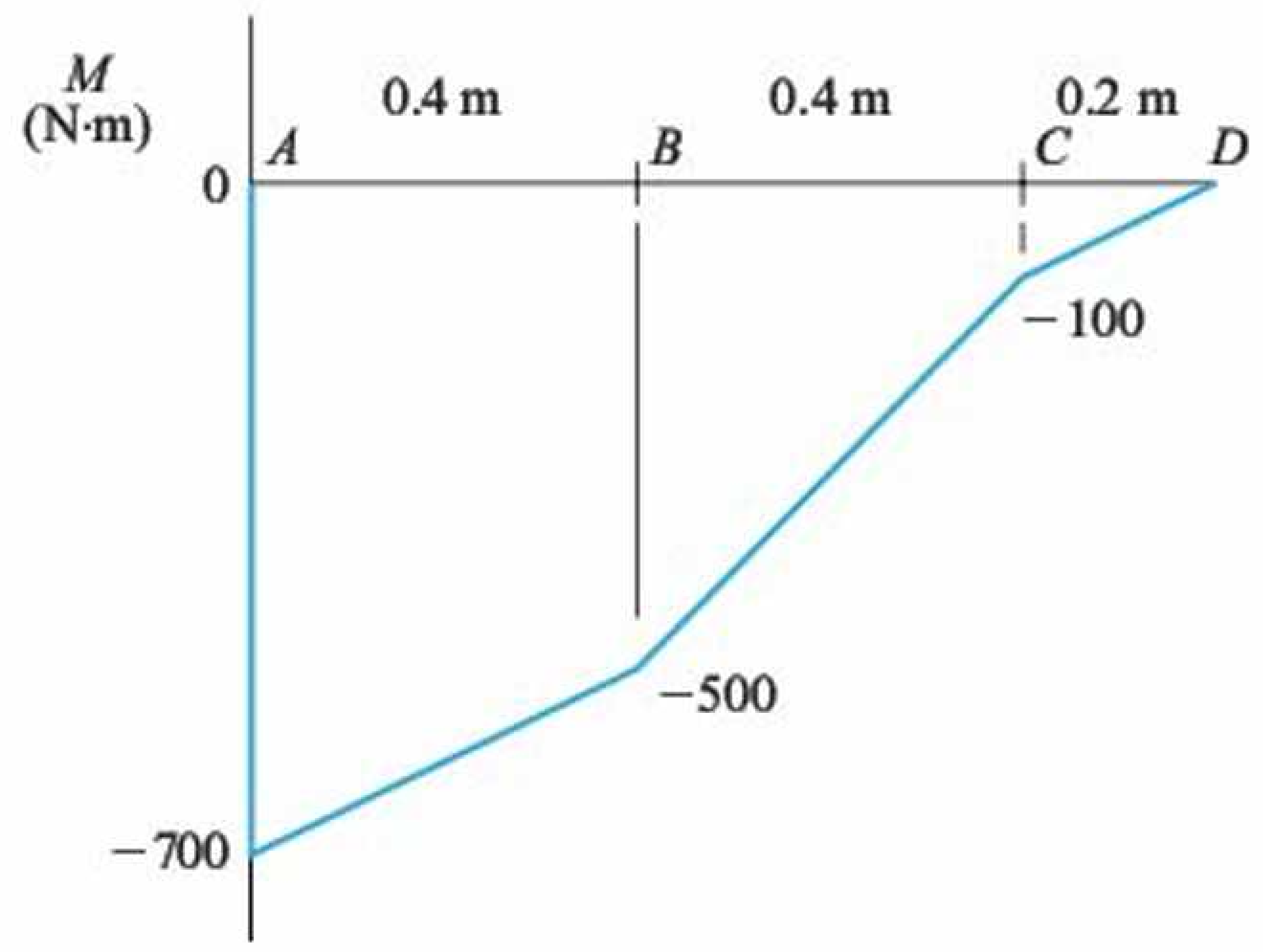


FIGURA P5–120

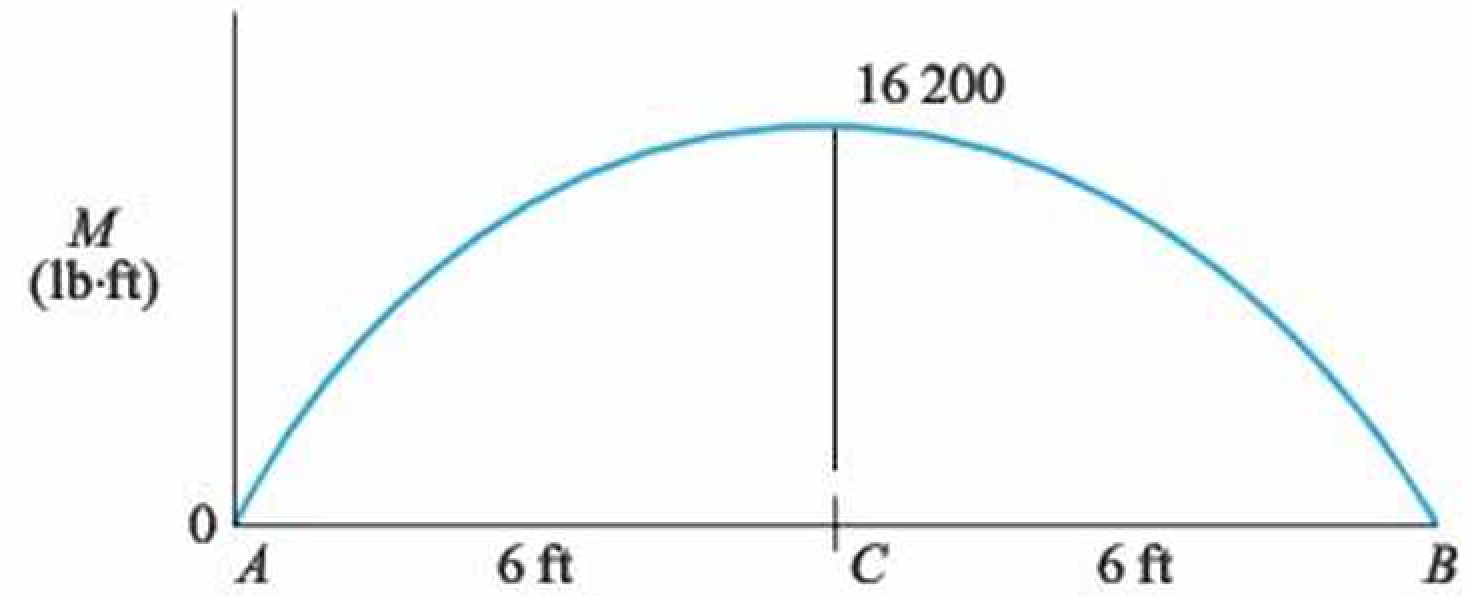


FIGURA P5–121

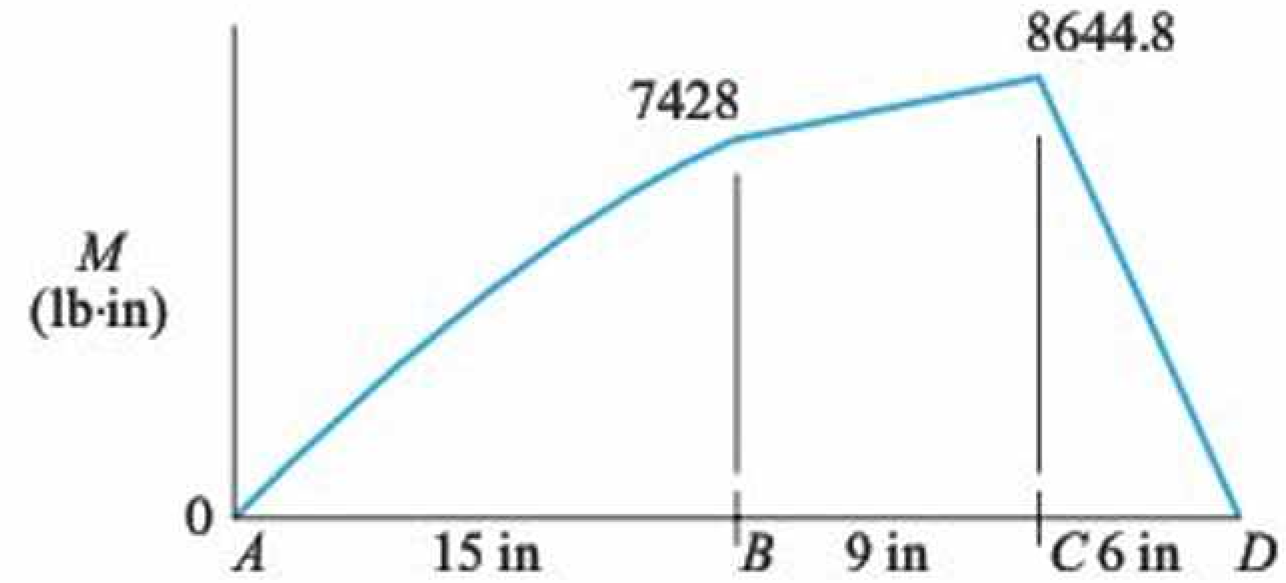


FIGURA P5–122

Vigas continuas: teorema de los tres momentos

Para los problemas 5–123 a 5–130, use el teorema de los tres momentos para determinar las reacciones en todos los apoyos y trace los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante completos. Indique la fuerza cortante máxima y el momento flexionante para cada viga.

5.123.M Use la figura P5–123.

5.124.E Use la figura P5–124.

5.125.E Use la figura P5–125.

5.126.M Use la figura P5–126.

5.127.M Use la figura P5–127.

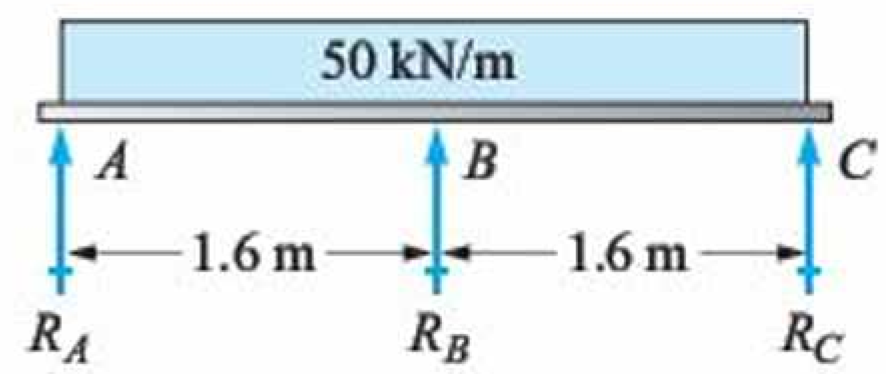


FIGURA P5–123

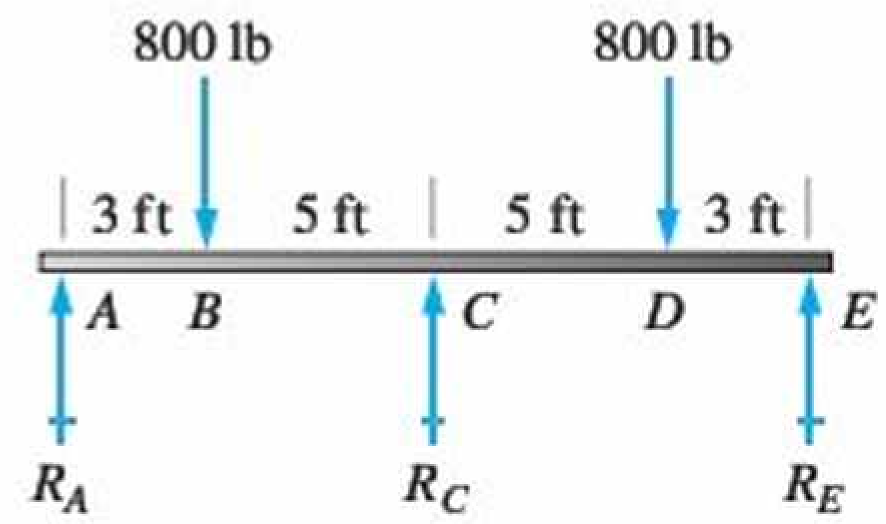


FIGURA P5–124

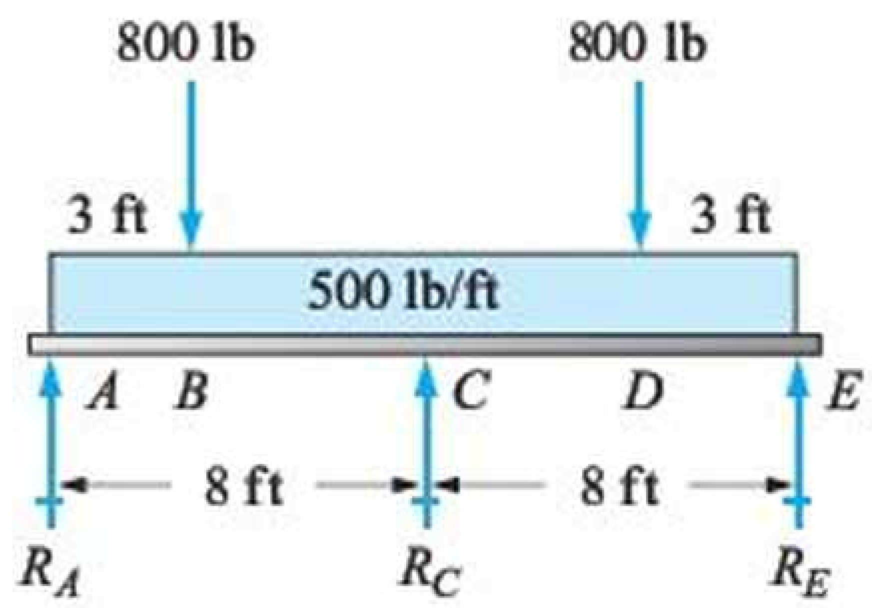


FIGURA P5–125

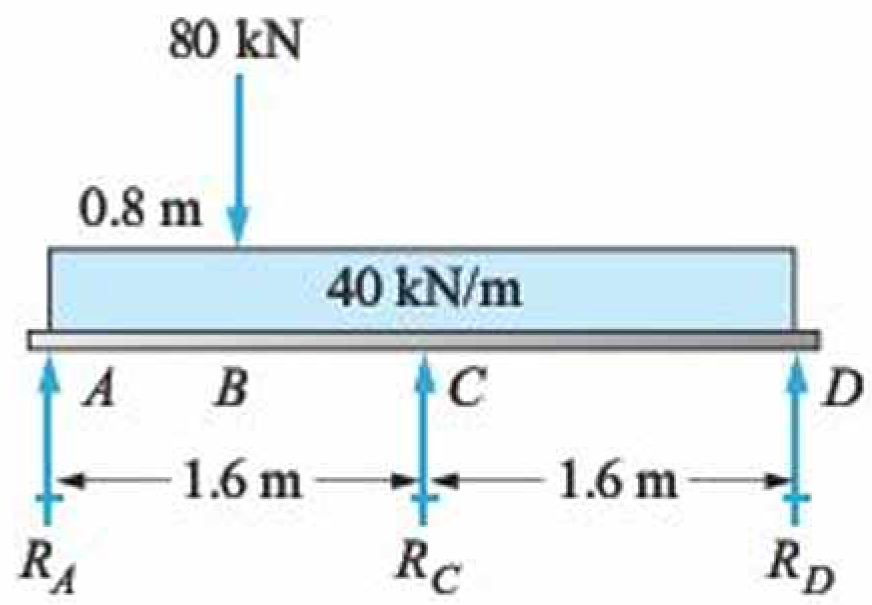


FIGURA P5–126

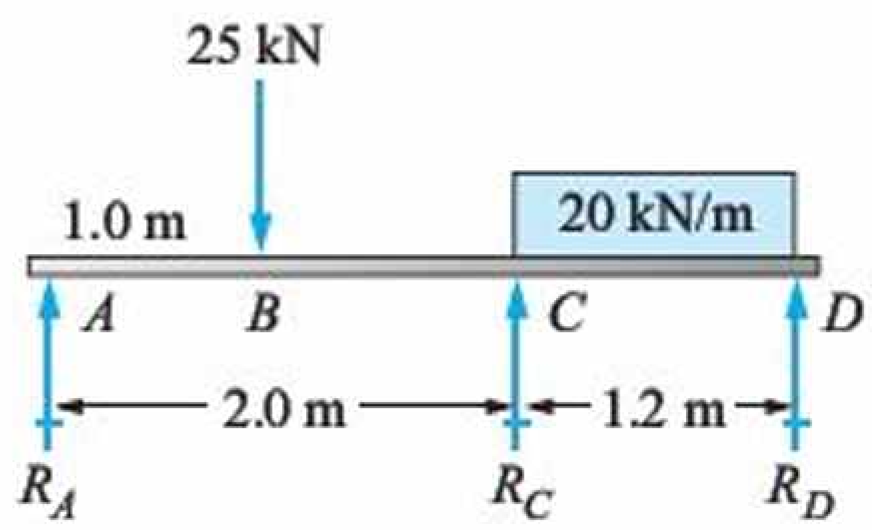


FIGURA P5–127

5.128.M Use la figura P5–128.

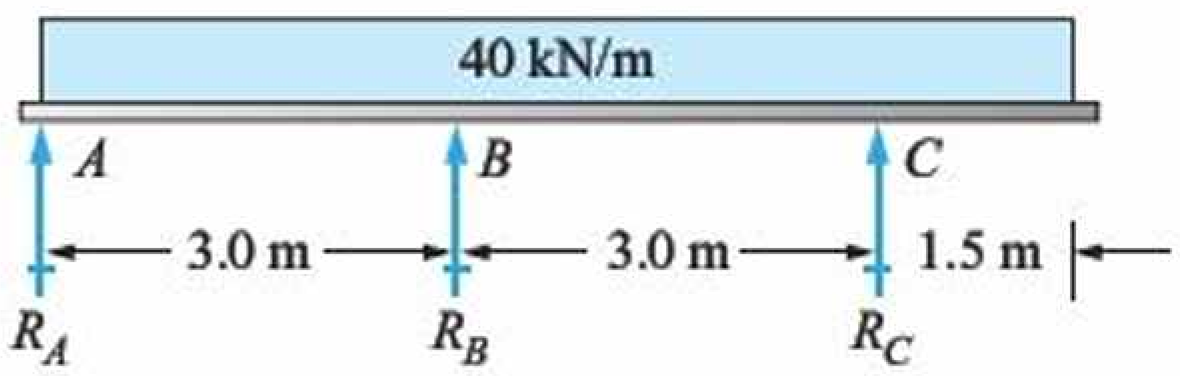


FIGURA P5–128

5.129.M Use la figura P5–129.

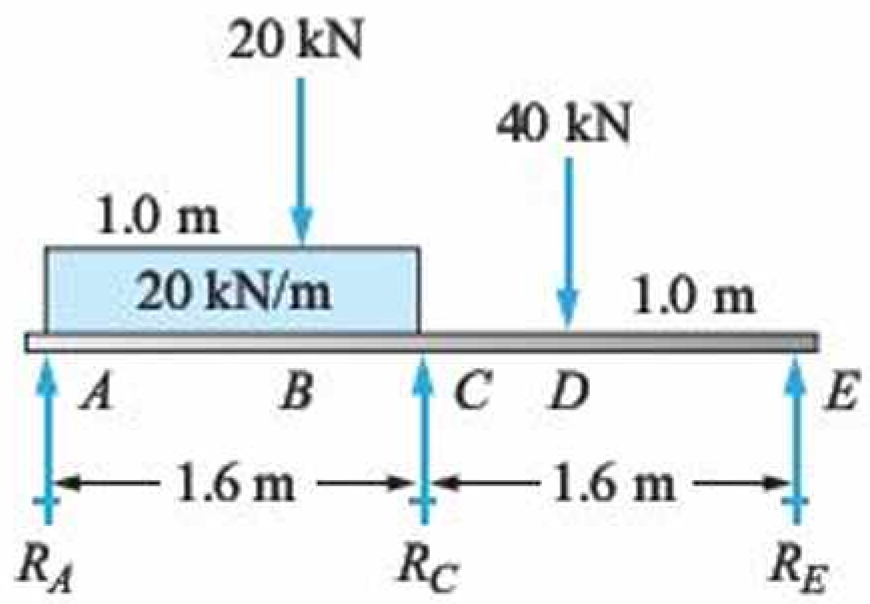


FIGURA P5–129

5.130.M Use la figura P5–130.

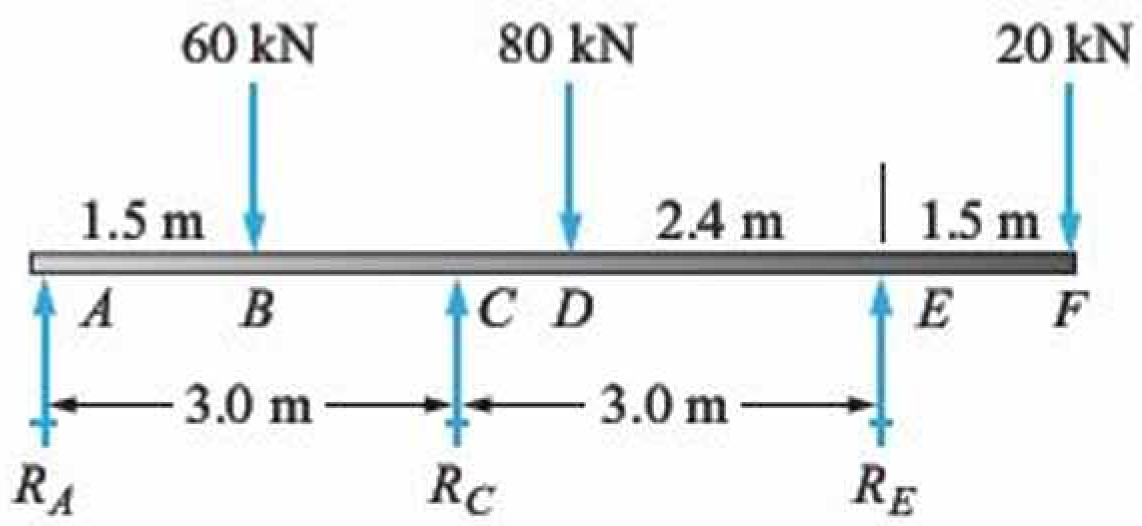


FIGURA P5–130

6

Centroides y momentos de inercia de áreas

La imagen completa y actividad

6–1 Objetivos de este capítulo

6–2 Concepto de centroide: perfiles simples

6–3 Centroide de formas complejas

6–4 Concepto de momento de inercia de un área

6–5 Momento de inercia de perfiles compuestos cuyas partes tienen el mismo eje centroidal

6–6 Momento de inercia de perfiles compuestos. Caso general: uso del teorema del eje paralelo

6–7 Definición matemática del momento de inercia

6–8 Secciones compuestas hechas de perfiles comercialmente disponibles

6–9 Momento de inercia de perfiles con todas las partes rectangulares

6–10 Radio de giro

6–11 Módulo de sección

La imagen completa

Centroides y momentos de inercia de áreas

Mapa de análisis

- En el capítulo 5 aprendió a determinar el valor de fuerzas cortantes y momentos flexionantes en todas las partes de una viga, como parte de los requerimientos para calcular esfuerzos cortantes y esfuerzos flexionantes en capítulos subsiguientes. Este capítulo continúa con esta pauta al presentar las propiedades de la forma de la sección transversal de la viga, requeridas también para completar el análisis de los esfuerzos y deformaciones de vigas.
- Las propiedades del área de la sección transversal de la viga que son de interés en este capítulo son el *centroide* y el *momento de inercia con respecto al eje centroidal*. Si ya domina estos temas porque ya llevó un curso de estática, este capítulo constituirá un repaso que vale la pena y una adecuación del tema a las aplicaciones de interés en la resistencia de materiales. Si aún no ha estudiado los centroides y los momentos de inercia, los conceptos y técnicas que aquí se presentan le permitirán resolver problemas de análisis de vigas incluidos en este libro y muchas situaciones de diseño reales.

Descubra

El capítulo 5 incluyó algunos ejemplos de los tipos de vigas y las clases de cargas que soportan. Repáselo ahora junto con la imagen completa, en la sección 5–1. Cuando recuerde las vigas que ya ha visto, ¿puede describir los perfiles de sus secciones transversales? ¿Qué perfil vería si ve directamente el extremo de la viga?

Adelántese a este capítulo para que vea la amplia variedad de perfiles que con frecuencia se especifican para la sección transversal de vigas. La figura 6–7 muestra una "viga I" representativa, como se la conoce. Éste es uno de los perfiles más eficientes para una viga (como lo constatará cuando estudie los siguientes capítulos). En este análisis, eficiencia se refiere al perfil de una viga que funciona bien con respecto a esfuerzos y deflexiones al mismo tiempo que requiere una cantidad de material relativamente pequeña. Una viga como ésa, en general, sería más barata y ligera que la mayoría de otros perfiles.

Regrese al capítulo 1, donde se describieron perfiles estructurales comercialmente disponibles en acero y aluminio. Repase la sección 1–17; la tabla 1–7 y los apéndices A5 a A13. Allí encontrará secciones llamadas vigas de patín ancho (perfiles W), vigas American Standard (perfiles S), canales (perfiles C), ángulos (perfiles L), perfiles estructurales cuadrados y rectangulares huecos (perfiles HSS) y tubería y tubos circulares huecos. Todos estos perfiles son de uso común para vigas, ya sean solos o combinados.

Consulte la sección 6–8 donde demostramos cómo analizar secciones compuestas hechas de dos o más clases de perfiles, o cómo agregar placas planas a secciones críticas para mejorar la capacidad de la viga de soportar cargas y limitar deflexiones.

¿Ha visto algunos de estos tipos de vigas? Discútalo con sus colegas y compare su experiencia con la de ellos.

Actividad

Capítulo 6–Centroides y momentos de inercia de áreas

Busquemos en Internet evidencias de varios perfiles utilizados para la sección transversal de vigas y columnas. Pruebe los que aquí se describen y consulte los sitios que aparecen al final de este capítulo. Cada uno muestra ejemplos de productos estándar, componentes de maquinaria o partes de productos de consumo que funcionan como vigas o columnas y deben ser resistentes, rígidos y atractivos. Use su propia creatividad para encontrar otros sitios interesantes.

1. El sitio 1 es de una compañía que produce una amplia variedad de perfiles estirados y laminados en frío de precisión relativamente pequeños. Comenzando con secciones largas de alambre o varillas circulares únicas, se producen perfiles de alta precisión mediante estirado o laminado que se desempeñan bien como vigas, al mismo tiempo que satisfacen las necesidades de los diseñadores en cuanto a funcionalidad especial, tal como guiar piezas hermanadas a lo largo de una trayectoria. Observe que algunos de estos perfiles son similares a las vigas I incluidas en los apéndices pero mucho

más pequeños. Otros tienen rebordes longitudinales o formas curvas que contribuyen a la rigidez de la viga. Estos perfiles pueden ser utilizados en equipo automático de manufactura de precisión, máquinas de oficina, productos de consumo, equipo de distribución de electricidad y muchos otros dispositivos.

2. Un producto para la industria de la construcción se ilustra en el sitio 2. Fabricado de varios perfiles de madera rectangulares, el perfil I resultante es resistente y ligero, y permite al diseñador especificar sistemas de piso que cubren claros largos con buena resistencia y rigidez. Una ventaja adicional es que el ensamble y la disposición de estas viguetas y las hojas de madera contrachapada de cobertura crean un soporte silencioso cuando las personas caminan a través del piso.
3. El sitio 3 muestra algunos de los perfiles especiales producidos por un fabricante de acero que se utilizan en grandes estructuras. Observe la combinación de ángulos, canales, acero en barras y otras formas básicas para producir un sistema de soporte de tipo armadura eficiente, para uso en viguetas de piso o techo. En ocasiones, las viguetas se combinan con plataformas de acero y losas de concreto para producir un sistema de piso o techo resistente, rígido.
4. En el sitio 4 se muestran perfiles especiales producidos mediante el proceso de extrusión de aluminio. Se hace que el metal fundido pase a través de matrices con aberturas que tienen las formas de los perfiles mostrados. Los productos resultantes hechos con estas formas pueden ser utilizados en aplicaciones automotrices, ebanistería, marcos de puertas y ventanas, muebles, aviones y muchas otras industrias. Examine los ejemplos de aplicaciones que aparecen en este sitio. En seguida puede visitar algunos de los sitios de compañías que producen las extrusiones, para que aprenda más sobre el proceso y el equipo utilizados para fabricarlas.
5. El sitio 5 muestra perfiles de plástico producidos mediante extrusión similares a los descritos en el sitio 4. Se utilizan plásticos tales como nylon, ABS, policarbonato, PVC y muchos otros para aplicaciones automotrices y de transporte, arquitectónicas, construcción de edificios, aeroespaciales, electrónica y muchas otras industrias. También examine los procesos de diseño, ingeniería y fabricación utilizados para producir estos perfiles.
6. El sitio 6 muestra un ejemplo de la industria de escaleras donde por lo general se utilizan perfiles laminados o extruidos, utilizados para los marcos laterales y escalones sometidos a flexión en servicio. Observe que los travesaños laterales son secciones I y canales especiales que permiten afianzar los escalones. Los escalones son perfiles huecos que forman una superficie plana para que el usuario pise cuando sube o baja la escalera, al mismo tiempo que ofrece un soporte resistente, rígido. Los materiales utilizados incluyen aluminio, fibra de vidrio, acero y madera. La compañía también surte los andamios utilizados para crear una plataforma horizontal estable para los trabajadores.
7. ¿Ha observado camiones como los mostrados en el sitio 7, que instaladores de compañías de electricidad, cuadrillas de poda de árboles, pintores y otros utilizan para subir a los trabajadores a puntos elevados? Las plumas articuladas actúan como vigas al mismo tiempo que unos actuadores hidráulicos permiten el acercamiento preciso, suave al sitio de trabajo. Los diseñadores de estos camiones deben ser capaces de determinar los centroides y momentos de inercia de estos componentes para garantizar la seguridad de los trabajadores y la durabilidad del equipo.
8. El producto mostrado en el sitio 8 permite fabricar un conjunto versátil de componentes estructurales que pueden ser ensamblados en marcos hechos a la medida para una aplicación particular. Hecho de acero formado en caliente, el perfil acanalado resultante proporciona la resistencia y rigidez requeridas para el marco al mismo tiempo que facilita la fijación de equipo, paneles laterales, planchas de piso y otros subsistemas. Estudie los ejemplos de aplicación en la ficha *Tech. Data*. La introducción muestra cómo funciona el sistema, al mismo tiempo que ilustra una amplia variedad de aplicaciones. Luego puede explorar detalles más específicos bajo los encabezados

Mechanical, Architectural, Industrial y *Electrical*. Localice datos detallados en el catálogo en línea sobre una amplia variedad de tamaños disponibles que incluye las propiedades de sección tales como momento de inercia, área de sección transversal y el peso por unidad de longitud. Estos perfiles pueden ser utilizados en algunos problemas de este capítulo y los siguientes.

9. El sitio 9 muestra un sistema estructural extruido de aluminio que puede ser utilizado en aplicaciones similares a las descritas en el sitio 8. Los costados planos y canales integrales facilitan el ensamble y dan una apariencia bien hecha, bonita a la estructura terminada. Los perfiles de la sección transversal se optimizan para que soporten carga al mismo tiempo que son adaptables para la construcción de máquinas especiales, estaciones de trabajo, equipo automático, unidades móviles y sistemas de almacenamiento. Examine los catálogos en línea que describen los datos técnicos requeridos para la aplicación apropiada, incluidas las propiedades de sección de área, momento de inercia y peso por unidad de longitud.

La inspección de estos sitios y aquellos que usted pueda haber encontrado por su cuenta ponen de manifiesto la necesidad de desarrollar la habilidad de analizar muchos perfiles diferentes para localizar sus centroides y la magnitud de sus momentos de inercia con respecto al centroide. Use la información y los ejercicios incluidos en este capítulo para adquirir y refinar su habilidad de hacer exactamente eso, y esté preparado para transferir esta habilidad a los siguientes capítulos que se ocupan de vigas y columnas.

6-1 OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

Al término de este capítulo, usted podrá:

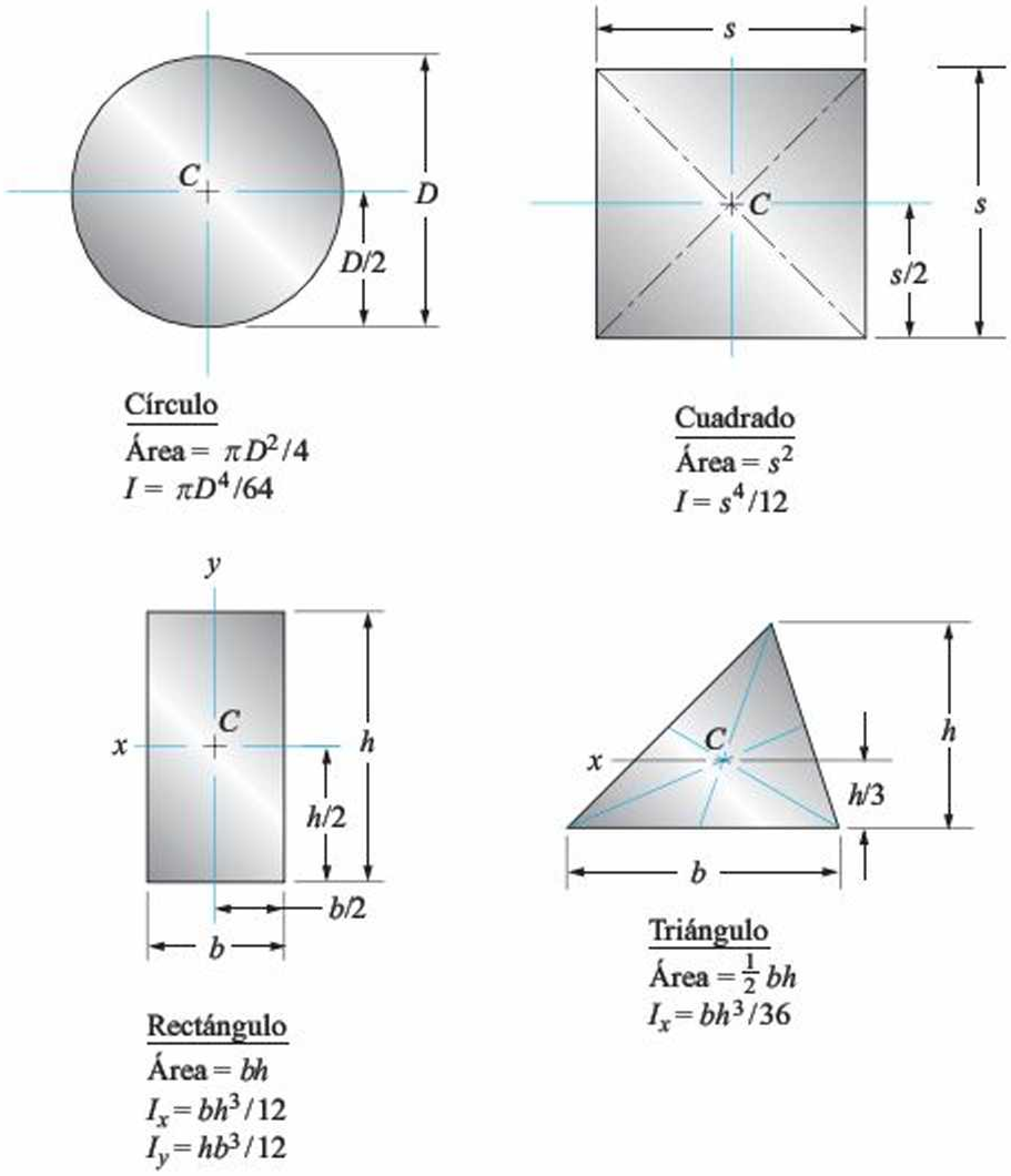
1. Definir *centroide*.
2. Localizar el centroide de formas simples por observación.
3. Calcular la ubicación del centroide de formas complejas tratándolas como compuestas de dos o más formas simples.
4. Definir *momento de inercia*, tal como se aplica al área de sección transversal de vigas.
5. Utilizar fórmulas para calcular el momento de inercia de formas simples con respecto a los ejes centroidales del área.
6. Calcular el momento de inercia de formas complejas tratándolas como compuestas de dos o más formas simples.
7. Utilizar de forma apropiada el *teorema del eje paralelo* para calcular el momento de inercia de formas complejas.
8. Analizar perfiles de vigas compuestas hechas de dos o más perfiles estructurales estándar para determinar la ubicación del centroide y el momento de inercia resultantes.
9. Reconocer los tipos de perfiles eficientes en función de su capacidad de producir un gran momento de inercia con respecto a la cantidad de área de la sección transversal.

6-2 CONCEPTO DE CENTROIDE: PERFILES SIMPLES

El *centroide* de un área es el punto con respecto al cual el área podría ser equilibrada si estuviera soportada en dicho punto. La palabra se deriva de la palabra *centro* y puede ser considerado como el centro geométrico de un área. Para cuerpos tridimensionales, el término *centro de gravedad* o *centro de masa*, se usa para definir un punto similar.

En el caso de áreas simples, tales como el círculo, el cuadrado, el rectángulo y el triángulo, el centroide es fácil de visualizar. La figura 6–1 muestra las ubicaciones, denotadas con *C*. Si estos perfiles se fabricaron con esmero y el centroide se localizó con precisión, los perfiles se podrían equilibrar sobre la punta de un lápiz colocada en el centroide. Desde luego, se requiere una mano firme. ¿Cómo está la suya?

FIGURA 6–1
Propiedades de áreas simples. El centroide se denota como C.



El apéndice A–1 contiene más datos sobre centroides y otras propiedades de áreas de varios perfiles. Vea las referencias 1–3 para consultar más perfiles.

6-3 CENTROIDE DE FORMAS COMPLEJAS

Las formas más complejas pueden ser consideradas como compuestas de varias formas simples. Esto facilita la localización del centroide, como más adelante se demostrará.

Se puede utilizar una regla simple para localizar centroides de algunas combinaciones especiales de áreas:

- Si el área tiene un eje de simetría, el centroide quedará en dicho eje.
- Si el área tiene dos ejes de simetría, el centroide se encuentra en la intersección de estos dos ejes.

La figura 6–2 muestra seis ejemplos donde se aplican estas reglas.

Cuando no hay dos ejes de simetría, se puede utilizar el *método de áreas compuestas* para localizar el centroide. Por ejemplo, considere el área mostrada en la figura 6–3. Se considera que tales áreas se componen de dos o más áreas simples cuyo centroide se puede localizar aplicando el principio siguiente:

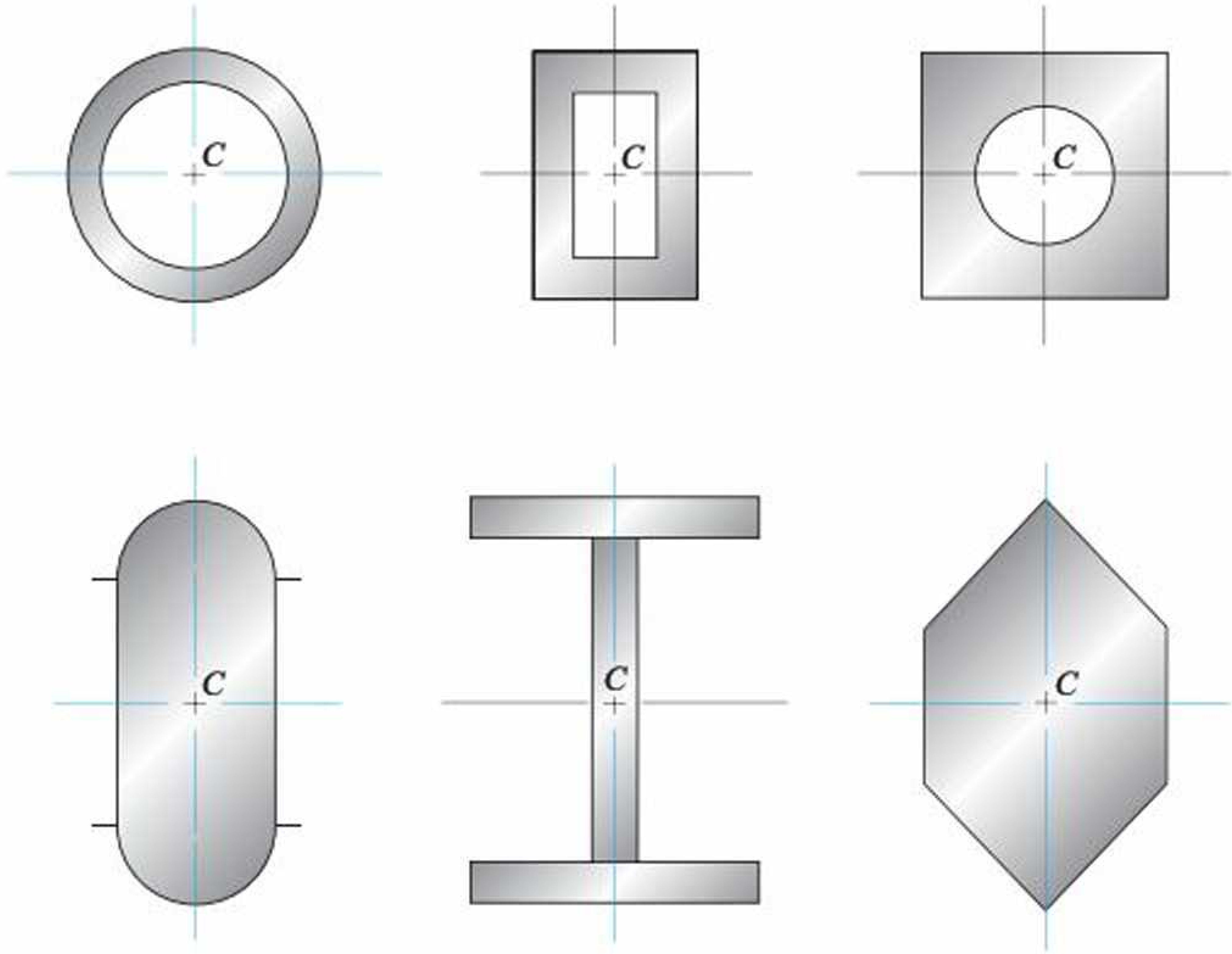


FIGURA 6–2
Formas compuestas con dos ejes de simetría. El centroide se denota como C.

> El producto del área total por la distancia a su centroide es igual a la suma de los productos del área de cada componente por la distancia a su centroide, con la distancia medida con respecto al mismo eje de referencia.

Este principio utiliza el concepto del *momento de un área*, es decir, el producto del área por la distancia del eje de referencia al centroide del área. El principio establece que:

> El momento del área total con respecto a un eje particular es igual a la suma de los momentos de todos los componentes con respecto al mismo eje.

Esto se expresa matemáticamente como

$$A_T \overline{Y} = \Sigma(A_i y_i) \quad \textbf{(6–1)}$$

donde A_T = área total de la forma compuesta
$\overline{Y}$ = distancia al centroide de la forma compuesta medida con respecto a un eje de referencia
A_i = área de un componente de la forma
y_i = distancia al centroide del componente con respecto a un eje de referencia

El subíndice i indica que puede haber varios componentes, y que se debe formar el producto $A_i y_i$ por cada uno y luego sumarlos, como lo requiere la ecuación (6–1). Como nuestro objetivo es calcular $\overline{Y}$, entonces se resuelve la ecuación (6–1):

$$\overline{Y} = \frac{\sum(A_i y_i)}{A_T} \quad \textbf{(6–2)}$$

Los datos escritos en forma de tabla permiten no perder de vista los pasos de los cálculos requeridos por la ecuación (6–2). Un ejemplo ilustrará el método.

Problema de ejemplo 6-1 Localice el centroide del área mostrada en la figura 6–3.

Solución Objetivo Localizar el centroide.

Datos El área mostrada en la figura 6–3.

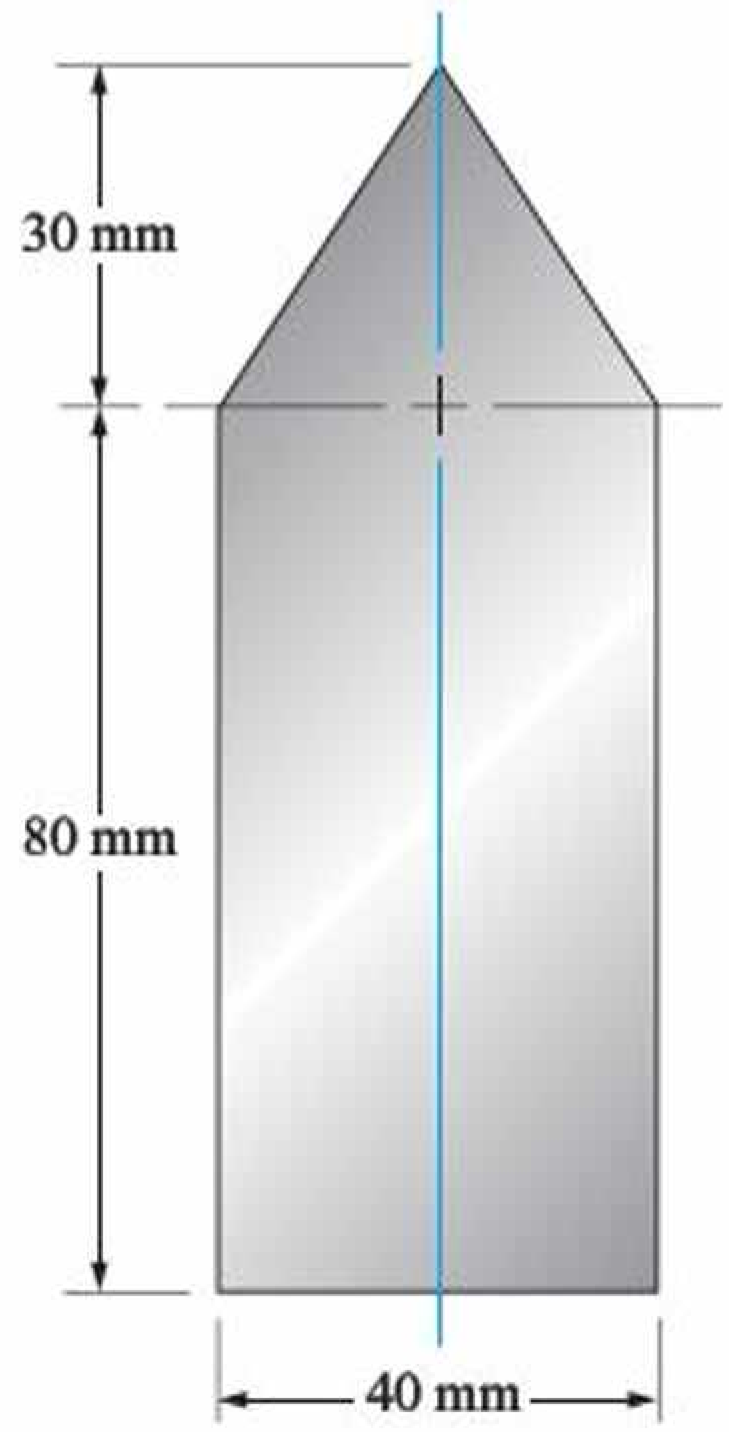


FIGURA 6–3 Perfil para el problema de ejemplo 6–1.

Análisis Como el área tiene un eje vertical de simetría, el centroide reside en dicha línea. La distancia vertical de la base del área al centroide se calcula con la ecuación (6–2). El área total se divide en un rectángulo (parte 1) y en un triángulo (parte 2), como se muestra en la figura 6–4. Cada una de las partes es una forma simple cuyo centroide se determina con los datos de la figura 6–1. Las distancias a los centroides con respecto a la base del área se muestran en la figura 6–4 como y_1 y y_2.

Resultados La tabla siguiente facilita los cálculos de los datos requeridos en la ecuación (6–2).

Parte	A_i	y_i	$A_i y_i$
1	3200 mm²	40 mm	128 000 mm³
2	600 mm²	90 mm	54 000 mm³
A_T = 3800 mm²		$\Sigma(A_i y_i)$ = 182 000 mm³	

Ahora se puede calcular $\overline{Y}$.

$$\overline{Y} = \frac{\sum (A_i y_i)}{A_T} = \frac{182\,000 \text{ mm}^3}{3800 \text{ mm}^2} = 47.9 \text{ mm}$$

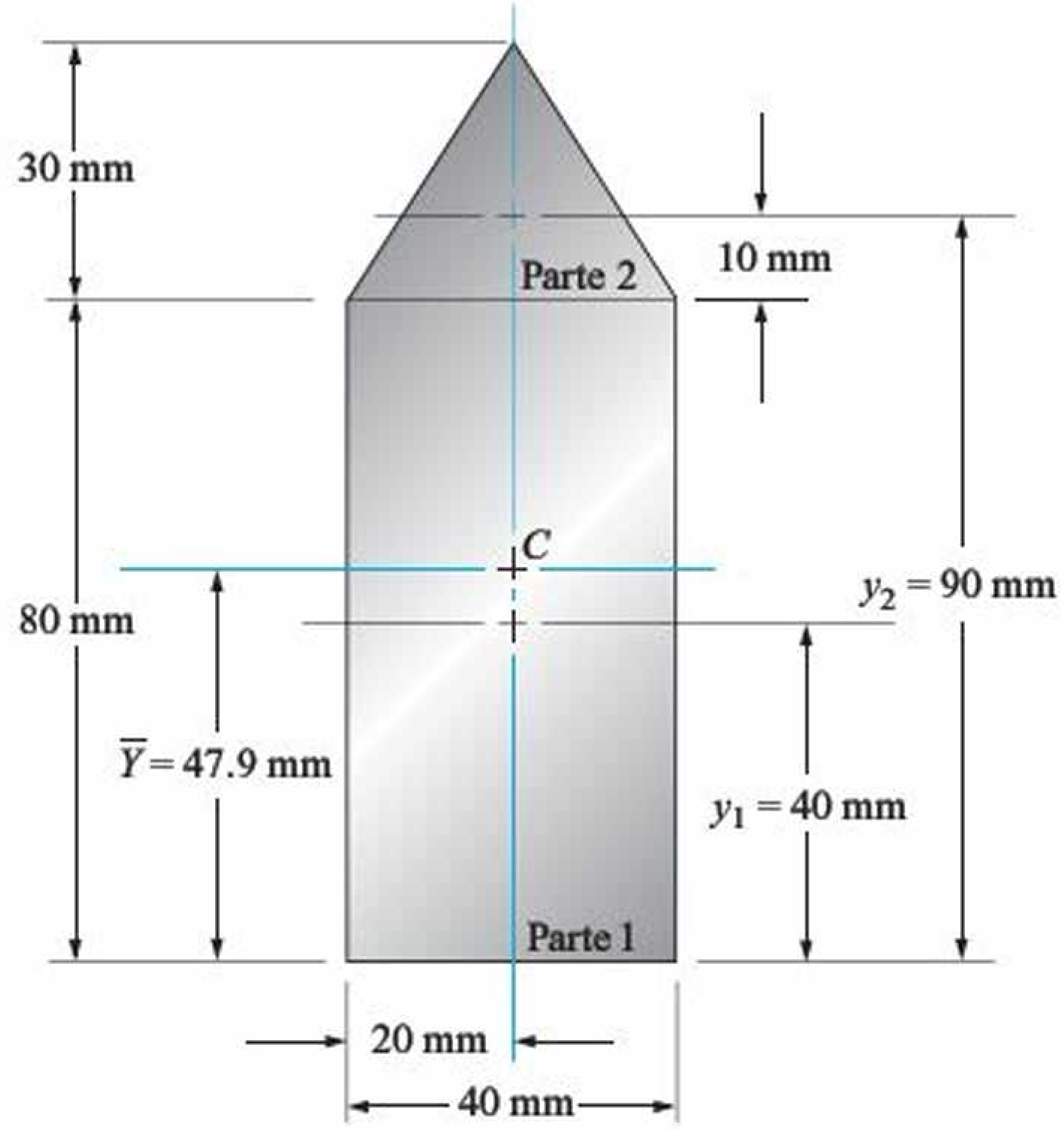


FIGURA 6–4
Datos utilizados en el problema de ejemplo 6–1.

Así se localiza el centroide en el punto que la figura 6–4 muestra.

Comentario En suma, el centroide se encuentra en el eje vertical de simetría a una distancia de 47.9 mm hacia arriba de la base de la forma.

El método del área compuesta también funciona para secciones donde se agregan o retiran partes. En este caso, el área retirada se considera negativa y se ilustra como se indica a continuación.

Problema de ejemplo 6-2 Localice el centroide del área mostrada en la figura 6–5.

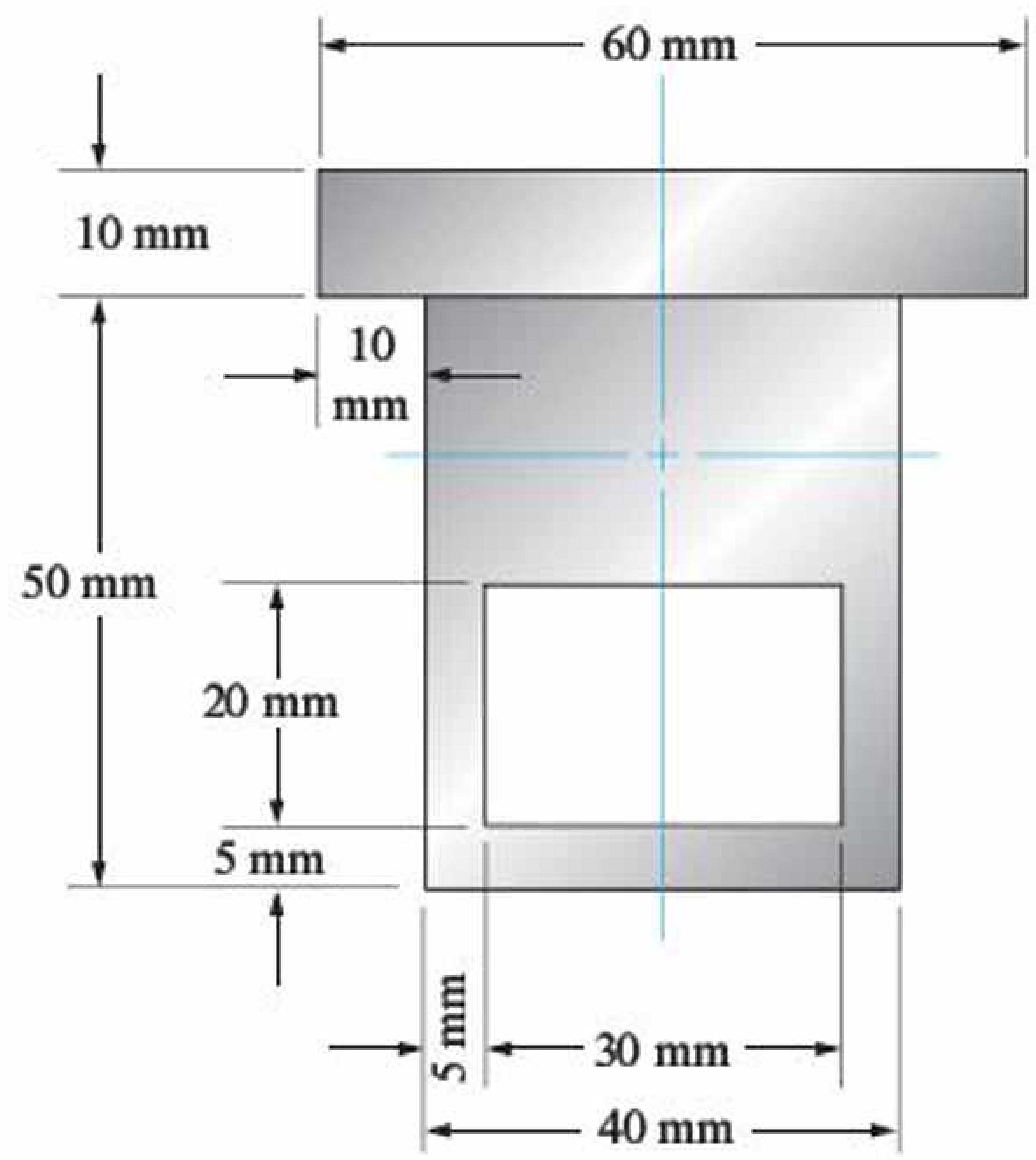


FIGURA 6–5
Perfil para el problema de ejemplo 6–2.

Solución Objetivo Localizar el centroide.

Datos El área mostrada en la figura 6–5.

Análisis Como el área tiene un eje vertical de simetría, el centroide queda en dicha línea. La distancia vertical de la base del área al centroide se calculará con la ecuación (6–2). El área total se divide entres rectángulos, como se muestra en la figura 6–6. La parte 1 es el rectángulo, de 50 mm de altura por 40 mm de ancho. La parte 2 es el rectángulo de 20 mm × 30 mm removido del área compuesta; el área, A_2, se considerará negativa. La parte × es el rectángulo superior de 10 mm × 60 mm. Las distancias a los centroides desde la base del área se muestran en la figura 6–6 como y_1, y_2 y y_3.

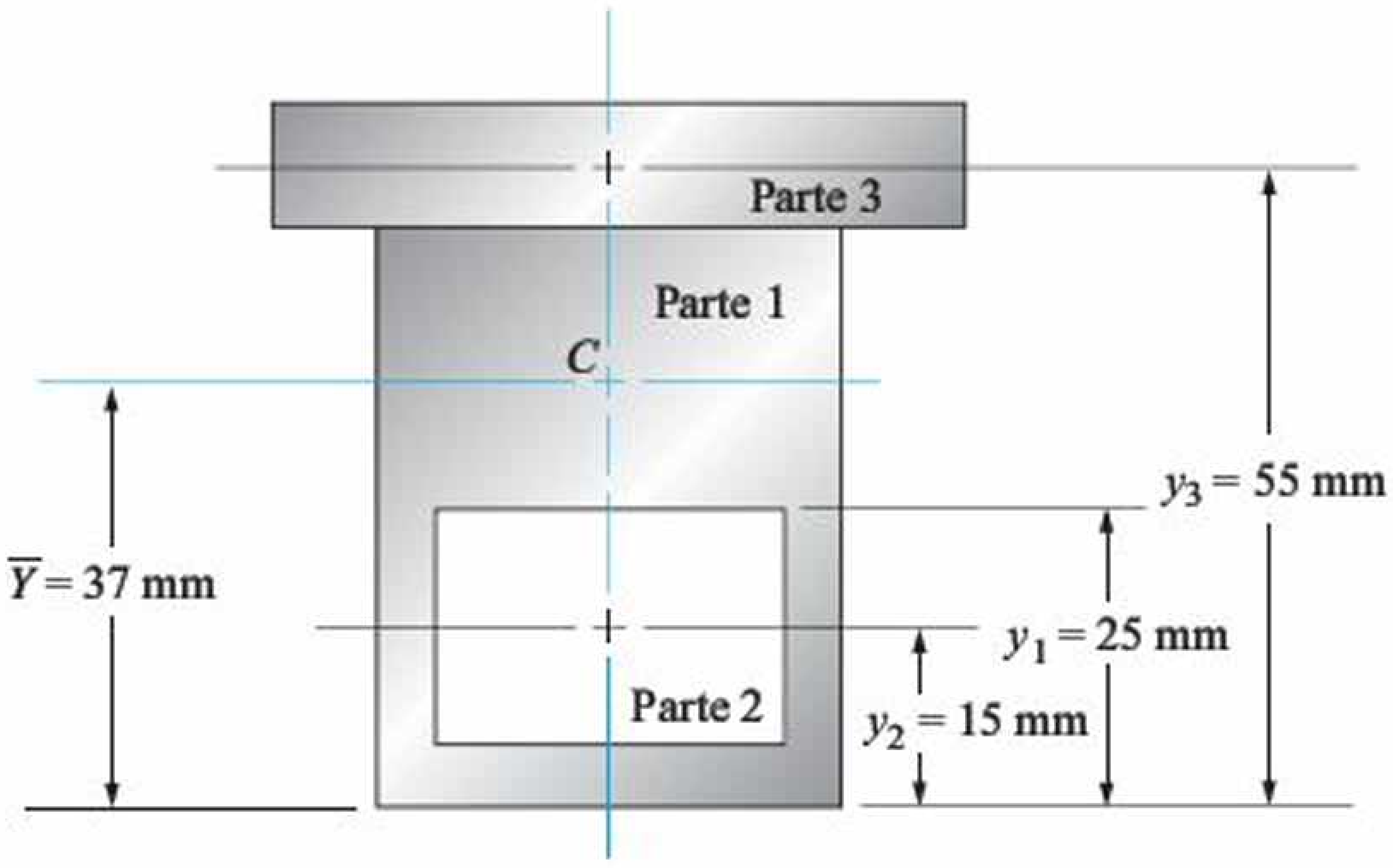


FIGURA 6–6 Datos utilizados en el problema de ejemplo 6–2.

Resultados La tabla siguiente facilita los cálculos de los datos requeridos en la ecuación (6–2).

Parte	A_i	y_i	$A_i y_i$
1	2000 mm^2	25 mm	50 000 mm^3
2	−600 mm^2	15 mm	−9000 mm^3
3	600 mm^2	55 mm	33 000 mm^3
$A_T = 2000$ mm^2		$\Sigma(A_i y_i) = 74\,000$ mm^3	

Entonces

$$\overline{Y} = \frac{\sum (A_i y_i)}{A_T} = \frac{74\,000 \text{ mm}^3}{2000 \text{ mm}^2} = 37.0 \text{ mm}$$

Comentario En suma, el centroide se encuentra en el eje de simetría a una distancia de 37.00 mm hacia arriba de la base del área compuesta.

6-4 CONCEPTO DE MOMENTO DE INERCIA DE UN ÁREA

En el estudio de la resistencia de materiales, la propiedad del *momento de inercia de un área* indica la rigidez de una viga, es decir, su resistencia a reflexionarse cuando se somete a cargas que tienden a reflexionarla. La deflexión de una viga es inversamente proporcional al momento de inercia, como se describe en el capítulo 9. El uso del momento de inercia en el cálculo de esfuerzo originado por flexión se analiza en el capítulo 7 de este libro. Los esfuerzos provocados por fuerzas cortantes verticales también dependen del momento de inercia y se analizan en el capítulo 8.

Algunos matemáticos y analistas de esfuerzos utilizan el término *segundo momento de área* en lugar de *momento de inercia*. Dicho término, de hecho, describe con más precisión la definición de esta propiedad en el siguiente análisis. Otros se refieren a este término como *momento de inercia de área* o *momento rectangular de inercia* para distinguirlo del *momento polar de inercia*, tal como se utiliza en el análisis de esfuerzo cortante torsional en el capítulo 4. Existen otros usos del término *momento de inercia* en el estudio de la dinámica donde el término se refiere a la propiedad de una masa tridimensional.

Sin embargo, el término *momento de inercia* se ha vuelto de uso común en ciertos manuales y publicaciones industriales. Vea las referencias 1–3. Dada esta tendencia, este libro continuará utilizando el término *momento de inercia*. Deberá entender el contexto de un problema donde se requiere este término para asegurarse de utilizar el método correcto para determinar su valor.

De interés es el momento de inercia de la forma de la *sección transversal* de una viga. Por ejemplo, considere la viga saliente mostrada en la figura 5–12 del capítulo 5. Su sección transversal tiene la forma de una "I", como se ilustra en la figura 6–7. A causa de esta forma, tal viga a menudo se conoce como "viga I".

En la figura 5–13 se muestra otro ejemplo, donde la pluma horizontal de la grúa es una viga en voladizo cuya sección transversal es un rectángulo hueco, como se ilustra en la figura 6–8. Observe en la figura original, la dimensión vertical del rectángulo hueco se reduce en secciones alejadas del extremo izquierdo donde la pluma se une al poste de soporte. El capítulo describe por qué.

Los dos ejemplos mostrados en las figuras 6–7 y 6–8 representan perfiles que son relativamente eficientes en el uso de material en cuanto a producir valores grandes de su momento de inercia. En la mayoría de los casos importantes en el estudio de resistencia de materiales, el momento de inercia de una forma, denotado por el símbolo I, es una función de la colocación del área con respecto al *eje centroidal* de la forma, el eje que pasa a través de su centroide. Es más deseable, desde el punto de vista del uso eficiente de material, colocar tanto material lejos del eje centroidal como sea práctico. Esta observación se basa en la definición de momento de inercia dada aquí.

El momento de inercia de un área con respecto a un eje particular se define como la suma de los productos obtenidos multiplicando cada elemento infinitesimalmente pequeño del área por el cuadrado de su distancia al eje.

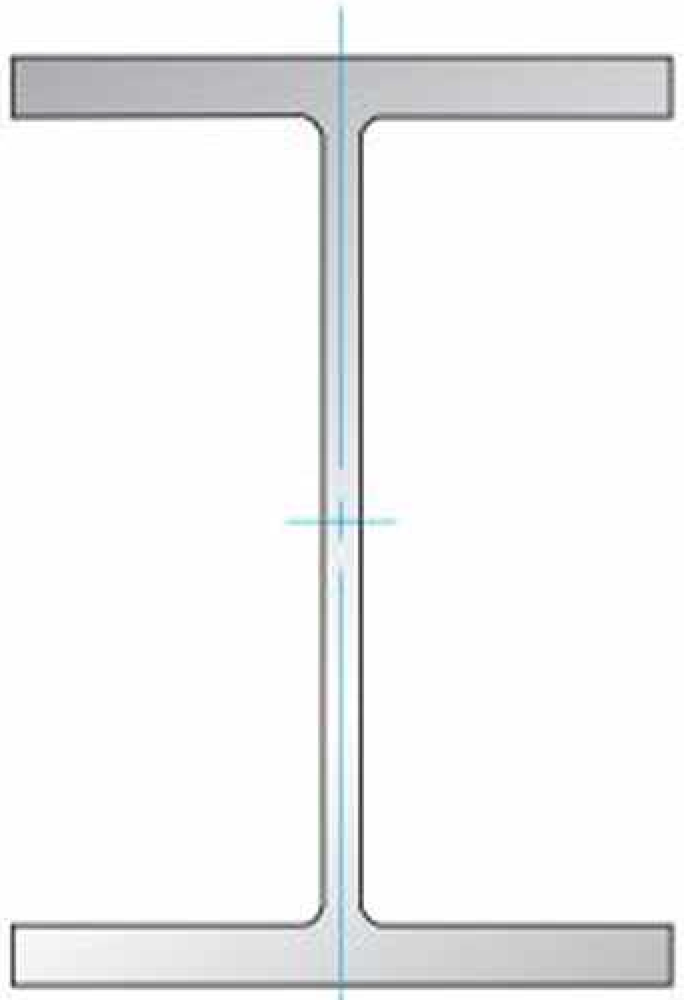


FIGURA 6–7 Perfil representativo de la sección transversal de una viga I.

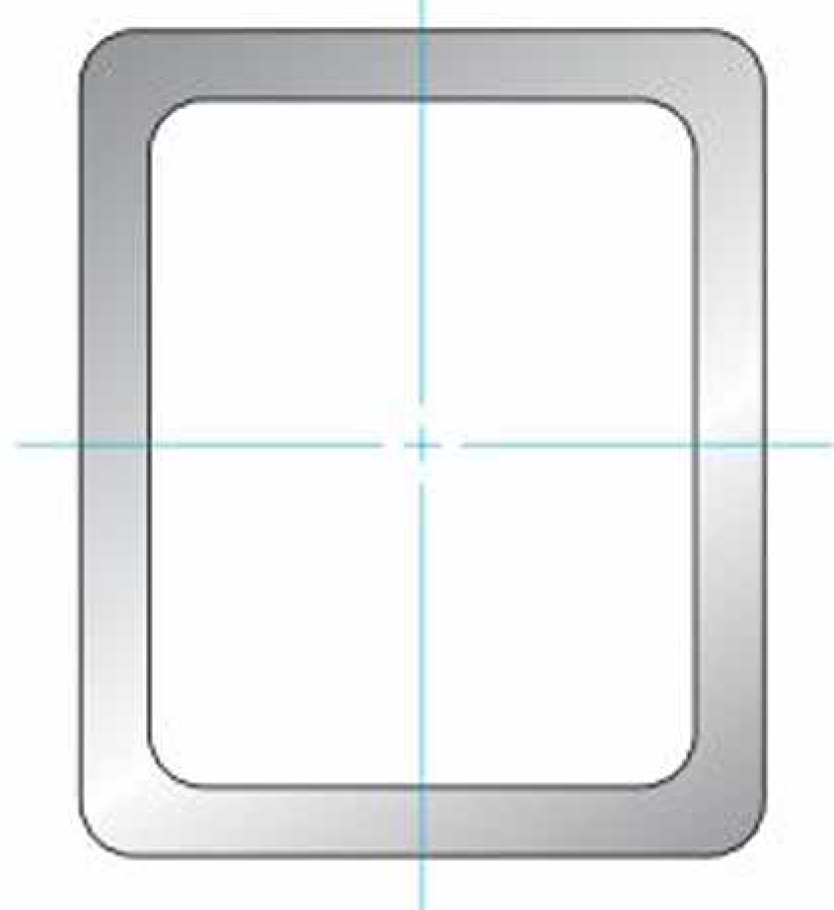


FIGURA 6–8 Perfil representativo de la sección transversal de un tubo rectangular hueco.

Así pues, se deduce que si se coloca una gran parte del área alejada del eje centroidal, el momento de inercia tenderá a ser grande.

La fórmula matemática del momento de inercia, I, se deriva de la definición. Un método aproximado implica el proceso de *suma*, indicado por Σ.

$$I = \sum y^2(\Delta A) \qquad \textbf{(6–3)}$$

Este proceso requiere que el área total se divida en muchas partes muy pequeñas representadas por ΔA y que se determine la distancia y del centroide de cada una al eje de interés. Entonces, el producto $y^2(\Delta A)$ se calcularía para cada una de las partes pequeñas, seguido por la suma de todos estos productos. Éste es un proceso muy tedioso y, por fortuna, uno que no se utiliza con frecuencia.

Un refinamiento del método de suma indicado por la ecuación (6–3) es el proceso de *integración*, la técnica matemática de sumar cantidades infinitesimales a través de toda un área. La verdadera definición matemática de momento de inercia requiere el uso de integración como sigue:

$$I = \int y^2 dA \qquad \textbf{(6–4)}$$

Donde el término dA es un área infinitesimalmente pequeña y y, como con anterioridad, es la distancia al centroide de dA. Demostraremos el desarrollo y uso de la ecuación (6–4) en una sección más adelante. Sin embargo, en problemas prácticos, no es necesario realizar el proceso de integración. Primero demostramos estas técnicas.

Si se examina con detenimiento la definición, se verá que las unidades del momento de inercia serán *longitud a la cuarta potencia*. Algunos ejemplos son in^4, m^4 y mm^4.

Existen varios métodos de determinar la magnitud del momento de inercia.

1. Para perfiles simples conviene utilizar fórmulas estándar derivadas de la definición básica dada con anterioridad. La figura 6–1 muestra las fórmulas de cuatro perfiles y el apéndice A–1 da varias más. La referencia 2 incluye una tabla de fórmulas de 42 perfiles diferentes.
2. Para perfiles estándar comercialmente disponibles, tales como vigas de patín ancho (perfiles W), canales (perfiles C), ángulos (perfiles L) y tubos, los valores del momento de inercia se tabulan en referencias publicadas tales como la referencia 1. Vea también los apéndices A–4 a A–13.
3. En el caso de perfiles más complejos para lo que no hay fórmulas estándar, con frecuencia es práctico dividirlos en componentes que por sí mismos son perfiles simples. En las figuras 6–4 a 6–8 se muestran ejemplos. Los detalles del cálculo del momento de inercia de perfiles como ésos, llamados *perfiles compuestos*, dependen de su naturaleza y se demostrarán más adelante en este capítulo. A continuación se enuncian algunos conceptos importantes.
   a. Si todas las partes componentes de un perfil compuesto tienen el mismo eje centroidal, su momento total de inercia se determina sumando o restando los momentos de inercia de las partes componentes con respecto al eje centroidal. Vea la sección 6–5.
   b. Si todas las partes componentes de un perfil compuesto no tienen el mismo eje centroidal, se requiere utilizar un proceso llamado teorema del eje paralelo. Vea la sección 6–6.
4. Se puede utilizar la definición fundamental de momento de inercia, ecuación (6–4) si la geometría del perfil puede ser representada en términos matemáticos integrables. Vea la sección 6–7.

5. Muchos sistemas de diseño asistidos por computadora incluyen el cálculo automático de la ubicación del centroide y el momento de inercia de cualquier perfil cerrado dibujado en el sistema.
6. En el caso especial de un perfil que puede ser representado como una combinación de rectángulos cuyos lados son perpendiculares o paralelos al eje centroidal, se puede aplicar una técnica de tabulación especial descrita en la última sección de este capítulo. Esta técnica se presta muy bien para la solución por medio de una calculadora programable, una hoja de cálculo o un programa de computadora simple.

6-5 MOMENTO DE INERCIA DE PERFILES COMPUESTOS CUYAS PARTES TIENEN EL MISMO EJE CENTROIDAL

Un perfil compuesto es uno formado por dos o más partes que por sí mismas son perfiles simples para los cuales existen fórmulas para calcular su momento de inercia, I. Un caso especial es cuando todas las partes tienen el mismo eje centroidal. En ese caso el momento de inercia del perfil compuesto se determina combinando los valores de I de todas las partes de acuerdo con la siguiente regla:

> Si todas las partes de un área compuesta tiene el mismo eje centroidal, el momento total de inercia se encuentra sumando o restando los momentos de inercia de las partes componentes con respecto al eje centroidal. El valor de I se suma si la parte es un área sólida positiva y se resta si la parte es hueca.

La figura 6–9 muestra un ejemplo de un perfil compuesto de un vástago vertical, de 30 mm de ancho y 80 mm de altura, y dos partes laterales, de 30 mm de ancho y 40 mm de altura. Observe que el eje centroidal de las partes coincide con el eje centroidal x–x de la sección compuesta. Por consiguiente, se puede utilizar la regla que se acaba de enunciar para calcular el valor total de I para la cruz sumando el valor de I de cada una de las tres partes. Vea el ejemplo 6–3.

La figura 6–10 muestra un ejemplo en el que hay un orificio circular de 35 mm de diámetro entresacado de un cuadrado cuyos lados miden 50 mm. El círculo y el cuadrado tienen el mismo eje centroidal x–x. Se puede utilizar entonces la regla para calcular el valor de I del cuadrado y luego restar el valor de I del círculo para obtener el valor total de I del perfil compuesto. Vea el problema de ejemplo 6–4.

FIGURA 6–9
Perfil para el problema de ejemplo 6–3.

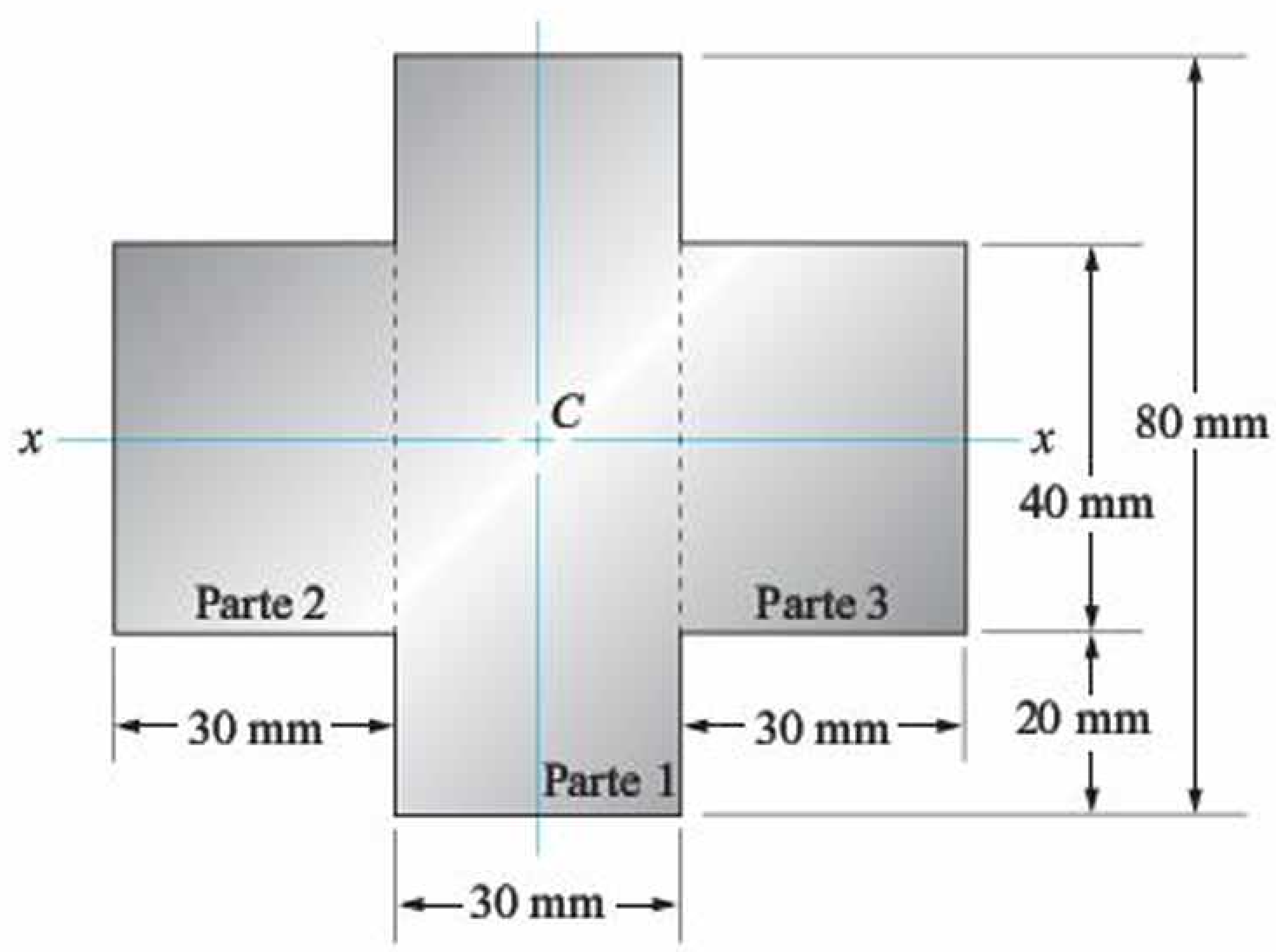
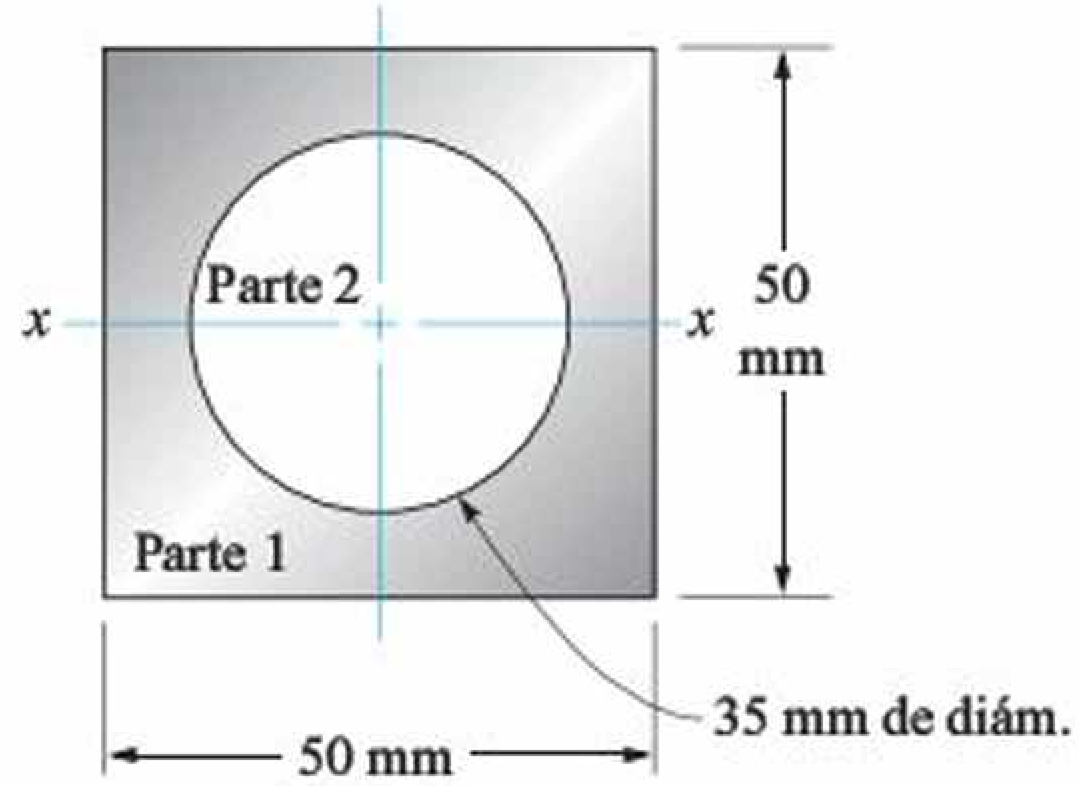


FIGURA 6–10
Perfil para el problema de ejemplo 6–4.



Problema de ejemplo 6-3 Calcule el momento de inercia del perfil en forma de cruz mostrado en la figura 6–9 con respecto a su eje centroidal.

Solución Objetivo Calcular el momento de inercia centroidal.

Datos El perfil mostrado en la figura 6–9.

Análisis El centroide del perfil en forma de cruz se encuentra en la intersección de los ejes horizontal y vertical de simetría. Si la cruz de divide en las tres partes mostradas en la figura, resulta que cada una de ellas tiene el mismo eje centroidal, x–x, que la sección compuesta completa. Por consiguiente, podemos calcular el valor de I de cada una de las partes y sumarlos para obtener el valor total, I_T. Es decir,

$$I_T = I_1 + I_2 + I_3$$

Resultados Recurriendo a la figura 6–1 para la fórmula de I para un rectángulo se obtiene

$$I_1 = \frac{bh^3}{12} = \frac{30(80)^3}{12} = 1.28 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_2 = I_3 = \frac{30(40)^3}{12} = 0.16 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Entonces,

$$I_T = 1.28 \times 10^6 \text{mm}^4 + 2(0.16 \times 10^6 \text{ mm}^4) = 1.60 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Problema de ejemplo 6-4 Calcule el momento de inercia del perfil mostrado en la figura 6–10 con respecto a su eje centroidal.

Solución Objetivo Calcular el momento de inercia centroidal.

Datos El perfil mostrado en la figura 6–10.

Análisis El centroide de un perfil compuesto se encuentra en la intersección de los ejes de simetría horizontal y vertical. Coincide con el centroide del cuadrado y el círculo. Se puede considerar que el perfil compuesto es el cuadrado con el círculo removido. Por consiguiente, podemos calcular el valor de I_T calculando el valor de I_1 del cuadrado y restando el valor de I_2 del círculo. Es decir,

$$I_T = I_1 - I_2$$

Resultados $I_1 = \frac{s^4}{12} = \frac{(50)^4}{12} = 520.8 \times 10^3 \text{ mm}^4$

$I_2 = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi(35)^4}{64} = 73.7 \times 10^3 \text{ mm}^4$

Para la sección compuesta,

$$I_T = I_1 - I_2 = 447.1 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

6–6 MOMENTO DE INERCIA DE PERFILES COMPUESTOS. CASO GENERAL: USO DEL TEOREMA DEL EJE PARALELO

Cuando una sección compuesta consta de partes cuyos ejes centroidales no quedan en el eje centroidal de toda la sección, *no* se puede utilizar el proceso de simplemente sumar los valores de I de cada una de las partes. Se tiene que emplear el *teorema de eje paralelo*.

El enunciado general del teorema de eje paralelo es

> El momento de inercia de un perfil con respecto a un cierto eje es igual a la suma de su momento de inercia con respecto a su propio eje centroidal más una cantidad llamada **término de transferencia** calculado con Ad^2, donde A es el área del perfil y d es la distancia su centroide al eje de interés.

Se puede aplicar este teorema para calcular el momento de inercia de un perfil compuesto general siguiendo el procedimiento siguiente. En este caso el eje de interés es el eje centroidal del perfil compuesto que debe ser encontrado con el método dado en la sección 6–3.

Procedimiento general para calcular el momento de inercia de un perfil compuesto

1. Divida el perfil compuesto en partes simples para las que existan fórmulas con el fin de calcular su momento de inercia con respecto a su propio eje centroidal. Identifique las partes como *1*, *2*, *3* y así sucesivamente.
2. Localice la distancia del centroide de cada una de las partes componentes a algún eje de referencia conveniente, por lo general, la base de la sección compuesta. Designe estas distancias como y_1, y_2, y_3, etc.
3. Localice el centroide de la sección compuesta con el método dado en la sección 6–3. Designe la distancia del eje de referencia utilizado en el paso 2 al centroide, como $\overline{Y}$.
4. Calcule el momento de inercia de cada parte con respecto a su propio eje centroidal, y designe estos valores como I_1, I_2, I_3, etcétera.
5. Determine la distancia del centroide de la figura compuesta al centroide de cada parte, y designe estos valores como d_1, d_2, d_3, etc. Observe que $d_1 = \overline{Y} - y_1$, $d_2 = \overline{Y} - y_2$, $d_3 = \overline{Y} - y_3$, etc. Use el valor absoluto de cada distancia.
6. Calcule el *término de transferencia* para cada una de las partes con $A_i d_i^2$, donde A_i es el área de la parte y d_i es la distancia calculada en el paso 5.
7. Calcule el momento total de inercia de la sección compuesta con respecto al eje centroidal con

$$I_T = I_1 + A_1 d_1^2 + I_2 + A_2 d_2^2 + I_3 + A_3 d_3^2 + \ldots \qquad \textbf{(6–5)}$$

La ecuación (6–5) se conoce como el *teorema del eje paralelo* porque define cómo transferir el momento de inercia de un área de un eje a cualquier eje paralelo. Tal como se aplica aquí, los dos ejes son el eje centroidal de la parte componente y el eje centroidal de la sección compuesta. Para cada un de las partes de una sección compuesta $I + Ad^2$ mide su contribución al momento total de inercia.

La ejecución del *Procedimiento general para calcular el momento de inercia de una forma compuesta* se facilita si se prepara una tabla que sea una extensión de la utilizada en la sección 6–3 para localizar el centroide de la forma. El diseño general de esta tabla es el siguiente.

Parte	A_i	y_i	$A_i y_i$	I_i	$d_i = \overline{Y} - y_i$	$A_i d_i^2$	$I_i + A_i d_i^2$
1							
2							
3							
$A_T = \Sigma A_i =$		$\Sigma(A_i y_i) =$		$I_T = \Sigma(I_i + A_i d_i^2) =$			
Distancia al centroide $= \overline{Y} = \dfrac{\Sigma(A_i y_i)}{A_T}$							

En los problemas de ejemplo 6–5, 6–6 y 6–7 se demuestra el uso de la tabla y las indicaciones generales. La ventaja de utilizar este tipo de tabla se incrementa conforme el número de componentes se hace más grande. Asimismo, el uso de un programa de hoja de cálculo facilita el cálculo de los valores apropiados.

Problema de ejemplo 6-5 Calcule el momento de inercia de perfil T mostrado en la figura 6–11 con respecto a su eje centroidal.

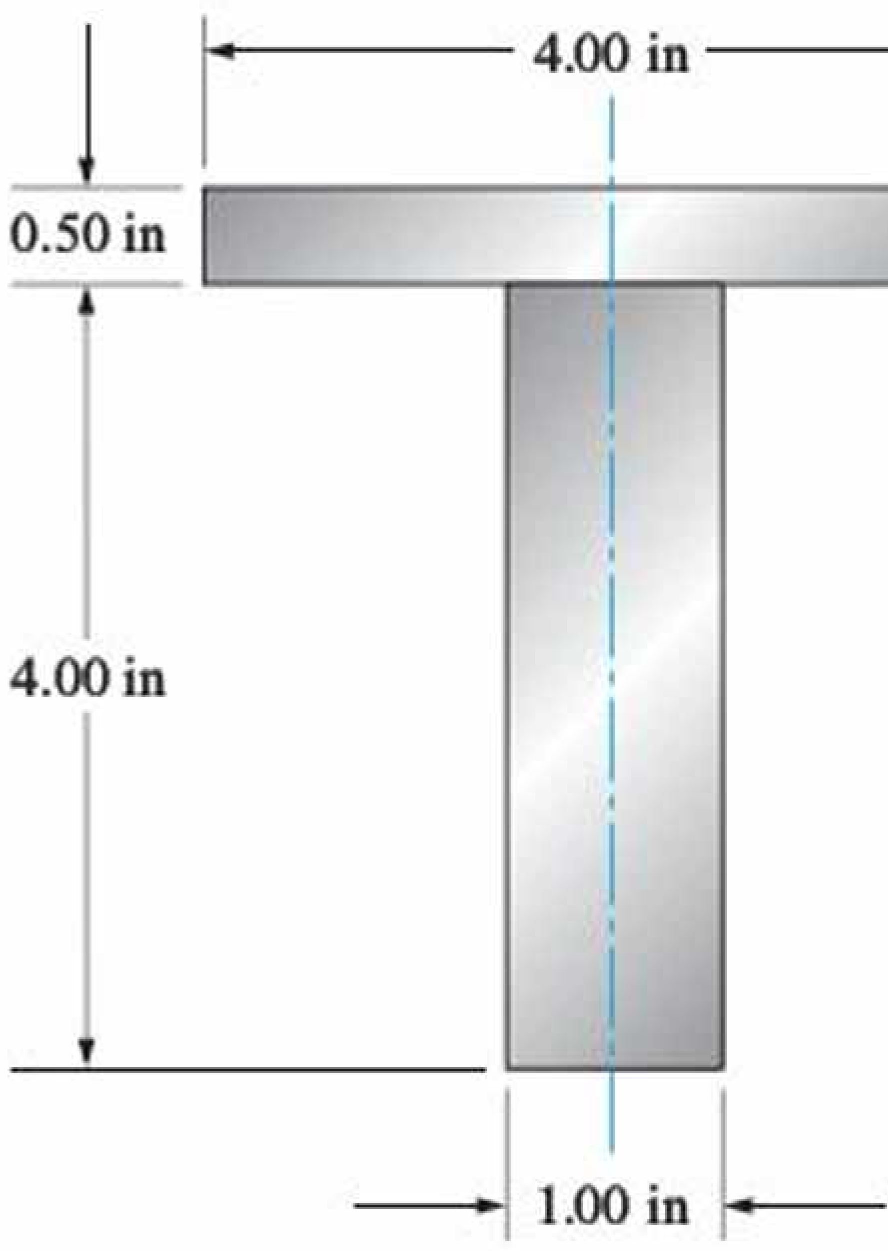


FIGURA 6–11 Perfil para el problema de ejemplo 6–5.

Solución Objetivo Calcular el momento de inercia.

Datos El perfil mostrado en la figura 6–11.

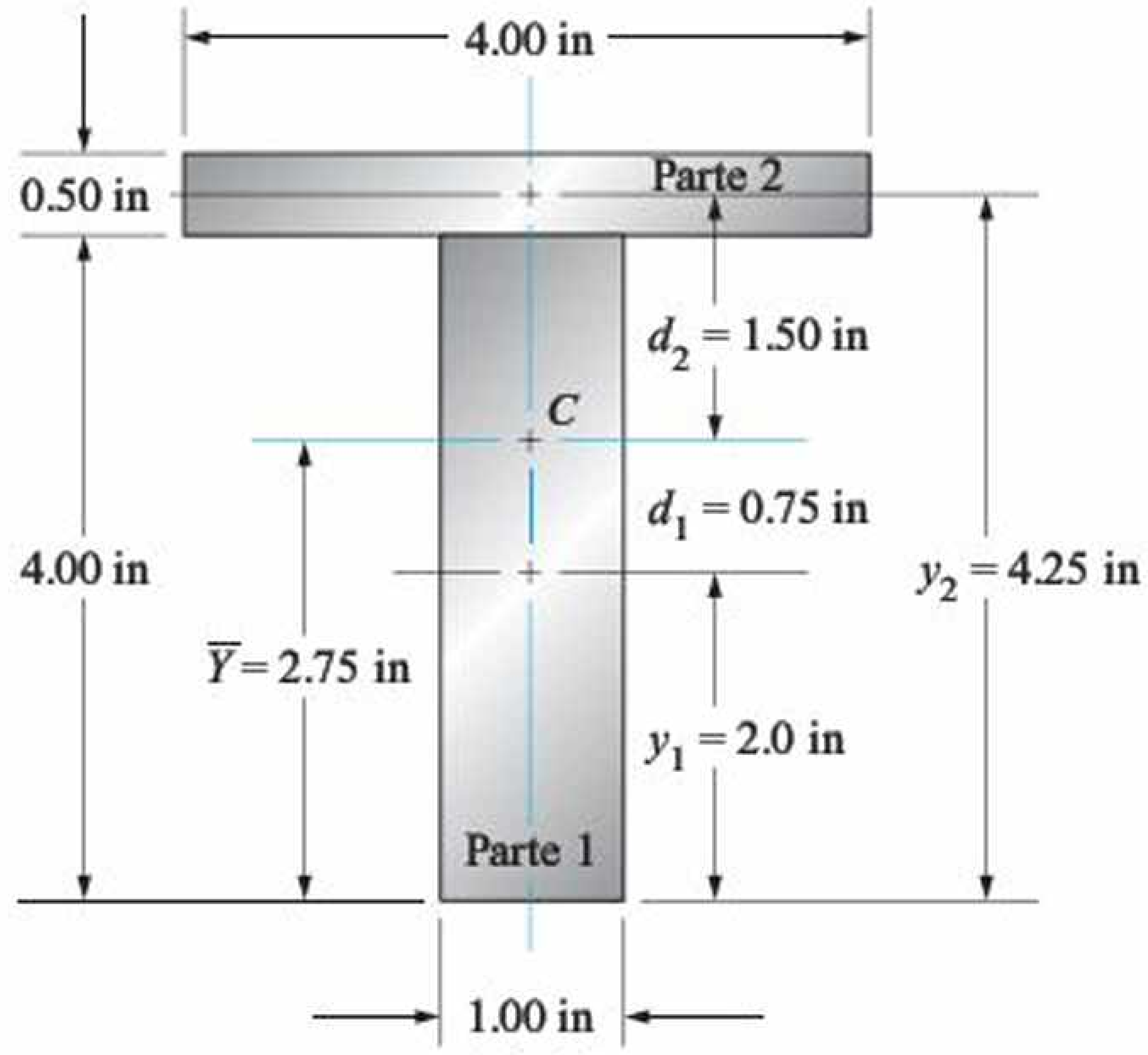


FIGURA 6–12
Datos utilizados en el problema de ejemplo 6–5.

Análisis Se utiliza el **procedimiento general** descrito en esta sección. Como **paso 1**, divida el perfil T en dos partes, como se muestra en la figura 6–12. La parte 1 es el vástago y la 2 el patín horizontal.

Resultados La tabla siguiente resume el conjunto completo de datos necesarios para calcular el momento total de inercia con respecto al centroide del perfil T. Algunos de los datos también aparecen en la figura 6–12. Aquí se hacen algunos comentarios sobre cómo se llegó a ciertos datos.

Parte	A_i	y_i	$A_i y_i$	I_i	d_i	$A_i d_i^2$	$I_i + A_i d_i^2$
1	4.0 in²	2.0 in	8.0 in³	5.333 in⁴	0.75 in	2.25 in⁴	7.583 in⁴
2	2.0 in²	4.25 in	8.50 in³	0.042 in⁴	1.50 in	4.50 in⁴	4.542 in⁴
$A_T = 6.0$ in²		$\Sigma(A_i y_i) = 16.5$ in³				$I_T = 12.125$ in⁴	
$\overline{Y} = \frac{\Sigma(A_i y_i)}{A_T} = \frac{16.5\text{ in}^3}{6.0\text{ in}^2} = 2.75$ in							

Pasos 2, 3. Las primeras tres columnas de la tabla contienen datos para calcular la ubicación del centroide mediante la técnica mostrada en la sección 6–3. Las distancias, y_i, se miden hacia arriba de la base del perfil T. El resultado es $\overline{Y} = 2.75$ in.

Paso 4. Las dos partes son rectángulos simples. Entonces, los valores de I son

$$I_1 = bh^3/12 = (1.0)(4.0)^3/12 = 5.333\text{ in}^4$$
$$I_2 = bh^3/12 = (4.0)(0.5)^3/12 = 0.042\text{ in}^4$$

Paso 5. Distancias, d_i, del centroide general al centro de cada parte,

$$d_1 = \overline{Y} - y_1 = 2.75\text{ in} - 2.0\text{ in} = 0.75\text{ in}$$
$$d_2 = y_2 - \overline{Y} = 4.25\text{ in} - 2.75\text{ in} = 1.50\text{ in}$$

Paso 6. El término de transferencia para cada una de las partes es,

$$A_1 d_1^2 = (4.0\text{ in}^2)(0.75\text{ in})^2 = 2.25\text{ in}^4$$

$$A_2 d_2^2 = (2.0\text{ in}^2)(1.50\text{ in})^2 = 4.50\text{ in}^4$$

Paso 7. El momento total de inercia es

$$I_T = I_1 + A_1 d_1^2 + I_2 + A_2 d_2^2$$
$$= 5.333 \text{ in}^4 + 2.25 \text{ in}^4 + 0.042 \text{ in}^4 + 4.50 \text{ in}^4$$
$$I_T = 12.125 \text{ in}^4$$

Comentario Observe que los términos de transferencia contribuyen con más de la mitad del valor total del momento de inercia.

6-7 DEFINICIÓN MATEMÁTICA DEL MOMENTO DE INERCIA

Tal como se planteó en la sección 6–4, el momento de inercia, I, se define como la suma de los productos obtenidos multiplicando cada elemento del área por el cuadrado de su distancia al eje de referencia. La fórmula matemática para el momento de inercia se deriva de esta definición, la cual se da a continuación. Observe que el proceso de sumar a lo largo de toda el área se realiza mediante integración.

$$I = \int y^2 \, dA \qquad \textbf{(6–4)}$$

Consulte en la figura 6–13 una ilustración de los términos que intervienen en esta fórmula en el caso especial de un rectángulo, para el cual deseamos calcular el momento de inercia con respecto a su eje centroidal. El elemento de área infinitesimal se muestra como una franja delgada paralela al eje centroidal donde su ancho es el ancho total del rectángulo, b, y su espesor es un valor infinitesimal, dy. Entonces el área del elemento es

$$dA = b \cdot dy$$

La distancia, y, es la distancia del eje centroidal al centroide del área elemental, como se muestra. La sustitución de estos valores en la ecuación (6–4) permite derivar la fórmula del momento de inercia del rectángulo con respecto a su eje centroidal. Observe que la integración por toda el área requiere que los límites de la integral vayan de $-h/2$ a $+h/2$.

$$I = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 \, dA = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 (b \cdot dy)$$

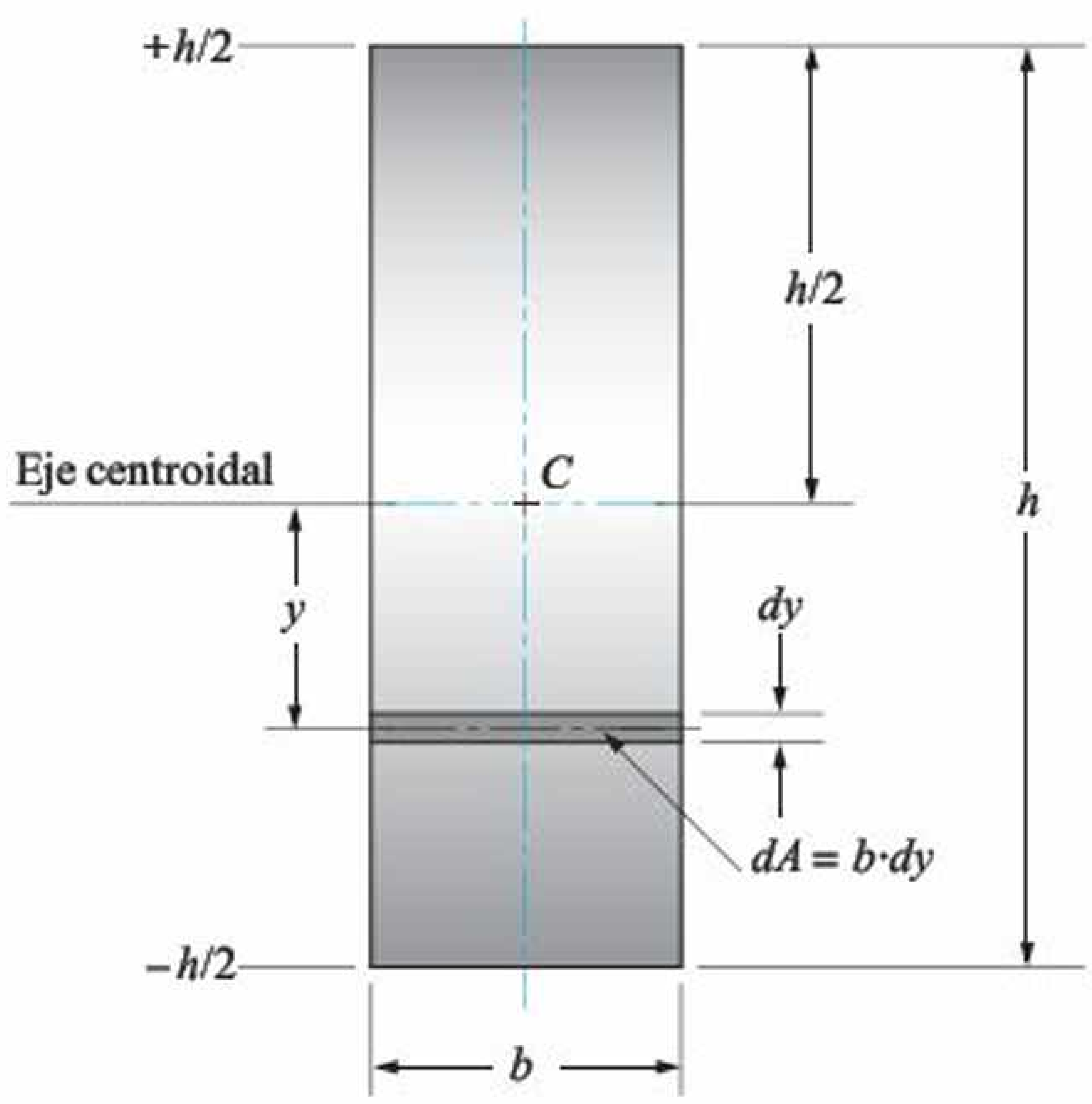


FIGURA 6–13 Datos utilizados en la derivación del momento de inercia de un rectángulo.

Como b es una constante, se saca de la integral, como sigue

$$I = b\int_{-h/2}^{+h/2} y^2\,dy = b\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-h/2}^{+h/2}$$

Si se insertan los límites de la integral se obtiene

$$I = b\left[\frac{h^3}{24} - \frac{(-h)^3}{24}\right] = b\left[\frac{2h^3}{24}\right] = \frac{bh^3}{12}$$

Ésta es la fórmula incluida en las tablas. Para desarrollar fórmulas para otros perfiles se utilizan procedimientos similares.

6-8 SECCIONES COMPUESTAS HECHAS DE PERFILES COMERCIALMENTE DISPONIBLES

En la sección 1–12 se describieron perfiles estructurales de madera, acero y aluminio, comercialmente disponibles. Las propiedades de tamaños representativos de estos perfiles se dan en las siguientes tablas de apéndices.

- Apéndice A–4 para vigas de madera
- Apéndice A–5 para ángulos estructurales de acero
- Apéndice A–6 para canales estructurales de acero
- Apéndice A–7 para perfiles de patín ancho de acero estructural
- Apéndice A–8 para vigas American Standard de acero estructural
- Apéndice A–9 para tubería estructural cuadrada y rectangular
- Apéndice A–10 para canales estándar de aluminio
- Apéndice A–11 para vigas I estándar de aluminio
- Apéndice A–12 para tubo de acero estándar cédula 40
- Apéndice A–13 para tubería mecánica de acero

Además de ser excelentes para usarse como vigas, estos perfiles con frecuencia se combinan para producir perfiles compuestos especiales con propiedades mejoradas.

Cuando se utilizan por separado, las propiedades de diseño se leen directamente en las tablas de áreas, momentos de inercia y dimensiones pertinentes. Cuando se combinan para formar perfiles compuestos, se requiere el área y el momento de inercia de los perfiles componentes con respecto a sus propios ejes centroidales y pueden leerse en las tablas. Asimismo, las tablas dan la localización del centroide del perfil, el que con frecuencia se requiere para determinar las distancias necesarias para calcular el término de transferencia del eje, Ad^2, en el cálculo del momento de inercia. Los ejemplos siguientes ilustran estos procesos.

Problema de ejemplo 6-6

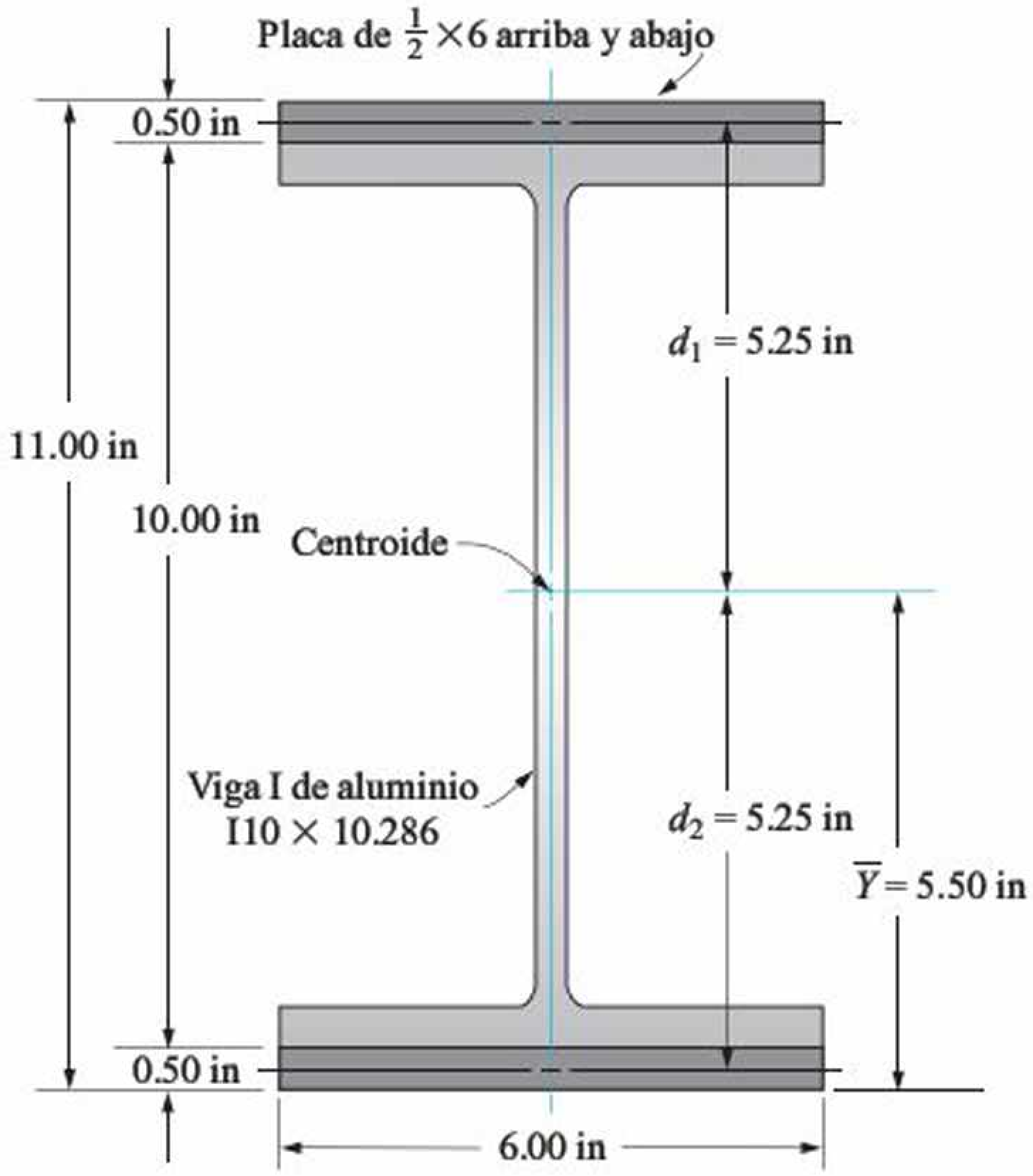
Calcule el momento de inercia de la viga I mostrada en la figura 6–14 con respecto a su eje centroidal. El perfil se formó soldando una placa de 0.50 in de espesor por 6.00 in de ancho a los patines superior e inferior para incrementar la rigidez de la viga I estándar de aluminio.

Solución

Objetivo: Calcular el momento de inercia.

Datos: El perfil mostrado en la figura 6–14. Para la viga I de 10 × 10.286: $I = 155.79$ in^4; $A = 8.747$ in^2 (en el apéndice A–11).

FIGURA 6–14
Datos utilizados en el problema de ejemplo 6–6.



Análisis Use el **procedimiento general** descrito al principio de este capítulo. Como **paso 1**, divida la viga I en tres partes. La parte 1 es la viga I, la 2 es la placa inferior, la 3 es la placa superior. Como **pasos 2 y 3**, el centroide coincide con el centroide de la viga I porque el perfil compuesto es simétrico. Por lo tanto, $\overline{Y} = 5.50$ in, o la mitad de la altura total del perfil compuesto. No se requiere un cálculo aparte de $\overline{Y}$.

Resultados La tabla siguiente resume los datos utilizados en los pasos 4–7 para calcular el momento total de inercia con respecto al centroide del perfil de viga. Algunos de ellos se muestran en la figura 6–14. Se hacen comentarios aquí sobre cómo se llegó a ciertos datos.

Parte	A_i	y_i	A_iy_i	I_i	$d_i = \overline{Y} - y_i$	$A_id_i^2$	$I_i + A_id_i^2$
1	8.747	5.50	–	155.79	0	0	155.79
2	3.00	0.25	–	0.063	5.25	82.69	82.75
3	3.00	10.75	–	0.063	5.25	82.69	82.75
$A_T = \Sigma A_i = 14.747$ in^2		$\Sigma(A_iy_i) =$ –		$I_T = \Sigma(I_i + A_id_i^2) = 321.29$ in^4			

$$\text{Distancia al centroide} = \overline{Y} = \frac{\Sigma(A_i y_i)}{A_T} = 5.50 \text{ in (por inspección)}$$

Paso 4. Para cada placa rectangular,

$$I_2 = I_3 = bh^3/12 = (6.0)(0.5)^3/12 = 0.063 \text{ in}^4$$

Paso 5. Distancia del centroide total al centroide de cada parte:

$$d_1 = 0.0 \text{ in porque los centroides coinciden}$$

$$d_2 = 5.50 - 0.25 = 5.25 \text{ in}$$

$$d_3 = 10.75 - 5.50 = 5.25 \text{ in}$$

Paso 6. Término de transferencia para cada una de las partes:

$$A_1d_1^2 = 0.0 \text{ porque } d_i = 0.0$$

$$A_2d_2^2 = A_3d_3^2 = (3.00)(5.25)^2 = 82.69 \text{ in}^4$$

Paso 7. Momento total de inercia:

$$I_T = I_1 + I_2 + A_2d_2^2 + I_3 + A_3d_3^2$$

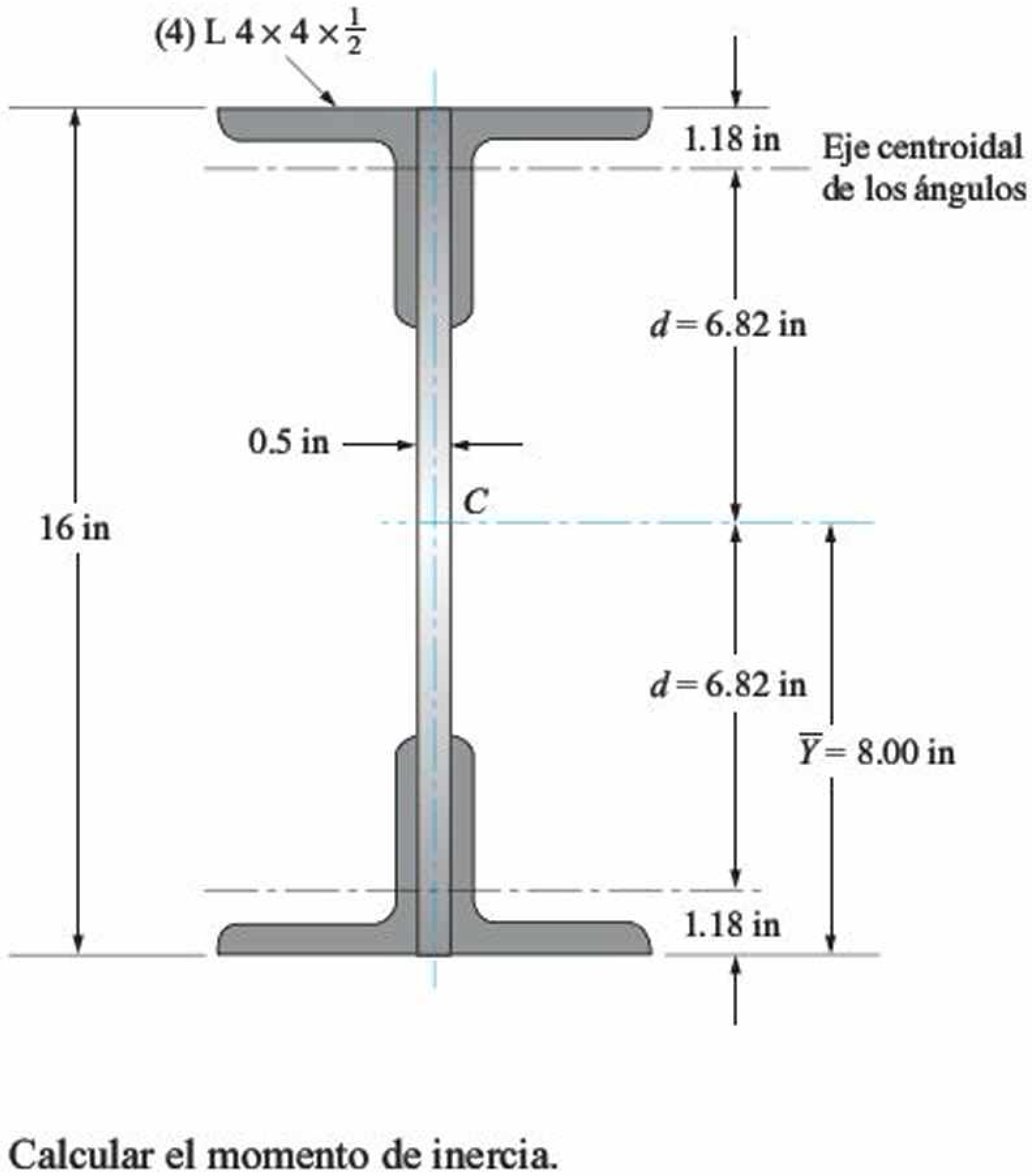
$$I_T = 155.79 + 0.063 + (3.0)(5.25)^2 + 0.063 + (3.0)(5.25)^2$$

$$I_T = 321.29 \text{ in}^4$$

Comentario Observe que las dos placas agregadas más que duplican el valor total del momento de inercia en comparación con la viga I original. Asimismo, prácticamente todo el valor agregado se debe a los términos de transferencia y no al momento de inercia básico de las placas propiamente dichas.

Problema de ejemplo 6-7 Calcule el momento de inercia de la viga I mostrada en la figura 6–15 con respecto a su eje centroidal. El perfil se formó soldando cuatro ángulos L de acero de 4 × 4 × ½ a una placa vertical de ½ × 16.

FIGURA 6–15 Datos utilizados en el problema de ejemplo 6–7.



Solución Objetivo Calcular el momento de inercia.

Datos El perfil mostrado en la figura 6–15. Para cada ángulo: $I = 5.52 \text{ in}^4$, $A = 3.75 \text{ in}^2$ (según el apéndice A–5).

Análisis Use el **procedimiento general** descrito con anterioridad en esta sección. Como **paso 1**, podemos considerar la placa vertical como la parte 1. Como todos los ángulos son iguales y están colocados a una distancia igual del centroide del perfil compuesto, podemos calcular los valores clave de uno de ellos y multiplicarlos por 4. La colocación de los ángulos coloca las caras planas al mismo nivel de los extremos superior e inferior de la placa vertical. El centroide de

cada ángulo, por lo tanto, se localiza a 1.18 in de los extremos superior o inferior, con respecto a la ubicación del centroide de los ángulos, tal como aparece en el apéndice A–5. En el caso de los **pasos 2** y **3**, el centroide coincide con el centroide de la viga I porque el perfil compuesto es simétrico. Por lo tanto, $\overline{Y} = 8.00$ in, o la mitad de la altura total del perfil compuesto. No se requiere un cálculo aparte para determinar $\overline{Y}$.

Resultados La tabla siguiente resume los datos utilizados en los pasos 4–7 para calcular el momento total de inercia con respecto al centroide del perfil de viga. Algunos de los datos también se muestran en la figura 6–15. Aquí se comenta cómo se llegó a ciertos datos. La segunda fila de la tabla, mostrada en cursivas, da datos de un ángulo sólo como referencia. La fila 3 da datos de los cuatro ángulos. Entonces los resultados finales se calculan sumando las filas 1 y 3.

Parte	A_i	y_i	$A_i y_i$	I_i	$d_i = \overline{Y} - y_i$	$A_i d_i^2$	$I_i + A_i d_i^2$	
1	8.00	8.00	–	170.67	0	0	170.67	sólo
(2) ref.	*3.75*	*1.18*	–	*5.56*	*6.82*	*174.42*	*179.98*	
4 × (2)	15.00	–	–	22.24	–	697.68	719.93	
$A_T = \Sigma A_i = 23.00$ in²		$\Sigma(A_i y_i) =$ –		$I_T = \Sigma(I_i + A_i d_i^2) = 890.60$ in⁴				

$$\text{Distancia al centroide} = \overline{Y} = \frac{\Sigma(A_i y_i)}{A_T} = 8.00 \text{ in (por inspección)}$$

Paso 4. Para la placa rectangular vertical,

$$I_1 = bh^3/12 = (0.5)(16)^3/12 = 170.67 \text{ in}^4$$

Paso 5. Distancia del centroide total al centroide de cada parte:

$$d_1 = 0.0 \text{ in porque los centroides coinciden}$$
$$d_2 = 8.00 - 1.18 = 6.82 \text{ in}$$

Paso 6. Término de transferencia para cada una de las partes:

$$A_1 d_1^2 = 0.0 \text{ porque } d_1 = 0.0$$
$$A_1 d_2^2 = A_3 d_3^2 = (3.75)(6.82)^2 = 174.42 \text{ in}^4$$

Paso 7. Momento total de inercia:

$$I_T = 170.67 + 4[5.56 + 3.75(6.82)^2]$$
$$I_T = 170.67 + 719.93 = 890.60 \text{ in}^4$$

Comentario Los cuatro ángulos contribuyen con casi el 80% de valor total del momento de inercia.

6-9 MOMENTO DE INERCIA DE PERFILES CON TODAS LAS PARTES RECTANGULARES

A continuación se describe un método para calcular el momento de inercia de perfiles especiales que pueden dividirse en partes, las cuales son rectángulos con sus lados perpendiculares y paralelos al eje de interés. Un ejemplo sería la sección en T analizada en el problema de ejemplo 6–5 y mostrada en la figura 6–11. El método es un poco más simple que el método descrito en la sección 6–6 que utilizó el teorema del eje paralelo, aun cuando ambos métodos se basan en los mismos principios fundamentales.

El método incluye los siguientes pasos:

1. Divida la sección compuesta en un número conveniente de partes, de modo que cada una sea un rectángulo con sus lados perpendiculares y paralelos al eje horizontal.

2. Para cada una de las partes, identifique las siguientes dimensiones:

   b = ancho

   y_1 = distancia de la base de la sección compuesta a la base de la parte

   y_2 = distancia de la base de la sección compuesta a la parte superior de la parte

3. Calcule el área de cada una de las partes con la ecuación,

$$A = b\,(y_2 - y_1)$$

4. Calcule A_T, la suma de las áreas de todas las partes.

5. Calcule el momento del área de cada una de las partes con la ecuación,

$$M = b\,(y_2^2 - y_1^2)/2$$

6. Calcule M_T, la suma de los momentos de las partes.

7. Localice el centroide con respecto a la base de la sección compuesta con

$$\overline{Y} = M_T/A_T$$

8. Calcule el momento de inercia con respecto a la base de la sección compuesta de cada una de las partes con

$$I_b = b(y_2^3 - y_1^3)/3$$

9. Calcule I_{bT}, la suma de los momentos de inercia de todas las partes.

10. Calcule el momento total de inercia con respecto al centroide de la sección compuesta con

$$I_c = I_{bT} - A_T\overline{Y}^2$$

Este proceso se presta muy bien para su cálculo automático con una calculadora programable, un programa de computación o una hoja de cálculo. Como ilustración, la figura 6–16 muestra el cálculo con una hoja de cálculo del momento centroidal de inercia de la sección T mostrada en la figura 6–11, cuyo momento de inercia se calculó en el problema de ejemplo 6–5 por medio del eje del teorema paralelo. Los resultados son, desde luego, idénticos. Vea también la figura 6–17 que muestra los datos.

Observe que hay algunas filas en blanco en la hoja de cálculo porque se dejó espacio hasta para seis partes de la sección compuesta mientras que ésta tiene sólo dos. La hoja de cálculo se podría expandir para incluir cualquier número de partes.

FIGURA 6–16 Hoja de cálculo para calcular el momento de inercia de un perfil con partes rectangulares.

MOMENTO DE INERCIA DE UN PERFIL CON TODAS SUS PARTES RECTANGULARES

ID del problema: Problema de ejemplo 6-5

Introduzca los datos en las celdas sombreadas de todas las partes del área compuesta

Para cada una de las partes: b = ancho; y_1 = distancia a la base de la parte; y_2 = distancia a la parte superior de la parte

	Dimensiones			Área	Momento	I con respecto a la base
	b	y_1	y_2	A	M	I_b
	(in)	(in)	(in)	(in^2)	(in^3)	(in^4)
Parte:						
1	1.000	0.000	4.000	4.000	8.000	21.333
2	4.000	4.000	4.500	2.000	8.500	36.167
3				0.000	0.000	0.000
4				0.000	0.000	0.000
5				0.000	0.000	0.000
6				0.000	0.000	0.000

Totales: A_T = 6.000 in^2 M_T = 16.500 in^3 I_{bT} = 57.500 in^4

Nota: $A = b(y_2 - y_1)$ $M = b(y_2^2 - y_1^2)/2$ $I_b = b(y_2^3 - y_1^3)/3$

Resultados:

Distancia de la base centroide = $\boldsymbol{M_T/A_T = \overline{Y}}$ = **2.75 in**

Momento de inercia con respecto al centroide = $\boldsymbol{I_{bT} - A_T\overline{Y}^2 = I_c}$ = **12.125 in^4**

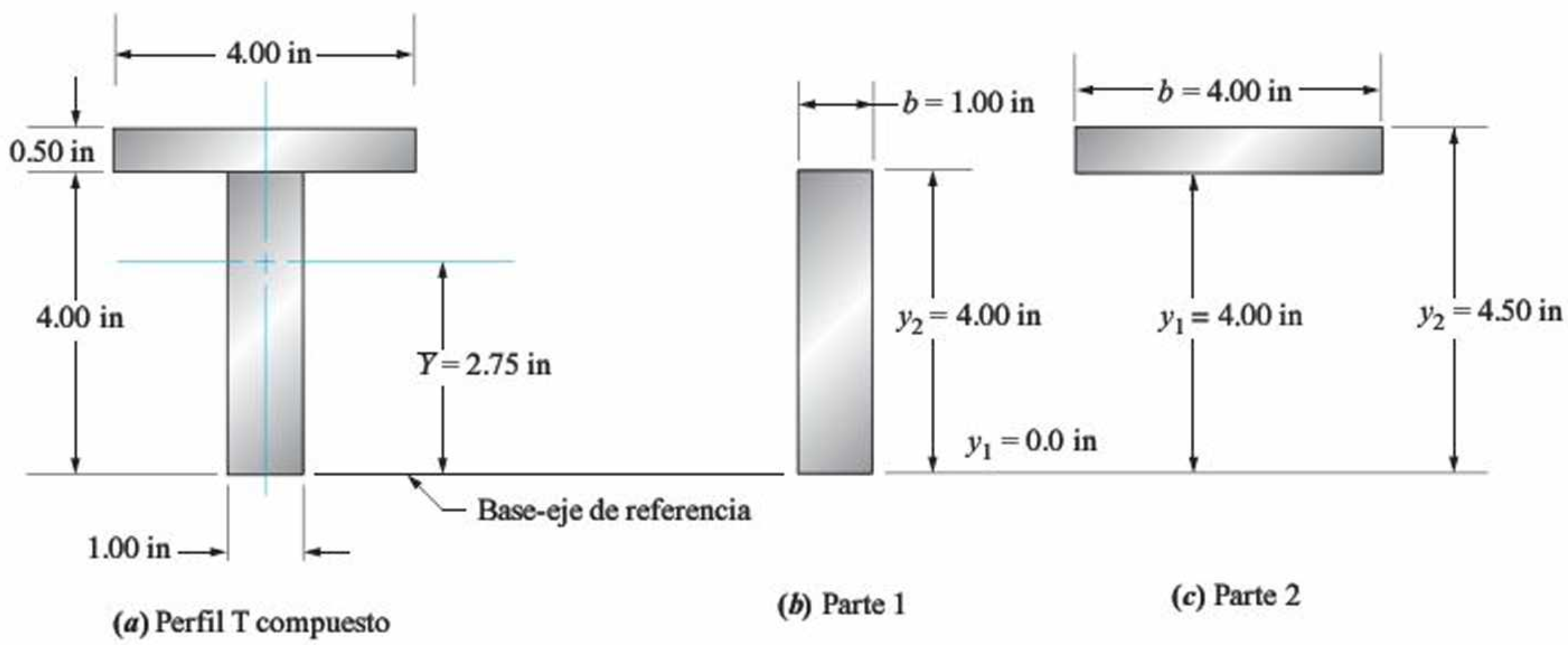


FIGURA 6–17 Sección T para ilustrar el método de calcular el momento de inercia descrito en la sección 6–9.

6–10 RADIO DE GIRO

Otra propiedad del área de una sección transversal se llama *radio de giro*. Se utiliza con más frecuencia en el estudio de la resistencia de materiales cuando se analizan o diseñan columnas, miembros esbeltos, relativamente largos que soportan cargas de compresión axiales.

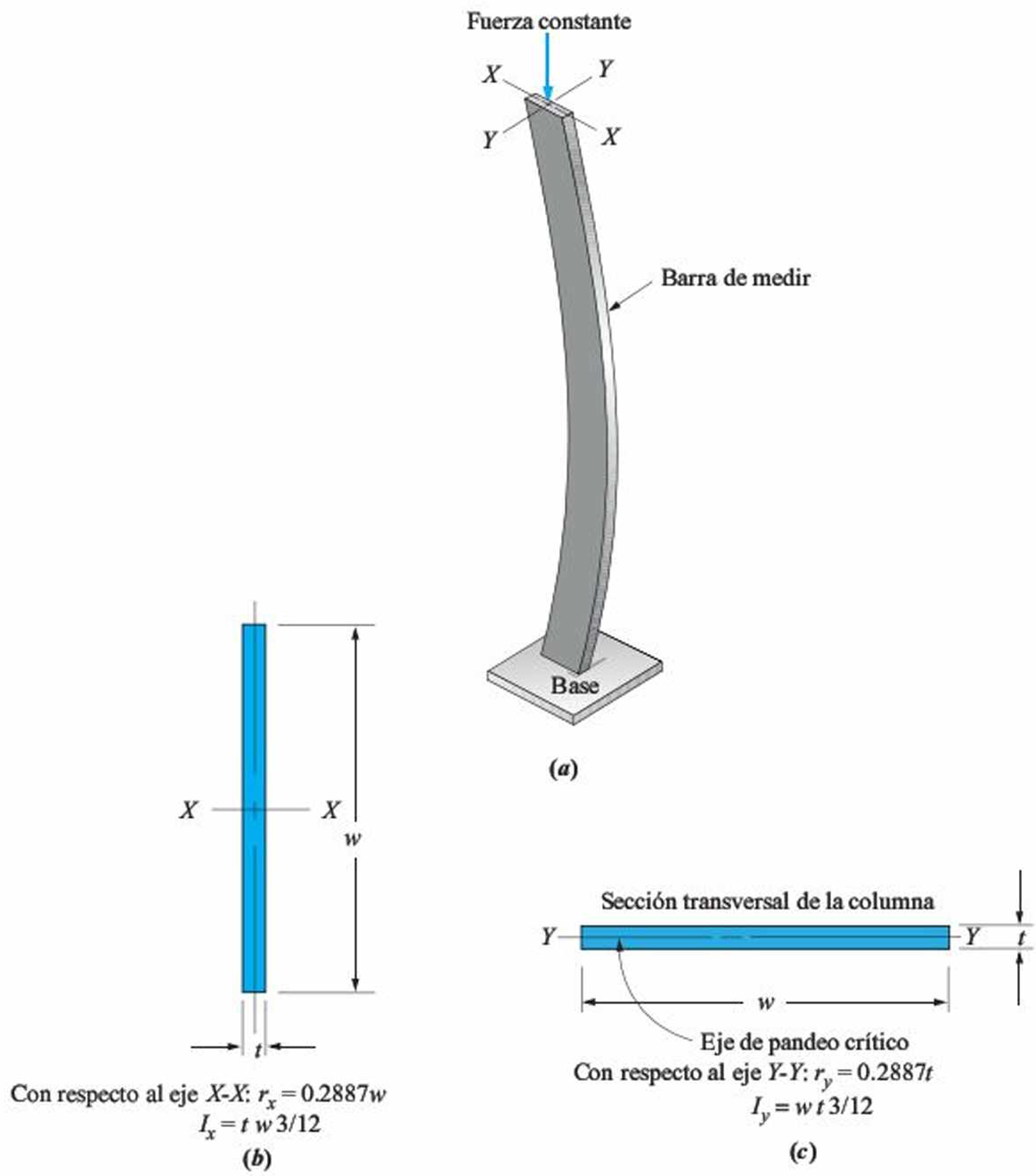
Las columnas se mencionaron brevemente en la actividad del capítulo 1 y cuando se definieron los esfuerzos de compresión directos. Allí también se recalcó que la fórmula del esfuerzo directo simple, $\sigma = F/A$, se aplica a miembros sometidos a compresión siempre y cuando sean “cortos”. Los miembros cortos sometidos a compresión fallan cuando el esfuerzo de compresión directo sobrepasa la resistencia a la cadencia del material sometido a compresión. Los miembros largos sometido a compresión, llamados columnas, fallan por inestabilidad

elástica. Es decir, son incapaces de mantener su forma inicialmente recta cuando la carga de compresión alcanza un valor crítico. En cambio comienzan a flexionarse elásticamente y, si la carga se incrementa moderadamente por encima de la carga crítica, la columna se pandeará de forma repentina y se colapsará, por lo general con consecuencias catastróficas.

Es posible que haya observado el comportamiento de pandeo de columnas. ¿Alguna vez ha sometido una varilla larga, delgada o a una tira delgada de madera, plástico o metal a una carga de compresión? Por ejemplo, la vara de medir típica que probablemente utilizó en un primer curso de ciencias es una columna larga, esbelta. Si la apoyó sobre una mesa o el suelo y la empujó hacia abajo con una fuerza moderada, probablemente se flexionó como se muestra en la figura 6–18. Éste es un ejemplo de inestabilidad elástica o pandeo. Si deja de aplicar la carga exactamente antes de que comience a pandearse, notará que la columna no se deformó de forma permanente. Esto pone de manifiesto que la falla no ocurrió en el material, sino que ocurrió porque el perfil de la columna no fue capaz de mantener la rectitud de la columna. La propiedad del perfil que determina cuando una columna se pandeará es su radio de giro.

No obstante, en el capítulo no se dio el método de determinar cuando el miembro sometido a compresión es largo o corto porque depende del momento de inercia en el cual se enfoca la mayor parte de este capítulo. En realidad, lo que determina si un miembro es largo o corto es

FIGURA 6–18
Ilustración de una barra de metal que se pandea como una columna.



la *relación de la longitud del miembro a su radio de giro*. Esta relación se conoce como *relación de esbeltez*. Por ahora, solamente definimos el radio de giro. Más adelante, en el capítulo 11, se utilizará en el análisis de columnas.

Definición de radio de giro, *r*. Definimos el radio de giro, r, como

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

donde I = momento de inercia de la sección transversal de la columna con respecto a uno de los ejes principales
A = área de la sección transversal

Como tanto I como A son propiedades geométricas de la sección transversal, el radio de giro, r, también lo es. En el apéndice A–1 se dan varias fórmulas para calcular el r de varios perfiles. En el apéndice también aparece, r, junto con otras propiedades de algunos perfiles estructurales estándar. Para aquellos para los cuales no aparece r, los valores de I y A están disponibles y se puede utilizar la ecuación (6–6) para calcular r de forma muy simple.

Problema de ejemplo 6–8

Calcule el radio de giro de la sección transversal de una vara de medir de 2.5 mm de espesor y 30 mm de ancho. Considere los dos ejes principales, X y Y, como se ilustra en la figura 6–18. Use la ecuación (6–6).

Solución

Objetivo Calcular el radio de giro con respecto a los ejes X y Y.

Datos Una sección rectangular. Espesor = t = 2.5 mm. Ancho = w = 30 mm.

Análisis Use la ecuación (6–6), $r = \sqrt{I/A}$

Resultados ***r_x* con respecto al eje *X*.** En primer lugar, calculemos el momento de inercia con respecto al eje X. En el apéndice A–1, encontramos que la forma general de la ecuación del momento de inercia de un rectángulo es $I = bh^3/12$. Observe que b es la dimensión paralela al eje de interés y h es la dimensión perpendicular al eje de interés. En este caso, $b = t = 2.5$ mm y $h = w = 30.0$ mm. Entonces,

$$I_X = tw^3/12 = (2.5\ \text{mm})(30.0\ \text{mm})^3/12 = 5625\ \text{mm}^4$$

Además, $A = tw = (2.5\ \text{mm})(30.0\ \text{mm}) = 75.0\ \text{mm}^2$
Entonces el radio de giro es

$$r_X = \sqrt{I_X/A} = \sqrt{(5625\ \text{mm}^4)/(75.0\ \text{mm}^2)} = 8.66\ \text{mm}$$

***r_y* con respecto al eje *Y*.** Asimismo, primero calculamos el momento de inercia con respecto al eje Y. En este caso, $b = w = 30.0$ mm y $h = t = 2.5$ mm. Entonces,

$$I_Y = wt^3/12 = (30.0\ \text{mm})(2.5\ \text{mm})^3/12 = 39.06\ \text{mm}^4$$

También, $A = tw = (2.5\ \text{mm})(30.0\ \text{mm}) = 75.0\ \text{mm}^2$
Entonces el radio de giro es

$$r_Y = \sqrt{I_Y/A} = \sqrt{(39.06\ \text{mm}^4)/(75.0\ \text{mm}^2)} = 0.722\ \text{mm}$$

Comentario Es obvio que la selección del eje con respecto al cual se calcula el radio de giro es crítica para el resultado. En este caso I_X es mucho mayor que I_Y y, por consiguiente, r_X es mucho mayor que r_Y. Con este ejemplo se dará cuenta de la importancia de la selección del eje. En el capítulo 11, dedicado al análisis y diseño de columnas, verá el efecto de esta observación. El resultado es que la vara de medir se pandeará con respecto a su eje Y, no con respecto al eje X. También lo hará con respecto al eje con el radio de giro mínimo.

Solución alterna Cuando la fórmula para calcular el radio de giro está disponible, el cálculo es mucho más simple. Para la sección rectangular de este problema, el apéndice A–1 da

$$r_X = h/\sqrt{12} = 0.2887\,h$$

y

$$r_Y = b/\sqrt{12} = 0.2887\,b$$

Estas fórmulas para r_X y r_Y son fáciles de derivar a partir de la definición básica:

$$r_X = \sqrt{I/A} = \sqrt{(bh^3/12)/(bh)} = \sqrt{h^2/12} = h/\sqrt{12}$$

$$r_Y = \sqrt{I/A} = \sqrt{(hb^3/12)/(bh)} = \sqrt{b^2/12} = b/\sqrt{12}$$

En este caso, $h = w = 30.0$ mm y $b = t = 2.5$ mm. Entonces

$$r_X = 0.2887\,w = (0.2887)(30.0\text{ mm}) = 8.66\text{ mm}$$

y

$$r_Y = 0.2887\,t = (0.2887)(2.5\text{ mm}) = 0.722\text{ mm}$$

Estos valores concuerdan con los calculados con la ecuación (6–6).

Radio de giro de perfiles estructurales. Repase los datos que aparecen en los apéndices A–4 a A–13 que dan las propiedades de sección de una gran variedad de perfiles estructurales utilizados con frecuencia en las estructuras de máquinas, plataformas o edificios. Algunas de estas tablas incluyen el radio de giro de forma directa; otras incluyen tanto el momento de inercia, I, como el área de sección transversal, A. En ese caso puede utilizar la ecuación 6–6 para calcular el radio de giro, r.

También es necesario determinar el eje con respecto al cual el radio de giro es el menor. Para las vigas de patín ancho (apéndice A–7) y las vigas American Standard (apéndice A–8) el valor mínimo de r es el calculado con respecto al eje Y–Y; es decir,

$$r_{\text{mín}} = \sqrt{\frac{I_Y}{A}}$$

Asimismo, para tubería rectangular (apéndice A–9), el radio mínimo de giro es aquel con respecto al eje Y–Y. En la tabla se dan valores de r.

Para ángulos de acero estructural, llamados perfiles L, ni el eje X–X ni el eje Y–Y dan el radio de giro mínimo. Como se ilustra en el apéndice A–5, el $r_{\text{mín}}$ se calcula con respecto al eje Z–Z, con los valores dados en la tabla.

Para secciones simétricas, el valor de r es el mismo con respecto a cualquier eje principal. Tales perfiles son las secciones circulares sólidas o huecas y las secciones cuadradas sólidas o huecas.

6–11 MÓDULO DE SECCIÓN

En el análisis de flexión de vigas en el capítulo 7, se demuestra que el esfuerzo flexionante es directamente proporcional al momento flexionante que actúa en la viga en un lugar dado e inversamente proporcional a una propiedad del área de sección transversal llamada *módulo de sección*. Expresado matemáticamente,

$$\text{Esfuerzo provocado por flexión} = \sigma = M/S$$

donde M es el momento flexionante calculado utilizando los principios estudiados en el capítulo 5 y S es el módulo de sección, definido en el capítulo 7 como

$$S = I/c$$

El símbolo, c, se considera como la distancia del eje centroidal de la sección transversal a la fibra más externa de la viga. Como tanto I como A son propiedades del área de la sección transversal de la viga, el módulo de sección también es una propiedad del área, y en general se utiliza para análisis y diseño.

La figura 6–19 muestra un ejemplo que ilustra estos conceptos. El perfil W de acero estructural, W8 × 21, tiene un momento de área de inercia de 75.3 in^4 y una altura total de 8.28 in, tal como aparece en el apéndice A–7. Por simetría, vemos que eje centroidal horizontal con respecto al cual ocurre la flexión se encuentra a la mitad de la altura. Por consiguiente, la distancia del centroide a la fibra más externa de la viga, c, es

$$c = \text{Altura}/2 = (8.28\ \text{in})/2 = 4.14\ \text{in}$$

Por último, podemos calcular el valor del módulo de sección con

$$S = I/c = (75.3\ \text{in}^4)/4.14\ \text{in} = 18.2\ \text{in}^3$$

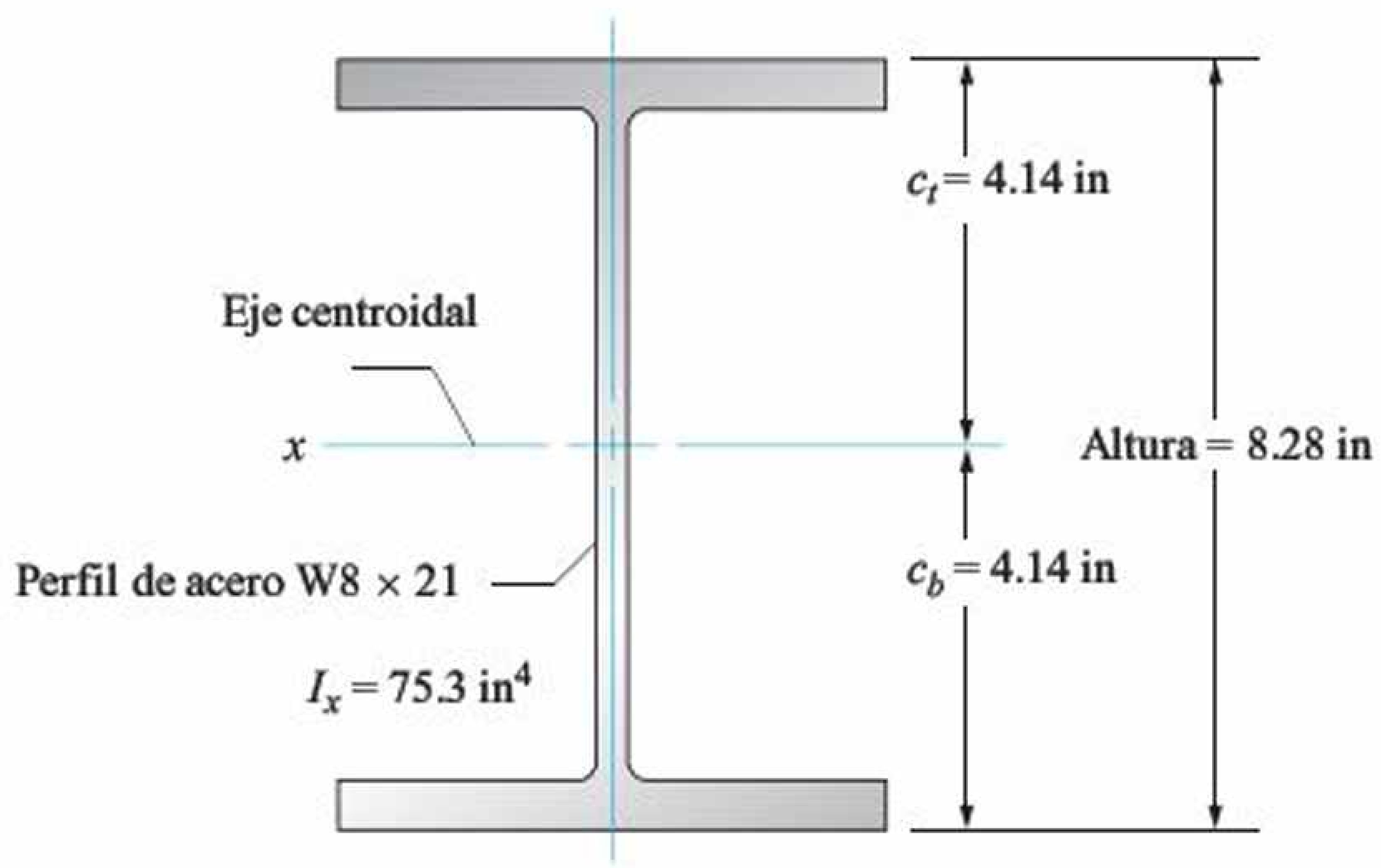


FIGURA 6–19 Ilustración de la distancia a c en la sección transversal de una viga de perfil W.

Ahora podemos utilizar este valor para calcular el esfuerzo provocado por flexión. Suponga que la viga está sometida a un momento flexionante de 18 750 lb·ft. Entonces

$$\sigma = M/S = \frac{18\,750 \text{ lb}\cdot\text{ft}}{18.2 \text{ in}^3}\,\frac{12 \text{ in}}{\text{ft}} = 12\,363 \text{ lb/in}^2 = 12.4 \text{ ksi}$$

La flexión produce un esfuerzo de tensión en la superficie externa y un esfuerzo de compresión en la interna, como se verá en el capítulo 7. En este ejemplo, la magnitud del esfuerzo de tensión y el esfuerzo de compresión tendrían que ser iguales porque la distancia c es igual ya sea a la superficie superior o a la inferior.

No todas las secciones son simétricas, como se demostrará en el siguiente problema de ejemplo, lo que produce esfuerzos desiguales en las superficies superior e inferior de la viga.

Problema de ejemplo 6–9

Determine el módulo de sección del perfil T utilizado en el problema de ejemplo 6–5. Luego calcule el esfuerzo máximo provocado por flexión en las superficies superior e inferior, si el momento flexionante es de 8650 lb·in.

Solución Los resultados del problema de ejemplo 6–5, mostrados en la figura 6–12, incluyen los siguientes:

- Altura total de la sección: 4.50 in
- Localización del eje centroidal horizontal: 2.75 in sobre la base
- Momento de área de inercia: 12.125 in^4

Ahora podemos observar que la distancias del eje centroidal a las superficies superior e inferior son desiguales.

$$c_b = 2.75 \text{ in del centroide a la superficie inferior}$$

$$c_t = 4.50 \text{ in} - 2.75 \text{ in} = 1.75 \text{ in del centroide a la superficie superior}$$

Se pueden calcular dos valores del módulo de sección,

$$\text{Superficie superior: } S_t = I/c_t = (12.125 \text{ in}^4)/1.75 \text{ in} = 6.93 \text{ in}^3$$

$$\text{Superficie inferior: } S_b = I/c_b = (12.125 \text{ in}^4)/2.75 \text{ in} = 4.41 \text{ in}^3$$

Ahora podemos calcular los esfuerzos en las superficies superior e inferior.

$$\text{Superficie superior;} \quad \sigma = M/S = (8650 \text{ lb·in})/6.93 \text{ in}^3 = 1248 \text{ psi}$$

$$\text{Superficie inferior:} \quad \sigma = M/S = (8650 \text{ lb·in})/4.41 \text{ in}^3 = 1961 \text{ psi}$$

Observe que el valor mínimo del modulo de sección da el valor máximo del esfuerzo y que por lo general sería el objetivo del cálculo del esfuerzo. Sin embargo, esto se explorará con más detalle en el capítulo 7 para casos especiales en los que el material de una viga tiene resistencias diferentes a tensión y a compresión.

REFERENCIAS

1. American Institute of Steel Construction, *Steel Construction Manual*, 13ª ed., Chicago, IL, 2005.
2. Oberg, Eric y colaboradores, *Machinery's Handbook*, 27ª ed., Industrial Press, Nueva York, 2004.
3. Young, Warren C. y Richard G. Budynas, *Roark's Formulas for Stress and Strain*, 7ª ed., McGraw–Hill, Nueva York, 2002.

SITIOS EN INTERNET

1. Profiles, Inc. www.profiles–inc.com Fabricante de perfiles laminados o estirados, hechos sobre pedido, para componentes de precisión de acero al carbón y de aleación, cobre, latón y otros materiales no ferrosos.
2. iLevel by Weyerhaeuser www.ilevel.com/floors Fabricante de viguetas de piso para la construcción de edificios hechas como elaboraciones de perfil I eficientes a partir de componentes de madera simples. Seleccione el producto "TJI® Joists". La Joist Specifier Guide da dimensiones detalladas y datos de aplicación de los productos Silent Floor–Trus Joist.
3. Nucor Coporation–Vulcraft Group www.vulcraft.com Fabricante de viguetas de acero de alma abierta, trabes, perfiles para plataformas de piso y techo y sistemas de viguetas de piso compuestos para usarse en centros comerciales, escuelas y edificios de oficinas.
4. Aluminum Extruders Council www.aec.org/exapps/alumshow.html Una organización industrial que promueve el uso de extrusiones de aluminio en muchos tipos de productos, construcción de edificios y sistemas de transporte. El *Showcase* ilustra descripciones pormenorizadas de aplicaciones exitosas. Las fichas *Extrusion Basics* y *Technical Information* describen el proceso de extrusión, las aleaciones utilizadas, las implicaciones ambientales y varios recursos útiles para instructores y estudiantes.
5. American Extruded Plastics, Inc. www.aeplastics.com Fabricante de plásticos extruidos para las industrias mecánica, arquitectónica, de construcción de edificios, aeroespacial, electrónica, del transporte y muchas otras.
6. Green Bull, Inc. www.greenbullladder.com Fabricante de escaleras hechas de aluminio, acero, fibra de vidrio y madera. También produce tablones extensibles, plataformas, andamios móviles y carretones.
7. Altec, Inc. www.altec.com Diseñador y fabricante de plataformas aéreas articuladas y extensibles montadas en camiones para colocar personal y equipo en sitios elevados. Aplicaciones en la distribución de energía eléctrica, construcción de edificios, poda de árboles y otras industrias.
8. Unistrut Corporation www.unistrut.com Fabricante de sistemas de componentes hechos de acero o fibra de vidrio que pueden ser armados en varias configuraciones para producir marcos, estructuras, soportes, unidades de almacenamiento, sistemas de apoyo, unidades móviles y otros dispositivos. Hay catálogos en línea que proporcionan datos de propiedades, información sobre aplicaciones, instrucciones de ensamble e ilustraciones de usos.
9. 80/20 Inc. www.8020.net Fabricante de sistemas de componentes hechos de aluminio extruido que pueden ser armados en varias configuraciones para usarse como equipo de producción, carretones, dispositivos automáticos, estaciones de trabajo, unidades de almacenamiento y muchos otros sistemas.
10. Paramount Extrusion Company http://paramountextrusions.com/shapes Fabricante de varias extrusiones estándar tales como canales, secciones H, secciones T, tubos huecos (redondos, cuadrados, rectangulares), barras cuadradas y rectangulares, secciones de manijas y muchos otros para usarse en muebles de oficina, productos de consumo, gabinetes, etc. El catálogo da datos que pueden ser útiles en los problemas que vienen en este libro.
11. Jackson Tube Service, Inc. http://www.jackson–tube.com/shapes.htm Fabricante de una amplia variedad de perfiles y tamaños que pueden ser útiles en los problemas que vienen en este libro.

PROBLEMAS

Centroide y momento de inercia

Para cada uno de los perfiles mostrados en las figuras de la P6–1 a la P6–48, localice el eje centroidal horizontal y calcule la magnitud del momento de inercia con respecto a dicho eje por medio del teorema del eje paralelo descrito en la sección 6–6.

Se puede aplicar el método descrito en la sección 6–9 para calcular el momento de inercia de aquellos perfiles compuestos de dos o más partes rectangulares cuyos lados son perpendiculares y paralelos al eje horizontal. Se incluyen los perfiles mostrados en las figuras de la P6–1 a la P6–15 y los perfiles compuestos hechos de perfiles de madera estándar mostrados en las figuras P6–21 a la P6–24.

Las figuras P6–1 a la P6–20 son perfiles especiales que podrían fabricarse por medio de extrusión de plástico o aluminio, maquinando una barra de acero sólida o soldando componentes distintos.

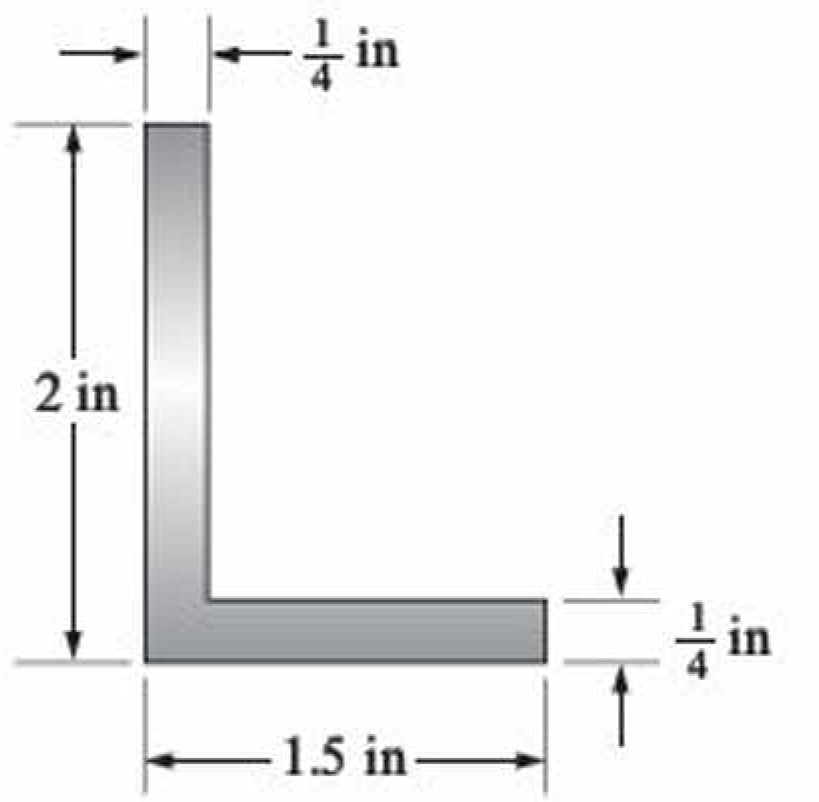


FIGURA P6–1

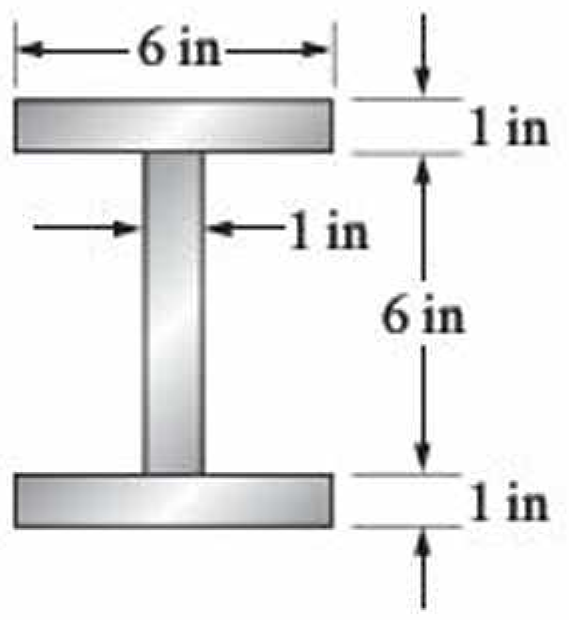


FIGURA P6–2

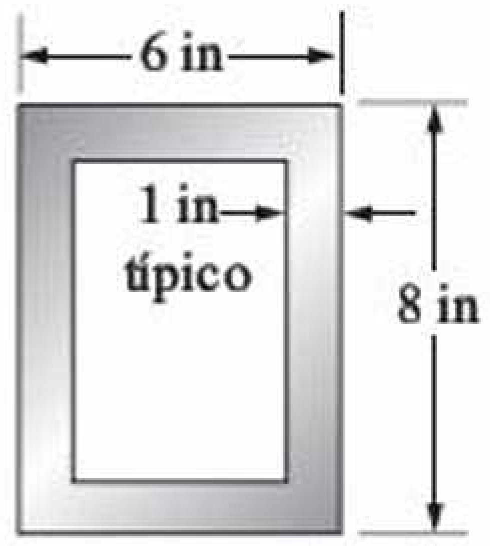


FIGURA P6–3

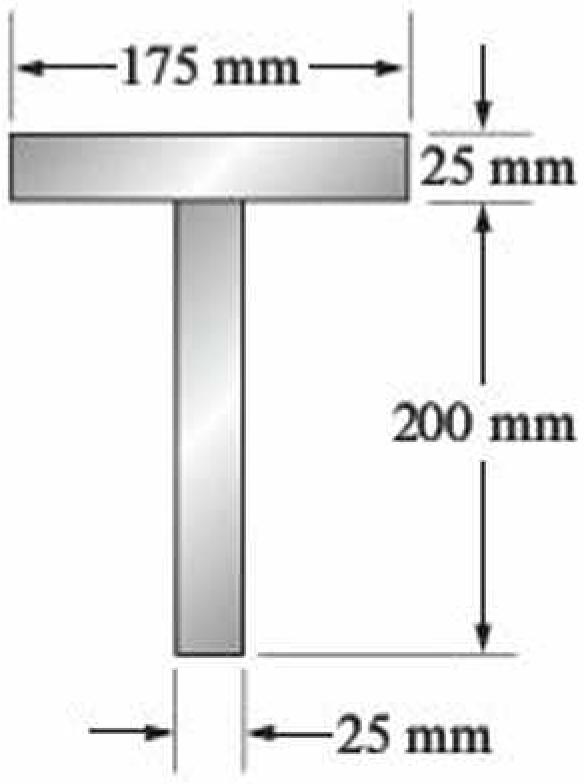


FIGURA P6–4

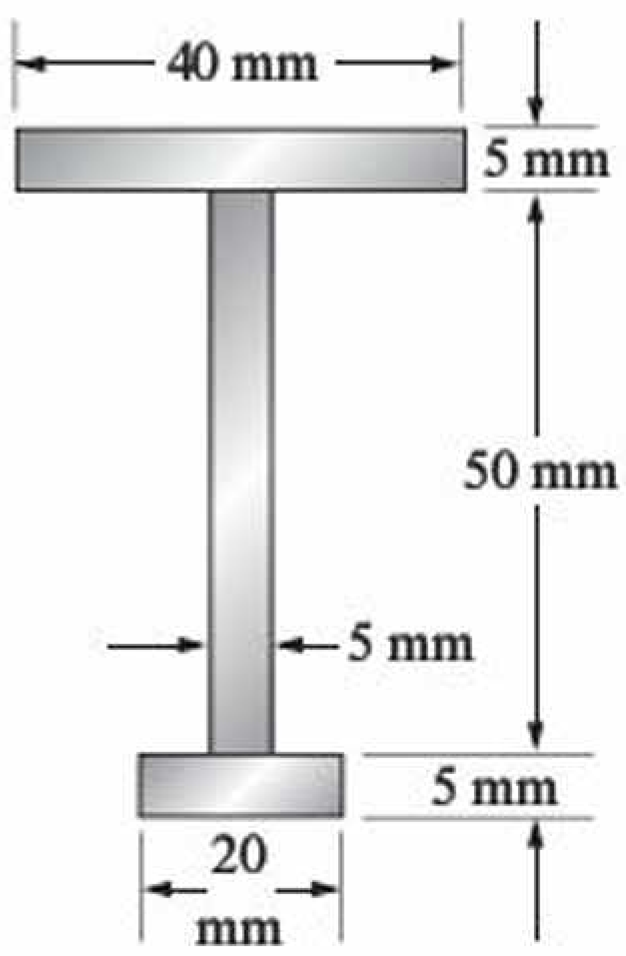


FIGURA P6–5

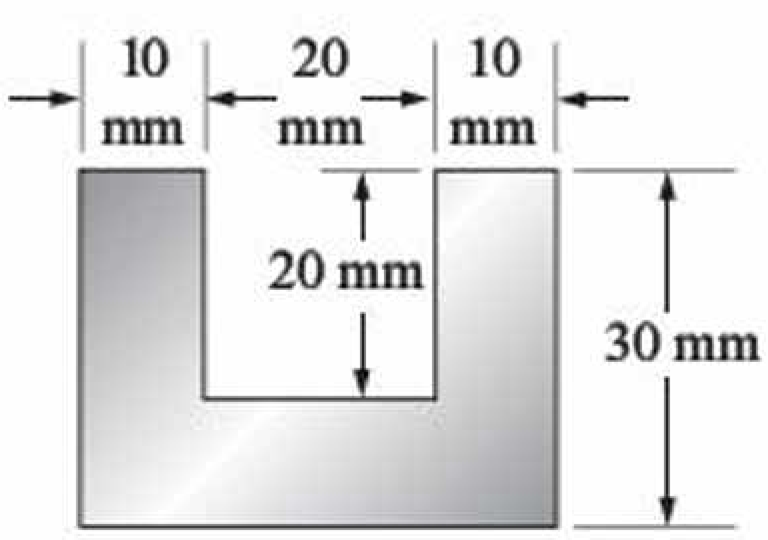


FIGURA P6–6

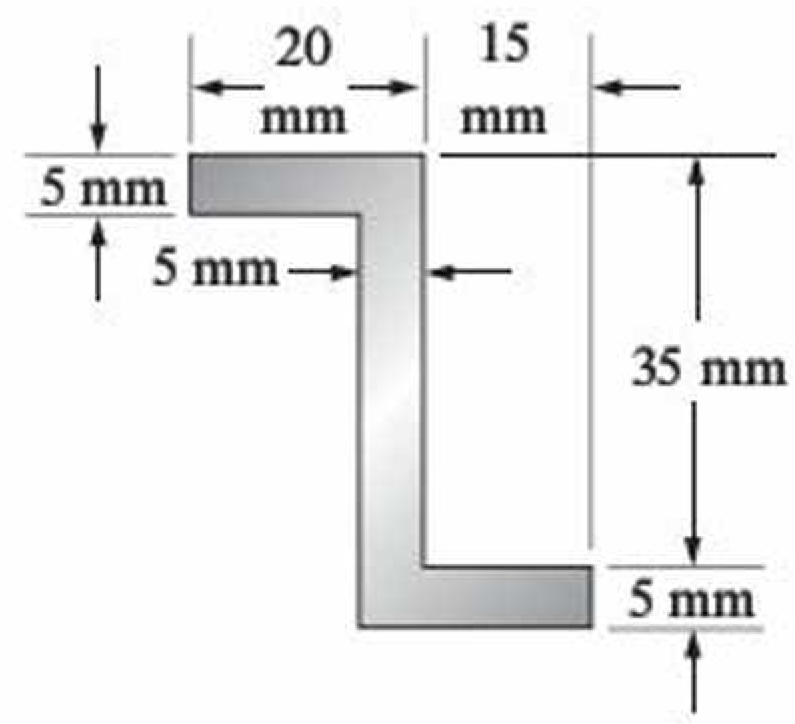


FIGURA P6–7

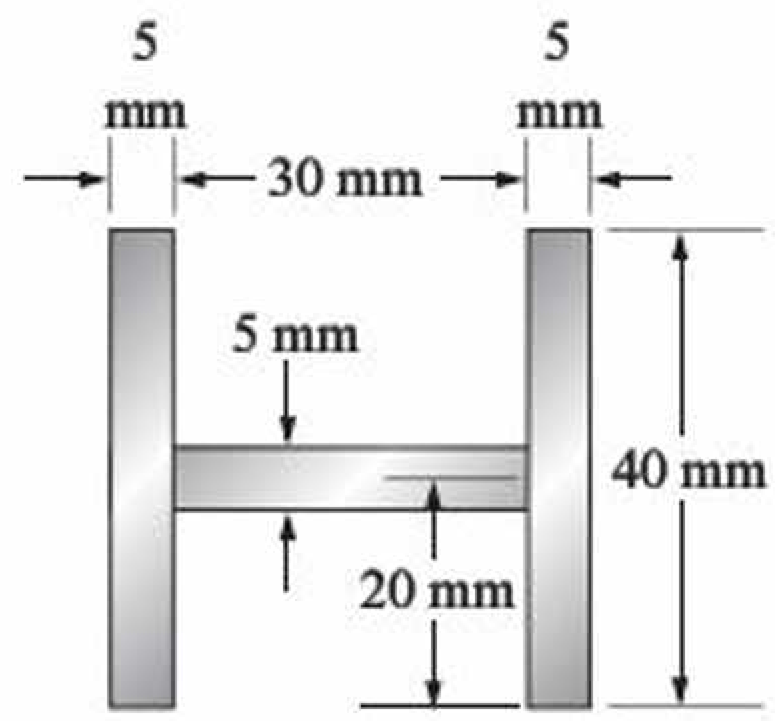


FIGURA P6–8

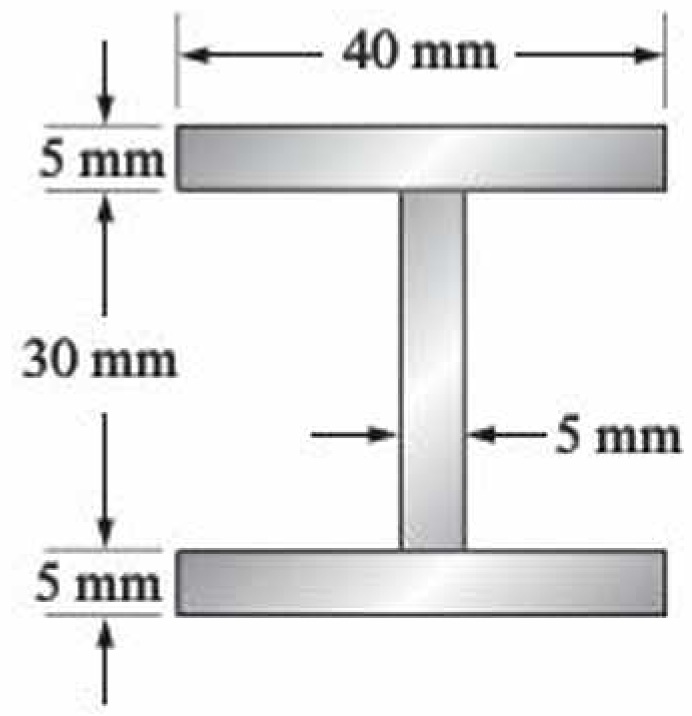


FIGURA P6–9

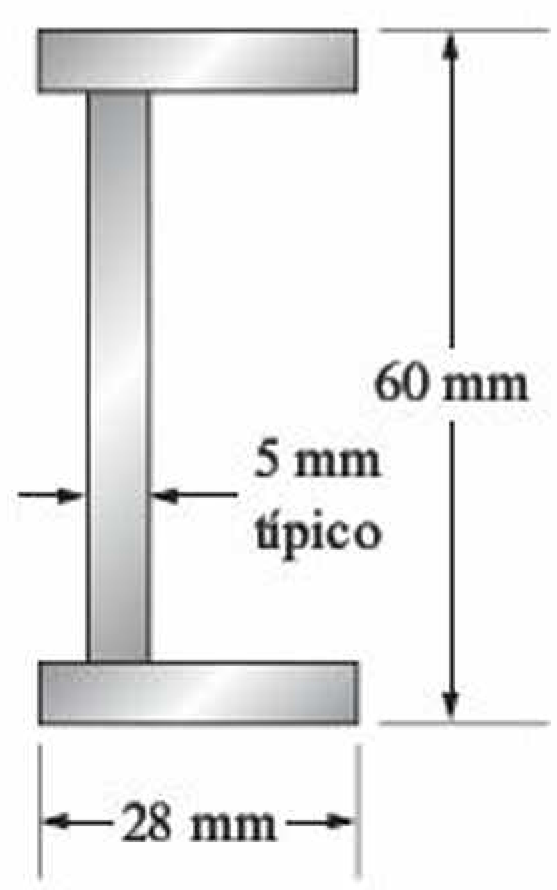


FIGURA P6–10

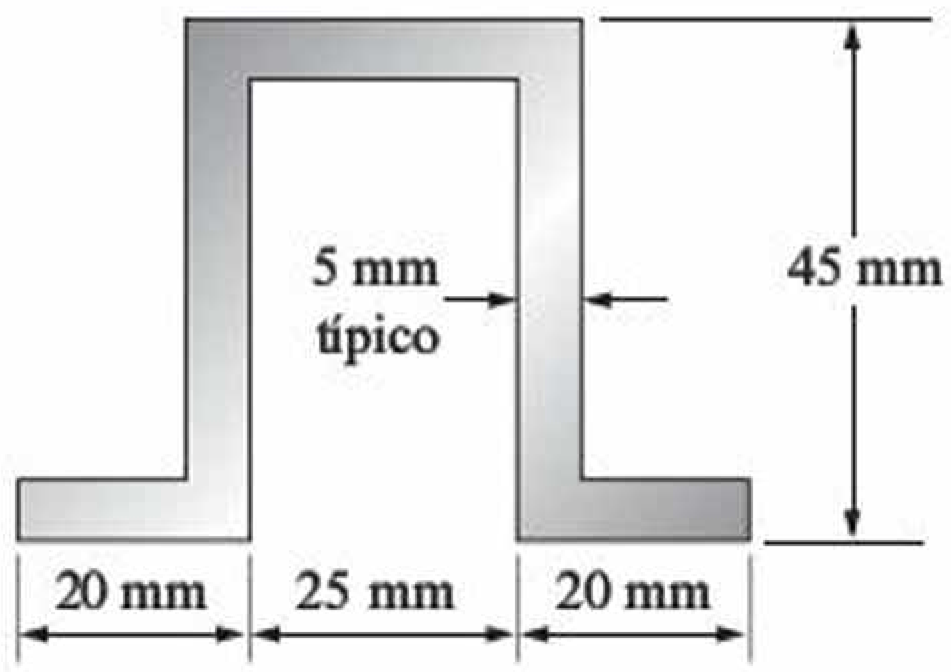


FIGURA P6–11

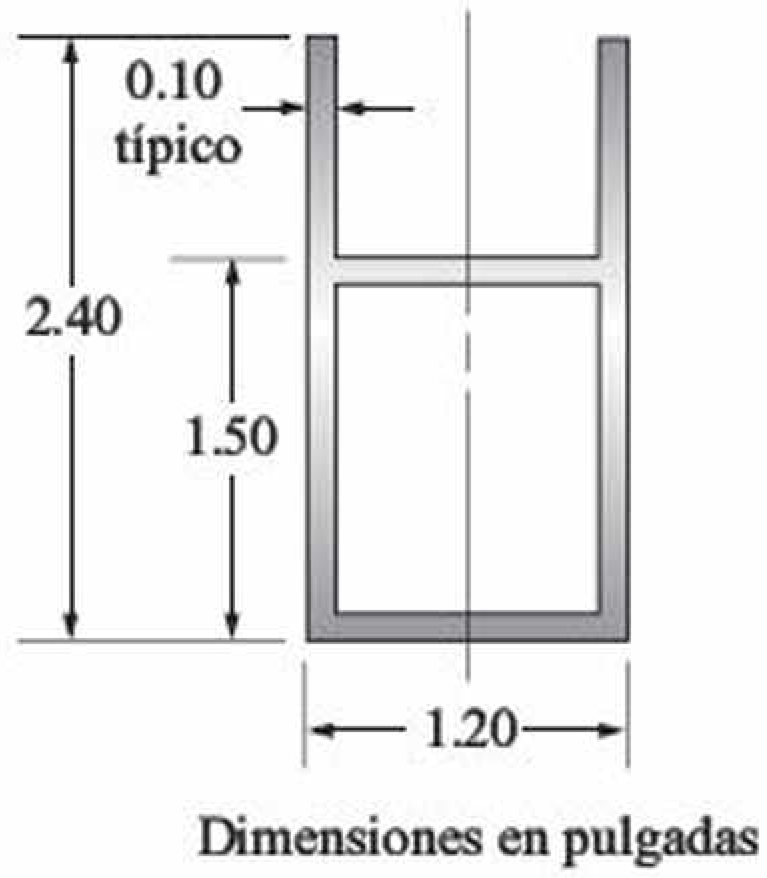


FIGURA P6–15

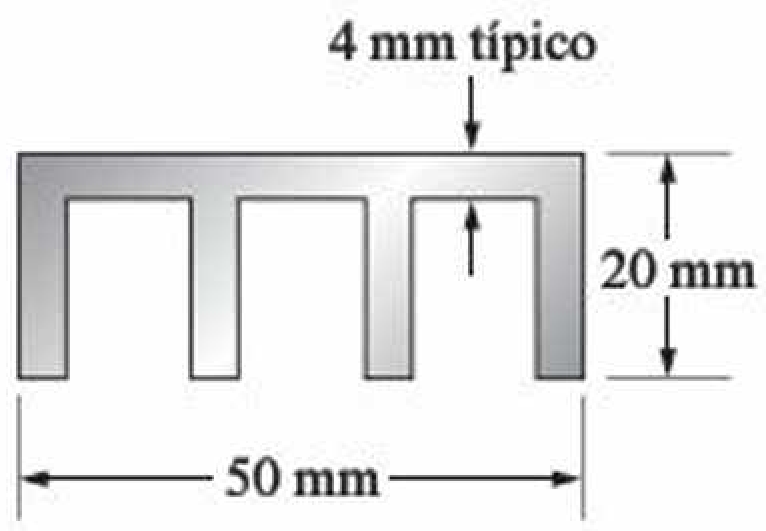


FIGURA P6–12

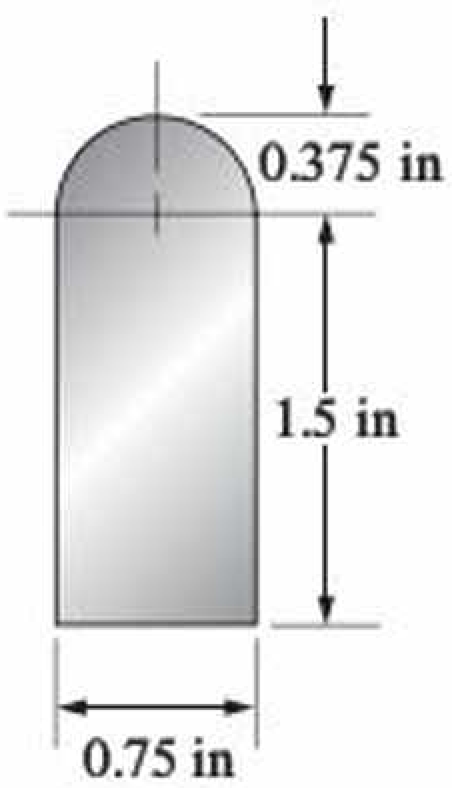


FIGURA P6–16

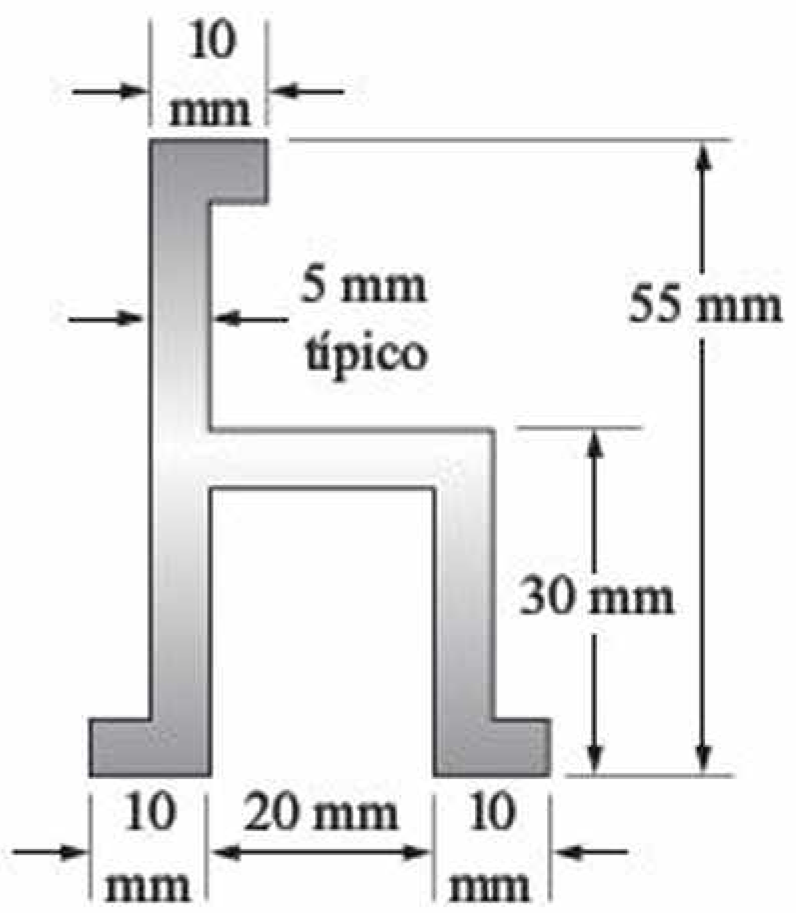


FIGURA P6–13

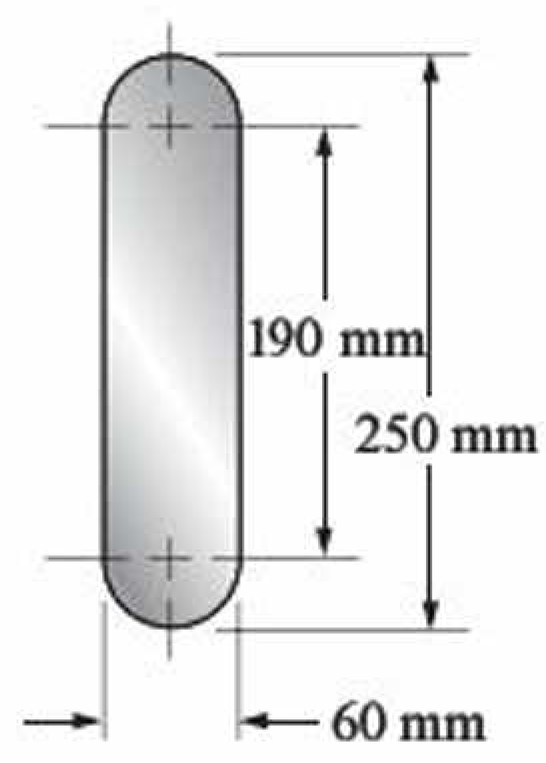


FIGURA P6–17

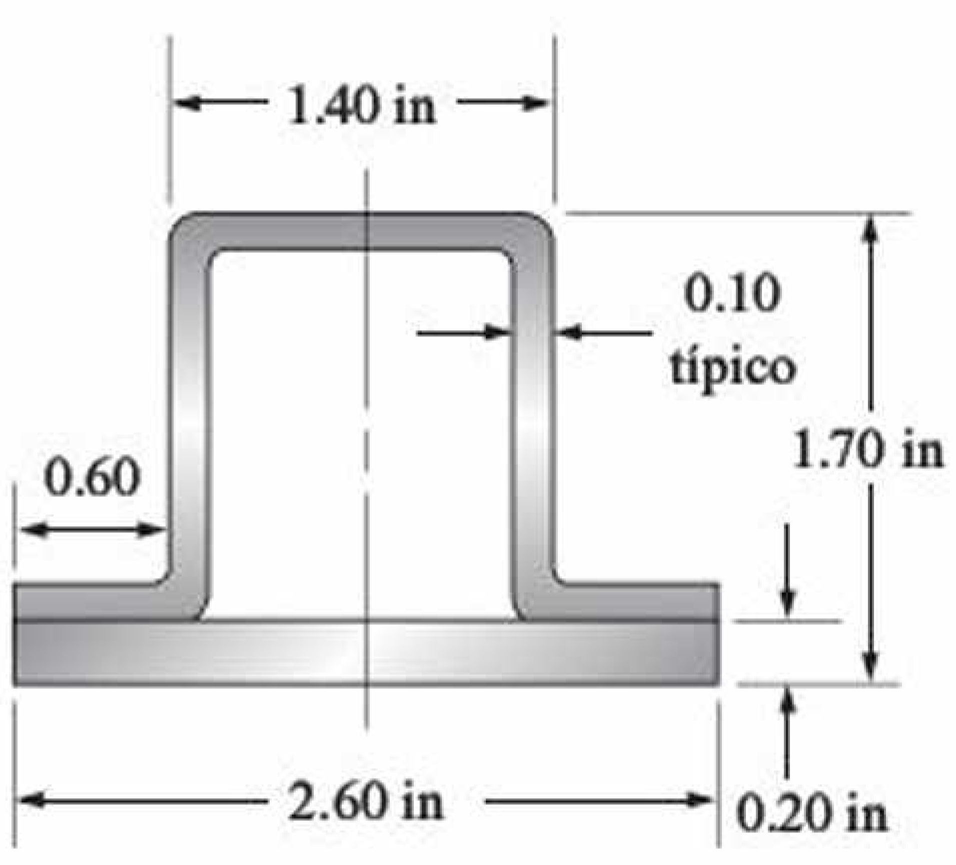


FIGURA P6–14

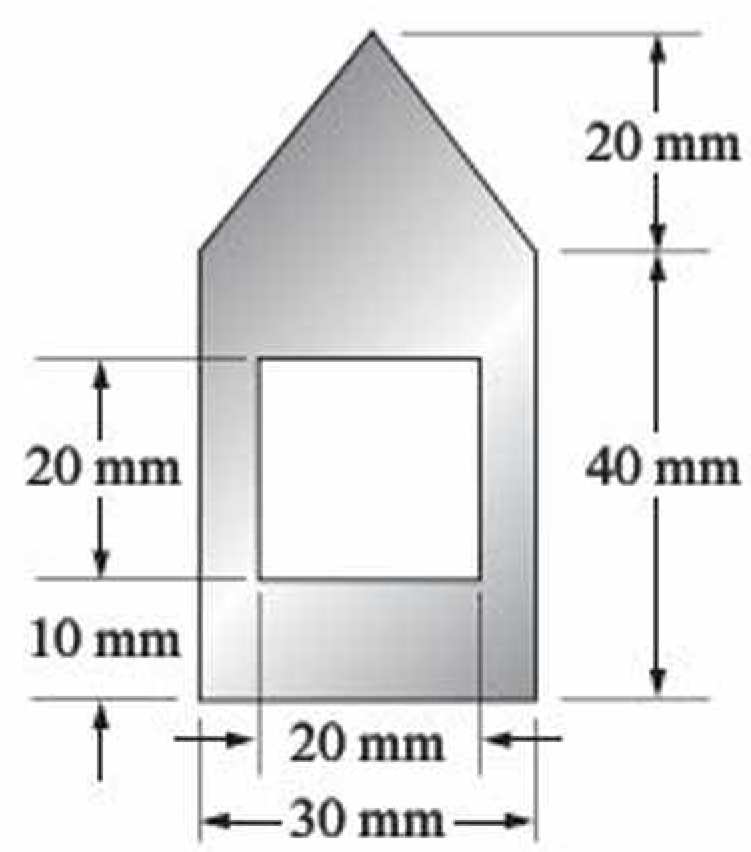


FIGURA P6–18

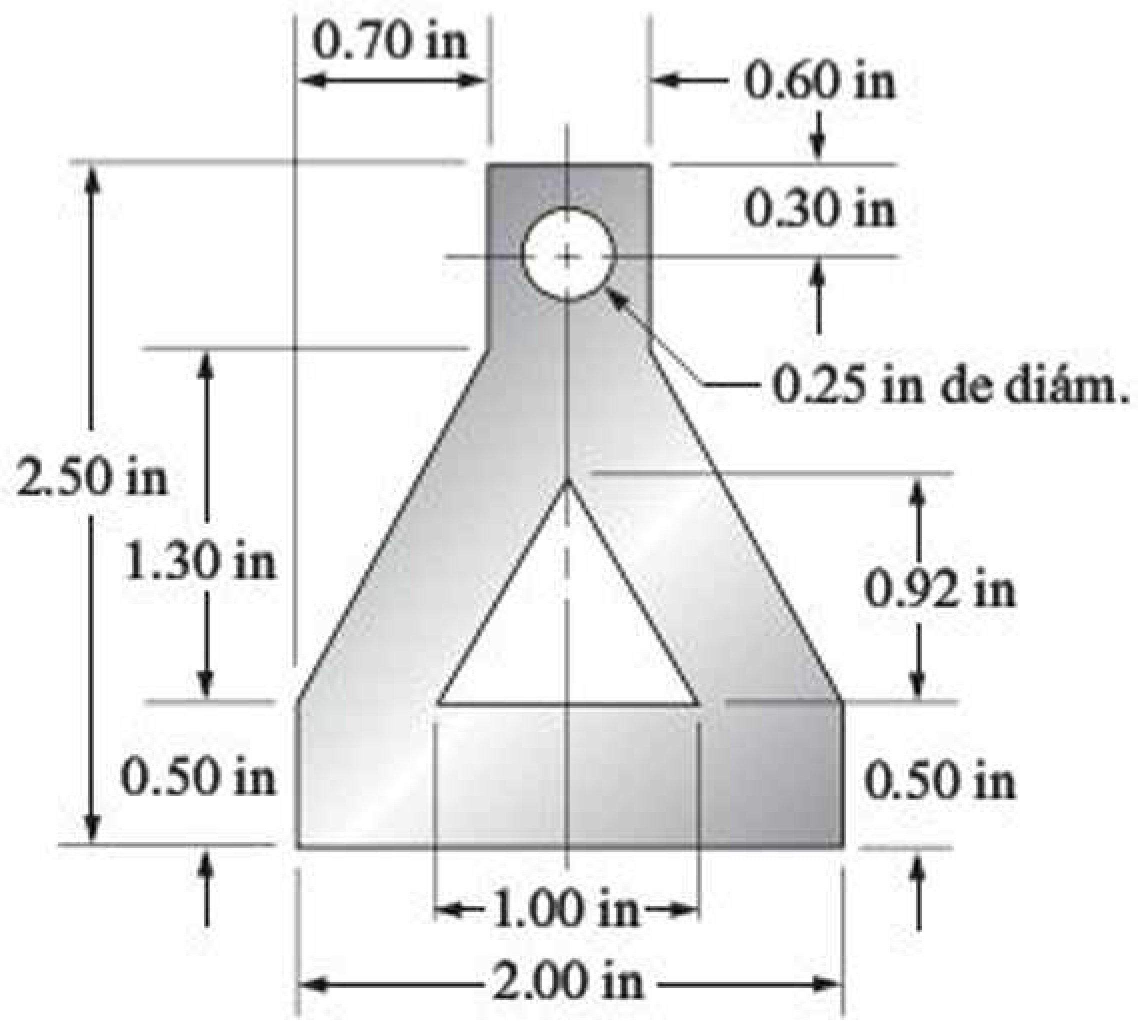


FIGURA P6–19

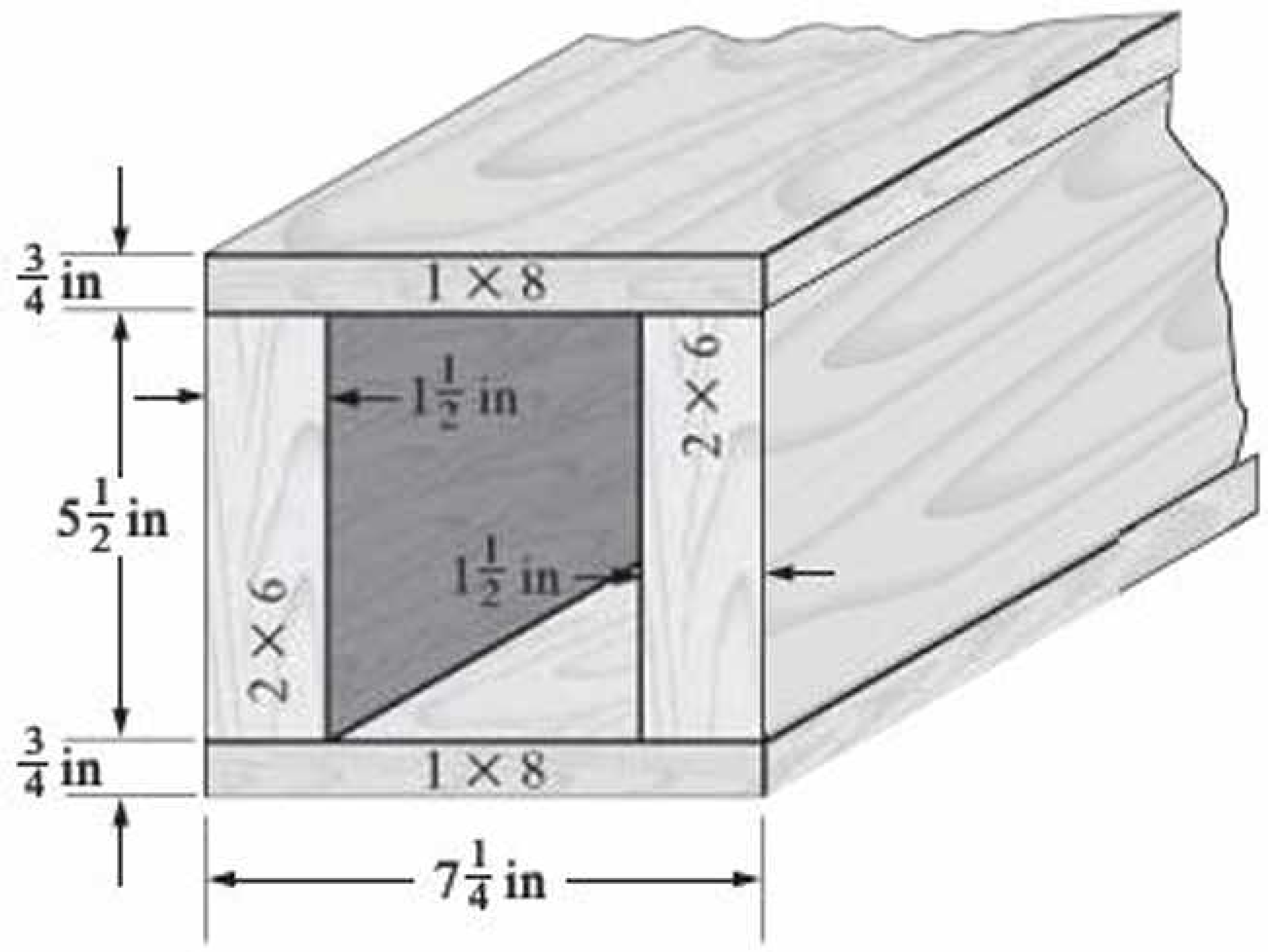


FIGURA P6–22

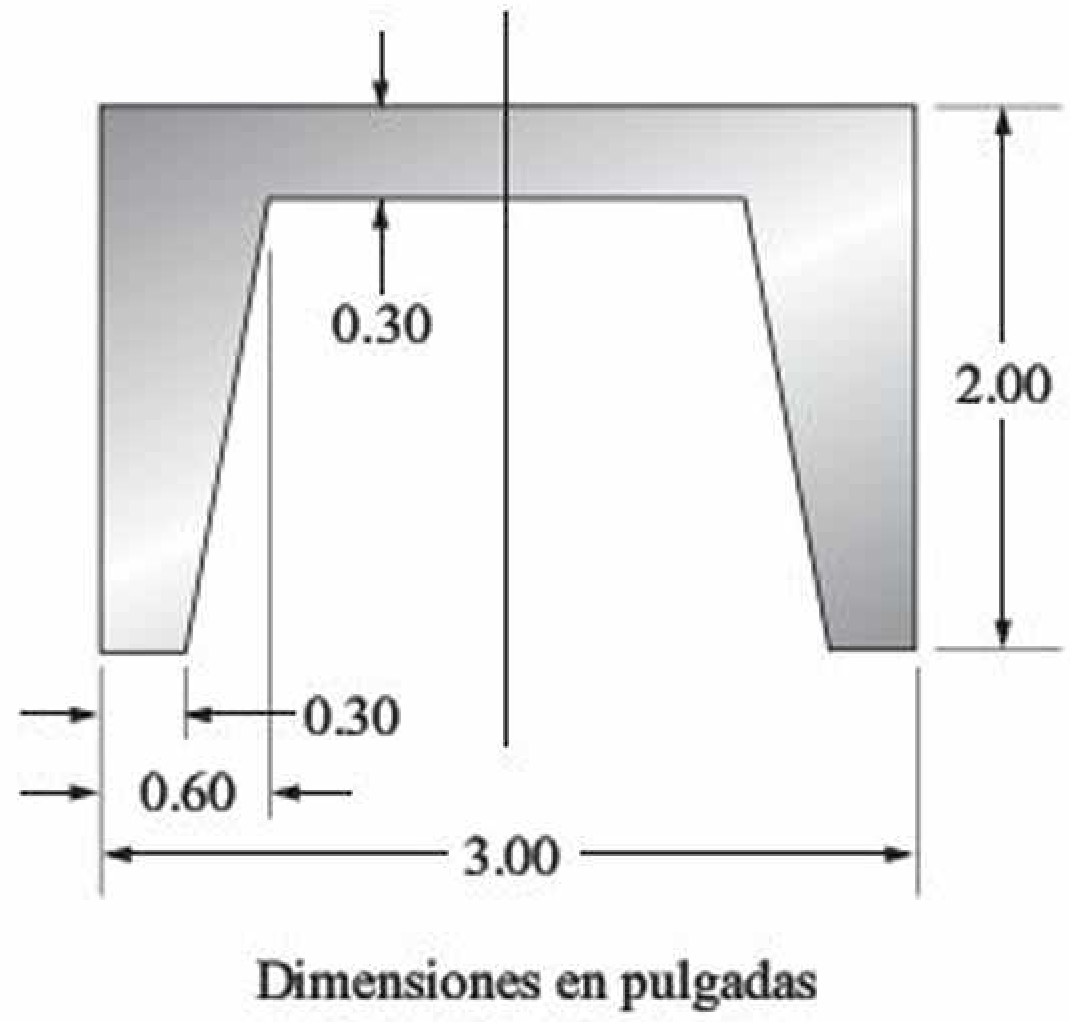


FIGURA P6–20

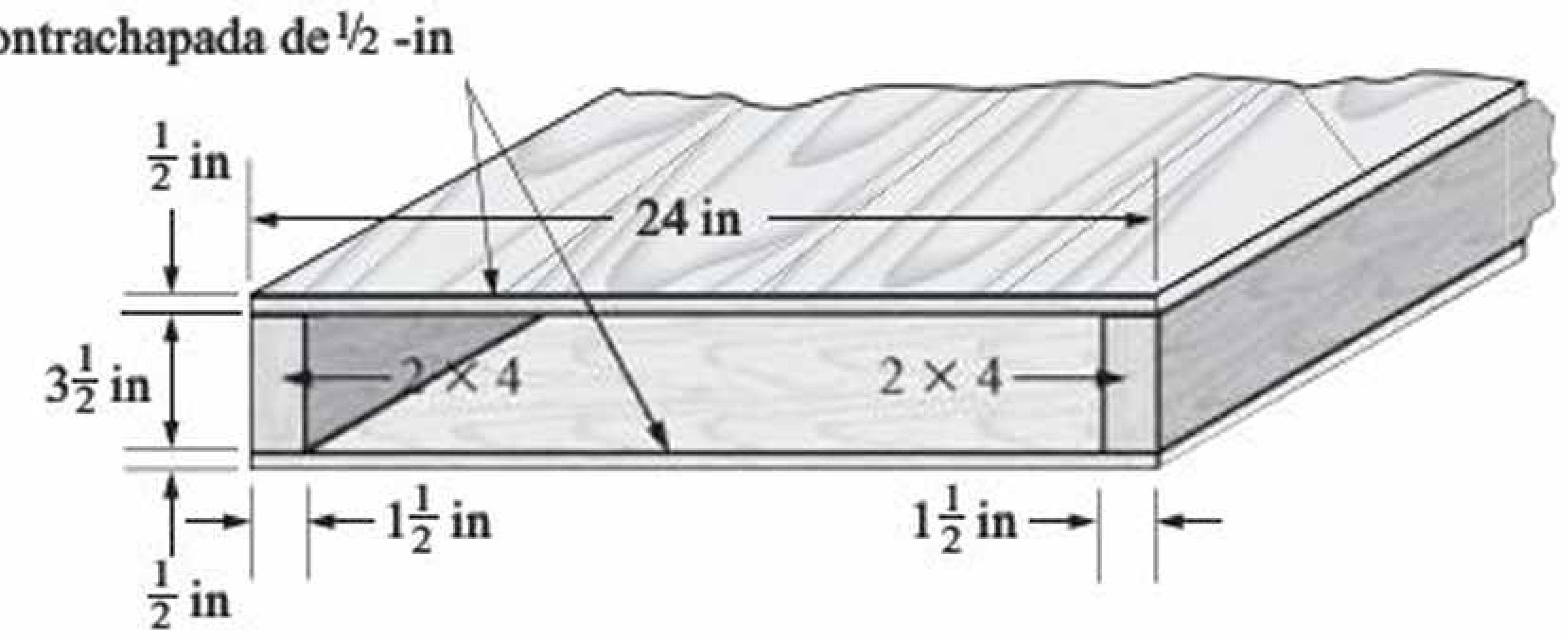


FIGURA P6–23

Las figuras de la P6–21 a la P6–24 son secciones de viga compuestas que pueden hacerse uniendo entre sí perfiles de madera estándar por medio de clavos, tornillos o adhesivo.

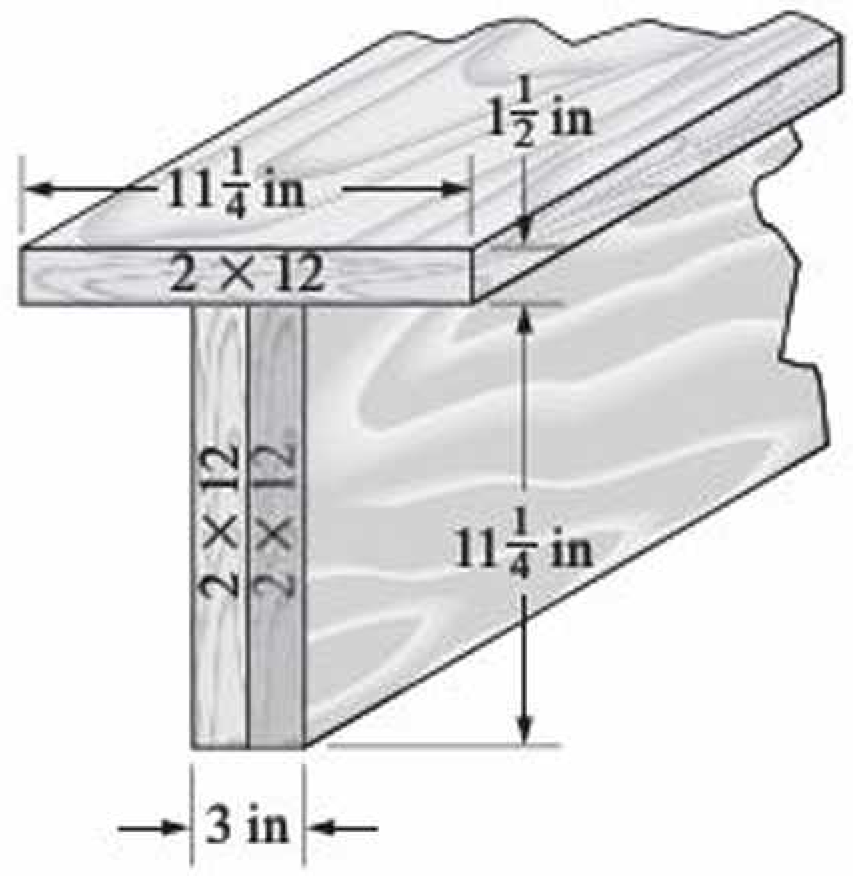


FIGURA P6–24

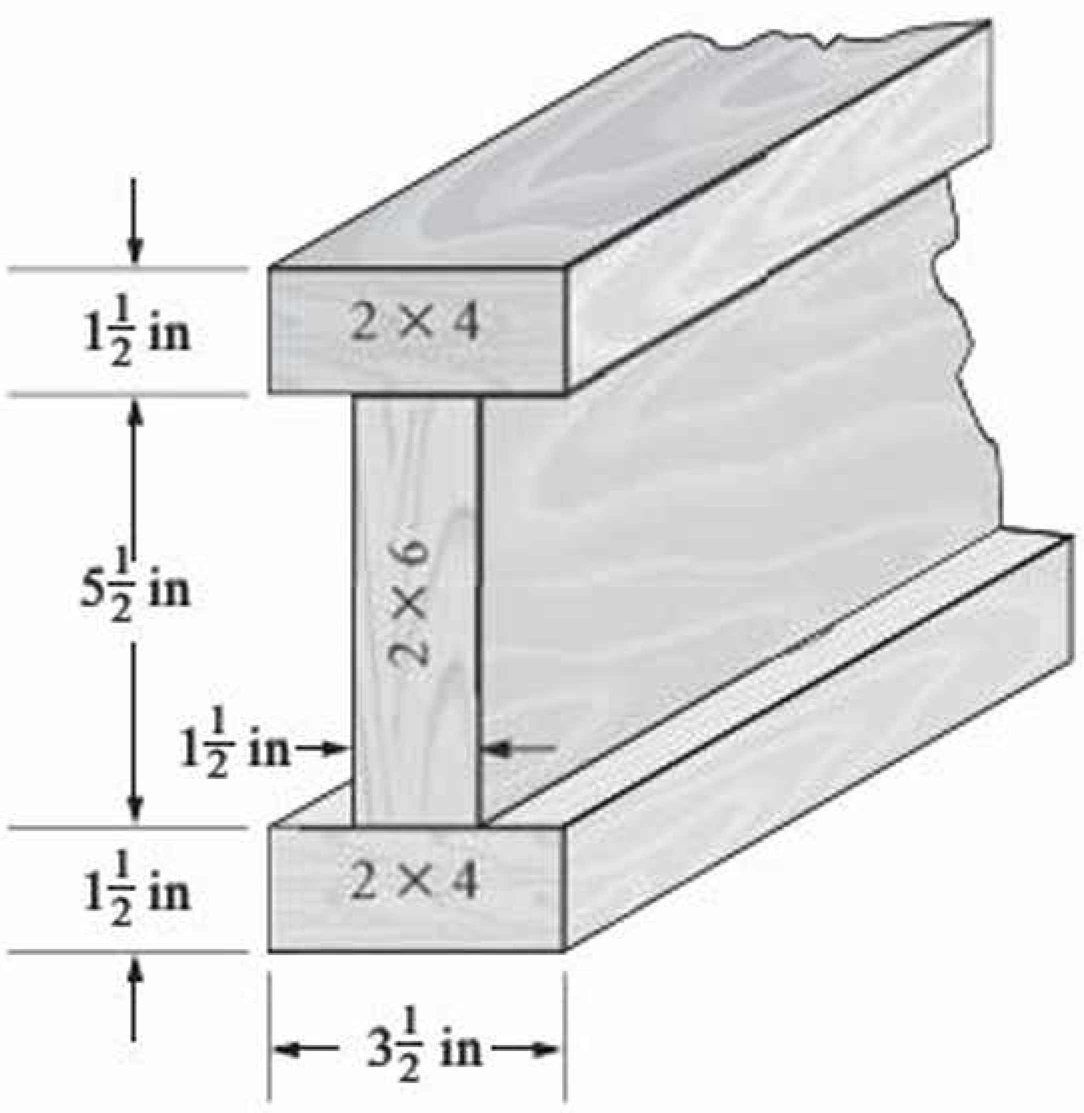


FIGURA P6–21

Las figuras de la P6–25 a la P6–46 son secciones de viga compuestas fabricadas de perfiles estructurales estándar de acero o aluminio.

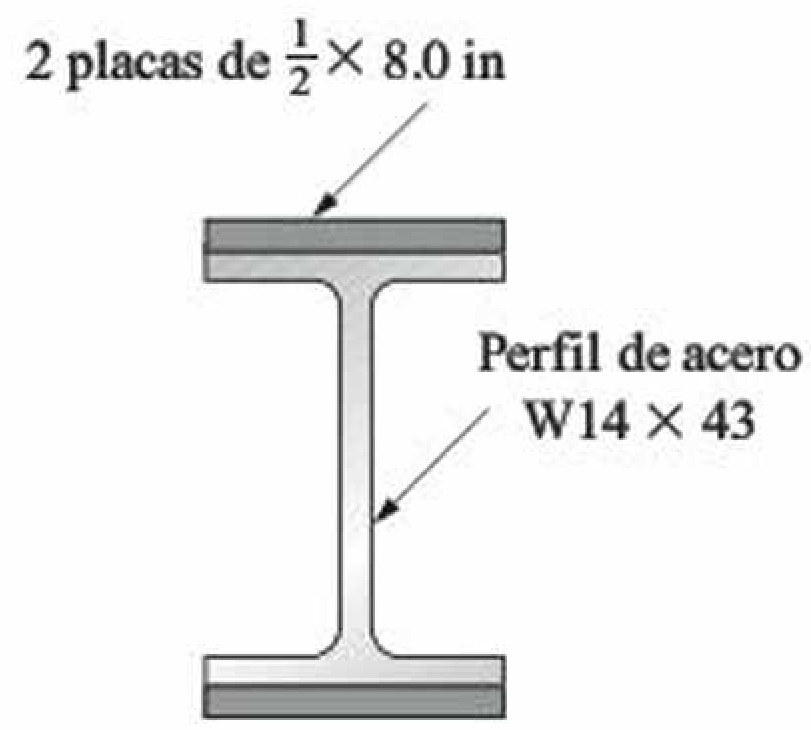


FIGURA P6–25

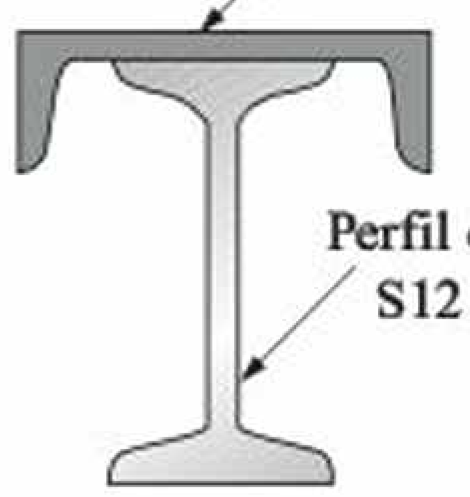


FIGURA P6–26

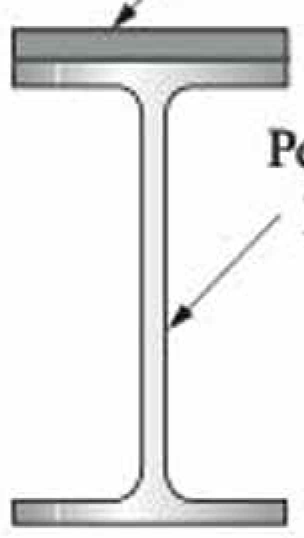


FIGURA P6–27

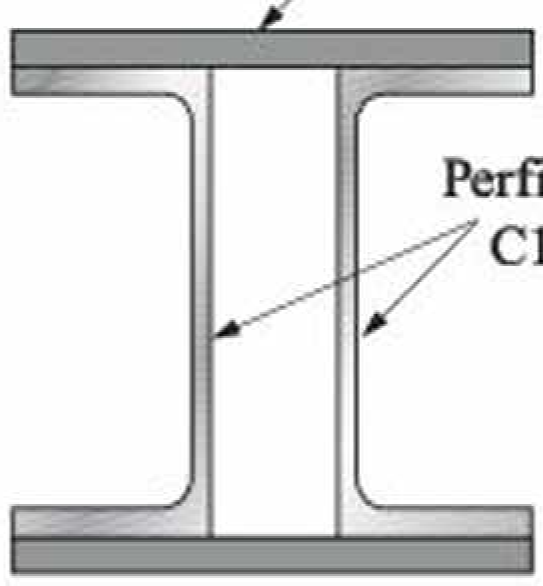


FIGURA P6–28

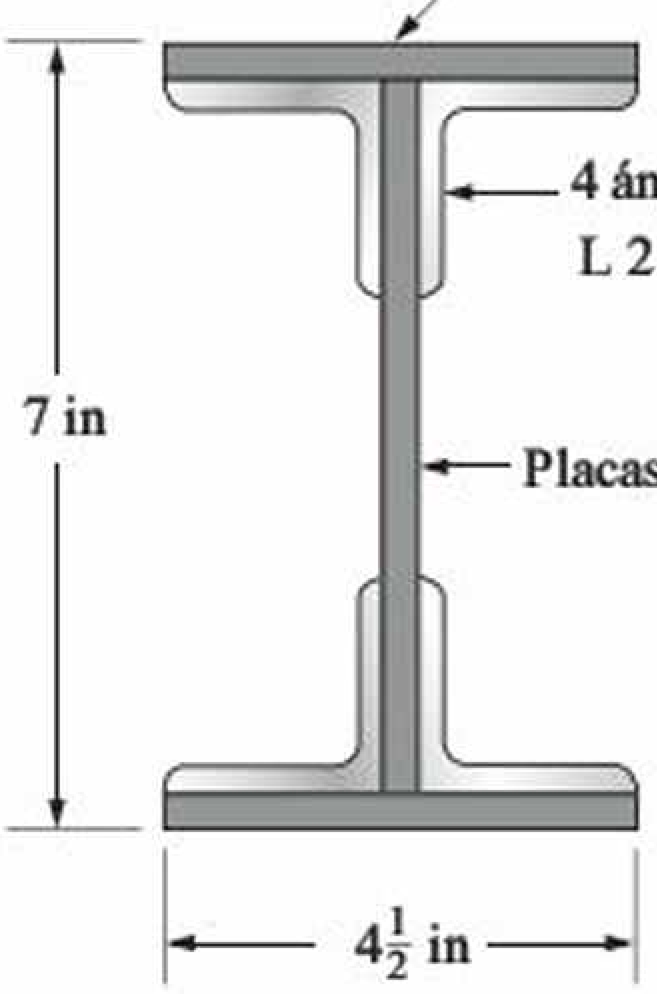


FIGURA P6–29

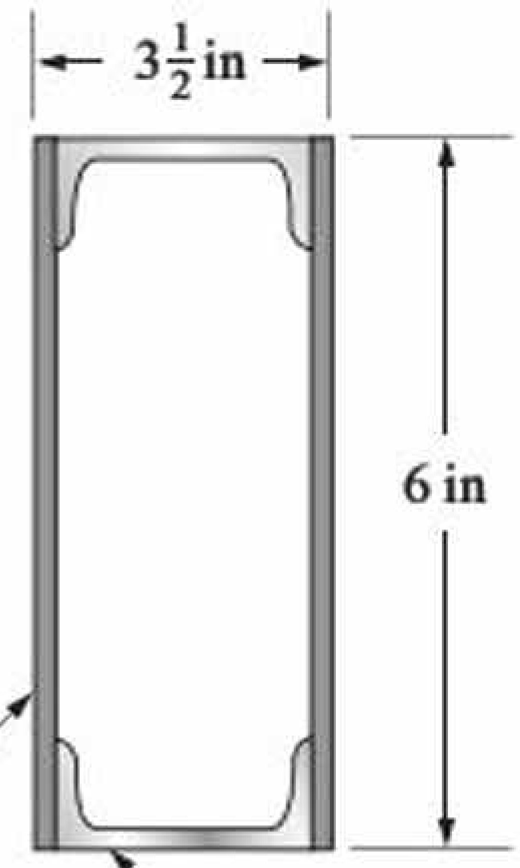


FIGURA P6–30

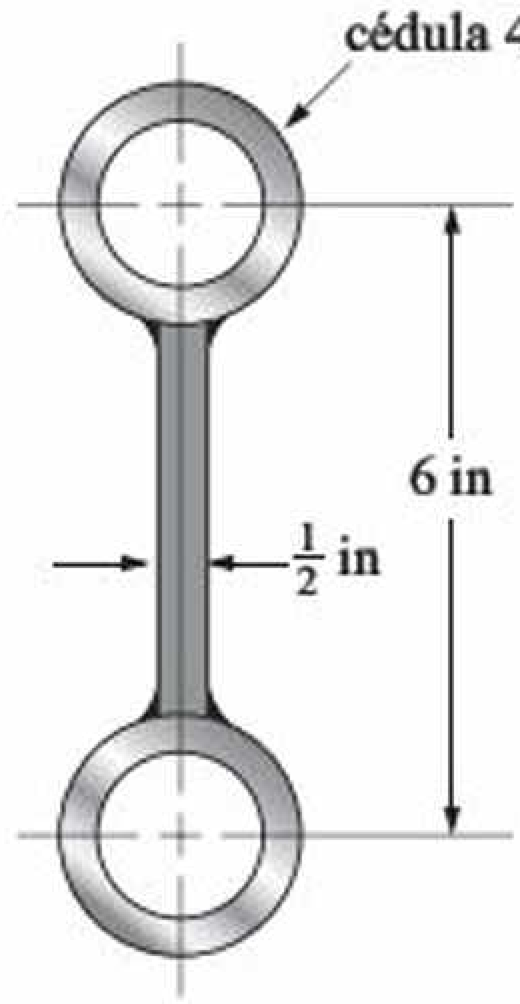


FIGURA P6–31

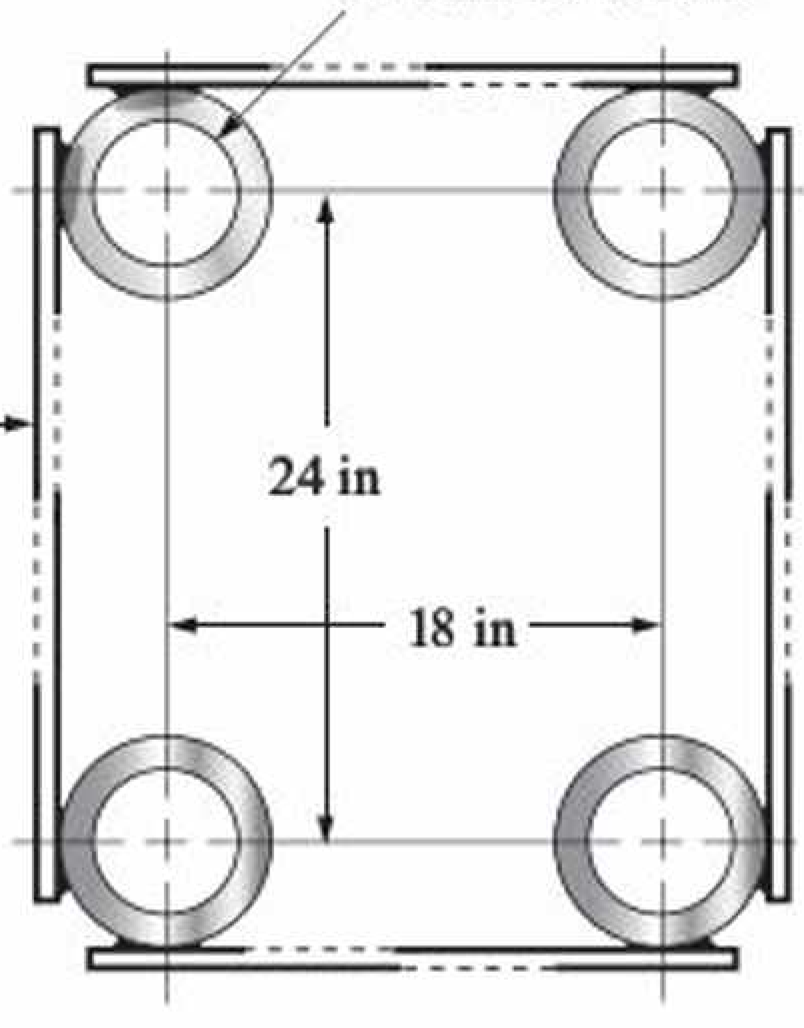


FIGURA P6–32

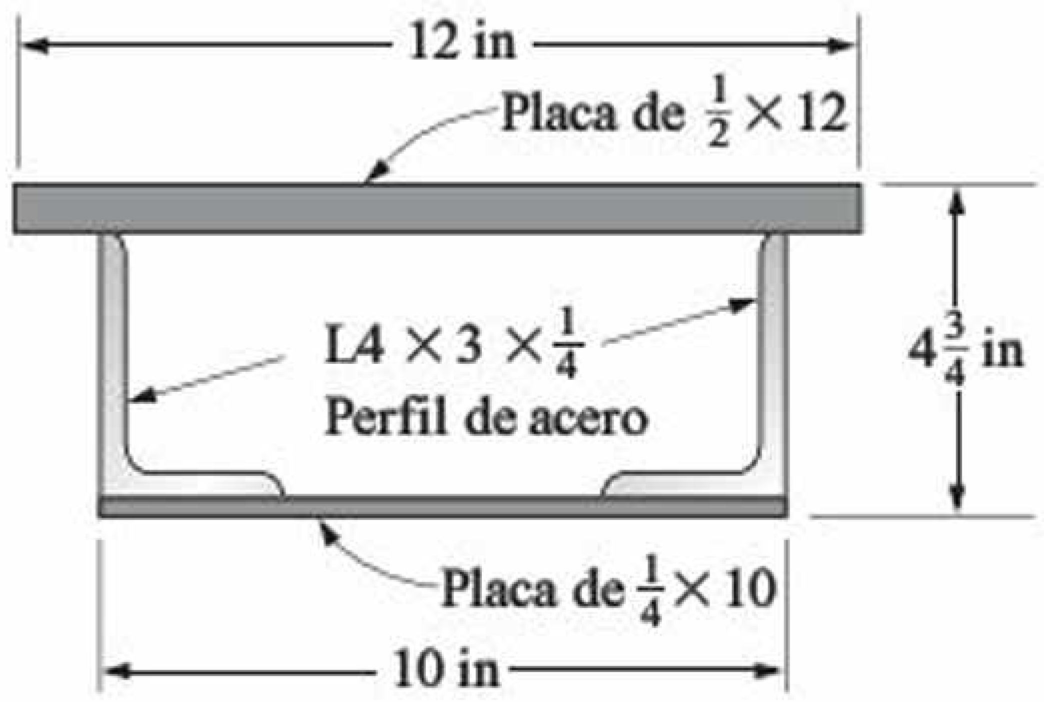


FIGURA P6–33

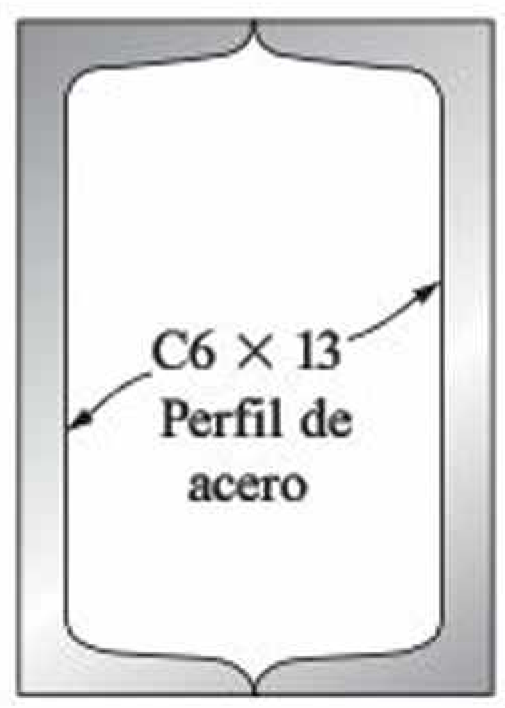


FIGURA P6–34

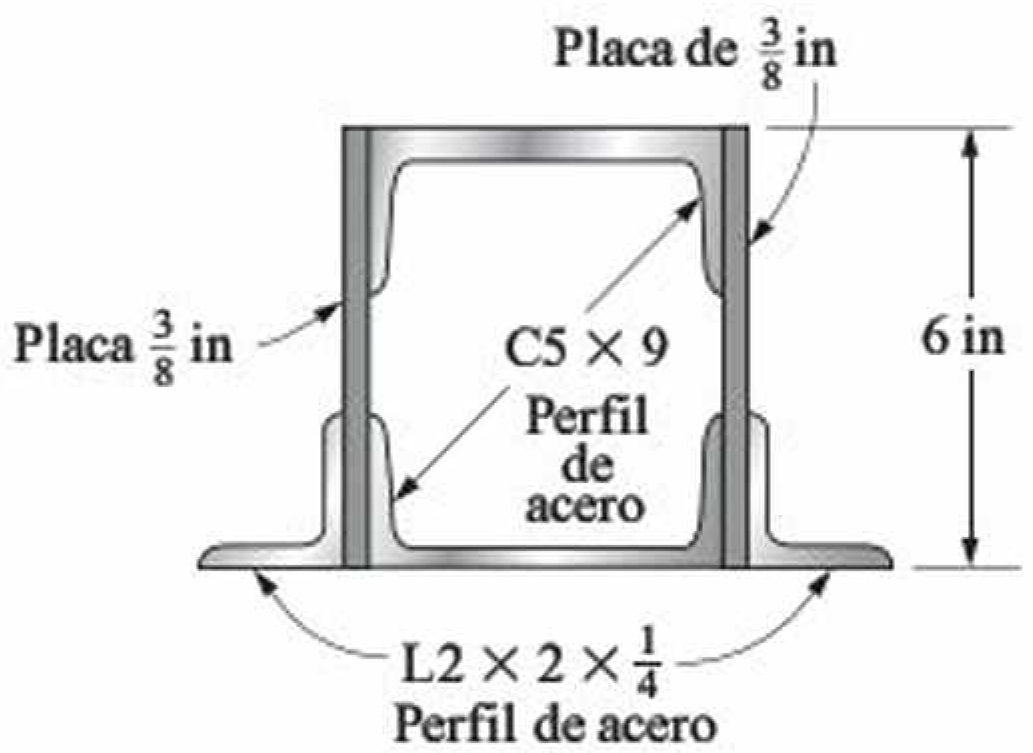


FIGURA P6–35

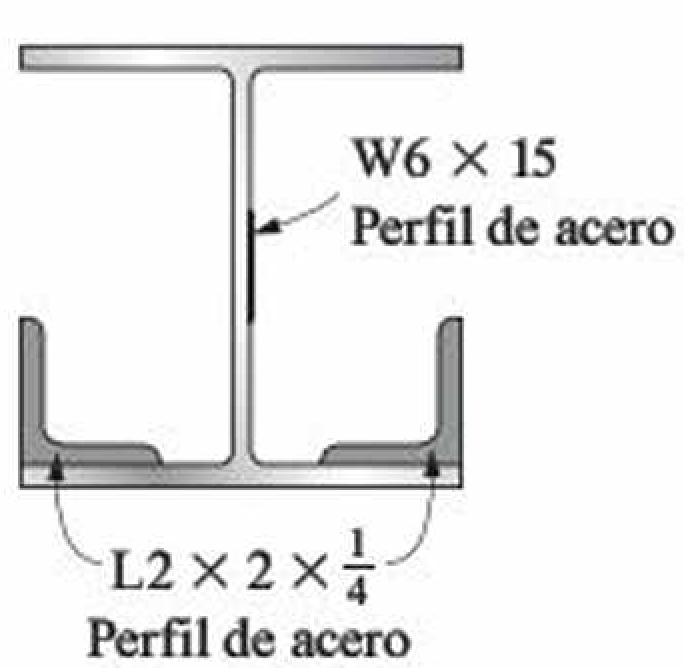


FIGURA P6–36

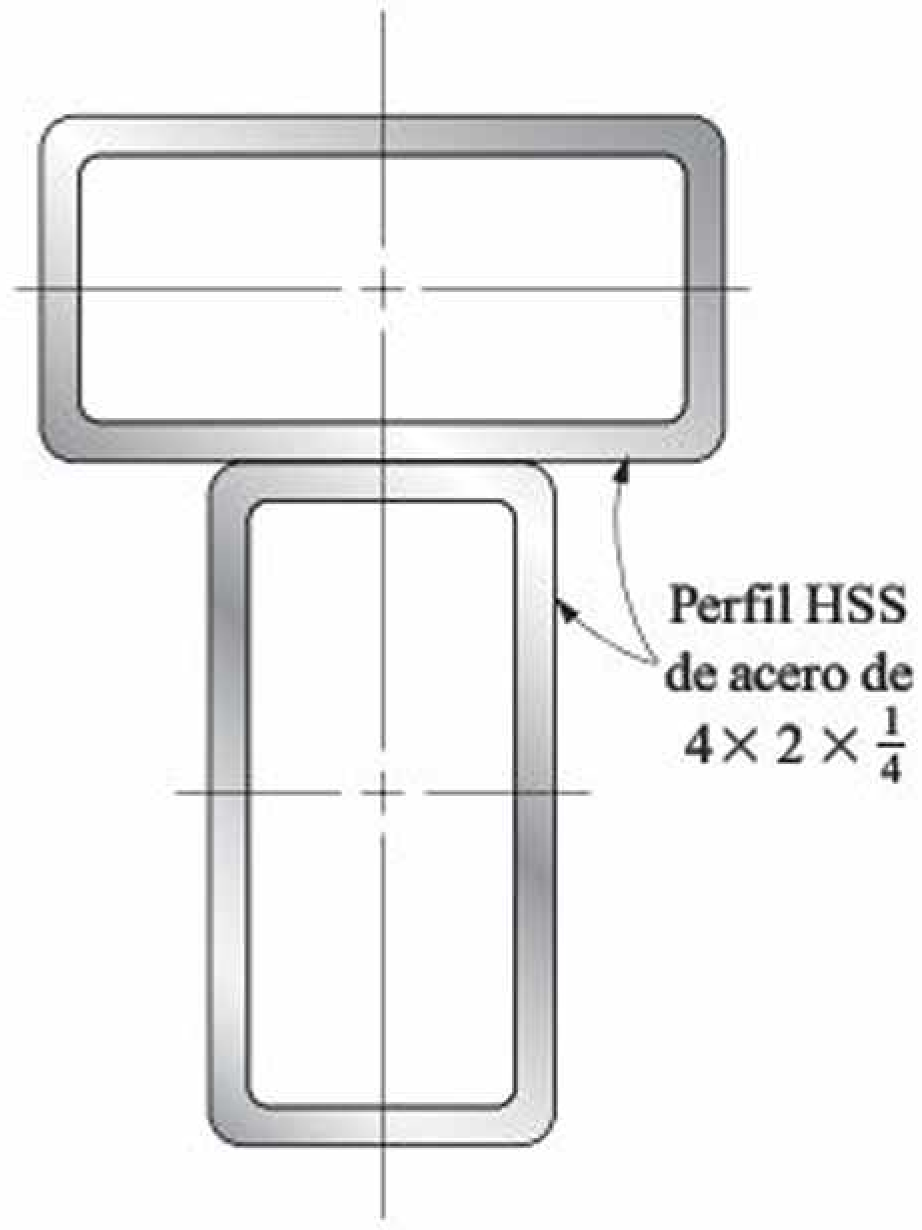


FIGURA P6–37

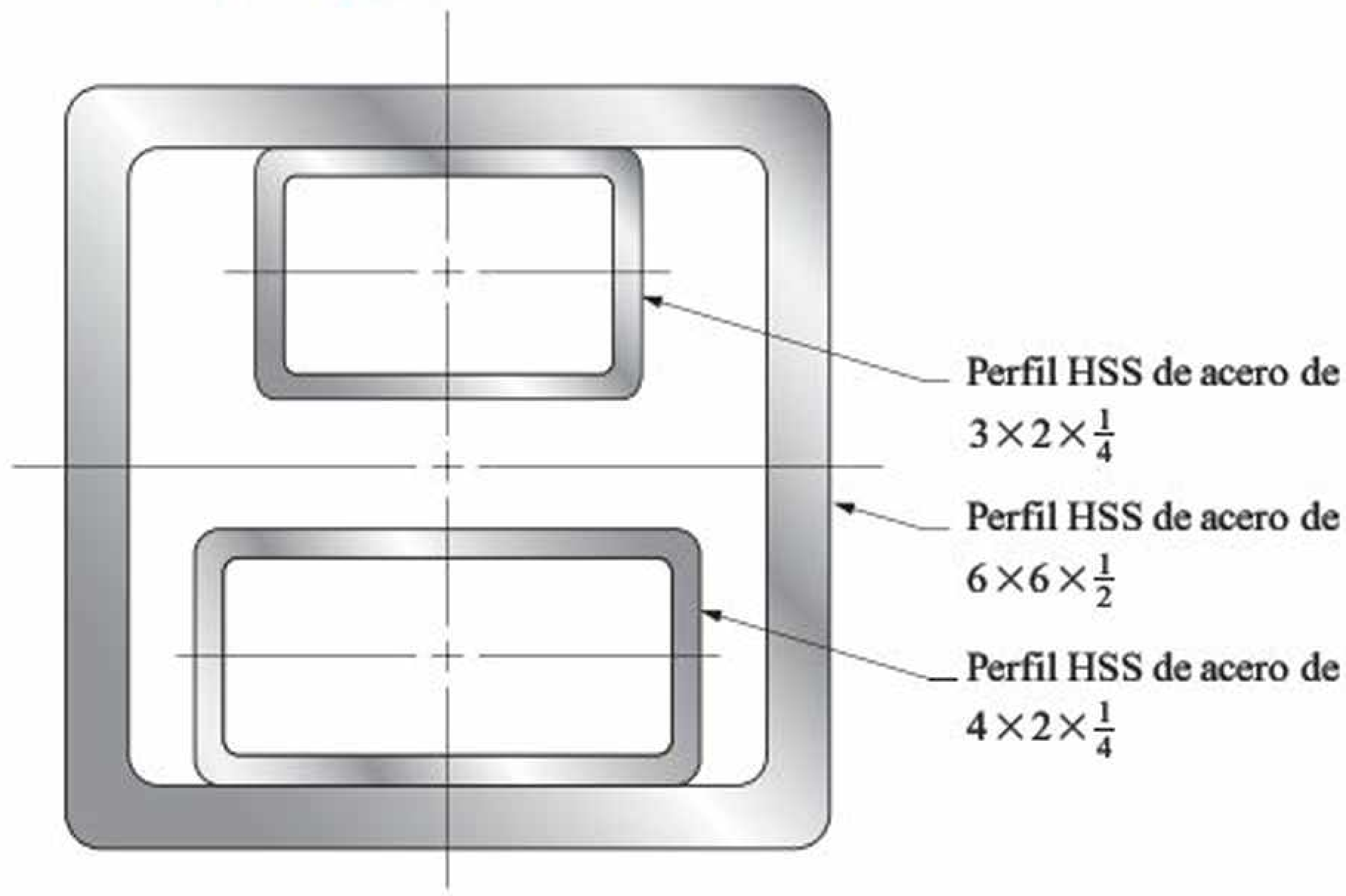


FIGURA P6–38

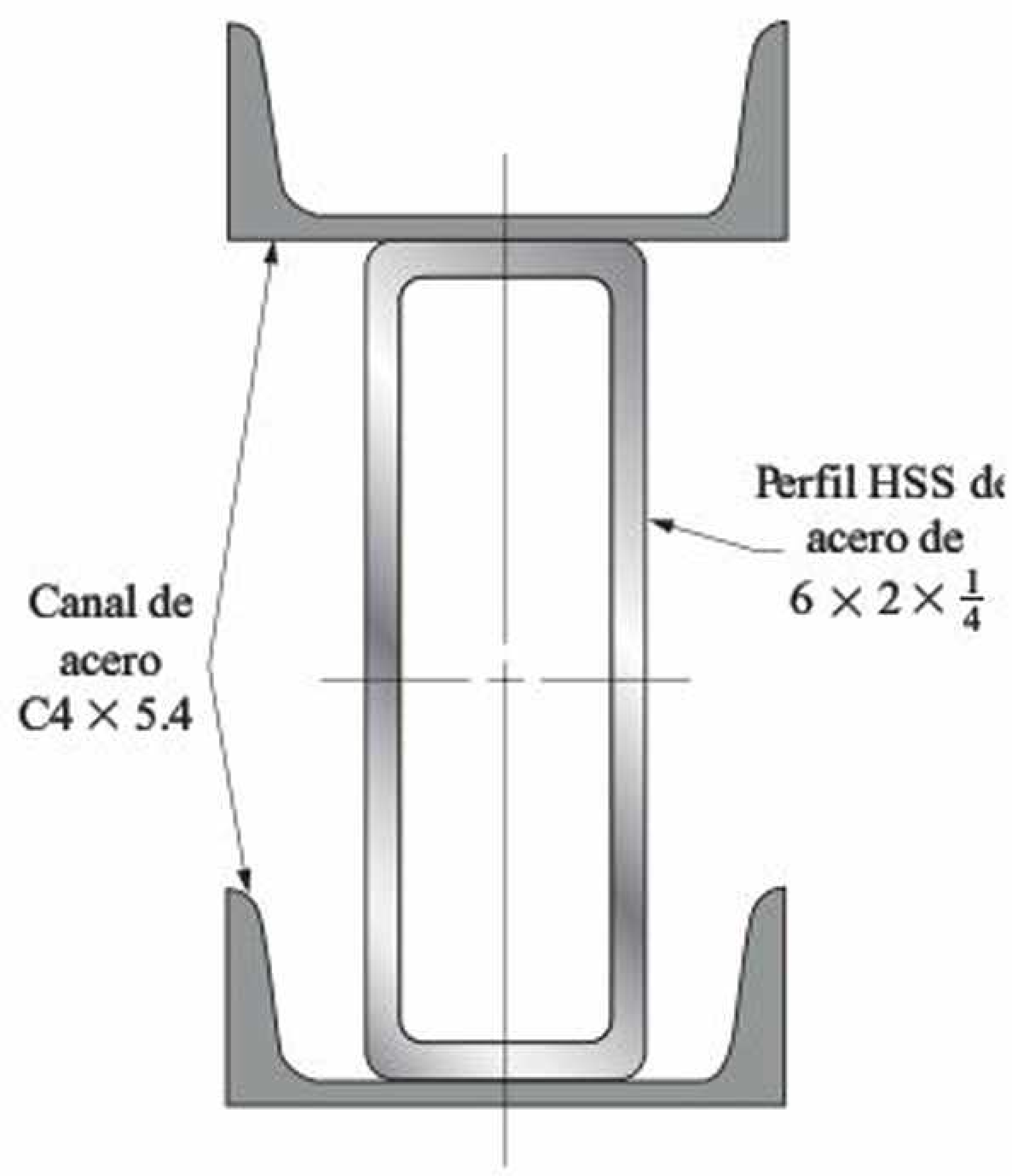


FIGURA P6–39

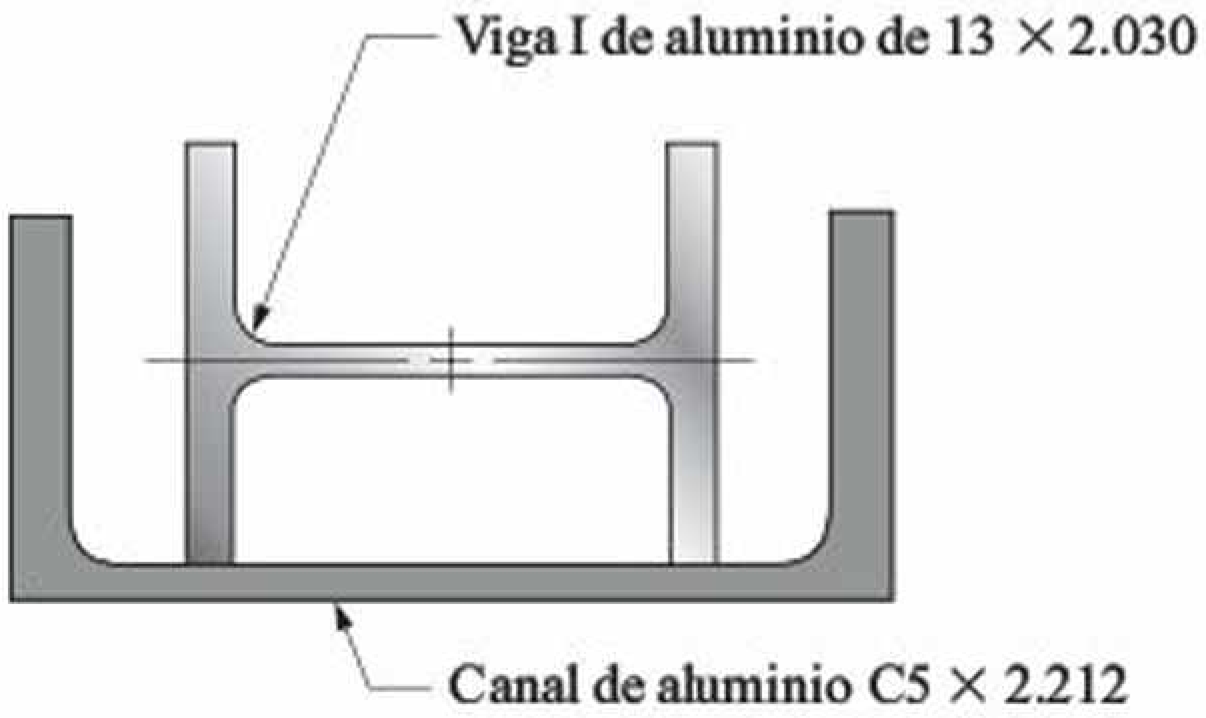


FIGURA P6–40

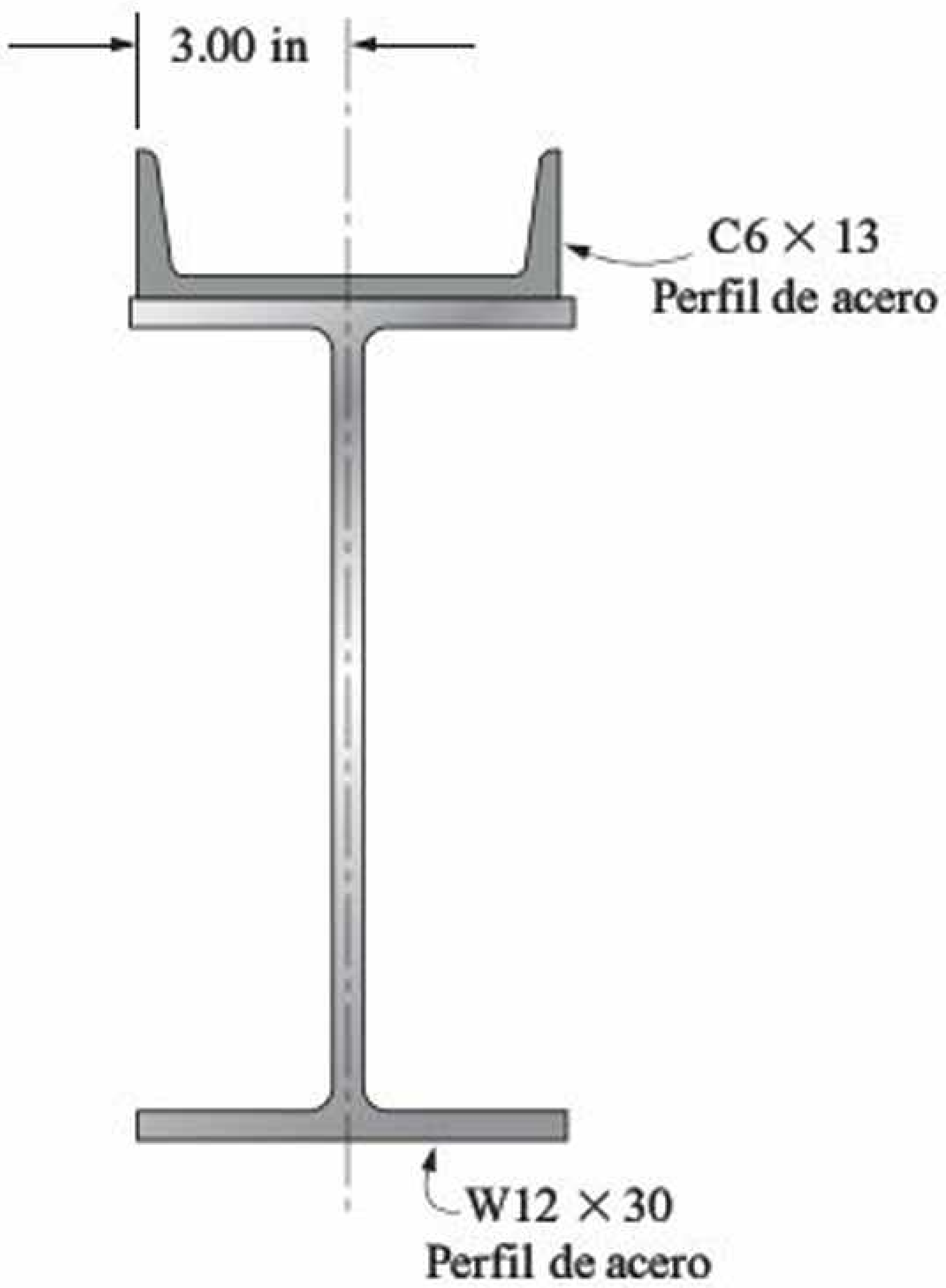


FIGURA P6–41

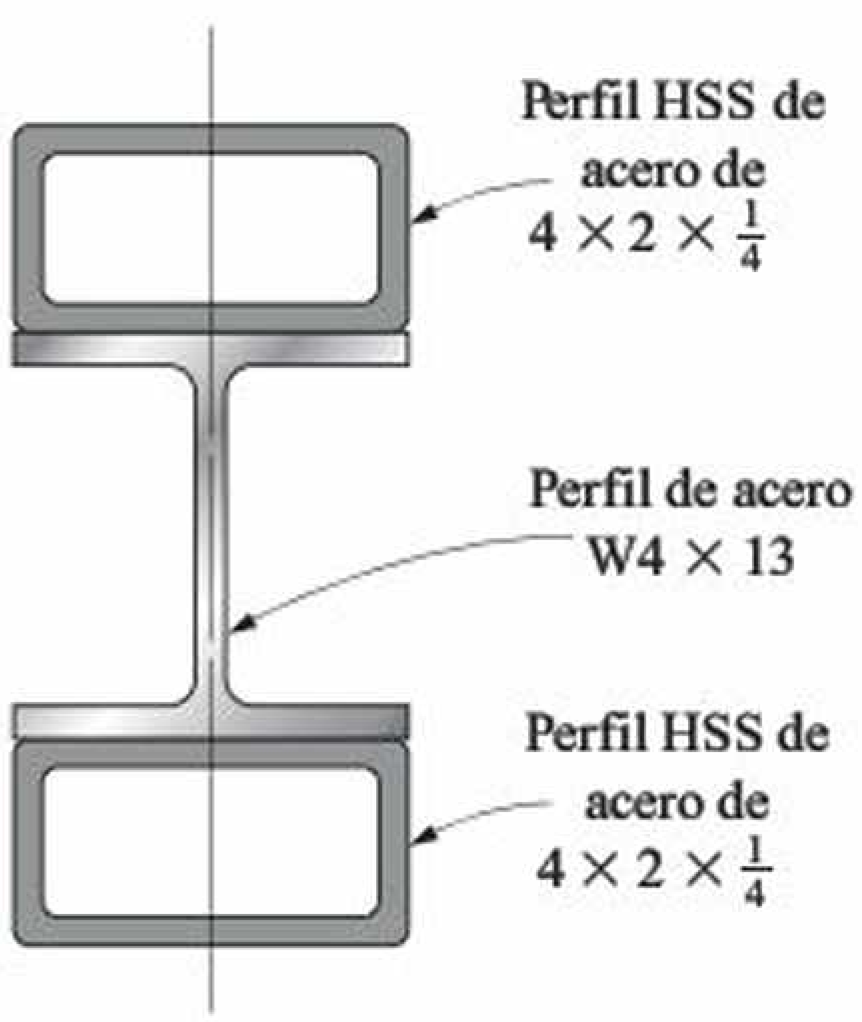


FIGURA P6–42

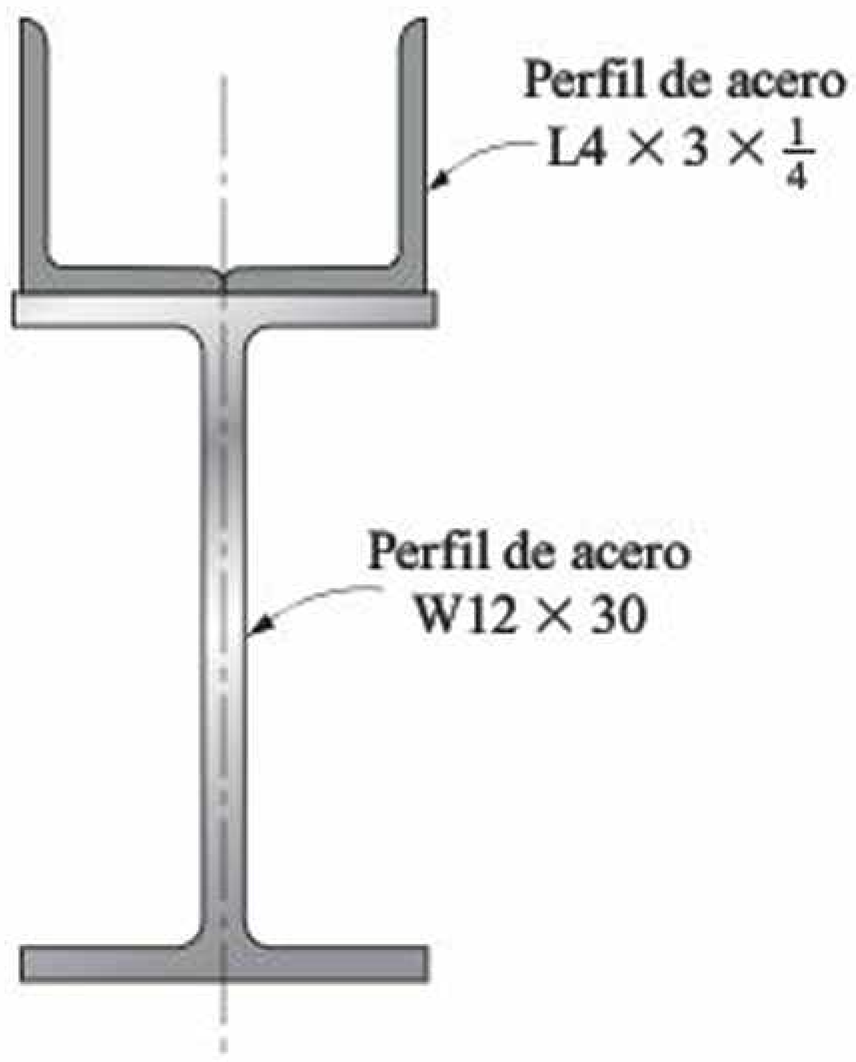


FIGURA P6–43

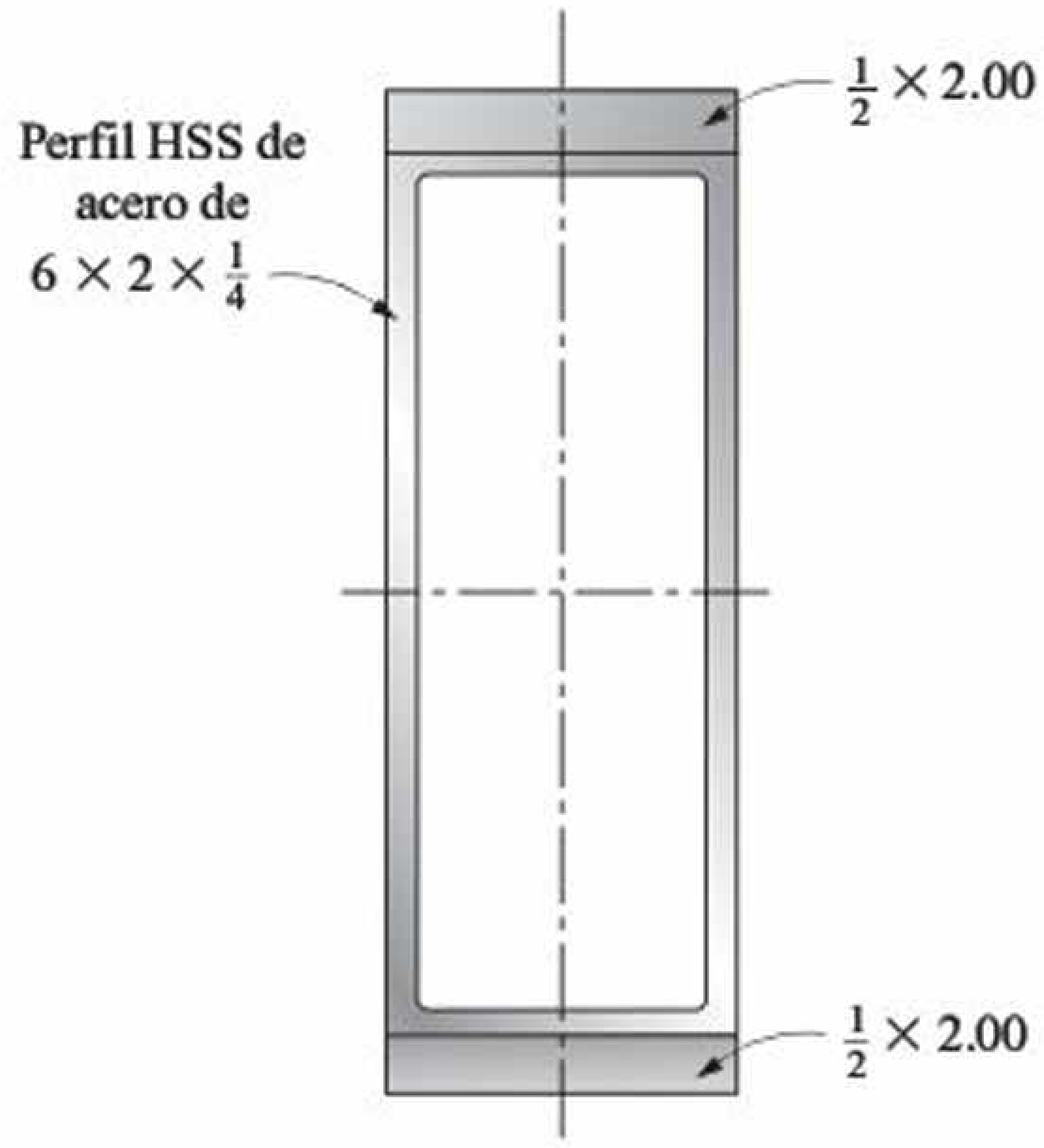


FIGURA P6–44

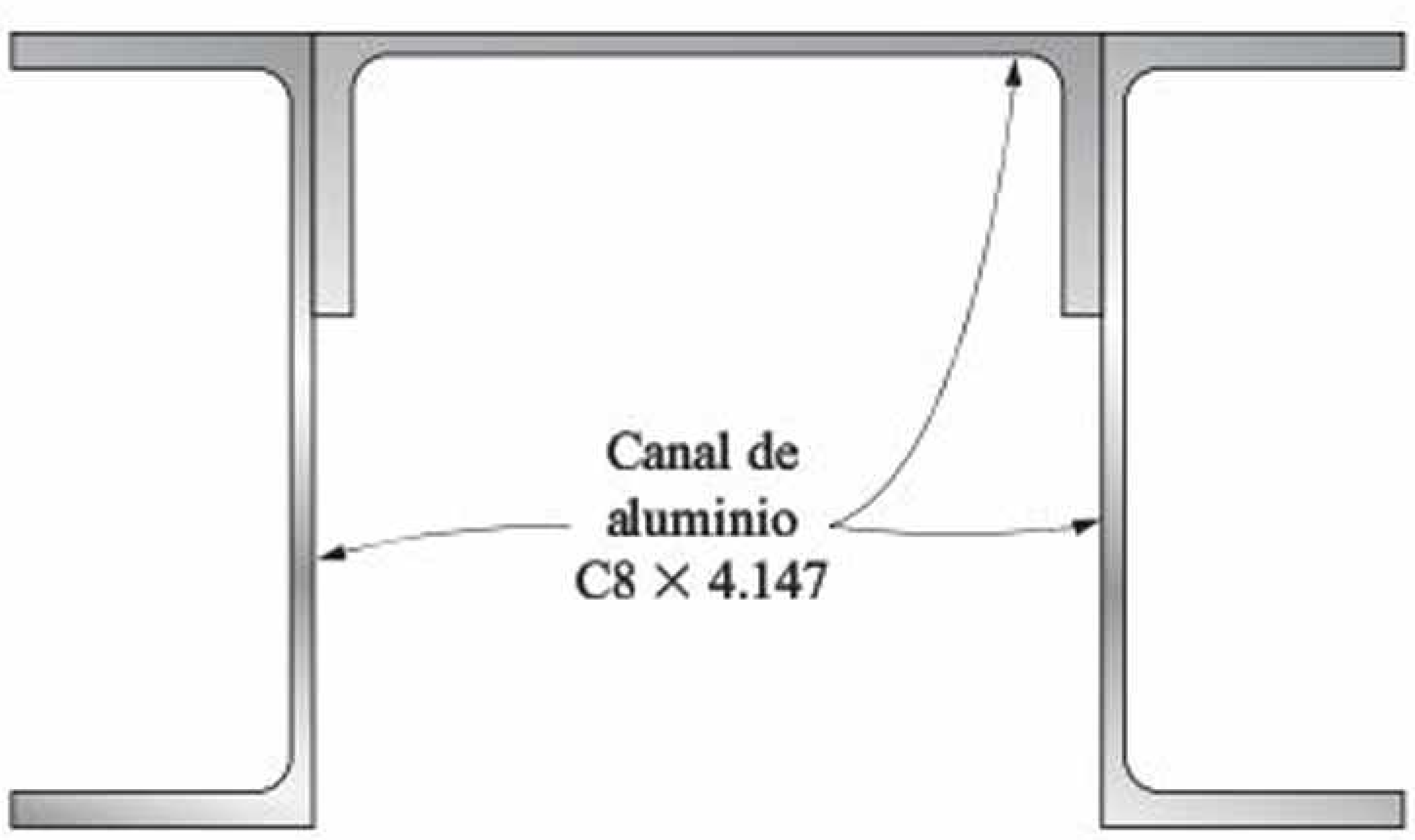


FIGURA P6–45

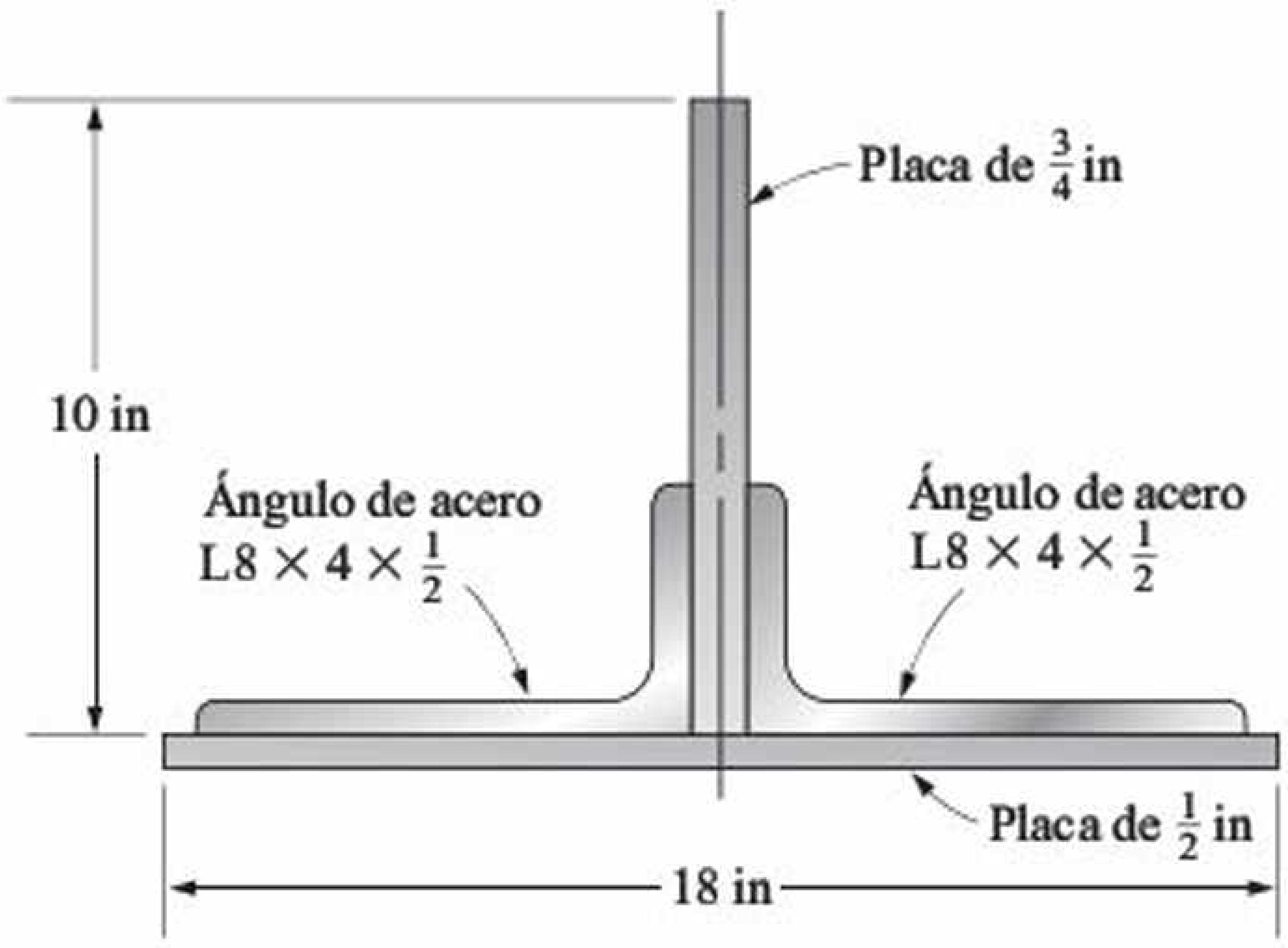


FIGURA P6–46

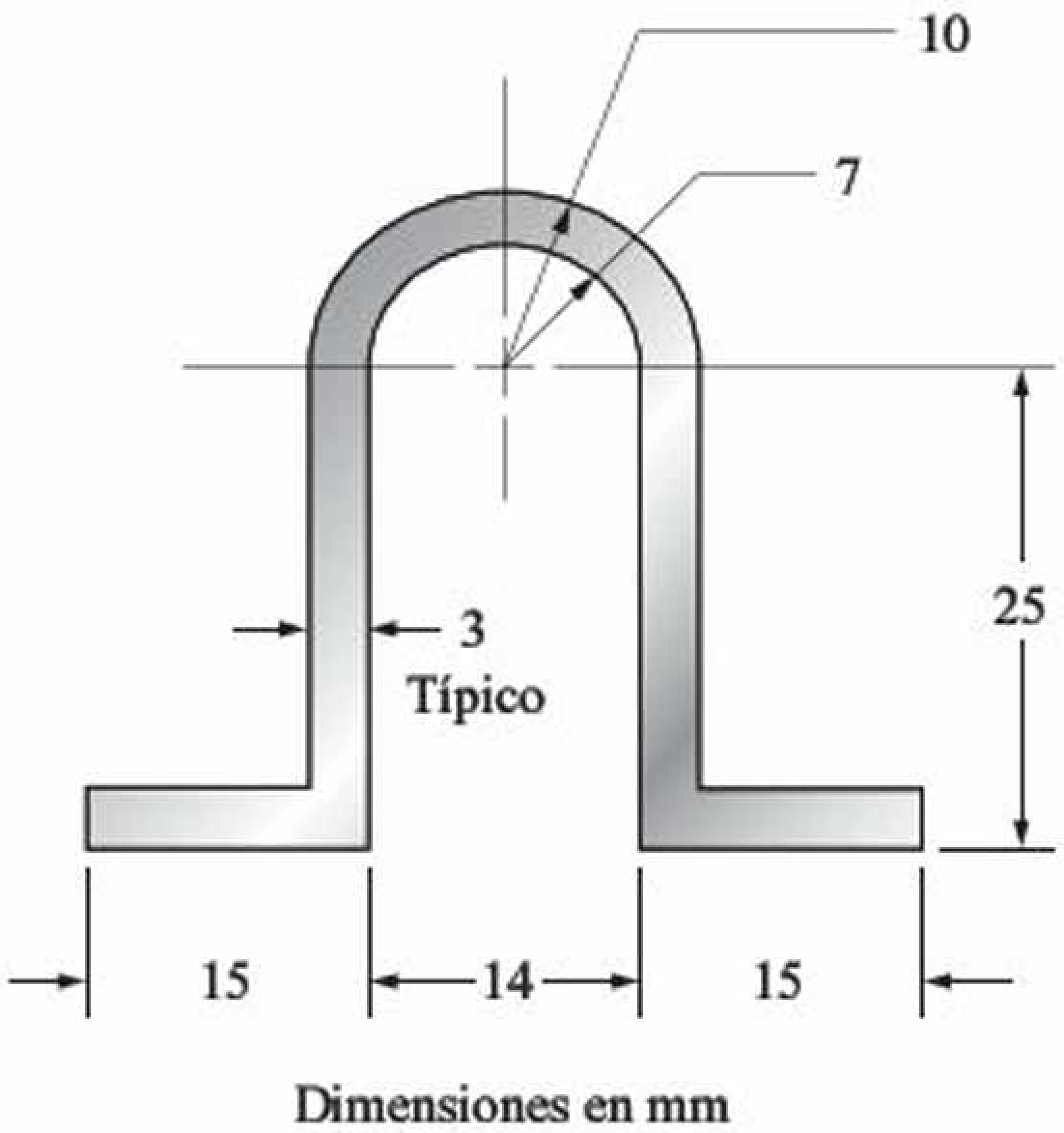


FIGURA P6–47

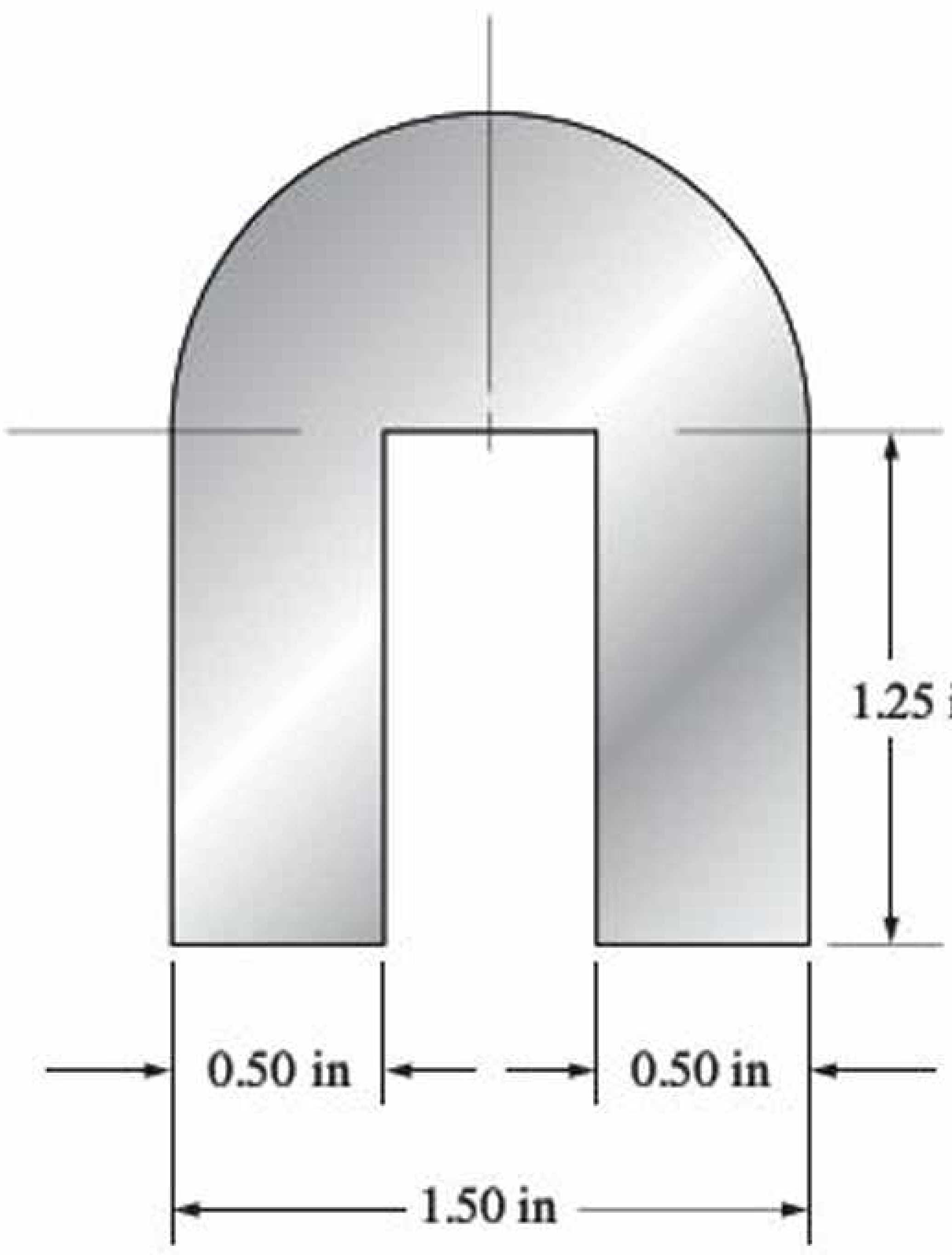


FIGURA P6–48

Radio de giro

En los problemas del 6–49 al 6–66, calcule el radio de giro del perfil que aparece en la figura indicada. Use el eje centroidal horizontal para el cálculo.

6–49	Use la figura P6–2.	6–58	Use la figura P6–14.
6–50	Use la figura P6–3.	6–59	Use la figura P6–15.
6–51	Use la figura P6–4.	6–60	Use la figura P6–16.
6–52	Use la figura P6–5.	6–61	Use la figura P6–17.
6–53	Use la figura P6–6.	6–62	Use la figura P6–21.
6–54	Use la figura P6–8.	6–63	Use la figura P6–22.
6–55	Use la figura P6–9.	6–64	Use la figura P6–23.
6–56	Use la figura P6–11.	6–65	Use la figura P6–24.
6–57	Use la figura P6–12.	6–66	Use la figura P6–25.

En los problemas del 6–67 al 6–81 calcule el radio de giro para el perfil indicado en la figura. Use el eje centroidal vertical para el cálculo.

6–67	Use la figura P6–2.	6–75	Use la figura P6–23.
6–68	Use la figura P6–3.	6–76	Use la figura P6–24.
6–69	Use la figura P6–4.	6–77	Use la figura P6–25.
6–70	Use la figura P6–5.	6–78	Use la figura P6–26.
6–71	Use la figura P6–16.	6–79	Use la figura P6–27.
6–72	Use la figura P6–17.	6–80	Use la figura P6–42.
6–73	Use la figura P6–21.	6–81	Use la figura P6–44.
6–74	Use la figura P6–22.		

Problemas de centroides y momentos con datos métricos SI

Los problemas siguientes se dan con datos métricos:

P6–4 a P6–13, P6–17 a P6–18, P6–47, P6–51 a P6–57, P6–61, P6–69 a P6–70, P6–72.

Existe la posibilidad de que surjan problemas adicionales en datos métricos SI si se hacen las siguientes sustituciones en las figuras previamente dadas. Los datos métricos SI para estas secciones se dan en las versiones de unidades SI de las tablas de apéndice de propiedades de los perfiles dados. Observe que se modificaron las dimensiones de las placas rectangulares para utilizar dimensiones métricas preferidas de espesor y ancho de acuerdo con los datos que aparecen en el apéndice A–2.

Figuras de la 6–21 a la P6–24: Use datos métricos tomados del apéndice A–4 para madera de dimensiones estándar.

Figura P6–25: Especifique una viga de acero W360 × 64 con placas de acero agregadas de 12 mm × 200 mm.

Figura P6–26: Especifique una viga de acero S300 × 74 con un canal de acero C300 × 37 agregado.

Figura P6–27: Especifique un viga I de aluminio I305 × 23.80 con placas agregadas de 12 mm × 180 mm.

Figura P6–28: Especifique un canal de aluminio C305 × 12.31 con placas agregadas de 12 mm × 250 mm.

Figura P6–29: Especifique ángulos de acero L51 × 51 × 9.5 con placas agregadas de 12 mm × 110 mm en las partes superior e inferior y alma de 12 mm × 150 mm.

Figura P6–30. Especifique canales de acero C80 × 8.9 con placas de acero laterales agregadas de 6 mm × 150 mm.

Figura P6–31: Especifique tubos de acero PIPE 38 STD con alma de 12 mm de espesor, 150 mm en el centro.

Figura P6–32: Especifique tubos de acero PIPE 75 STD separados entre sí 600 mm verticalmente y 450 mm horizontalmente.

Figura P6–33: Especifique ángulos de acero L102 × 76 × 6.4 con una placa de 12 mm × 300 mm agregada en la parte superior y una placa de 6.0 mm × 250 mm agregada en la parte inferior. Altura total = 120 mm.

Figura P6–34: Especifique canales de acero C150 × 19.3.

Figura P6–35: Especifique canales de acero C130 × 13 con placas laterales de 10 mm × 150 mm y ángulos de 151 × 51 × 6.4.

Figura P6–36: Especifique una viga de acero W150 × 22.5 con ángulos de acero de 151 × 51 × 6.4 agregados.

Figura P6–37: Especifique un tubo rectangular de acero HSS102 × 51 × 6.4.

Figura P6–38: Especifique un tubo de acero HSS 102 × 51 × 6.4 en lugar de uno HSS 4 × 2 × 1/4; HSS 76 × 51 × 6.4 en lugar de HSS 3 × 2 × 1/4; y HSS 152 × 152 × 12.7 en lugar de HSS 6 × 6 × 1/2.

Figura P6–39: Especifique HSS152 × 51 × 6.4 y C100 × 8.

Figura P6–40: Especifique un canal de aluminio C127 × 3.291 y una viga I de aluminio 176 × 3.021.

Figura P6–41: Especifique una viga de acero W310 × 44.5 con un canal de acero C150 × 19.3 agregado.

Figura P6–42: Especifique una viga de acero W100 × 19.3 con un tubo de acero HSS102 × 51 × 6.4 agregado.

Figura 6–43: Especifique una viga de acero W310 × 44.5 con dos ángulos de acero L102 × 76 × 6.4 agregados.

Figura P6–44: Especifique un tubo de acero HSS 152 × 51 × 6.4 y dos placas de 12 mm × 50 mm.

Figura P6–45: Especifique tres canales de aluminio C203 × 6.17.

Figura P6–46: Especifique dos canales de acero L203 × 102 × 12.7 con una placa de 12 mm × 450 mm agregada en la parte inferior y alma de 20 mm × 250 mm.

TAREAS PARA RESOLVER CON COMPUTADORA

1. Para un perfil I generalizado con patines superior e inferior iguales similar al mostrado en la figura P6–2, escriba un programa de computadora u hoja de cálculo para localizar el eje centroidal horizontal, calcular el área total y el momento de inercia con respecto al eje centroidal horizontal para cualquier número de dimensiones que el usuario introduzca.
2. Para el perfil T generalizado similar al mostrado en la figura P6–4, escriba un programa de computadora u hoja de cálculo para localizar el eje centroidal horizontal, calcular el área total y el momento de inercia con respecto al eje centroidal horizontal para cualquier número de dimensiones que el usuario ingrese.
3. Para el perfil I generalizado similar al mostrado en la figura P6–5, escriba un programa de computadora u hoja de cálculo para localizar el eje centroidal horizontal, calcular el área total y el momento de inercia con respecto al eje centroidal horizontal para cualquier número de dimensiones que el usuario ingrese.
4. Para cualquier perfil generalizado que pueda subdividirse en un cierto número de componentes rectangulares con ejes horizontales, escriba un programa de computadora u hoja de cálculo para localizar el eje centroidal horizontal, calcular el área total y el momento de inercia con respecto al eje centroidal horizontal para cualquier número de dimensiones que el usuario ingrese. Use el teorema de eje paralelo.
5. Para el perfil de copa generalizado similar al mostrado en la figura P6–11, escriba un programa de computadora u hoja de cálculo para localizar el eje centroidal horizontal, calcular el área total y el momento de inercia con respecto al eje centroidal horizontal para cualquier número de dimensiones que el usuario ingrese.
6. Dado un juego de tablones de madera de dimensiones estándar, calcule el área y el momento de inercia con respecto al eje centroidal horizontal del perfil de caja o cerrado generalizado similar al mostrado en la figura P6–22. El usuario deberá introducir los datos de los tablones.
7. Incremente la tarea 6 elaborando un archivo de datos que contenga las dimensiones de un juego de tablones de madera de dimensiones estándar. Luego permita que el usuario seleccione los tamaños de las placas superior e inferior y los dos miembros verticales para el perfil de caja mostrado en la figura P6–22.
8. Escriba un programa de computadora u hoja de cálculo para calcular el área y el momento de inercia con respecto al eje centroidal horizontal de un perfil W o S estándar con placas idénticas fijas tanto en el patín superior como en el inferior similar al mostrado en la figura 6–14. Los datos del perfil y las placas deberán ser introducidos por el usuario.
9. Incremente la tarea 8 elaborando una base de datos de perfiles W o S estándar. El usuario seleccionará un perfil. Los datos de las placas tienen que ser introducidos por el usuario.
10. Dado un perfil W o S estándar y su propiedades, escriba un programa de computadora u hoja de cálculo para calcular el espesor requerido para las placas fijas en los patines superior e inferior para producir un momento de inercia especificado de la sección compuesta, como se muestra en la figura 6–14. Haga que el ancho de las placas sea igual al ancho de los patines. Para la sección resultante, calcule el área total.
11. Con el programa de computadora u hoja de cálculo escrito para la tarea 1 para perfil I generalizado, analice su área (A), su momento de inercia (I) y su relación de I a A, conforme el

espesor varía dentro de un intervalo especificado. Observe que la relación de I a A es básicamente la misma que la relación de rigidez de una viga con este perfil a su peso, porque la deflexión de una viga es inversamente proporcional al momento de inercia y el peso de la viga es proporcional a su área de sección transversal.

12. Repita la tarea 11 pero varíe la altura de la sección mientras que todas las demás dimensiones permanecen iguales.

13. Repita la tarea 11 pero varíe el espesor del patín mientras que todas las demás dimensiones permanecen iguales.

14. Repita la tarea 11 pero varíe el ancho del patín mientras que todas las demás dimensiones permanecen iguales.

15. Escriba un programa de computadora u hoja de cálculo para calcular el momento de inercia con respecto al eje centroidal horizontal para cualquier perfil compuesto que pueda dividirse en partes rectangulares con sus lados perpendiculares y paralelos al eje horizontal, con el método descrito en la sección 6–9. Produzca datos de salida del programa para cualquiera de los perfiles mostrados en la figuras de la P6–1 a la P6–15 y de la P6–21 a la P6–24.

7

Esfuerzo debido a flexión

La imagen completa y actividad

7–1 Objetivos de este capítulo

7–2 Fórmula de flexión

7–3 Condiciones para el uso de la fórmula de flexión

7–4 Distribución del esfuerzo en la sección transversal de una viga

7–5 Derivación de la fórmula de flexión

7–6 Aplicaciones: análisis de vigas

7–7 Aplicaciones: diseño de vigas y esfuerzos de diseño

7–8 Módulo de sección y procedimientos de diseño

7–9 Concentraciones de esfuerzo

7–10 Centro de flexión o centro de cortante

7–11 Perfiles preferidos para secciones transversales de vigas

7–12 Diseño de vigas hechas de materiales compuestos

La imagen completa

Esfuerzo debido a flexión

Mapa de análisis

- Las vigas se definieron en el capítulo 5 como miembros sometidos a carga en los cuales las cargas actúan perpendiculares a su eje largo.
- Aprendió a determinar el diagrama del momento flexionante de vigas sometidas a varios tipos de carga.
- El esfuerzo debido a flexión en la viga es directamente proporcional al momento flexionante.
- Las propiedades del área de la sección transversal de una viga (dimensiones totales, localización del centroide, momento de inercia del área de la sección transversa y módulo de sección) desempeñan roles importantes en la magnitud del esfuerzo flexionante. En general, una sección transversal eficiente de una viga tiene un momento de inercia elevado con respecto a su área y, por consiguiente, tiene un bajo peso.
- En este capítulo desarrollará su habilidad de determinar el esfuerzo debido a flexión y diseñará vigas eficientes.

Actividad Capítulo 7

Reúna algunos materiales que pueda utilizar para demostrar las diversas formas en las que una viga puede fallar. Las actividades de capítulos anteriores, en particular 1, 5 y 6, requerían recopilar un conjunto similar de vigas muestra y algunas de ellas pudieran ser útiles aquí. Las instalará en un dispositivo simple que las sostenga en dos puntos y permita aplicar una carga. Por otra parte, podría sujetar la viga por un extremo a una superficie sólida y cargarla como voladizo. La figura 7–1 muestra un dispositivo de carga comercialmente disponible que serviría muy bien.

Las vigas que reúna servirán para demostrar algunos de los seis modos de falla ilustrados en la figura 7–2, brevemente descritos aquí. Las vigas se destruirán durante las pruebas, así que utilice muestras baratas, simples y pequeñas.

FIGURA 7–1 Dispositivo para cargar una viga (Fuente: P. A. Hilton Ltd./Hi-Tech Hampshire, Inglaterra)

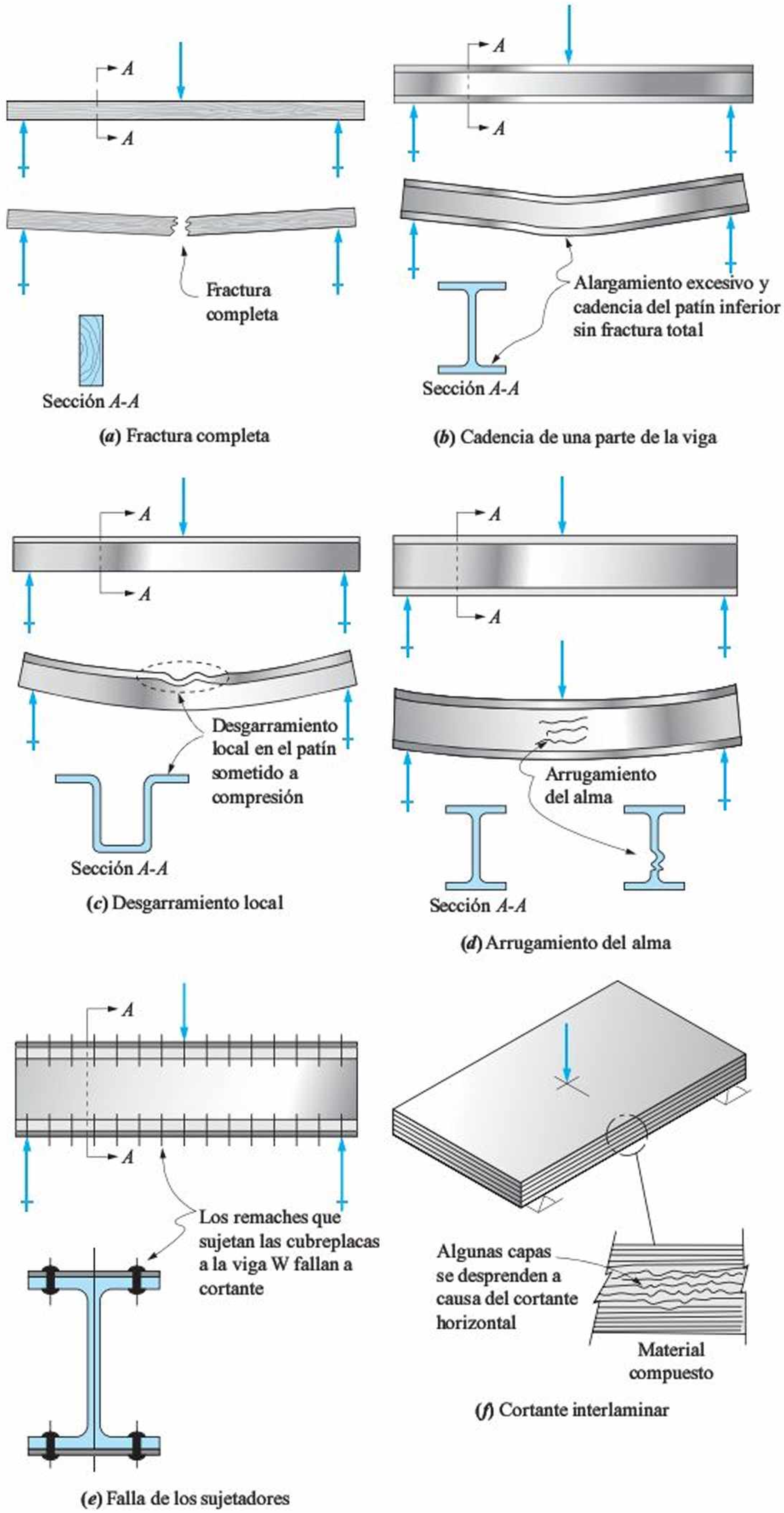


(*a*) Viga en voladizo



(*b*) Viga simplemente apoyada

FIGURA 7–2 Modos de falla de vigas.



1. ***Fractura completa***—Figura 7–2(a). El material deberá ser algo frágil y la sección transversal deberá ser suficientemente pequeña para que se rompa con cargas de bajas a moderadas. El gis es un ejemplo clásico de ese tipo de viga. También podría utilizar un lápiz de madera, una pequeña clavija de madera o partes pequeñas hechas de algunas aleaciones de aluminio, zinc o magnesio, en particular las fundidas. La viga se romperá por completo y en general de forma repentina.
2. ***Cedencia de una parte de la viga***—Figura 7–2(b). El material deberá ser dúctil de modo que se deforme antes de que se rompa. Algunos ejemplos son varillas de metal pequeñas con secciones transversales de varias formas, vigas de metal planas delgadas y pequeñas vigas de plástico. Deberá detener la carga hasta de que aparezca una cedencia significativa.
3. ***Desgarramiento local***—Figura 7–2(c). Este tipo de falla en general ocurre cuando los patines delgados extendidos de una viga se someten a un esfuerzo de compresión como el producido por una carga dirigida hacia abajo sobre la cara superior de una viga simplemente apoyada o sobre la cara inferior de una viga en voladizo. Deberá buscar una viga de metal delgada laminada, tal como una varilla de cortina, por ejemplo.
4. ***Arrugamiento o plegamiento del alma***—Figura 7–2(d): Un perfil I o una viga de caja o cerrada relativamente alta con almas o costados verticales delgados puede fallar por plegamiento. Este tipo de falla puede ser difícil de encontrar, pero los perfiles metálicos delgados laminados son buenos ejemplos.
5. ***Falla de sujetador***—Figura 7–2(e): Las vigas compuestas hechas de dos o más partes pueden fallar por corte de los sujetadores tales como remaches, tornillos, pernos, clavijas o clavos, o por excederse la resistencia al cortante de adhesivos, juntas soldadas o soldaduras.
6. ***Cortante interlaminar***—Figura 7–2(f): Los componentes hechos de materiales compuestos tales como fibra de vidrio, carbón/epoxy o compuestos de matriz metálica con frecuencia se forman con capas impregnadas con el material de matriz curado, de modo que forme una estructura cohesiva. Un modo de falla importante de estos materiales es la separación de las capas cuando se someten a carga tal como flexionando un panel o una viga. Este tipo se falla se llama *cortante interlaminar*. Trate de encontrar una viga como ésa, cárguela y esté al pendiente de la separación de las capas.

Durante estas demostraciones verá que algunas de las fallas de las vigas, en realidad son *fallas por flexión*, las que se analizan en este capítulo, mientras que algunas otras son *fallas por cortante*, analizadas en el siguiente. El tipo de falla que en realidad ocurre depende del patrón de carga, de los materiales de los cuales esté hecha la viga, de la forma de la sección transversal y de las dimensiones reales de dicha forma.

7–1 OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

Después de completar este capítulo, usted deberá ser capaz de:

1. Aprender el enunciado de la *fórmula de flexión* y aplicarla apropiadamente para calcular el esfuerzo máximo causado por flexión en las fibras externas de la viga.
2. Calcular el esfuerzo en un punto cualquiera de la sección transversal de la viga y describir la variación del esfuerzo con la posición en la viga.
3. Entender las condiciones para el uso de la fórmula de flexión.
4. Reconocer que es necesario garantizar que la viga no se flexione bajo la influencia de las cargas flexionantes.

5. Definir el *eje neutro* y entender que coincide con el eje centroidal de la sección transversal de la viga.
6. Entender la derivación de la fórmula de flexión y el efecto del momento de inercia en el esfuerzo flexionante.
7. Determinar el esfuerzo de diseño apropiado a usarse en el diseño de vigas.
8. Diseñar vigas que soporten con seguridad una carga dada.
9. Definir el *módulo de sección* de la sección transversal de la viga.
10. Seleccionar perfiles estructurales estándar para usarlos como vigas.
11. Reconocer cuándo es necesario utilizar factores de concentración de esfuerzo en el análisis de esfuerzo causado por flexión y aplicar factores apropiados como se debe.
12. Definir el *centro de flexión* y describir su uso apropiado en el análisis de esfuerzo causado por flexión.

7–2 FÓRMULA DE FLEXIÓN

Las vigas deben diseñarse para que sean seguras. Cuando se aplican cargas perpendiculares al eje mayor de una viga, en su interior se desarrollan momentos flexionantes que hacen que se flexione. Observe una viga esbelta. La forma característicamente curva mostrada en la figura 7–3 es evidente. Las fibras de la viga próximas a su cara superior se acortan y se ven sometidas a compresión. Por otra parte, las fibras próximas a la cara inferior se alargan y se ven sometidas a tensión.

Si se considera un segmento corto de la viga de la figura 7–3, en la figura 7–4 mostramos cómo cambiaría su forma por la influencia de los momentos flexionantes internos. En la parte (a) el segmento tiene su forma recta original cuando no está sometido a carga; la parte (b) muestra el mismo segmento deformado por la aplicación de los momentos flexionantes. Las líneas que originalmente eran horizontales se curvaron. Los extremos del segmento, que inicialmente eran rectos y verticales, permanecen rectos. No obstante, ahora están inclinados, por haber girado en torno al eje centroidal de la sección transversal de la viga. El resultado es que el material a lo largo de la cara superior se somete a compresión y, por consiguiente, se acorta. Asimismo, el material a lo largo de la cara inferior se somete a tensión y se alarga

De hecho, todo el material arriba del eje centroidal se ve sometido a compresión. El acortamiento máximo (deformación por compresión) ocurre en la cara superior. Como el esfuerzo es proporcional a la deformación, entonces se deduce que el esfuerzo de compresión máximo ocurre en la cara superior. Asimismo el material debajo el eje centroidal se ve sometido a tensión. El alargamiento máximo (deformación por tensión) ocurre en la cara inferior y produce el esfuerzo de tensión máximo.

También podemos deducir que si la parte superior de la viga está sometida a compresión y la inferior a tensión, entonces debe haber algún lugar en la viga donde no haya ninguna deformación. Ese lugar se llama *eje neutro* y más adelante se demostrará que coincide con el *eje centroidal* de la viga. En suma, podemos concluir que,

En una viga sometida a un momento flexionante del tipo mostrado en la figura 7–4, el material sobre el eje centroidal estará a compresión con el esfuerzo de compresión máximo en la cara superior.

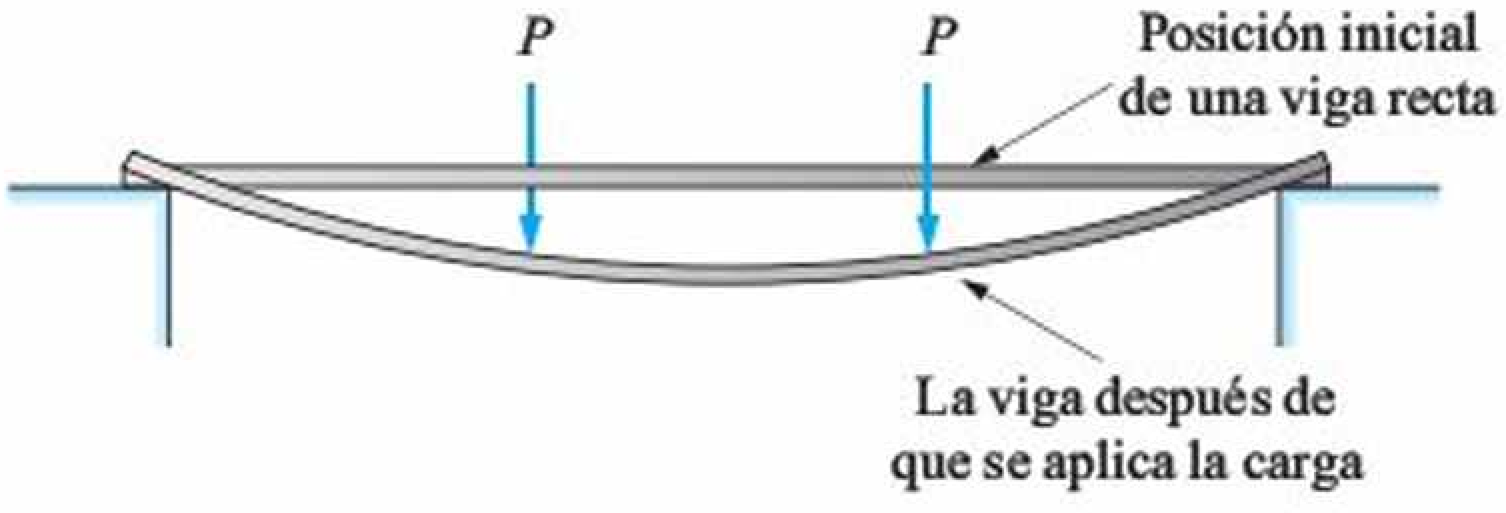
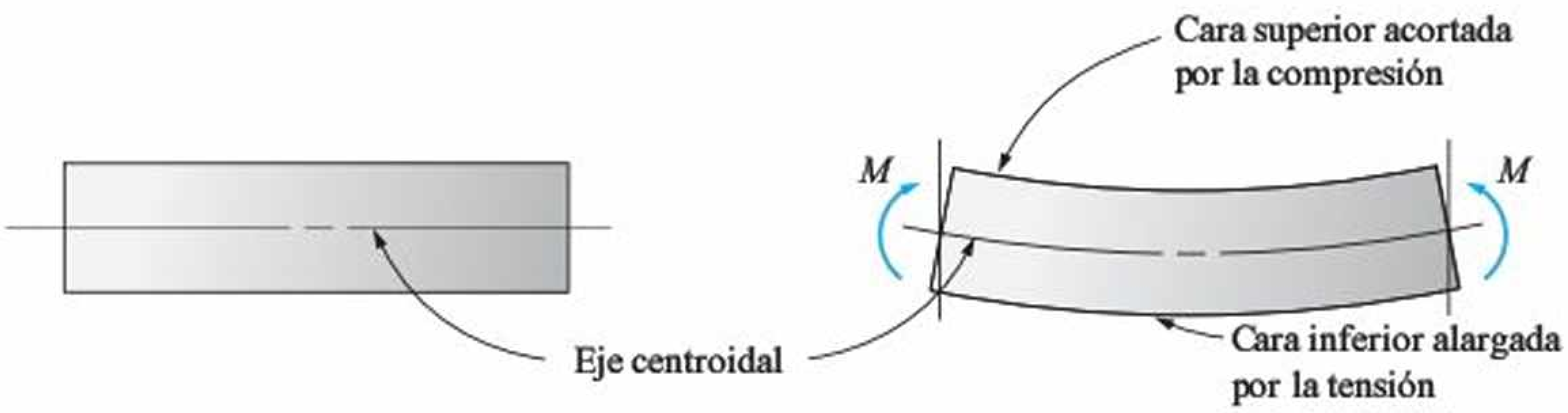


FIGURA 7–3 Ejemplo de una viga.

FIGURA 7–4
Influencia del momento flexionante en un segmento de viga.



(*a*) Segmento de la viga recto sin carga

(*b*) Segmento flexionado cuando se somete a un momento flexionante

El material bajo el eje centroidal estará a tensión con el esfuerzo de tensión máximo en la cara inferior.

A lo largo del eje centroidal, la deformación y el esfuerzo debido a la flexión son cero. Éste se llama eje neutro.

En el diseño o análisis de vigas, el objetivo en general es determinar los esfuerzos de tensión y compresión máximos. De este planteamiento se concluye que estos valores máximos dependen de la distancia del eje neutro (eje centroidal) a las caras superior e inferior. Llamaremos c a esta distancia.

El esfuerzo causado por flexión también es proporcional a la magnitud del momento flexionante aplicado a la sección de interés. Las formas y dimensiones de la sección transversal de la viga determinan su capacidad de soportar el momento flexionante aplicado. Más adelante se probará que el esfuerzo flexionante es inversamente proporcional al momento de inercia de la sección transversal con respecto a su eje centroidal horizontal.

A continuación enunciamos la *fórmula de flexión*, la cual puede ser utilizada para calcular el esfuerzo máximo causado por flexión.

Fórmula de flexión

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I} \qquad \textbf{(7–1)}$$

donde $\sigma_{\text{máx}}$ = esfuerzo máximo en las fibras más externas de la viga
M = momento flexionante en la sección de interés
c = distancia del eje centroidal de la viga a las fibras más externas
I = momento de inercia de la sección transversal con respecto a su eje centroidal

Para aplicar la ecuación (7–1), por lo general se toman los pasos siguientes.

Instrucciones para aplicar la fórmula de flexión

1. Trace los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para determinar el momento flexionante máximo en la viga.
2. Localice el centroide de la sección transversal de la viga.
3. Calcule el momento de inercia del área de la sección transversal con respecto a su eje centroidal.
4. Calcule la distancia c del eje centroidal a las caras superior e inferior de la viga, la que sea mayor.
5. Calcule el esfuerzo con la fórmula de flexión.

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I}$$

La fórmula de flexión se analiza en detalle más adelante. A continuación se ilustra la aplicación de la fórmula con un ejemplo.

Problema de ejemplo 7–1

Para la viga mostrada en la figura 7–5, calcule el esfuerzo máximo causado por flexión. La sección transversal de la viga es un rectángulo de 100 mm de altura y 25 mm de ancho. La carga a la mitad de la viga es de 1500 N, y ésta mide 3.40 m.

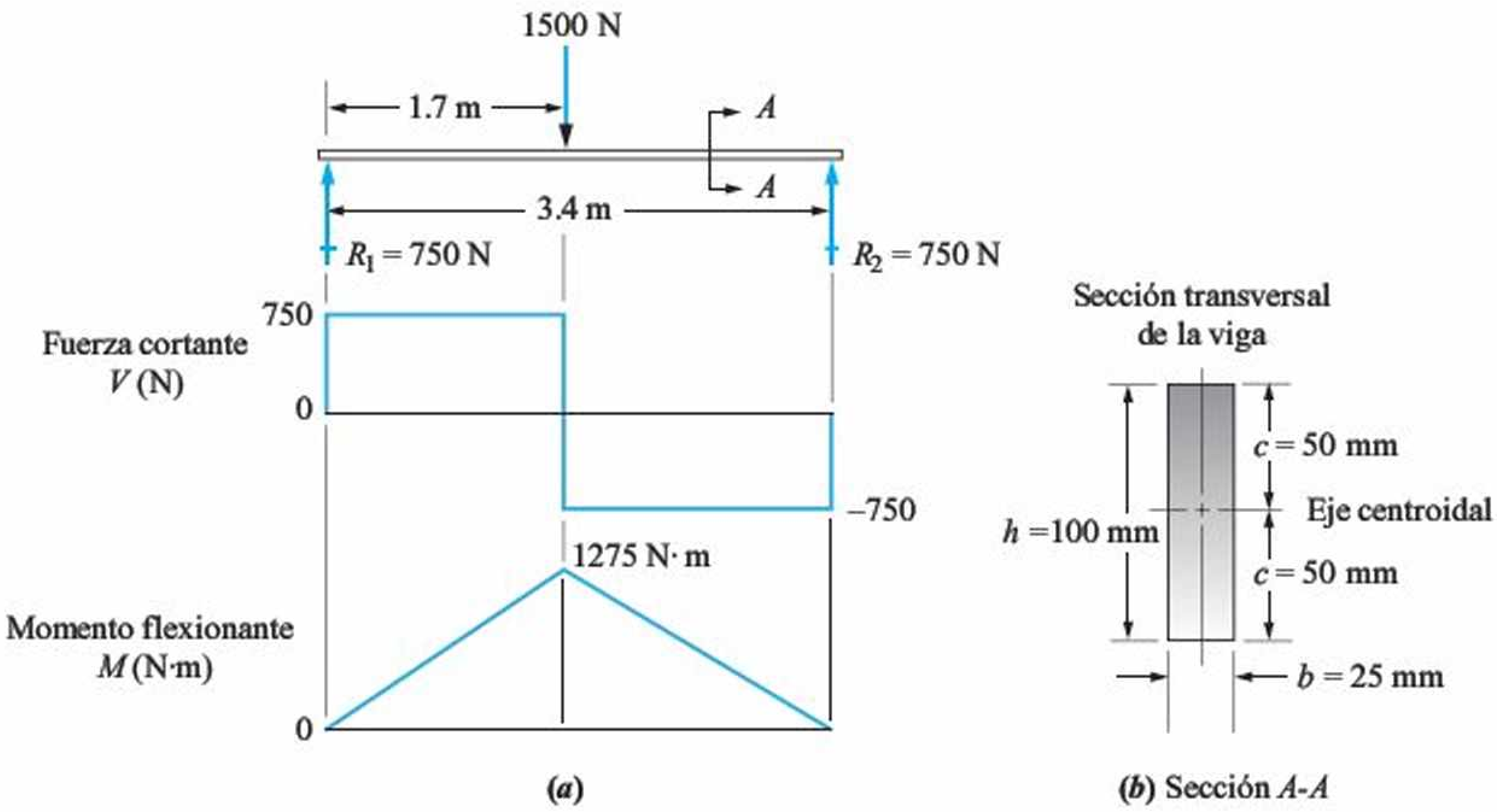


FIGURA 7–5 Datos para la viga del problema de ejemplo 7–1.

Solución

Objetivo Calcular el esfuerzo máximo causado por flexión.

Datos La viga y la carga mostradas en la figura 7–5.

Análisis Se seguirán las instrucciones definidas en esta sección.

Resultados ***Paso 1.*** Los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante ya dibujados se incluyen en la figura 7–5. El momento flexionante máximo es de 1275 N·m a la mitad de la viga.

Paso 2. El centroide de la sección transversal rectangular se localiza en la intersección de los dos ejes de simetría, a 50 mm de la cara superior o inferior de la viga.

Paso 3. El momento de inercia del área del perfil rectangular con respecto al eje centroitroidal es

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{25(100)^3}{12} = 2.08 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Paso 4. La distancia $c = 50$ mm del eje centroidal a la cara superior o inferior.

Paso 5. El esfuerzo máximo causado por flexión ocurre en la cara superior o inferior de la viga en el punto de momento flexionante máximo. Si se aplica la ecuación (7–1) se obtiene

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I} = \frac{(1275 \text{ N}\cdot\text{m})(50 \text{ mm})}{2.08 \times 10^6 \text{ mm}^4} \times \frac{10^3 \text{ mm}}{\text{m}}$$

$$\sigma_{\text{máx}} = 30.6 \text{ N/mm}^2 = 30.6 \text{ MPa}$$

7–3 CONDICIONES PARA EL USO DE LA FÓRMULA DE FLEXIÓN

La aplicación adecuada de la fórmula de flexión requiere que se entiendan las condiciones en las cuales es válida, las cuales se describen a continuación:

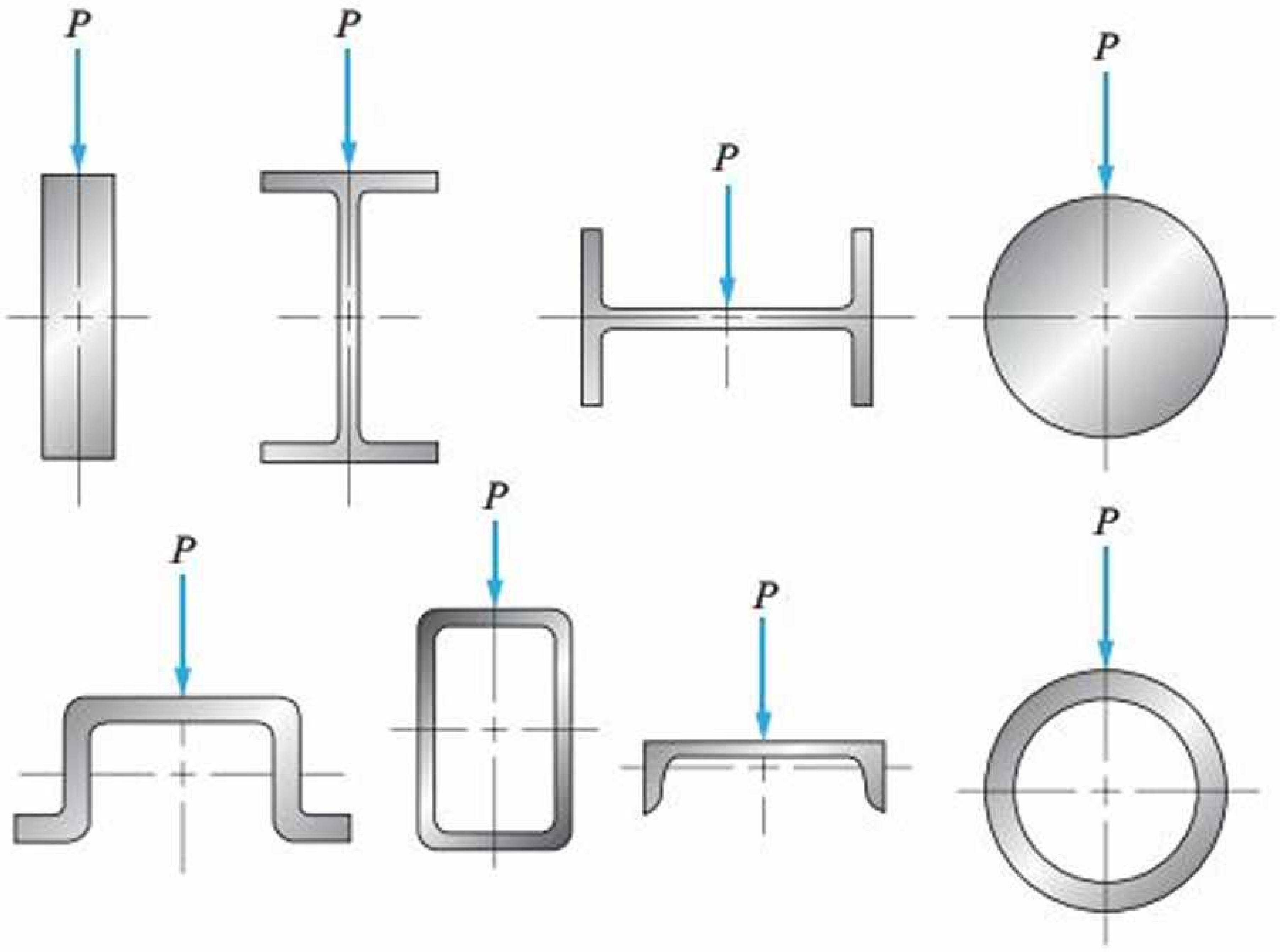
1. La viga debe ser recta o casi recta.
2. La sección transversal de la viga debe ser uniforme.
3. Todas las cargas y reacciones en los apoyos deben actuar perpendiculares al eje de la viga.
4. La viga no debe torcerse en el momento de aplicarle las cargas.
5. La viga debe ser relativamente larga y angosta en proporción a su peralte.
6. El material del cual está hecha la viga debe ser homogéneo y su módulo de elasticidad debe ser igual a tensión y a compresión.
7. El esfuerzo producido por la carga no debe exceder el límite proporcional del material.
8. Ninguna parte de la viga puede fallar por inestabilidad, es decir, por el pandeo o desgarramiento de las secciones esbeltas.
9. La sección donde se va a calcular el esfuerzo no debe estar cerca del punto de aplicación de cargas concentradas.

Si bien la lista de condiciones parece larga, la fórmula de flexión sigue siendo válida para una amplia variedad de casos reales. Las vigas que violan algunas de las condiciones se analizan con una fórmula modificada o con un método de esfuerzo combinado. Por ejemplo, en el caso de la condición 2, un cambio de la sección transversal provocará concentraciones de esfuerzo, las cuales se manejan como se describe en la sección 7–9.

Los esfuerzos flexionante y axial o los esfuerzos flexionante y torsional combinados producidos por violar la condición 3 se analizan en el capítulo 10. Si se violan las demás condiciones, se requieren análisis especiales, los cuales no se abordan en este libro.

La condición 4 es importante, y se debe prestar atención al perfil de la sección transversal para garantizar que no ocurra torsión. En general, si la viga tiene un eje de simetría vertical y si las cargas se aplican a través de dicho eje, no se producirá torsión. La figura 7–6 muestra algunos perfiles representativos utilizados para vigas que satisfacen la condición 4. Por otra parte, la figura 7–7 muestra varios que no lo hacen. En cada uno de estos casos, la viga tendería a torcerse y también a flexionarse conforme la carga se aplica como se muestra. Desde luego, estas secciones son capaces de soportar algo de carga, pero la condición de esfuerzo real en ellas es diferente de aquella que pronosticaría la fórmula de flexión. En la sección 7–10, estos tipos de vigas se estudian más a fondo.

FIGURA 7–6 Ejemplos de perfiles de viga con las cargas aplicadas a través de un eje de simetría.



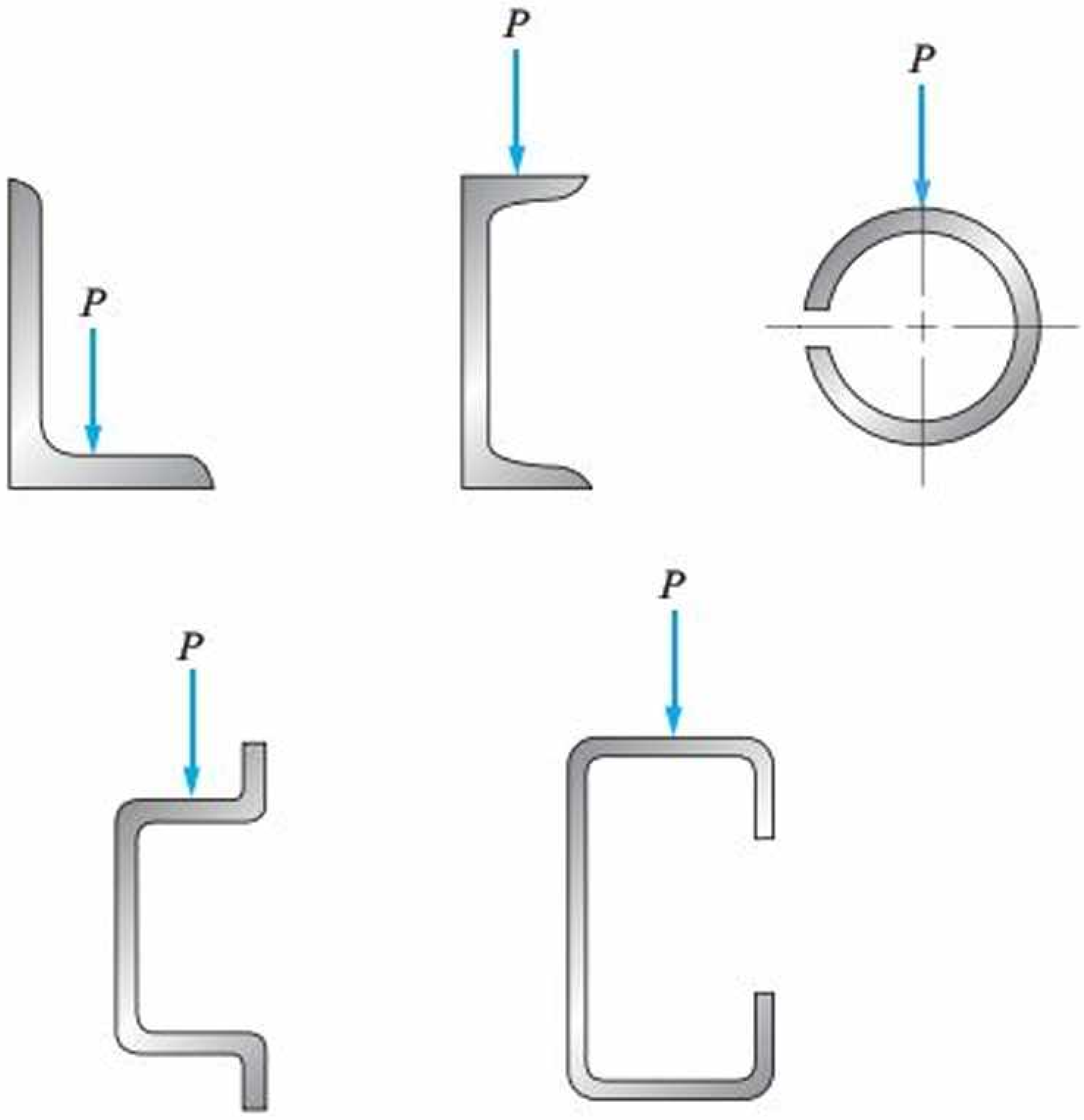


FIGURA 7–7
Ejemplos de perfiles de viga con las cargas no aplicadas a través de un eje de simetría, lo que produce torsión de la viga.

La condición 5 es difícil de cuantificar en general por la diversidad de las secciones transversales y condiciones de apoyo utilizadas para vigas. Algunos diseñadores definen una viga relativamente larga como una para la cual la relación de longitud a peralte o altura es de más de 10.

La condición 8 es importante porque los miembros largos y esbeltos, y en ocasiones sus secciones esbeltas, tienden a pandearse a niveles de esfuerzo muy por debajo de la resistencia a la cedencia del material. Este tipo de falla se conoce como *inestabilidad* y se debe evitar. Con frecuencia, se agregan riostras cruzadas o rigidizadores locales a las vigas para contrarrestar el problema de inestabilidad. Un ejemplo puede verse en la construcción de pisos con viguetas de madera de muchas casas y edificios comerciales. Las viguetas de madera relativamente esbeltas se apuntalan cerca de su punto medio para que no se pandeen. Vea las referencias 1–4 y 16 para un análisis adicional de vigas largas esbeltas o secciones esbeltas de vigas.

La necesidad de que se cumpla la condición 9 se pone de manifiesto en la figura 7–8, la cual muestra un modelo fotoelástico de una viga simplemente apoyada sometida a carga concentrada única a la mitad del claro. Recuerde el análisis de fotoelasticidad en el capítulo 1. La sección de la viga en este ejemplo es un rectángulo simple.

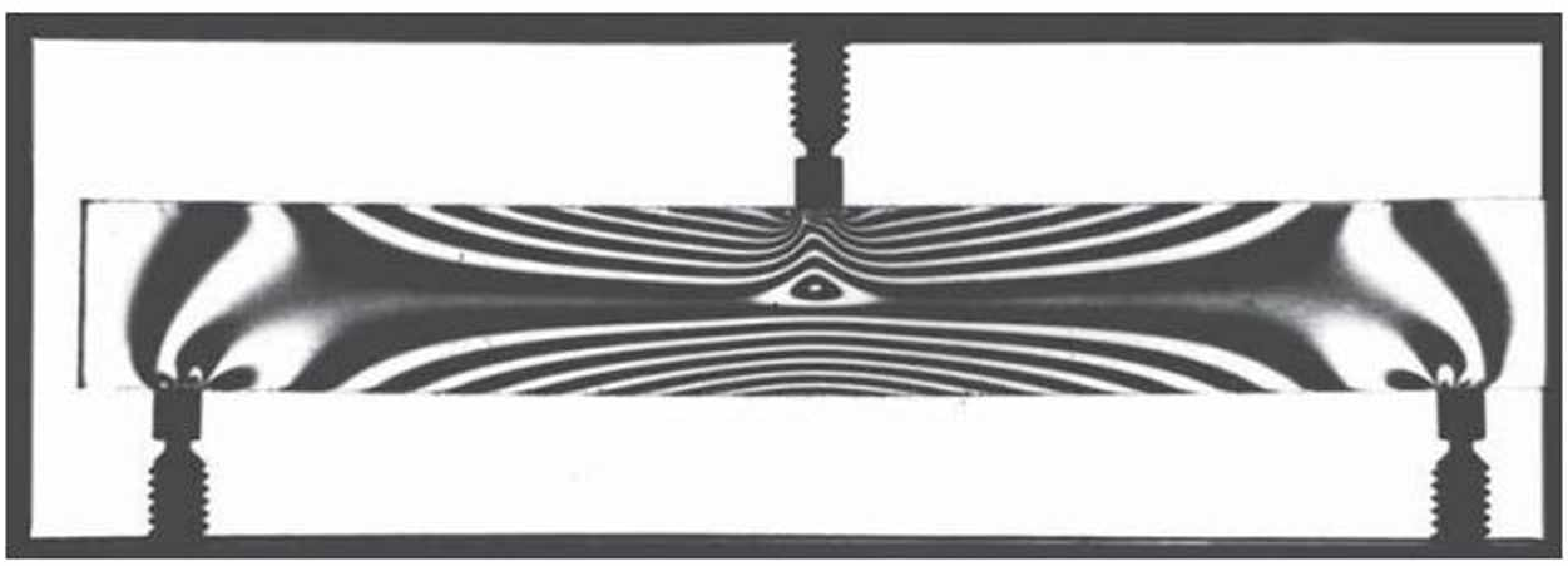


FIGURA 7–8
Modelo fotoelástico de una viga simplemente apoyada con una carga concentrada. (Fuente: Measurements Group, Inc., Raleigh, NC).

En primer lugar, observe la viga entre el apoyo o el punto de aplicación de la carga. Note que las franjas negras y blancas están bien definidas y que la separación entre ellas es aproximadamente igual de la cara superior a la cara inferior de la viga. Asimismo, observe que hay más franjas cerca de la mitad del claro y menos al aproximarse a las cargas. El mayor número de franjas indica un gradiente de esfuerzo más elevado. Esto comprueba que el esfuerzo flexionante es proporcional al momento flexionante que alcanzaría su valor máximo bajo la carga y cero en los apoyos con este patrón de carga.

Ahora observe cualquier sección transversal de la viga. La siguiente sección demuestra que la distribución del esfuerzo en una sección transversal de una viga tiene las siguientes características:

- Es cero en el eje centroidal de la sección transversal de la viga, a la mitad de la distancia de la cara superior a la cara inferior de la viga.
- Es un esfuerzo de tensión máximo en la cara inferior.
- Es un esfuerzo de compresión máximo en la cara superior.
- Varía linealmente de la cara superior a la cara inferior.

Partiendo del punto medio de la sección transversal y contando el número de franjas desde allí hasta la cara superior o inferior se puede determinar el esfuerzo en dicha sección si se conocían las características del material fotoelástico.

Ahora examine las partes de la viga próximas al punto de aplicación de la carga cerca de los apoyos. Verá un patrón de franjas más complejo que indica esfuerzos locales elevados producidos por la fuerza concentrada. Debe asegurarse de que el material de la viga sea capaz de resistir estos esfuerzos locales con el uso de grandes áreas de apoyo en estos puntos. Note que estos efectos locales cerca de los apoyos se disipan con rapidez a medida que se aleja de ellos. Esto se conoce como el *principio de St. Venant*, en reconocimiento del trabajo de este renombrado científico francés reportado en 1855.

7–4 DISTRIBUCIÓN DEL ESFUERZO EN LA SECCIÓN TRANSVERSAL DE UNA VIGA

Recurra de nuevo a la figura 7–4 que muestra cómo se deforma un segmento de viga por la influencia de un momento flexionante. El segmento asume la característica forma "flexionada", ya que las fibras superiores se acortan y las inferiores se alargan. El eje neutro, que coincide con el eje centroidal de la sección transversal de una viga, se flexiona pero no se deforma. Por consiguiente, en el eje neutro el esfuerzo producido por flexión es cero.

La figura 7–4 también muestra que los extremos del segmento de viga, que inicialmente eran rectos y verticales, permanecen así. No obstante, giran cuando se aplica el momento flexionante. La distancia lineal de un punto localizado sobre la línea longitudinal vertical inicial al punto correspondiente sobre la línea longitudinal girada indica la cantidad de deformación producida en dicho punto de la sección transversal. Se deduce, por consiguiente, que la deformación varía linealmente con la posición en la sección transversal en función de la distancia al eje neutro. Después del eje neutro hacia la parte superior de la sección, la deformación por compresión es mayor, en tanto que hacia debajo de la parte inferior es mayor la deformación por tensión. En el caso de materiales que satisfacen la ley de Hooke, el esfuerzo es proporcional a la deformación. La distribución de esfuerzo resultante, por consiguiente, es como se muestra en la figura 7–9.

Para representar el esfuerzo en un algún punto de la sección transversal, podemos expresarlo en función del esfuerzo máximo teniendo en cuenta su variación lineal con la distancia al eje neutro. Si y denota esta distancia, podemos escribir una ecuación para el esfuerzo, σ, en cualquier punto como,

$$\sigma = \sigma_{\text{máx}} \frac{y}{c} \tag{7–2}$$

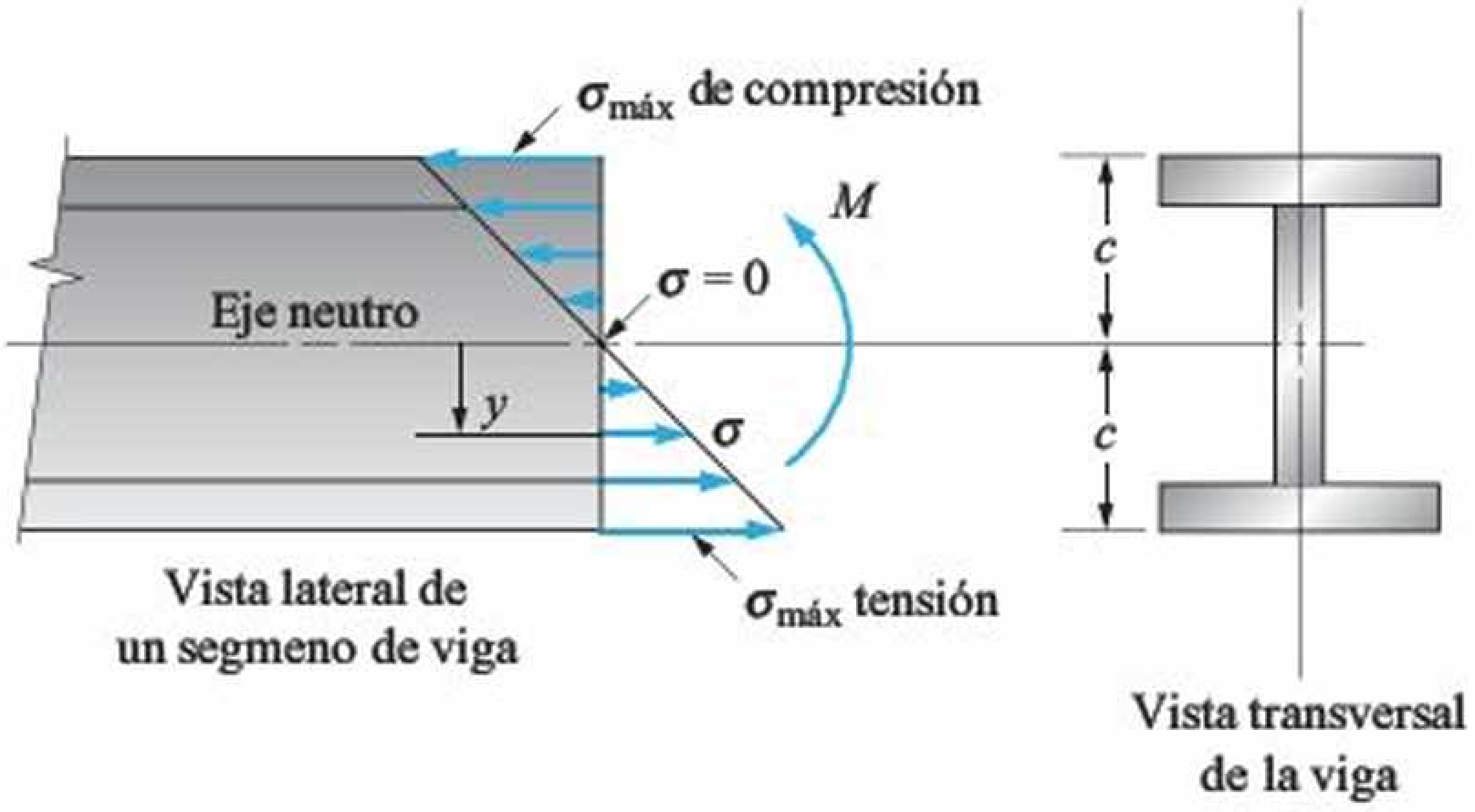


FIGURA 7–9
Distribución del esfuerzo flexionante en una sección simétrica.

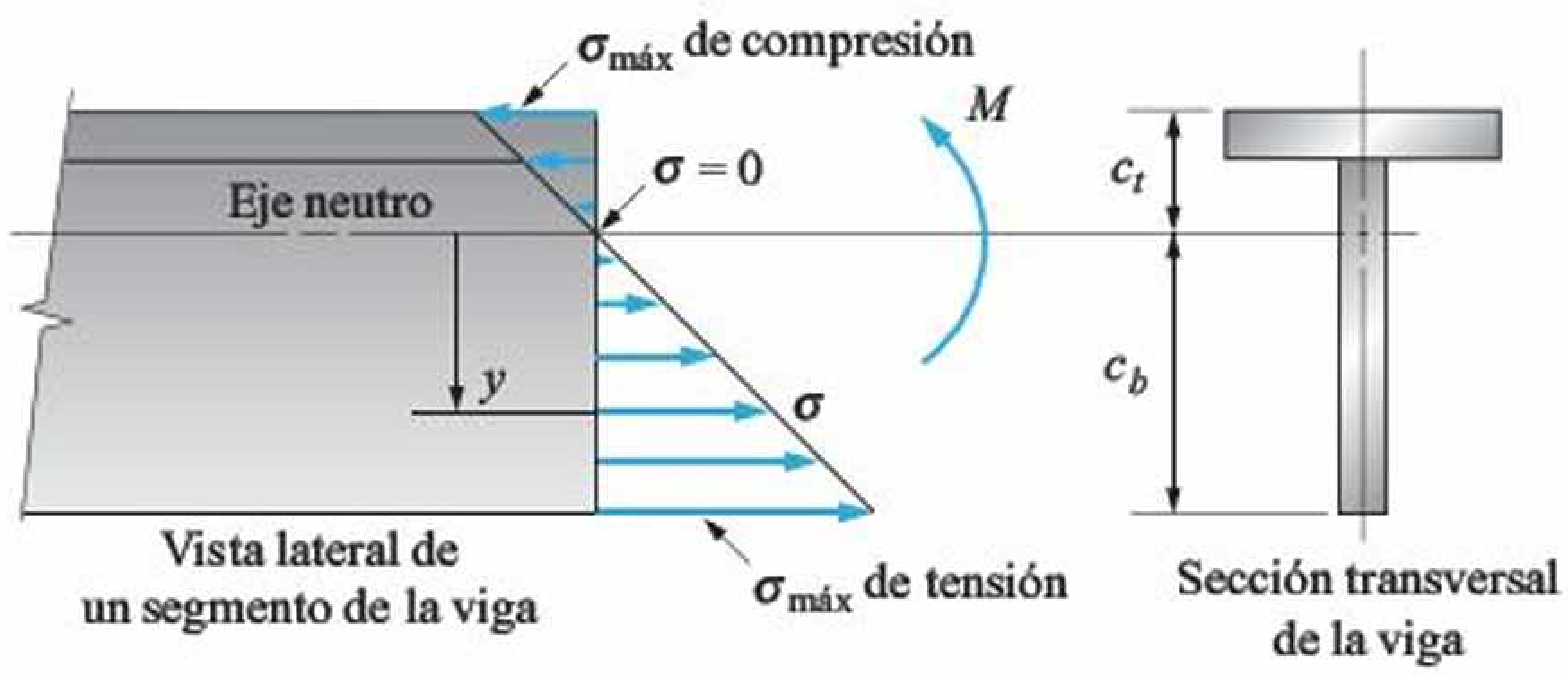


FIGURA 7–10
Distribución del esfuerzo flexionante en una sección no simétrica.

La forma general de la distribución del esfuerzo mostrada en la figura 7–9 ocurriría en cualquier sección de la viga cuyo eje centroidal esté a la misma distancia de las caras superior e inferior. En esos casos, la magnitud del esfuerzo de compresión máximo sería igual al esfuerzo de tensión máximo.

Si el eje centroidal de la sección no está a la misma distancia de las caras superior e inferior, la distribución del esfuerzo sería la mostrada en la figura 7–10. El esfuerzo en el eje neutro seguiría siendo cero. Ahora bien, el esfuerzo máximo en la parte inferior de la sección es mayor que aquel en la cara superior porque está más alejado del eje neutro. Con las distancias c_b y c_t tal como se indican en la figura 7–10, los esfuerzos serían

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc_b}{I} \quad \text{(tensión en la cara inferior)}$$

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc_t}{I} \quad \text{(compresión en la cara superior)}$$

7–5 DERIVACIÓN DE LA FÓRMULA DE FLEXIÓN

Podemos entender mejor el fundamento de la fórmula de flexión si se sigue el análisis utilizado para derivarla. Aquí se utilizan los principios de equilibrio estático para demostrar dos conceptos que se presentaron al principio de este capítulo pero que se formularon sin comprobación. Uno es que el eje neutro coincide con el *eje centroidal* de la sección transversal. El segundo es la fórmula de flexión en sí y el significado del momento de inercia del área de la sección transversal.

Refiérase la figura 7–9, la cual muestra la distribución del esfuerzo en la sección transversal de una viga. El perfil de la sección transversal carece de importancia en el análisis y el perfil I se muestra sólo como ejemplo. La figura muestra una parte de una viga, cortada en una sección arbitraria, con un momento flexionante interno que actúa en ella. Los esfuerzos, algunos de tensión y otros de compresión, tienden a producir fuerzas en la sección en la dirección axial.

El equilibrio requiere que la suma de estas fuerzas sea cero. En general, la fuerza es igual al esfuerzo por el área. Como el esfuerzo varía con la posición en la sección transversal, habrá que examinar la fuerza en cualquier área elemental infinitesimal, dA, y luego sumar las fuerzas que actúan en toda el área mediante el proceso de integración. Estos conceptos se demuestran analíticamente como sigue:

Condición de equilibrio: $\sum F = 0$
Fuerza en cualquier elemento de área: $dA = \sigma dA$
Fuerza total en el área de la sección transversal:

$$\sum F = \int_A \sigma \, dA = 0 \tag{7–3}$$

Ahora podemos expresar el esfuerzo σ en cualquier punto en función del esfuerzo máximo con la ecuación (7–2):

$$\sigma = \sigma_{\text{máx}} \frac{y}{c}$$

donde y es la distancia del eje neutro al punto donde el esfuerzo es igual a σ. Si esta expresión se sustituye en la ecuación (7–3) se obtiene

$$\sum F = \int_A \sigma \, dA = \int_A \sigma_{\text{máx}} \frac{y}{c} dA = 0$$

Como $\sigma_{\text{máx}}$ y c son constantes, se sacan del signo de integral.

$$\sum F = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{c} \int_A y \, dA = 0$$

Ni $\sigma_{\text{máx}}$ ni c es cero, así que el otro factor $\int_A y dA$, debe ser cero. Por definición y como se ilustra en el capítulo 6,

$$\int_A y \, dA = \overline{Y}(A)$$

donde $\overline{Y}$ es la distancia del eje de referencia al centroide del área y A es el área total. De nuevo, A no puede ser cero, entonces, finalmente, debe ser cierto que $\overline{Y} = 0$. Como el eje de referencia es el eje neutro, esto demuestra que el eje neutro coincide con eje centroidal de la sección transversal.

La derivación de la fórmula de flexión se basa en el principio de equilibrio, el cual requiere que la suma de los momentos con respecto a cualquier punto sea cero. La figura 7–9 muestra que un momento flexionante M actúa en la sección cortada. Éste debe ser equilibrado por el momento neto creado por el esfuerzo que actúa en la sección transversal. Pero el momento es el producto de la fuerza por la distancia del eje de referencia a la línea de acción de la fuerza. Tal como se expresó con anterioridad,

$$\sum F = \int_A \sigma \, dA = \int_A \sigma_{\text{max}} \frac{y}{c} \, dA$$

Si esta ecuación se multiplica por la distancia y se obtiene el momento resultante de la fuerza que debe ser igual al momento flexionante interno M. Es decir,

$$M = \sum F(y) = \int_A \overbrace{\underbrace{\sigma_{\text{máx}} \frac{y}{c}}_{\text{esfuerzo}} \underbrace{dA}_{\text{área}}}^{\text{fuerza cortante}} \underbrace{(y)}_{\text{brazo de momento}}$$

Simplificando, obtenemos

$$M = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{c} \int_A y^2 \, dA$$

Por definición, y como se ilustra en el capítulo 6, el último término de esta ecuación es el momento de inercia I del área de la sección transversal con respecto a su eje centroidal.

$$I = \int_A y^2 \, dA$$

Entonces

$$M = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{c} I$$

Resolviendo para $\sigma_{\text{máx}}$ se obtiene

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I}$$

Ésta es la fórmula de flexión mostrada anteriormente como ecuación (7–1).

Los dos ejemplos siguientes ilustran el uso de la fórmula de flexión.

7–6 APLICACIONES: ANÁLISIS DE VIGAS

Problema de ejemplo 7–2

La sección T mostrada en la figura 7–11 es de una viga simplemente apoyada que soporta un momento flexionante de 100 000 lb·in producido por una carga que actúa en la cara superior. Se determinó que $I = 18.16 \text{ in}^4$. El centroide de la sección está a 3.25 in hacia arriba de la parte inferior de la viga. Calcule el esfuerzo producido por flexión en la viga en los seis ejes del a al f indicados en la figura. Luego dibuje una grafica de esfuerzo contra la posición en la sección transversal.

Solución

Objetivo Calcular el esfuerzo flexionante en los seis ejes del a al f. Trace una gráfica de esfuerzo contra la posición en la sección transversal.

Datos $M = 100\,000$ lb·in. El perfil T de la sección transversal mostrada en la figura 7–11, $I = 18.16$ in^4, $\overline{Y} = 3.25$ de la parte inferior de la viga.

Análisis Se utilizará la ecuación (7–1) para calcular $\sigma_{\text{máx}}$, que ocurre en la parte inferior de la viga (eje a) porque allí se localiza la fibra más externa de la viga, en el lugar más alejado del eje centroidal.

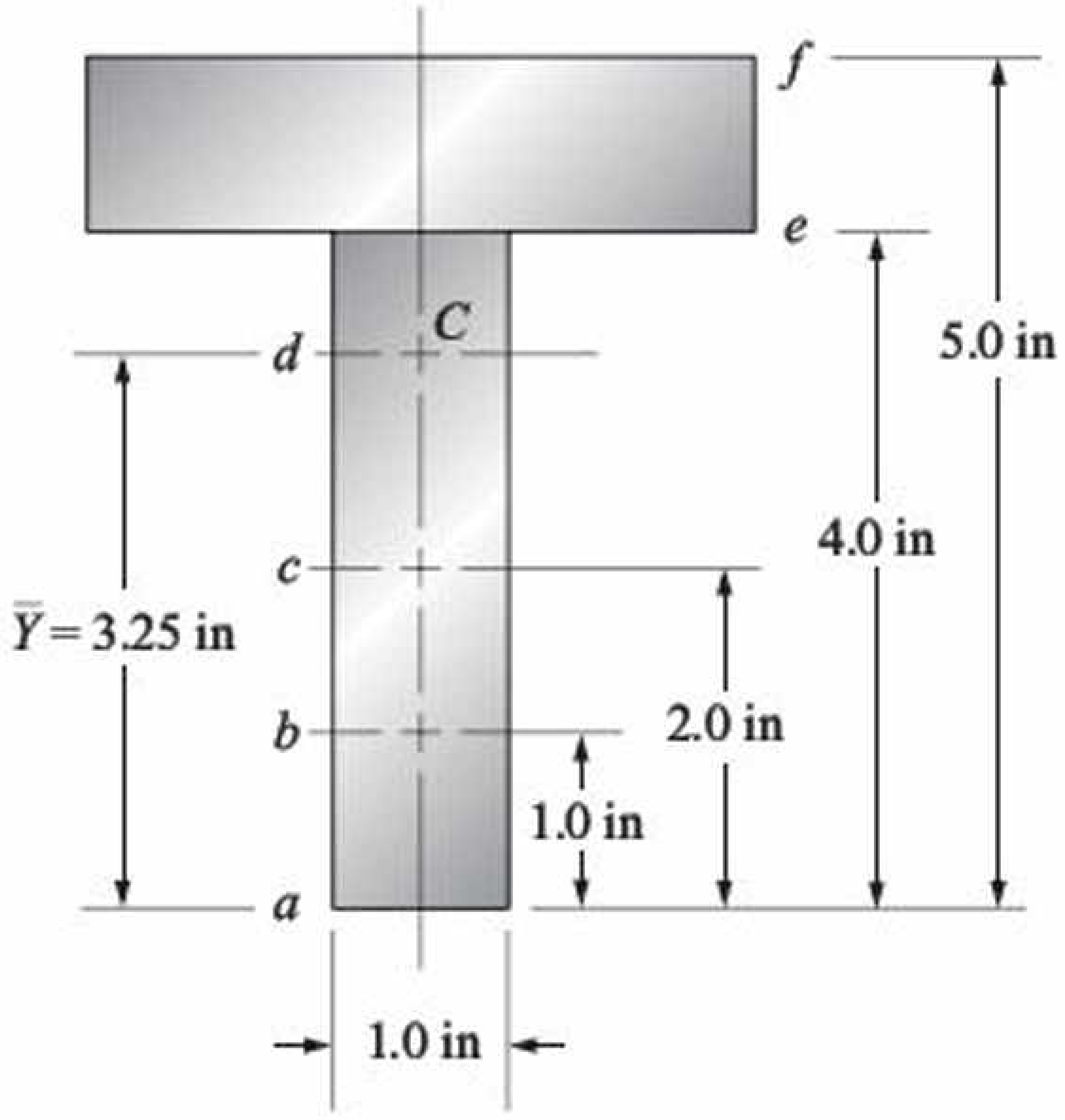


FIGURA 7–11 Sección T de la viga del problema de ejemplo 7–2.

Luego se calcula el esfuerzo en los demás ejes con la ecuación (7.2), y los resultados se obtienen con cuatro cifras significativas para demostrar el principio. Vea la figura 7–12 para los valores de y.

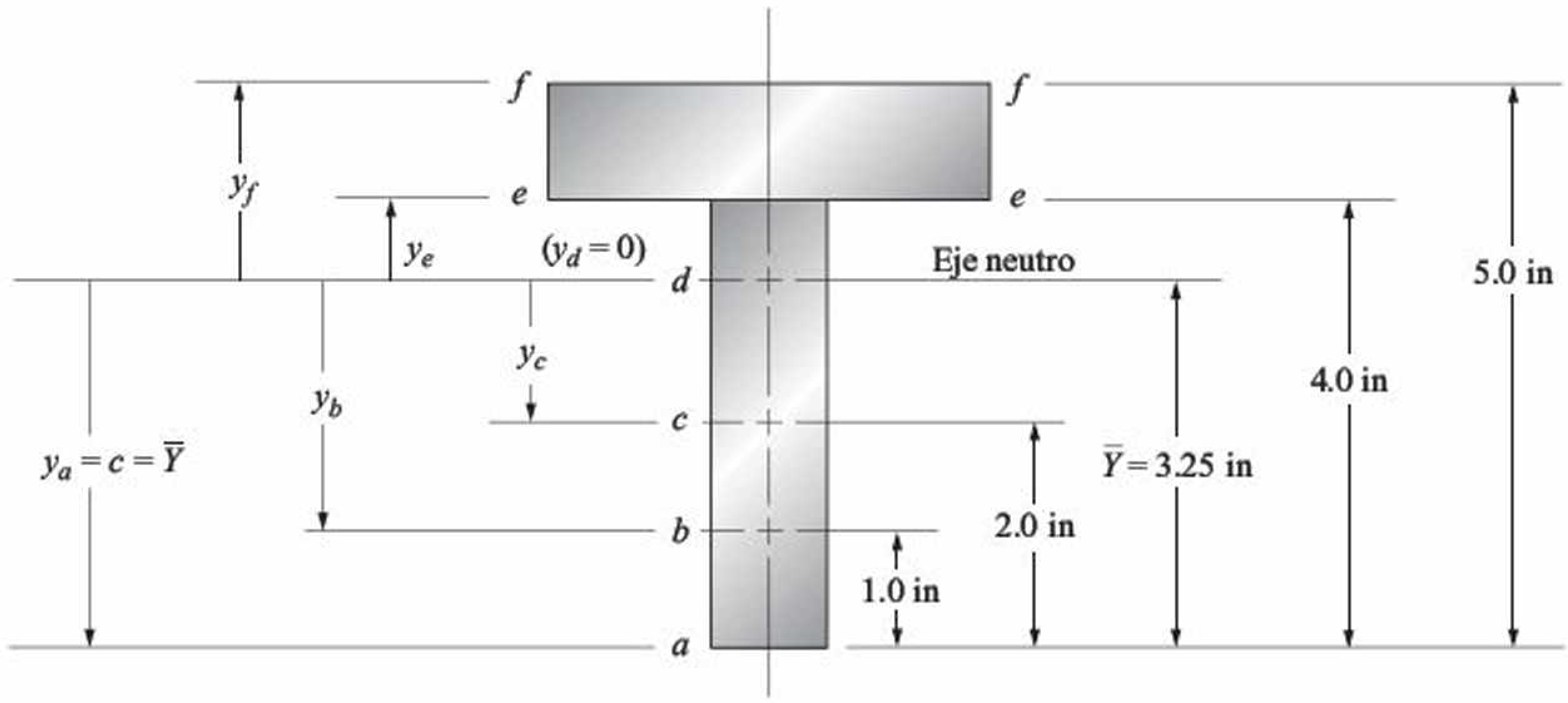


FIGURA 7–12 Datos para el problema de ejemplo 7–2.

Resultados ***En el eje a.*** En la ecuación (7–1), use $c = \overline{Y} = 3.25$ in.

$$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_a = \frac{Mc}{I} = \frac{(100\,000\text{ lb}\cdot\text{in})(3.25\text{ in})}{18.16\text{ in}^4}$$

$$\sigma_a = 17\,900\text{ psi} \quad \text{(tensión)}$$

En el eje b.

$$\sigma_b = \sigma_{\text{máx}}\frac{y_b}{c} = \sigma_a\frac{y_b}{c}$$

$$y_b = 3.25\text{ in} - 1.0\text{ in} = 2.25\text{ in}$$

$$\sigma_b = 17\,900\text{ psi} \times \frac{2.25}{3.25} = 12\,390\text{ psi} \quad \text{(tensión)}$$

En el eje c.

$$y_c = 3.25\text{ in} - 2.0\text{ in} = 1.25\text{ in}$$

$$\sigma_c = 17\,900\text{ psi} \times \frac{1.25}{3.25} = 6883\text{ psi} \quad \text{(tensión)}$$

En el eje d. En el centroide $y_d = 0$ y $\sigma_d = 0$.

En el eje e.

$$y_e = 4.0\text{ in} - 3.25\text{ in} = 0.75\text{ in}$$

$$\sigma_e = 17\,900\text{ psi} \times \frac{0.75}{3.25} = 4130\text{ psi} \quad \text{(compresión)}$$

En el eje f.

$$y_f = 5.0\text{ in} - 3.25\text{ in} = 1.75\text{ in}$$

$$\sigma_f = 17\,900\text{ psi} \times \frac{1.75}{3.25} = 9637\text{ psi} \quad \text{(compresión)}$$

La gráfica de estos datos se muestra en la figura 7–13.

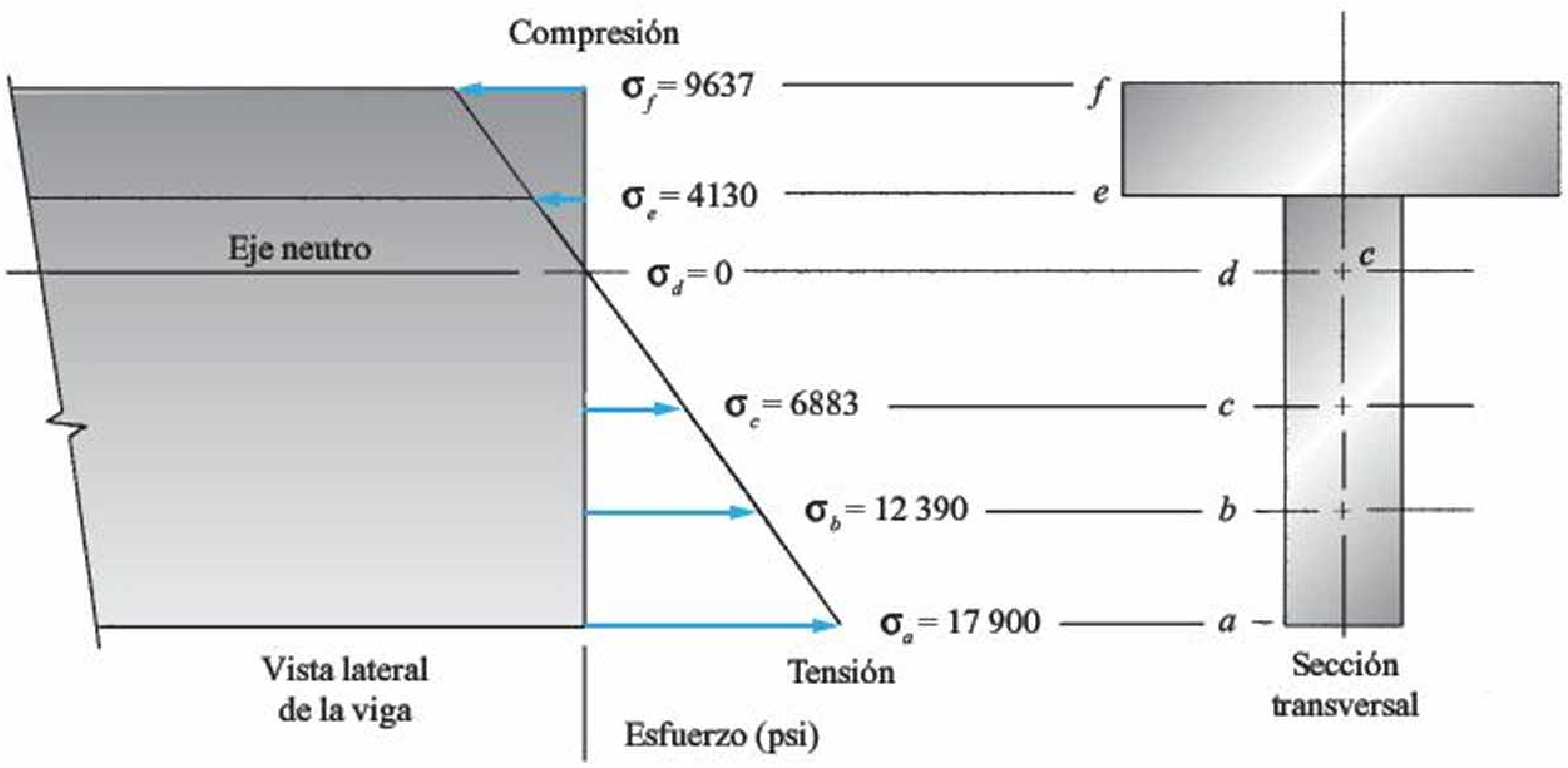


FIGURA 7–13 Distribución de esfuerzo en la sección del problema de problema de ejemplo 7–2.

LECCIÓN 10

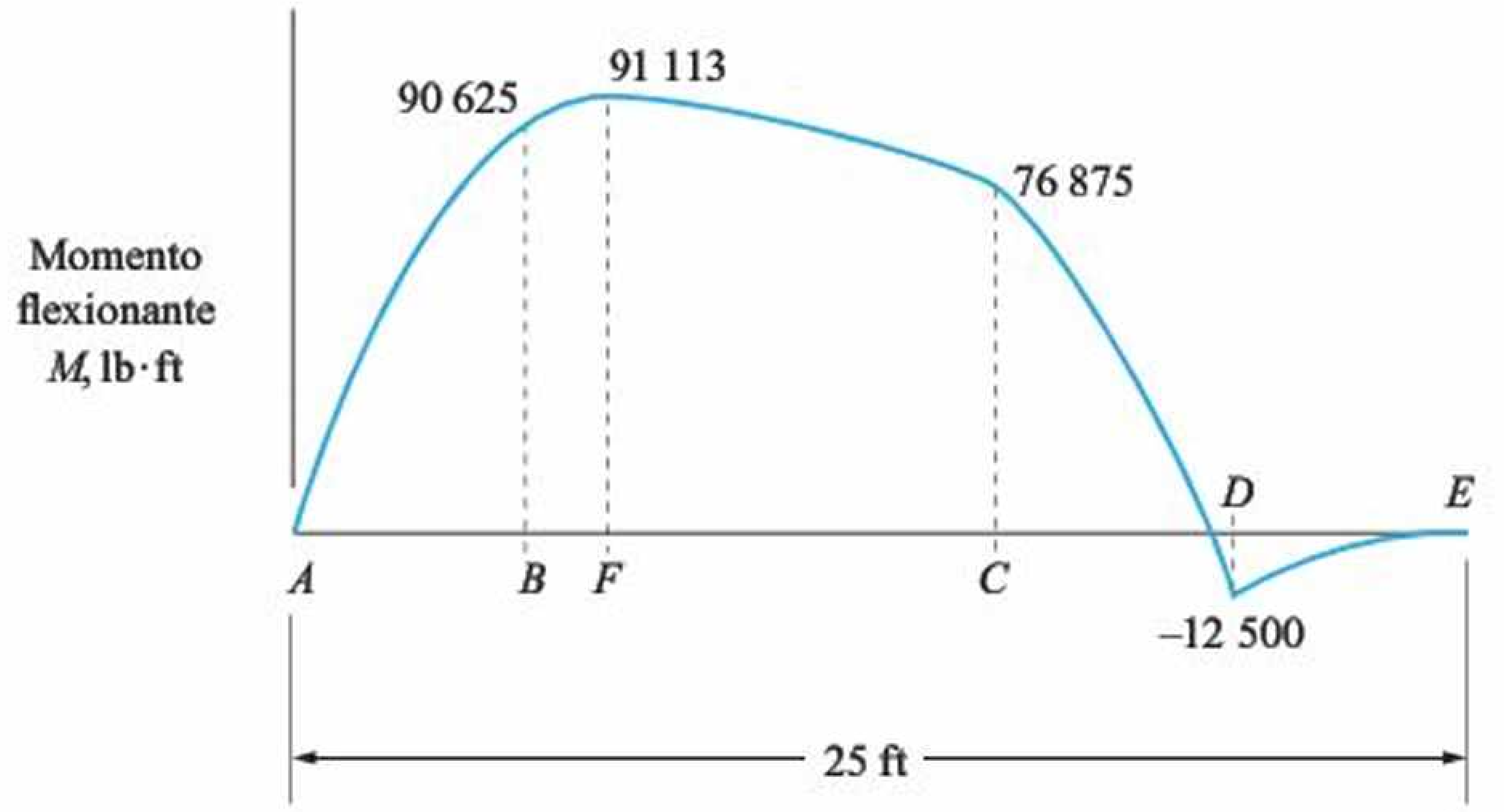
Comentario Observe la variación lineal del esfuerzo con la distancia medida a partir del eje neutro y que los esfuerzos arriba del eje neutro son de compresión mientras que aquellos debajo del eje son de tensión.

Problema de ejemplo 7–3 La figura 7–14 muestra el diagrama del momento flexionante de una viga de 25 ft de la estructura de una máquina de grandes dimensiones. Se propuso que la viga se fabrique con un perfil W14 × 43 de acero. Calcule el esfuerzo máximo producido por flexión en la viga.

Solución Objetivo Calcular el esfuerzo máximo producido por flexión.

Datos El diagrama de momento flexionante mostrado en la figura 7–14, el perfil W14 × 43.

FIGURA 7–14
Diagrama de momento flexionante de la viga del problema de ejemplo 7–3.



Análisis Use la ecuación (7–1). En la figura 7–14, identifique el momento flexionante máximo de 91 113 lb·ft que actúa en el punto F. Busque los valores de I y c en la tabla de propiedades de perfiles W en el apéndice A–7.

$$I = 428 \text{ in}^4$$
$$c = \text{peralte o altura}/2 = 13.70 \text{ in}/2 = 6.85$$

Resultados

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I} = 91\ 113 \text{ lb}\cdot\text{ft} \times \frac{12 \text{ in}}{\text{ft}} \times \frac{6.85 \text{ in}}{428 \text{ in}^4} = 17\ 500 \text{ psi}$$

Comentario Este esfuerzo máximo se presentará como esfuerzo de tensión en la cara inferior de la viga y como esfuerzo de compresión en la cara superior en la posición F. Como la viga es relativamente larga, se deberá arriostrar lateralmente, como se describe en la referencia 2.

7–7 APLICACIONES: DISEÑO DE VIGAS Y ESFUERZOS DE DISEÑO

Para diseñar un viga habrá que especificar su material, su longitud, la colocación de las cargas, la colocación de los apoyos y el tamaño y perfil de su sección transversal. Normalmente, los requerimientos de la aplicación determinan la longitud y la colocación de cargas y apoyos. El diseñador determina la especificación del material y el tamaño y perfil de la sección transversal.

El deber principal del diseñador es garantizar la seguridad del diseño. Esto requiere un análisis de esfuerzo de la viga y una decisión en relación con esfuerzo permisible o de diseño al cual puede verse sometido el material seleccionado. Los ejemplos que aquí se presentan se concentrarán en estos puntos. También son de interés para el diseñador el costo, la apariencia, el tamaño físico, el peso, la compatibilidad del diseño con otros componentes de la máquina o estructura y la disponibilidad del material o el perfil.

Se presentarán dos métodos básicos de diseño de vigas. Uno implica la especificación del *material* con el cual se fabricará la viga y su *perfil* general (circular, rectangular, viga W, etc.), junto con la subsiguiente determinación de las dimensiones requeridas de la sección transversal de la viga. El segundo requiere especificar las *dimensiones* y el *perfil* de la viga y que luego se calcule la resistencia requerida de un material con el cual se fabricará la viga. En seguida se especifica el material.

Esfuerzo de diseño para metales–recomendaciones generales. Cuando se especifiquen esfuerzos de diseño, es importante tener en cuenta que en las vigas se producen tanto

TABLA 7–1 Instrucciones para determinar el esfuerzo de diseño-esfuerzos flexionantes.

Patrón de carga	Material dúctil	Material frágil
Estática	$\sigma_d = s_y/2$	$\sigma_d = s_u/6$
Repetida	$\sigma_d = s_u/8$	$\sigma_d = s_u/10$
Impacto o choque	$\sigma_d = s_u/12$	$\sigma_d = s_u/15$

TABLA 7–2 Esfuerzos de diseño tomados de códigos seleccionados-esfuerzos flexionantes-cargas estáticas en estructuras de edificios.

Acero estructural (AISC)

$\sigma_d = s_y/1.5 = 0.66\ s_y$

Aluminio (Aluminum Association)

$\sigma_d = s_y/1.65 = 0.61\ s_y$ o $\sigma_d = s_u/1.95 = 0.51\ s_u$

el que sea menor

esfuerzos de compresión como de tensión. Si el material es razonablemente homogéneo e isotrópico con la misma resistencia a tensión o a compresión, entonces el diseño se basa en el esfuerzo máximo desarrollado en la viga. Cuando un material tiene resistencias diferentes a tensión y a compresión, como en el caso de hierro colado o madera, entonces se tendrán que analizar tanto los esfuerzos máximos de tensión como de compresión.

El método utilizado con más frecuencia en este libro para determinar esfuerzos de diseño es similar al descrito por primera vez en el capítulo 3, y convendría repasarlo en este momento. La tabla 7–1 incluye las instrucciones sobre esfuerzo de diseño que utilizaremos para vigas de máquinas y estructuras especiales en condiciones en las que las cargas y las propiedades del material se conocen a la perfección. Se puede utilizar factores de diseño más grandes en los casos de mayor incertidumbre. Se usará la tabla 7–1 para solucionar los problemas incluidos en este libro que impliquen metales, a menos que se diga lo contrario.

Esfuerzos de diseño tomados de código seleccionados. La tabla 7–2 resume las especificaciones para esfuerzos flexionantes de diseño definidas por el American Institute of Steel Construction (AISC) para acero estructural y por la Aluminum Association (AA) para aleaciones de aluminio. Estos datos atañen a vigas sometidas a cargas estáticas como las que se utilizan en estructuras de edificios y utilizan el método diseño basado en el esfuerzo permisible.

Se requiere un análisis adicional de las partes de vigas sometidas a esfuerzos de compresión por la posibilidad de pandeo local, sobre todo en perfiles con secciones esbeltas o patines extendidos. Las vigas largas también deben analizarse en cuanto a la posibilidad de torsión. A menudo se requieren soportes laterales para los patines sometidos a compresión de vigas largas para que resistan la tendencia de la viga a torcerse. Vea las referencias 1 y 2 para un estudio más detallado de estas especificaciones. Se deberán analizar los perfiles de patín ancho (perfiles W) para garantizar que resulten compactos como se define en la referencia 2. Las secciones no compactas requieren el uso de un menor esfuerzo de diseño.

Diseño por factor de carga y resistencia (LRFD, *Load and Resistance Factor Design*). El diseño por factor de carga y resistencia se analizó por primera vez en el capítulo 3 en el contexto del diseño de miembros axialmente cargados. Un objetivo importante del diseño por carga y factor de resistencia es tener en cuenta la probabilidad de que la carga muerta máxima y la carga viva máxima ocurran al mismo tiempo durante la vida del miembro. En consecuencia, la carga que actúa en una viga debe repartirse con cuidado entre esa parte que es carga muerta (principalmente el peso de la estructura misma) y aquella que es carga viva (ocupantes, nieve, lluvia, viento y fuerzas sísmicas). Cada tipo se trata con factores de carga diferentes. También se aplican factores a la capacidad básica de la viga, por lo general momento flexionante. Entonces las cargas factorizadas se comparan con el factor de resistencia factorizado para garantizar la seguridad del miembro. El proceso de diseño de una viga por carga y factor de resistencia también incluye pasos organizados de análisis en cuanto a la posibilidad de pandeo local de los patines, desgarramiento del alma, la necesidad de arriostramiento lateral y los detalles de la viga cerca de los puntos de apoyo y donde se aplican cargas concentradas. Los detalles de este proceso se describen en las referencias 2 y 3, y en general se imparten en cursos de diseño con acero estructural.

Deflexión de una viga. Si una viga no funciona a su nivel esperado, posiblemente sea por deflexión excesiva aun cuando no haya dejado de cumplir con cualquier criterio de resistencia. Este tema se abordará en el capítulo 4. En este momento, mencionaremos sólo que los límites de deflexión de una viga a menudo se establecen en función de una proporción del claro (L) de la viga entre los apoyos. Por ejemplo, algunas aplicaciones limitan la deflexión a $L/180$, $L/240$ o $L/360$, según la rigidez deseada de la estructura. En el capítulo 9 aprenderá que las deflexiones de vigas, en general, son inversamente proporcionales al momento de inercia (I) del área de su sección transversal. La ecuación 7–1 muestra que el esfuerzo también depende de I lo mismo que del peralte de la viga por su relación con la distancia c del eje centroidal a la parte externa de la viga. Por consiguiente, el diseño de la viga deberá basarse en una resistencia tentativa hasta que se evalúe la deflexión.

Esfuerzos de diseño para no metales. Cuando los problemas incluyen no metales tales como madera, plásticos y compuestos, en general no se utiliza el concepto de resistencia a la cedencia. Además, las resistencias incluidas en las tablas con frecuencia están basadas en promedios estadísticos de muchas pruebas. Las variaciones en la composición y estructura del material hacen variar las propiedades de resistencia. Siempre que sea posible, el material que va a ser utilizado en una estructura debe probarse para determinar su resistencia.

El apéndice A–19 contiene valores de esfuerzo *permisibles* de tres clases de madera de acuerdo con los grados que aparecen en la tabla para usarse en estructuras de edificios y en usos similares que implican cargas estáticas. Si las condiciones de carga se conocen a la perfección, una viga se puede cargar hasta los valores de esfuerzo flexionante incluidos en la tabla. Si existe incertidumbre en las condiciones de carga, se puede aplicar factores de diseño a los valores que aparecen en la tabla y de ese modo se producen esfuerzos de diseño menores. Aquí no se dan instrucciones fijas pero sí se recomienda realizar pruebas. Utilizaremos los esfuerzos permisibles listados, a menos que se diga lo contrario. Consulte también la referencia 7.

Las propiedades de plásticos que aparecen en el apéndice A–20 se consideran representativas de los tipos listados. Es de hacerse notar que intervienen muchas variables en la producción de plásticos, y es importante obtener datos más completos de los fabricantes o someter a prueba el material que se va a utilizar. Además, los plásticos difieren dramáticamente entre sí en cuanto a su capacidad de soportar cargas, choques e impactos cíclicos. En este capítulo consideraremos que la *resistencia a la flexión* tomada del apéndice A–20 es la resistencia representativa de los plásticos listados cuando se utilizan en vigas. Supondremos que la falla es inminente a estos niveles de esfuerzo. En los casos generales de carga estática, aplicaremos un factor de diseño de $N = 2$ a dichos valores para determinar el esfuerzo de diseño.

Los compuestos ofrecen muchas ventajas cuando se utilizan en el diseño de vigas porque la colocación del material puede optimizarse para producir vigas livianas, eficientes. Por lo general, la estructura resultante no es homogénea, por lo que las propiedades son sumamente anisotrópicas. Por lo tanto, no se puede tener la certeza de que la fórmula de flexión tal como está expresada en las ecuaciones (7–1) y (7–2) dé valores de esfuerzo precisos. Más adelante en este capítulo se abordarán métodos generales en relación con el uso de compuestos en vigas.

7–8 MÓDULO DE SECCIÓN Y PROCEDIMIENTOS DE DISEÑO

El análisis de esfuerzo requerirá el uso de la fórmula de flexión.

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I}$$

Una forma modificada es deseable en los casos en que hay que determinar las dimensiones de una sección. Observe que tanto el momento de inercia I como la distancia c son propiedades geométricas del área de la sección transversal de la viga. Por consiguiente, el cociente I/c también lo es. Por conveniencia, podemos definir un nuevo, *módulo de sección*, denotado por la letra S.

Módulo de sección

$$S = \frac{I}{c} \tag{7–4}$$

Entonces la fórmula de flexión se transforma como sigue

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M}{S} \tag{7–5}$$

Ésta es la forma más conveniente de utilizar en el diseño. Con algunos ejemplos se demostrará el uso del módulo de sección. El apéndice A–1 da fórmulas del módulo de sección de algunos perfiles; los apéndices del A–4 al A–13 incluyen el valor de S de perfiles estructurales.

Procedimientos de diseño. He aquí dos métodos de abordar problemas de diseño. El primero se aplica cuando el patrón de carga y el material se conocen y se tiene que determinar el perfil y las dimensiones de la sección transversal de la viga. El segundo procedimiento se aplica cuando el patrón de carga, el perfil de la sección transversal de la viga y sus dimensiones ya se especificaron y el objetivo es especificar un material adecuado para la viga que garantice su seguridad.

A. **Procedimiento de diseño para determinar las dimensiones requeridas para una viga.**

Datos: El patrón de carga y el material con el cual se fabricará la viga.

1. Determine el momento flexionante máximo en la viga, por lo general dibujando los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante completos.
2. Determine el procedimiento aplicable para especificar el esfuerzo de diseño de la sección 7–7.
3. Calcule el valor del esfuerzo de diseño.
4. Con la fórmula de flexión expresada en función del módulo de sección, ecuación (7–5), quítela para el módulo de sección, S. Luego iguale el esfuerzo máximo al esfuerzo de diseño y calcule el valor mínimo requerido del módulo de sección para limitar el esfuerzo real a un valor no mayor que el del esfuerzo de diseño.
5. Para un perfil de viga de diseño especial, determine las dimensiones mínimas requeridas del perfil para obtener el módulo de sección requerido. Luego especifique las siguientes dimensiones convenientes más grandes con las tablas de tamaños preferidos del apéndice A–2.
6. Para seleccionar un perfil estructural estándar como los que aparecen en los apéndices del A–4 al A–13, consulte la tabla de datos apropiada y especifique uno que tenga por lo menos el valor del módulo de sección, S, calculado en el paso 4. Por lo general, se recomienda especificar el perfil adecuado más liviano porque el costo de una viga hecha de un material dado en general guarda una relación directa con su peso. La referencia 3 incluye tablas muy completas de perfiles con sus valores de módulo de sección ordenados por el peso de la sección, esto con el fin de facilitar la selección de la viga más liviana. En los casos en que existen limitaciones de espacio, habrá que considerar las dimensiones reales del perfil.

B. **Procedimiento de diseño para especificar un material para una viga dada.**

Datos: El patrón de carga, el perfil y las dimensiones de la viga.

1. Determine el momento flexionante máximo en la viga, por lo general, con los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante completos.
2. Calcule el módulo de sección de la sección transversal.

3. Calcule el esfuerzo flexionante máximo con la fórmula de flexión, ecuación (7–5).
4. Determine el método aplicable para especificar el esfuerzo de diseño de la sección 7–7 y especifique un factor de diseño apropiado.
5. Iguale el esfuerzo máximo calculado en el paso 3 a la fórmula del esfuerzo de diseño.
6. Resuélvala para el valor mínimo requerido de la resistencia del material, ya sea s_y o s_u.
7. Seleccione el tipo de material con el cual se va a fabricar la viga tal como acero, aluminio, hierro colado, titanio o cobre.
8. Consulte las tablas de datos en busca de las propiedades de material como las que vienen en los apéndices del A–14 al A–20, e identifique un conjunto de materiales candidato que tengan por lo menos la resistencia requerida.
9. Especifique el material que se va a utilizar, considerando cualquier factor apropiado a la aplicación, tal como ductilidad, costo, potencial de corrosión, facilidad de fabricación o peso. En el caso de metales, es esencial especificar la condición del material además de la aleación.

Los problemas de ejemplo del 7–4 al 7–6 ilustran estos procedimientos.

Problema de ejemplo 7–4

Se pretende diseñar una viga que soporte las cargas estáticas mostradas en la figura 7–15. La sección de la viga será rectangular y se fabricará con una placa de acero estructural ASTM A36 de 1.25 in de espesor. Especifique una altura adecuada para la sección transversal.

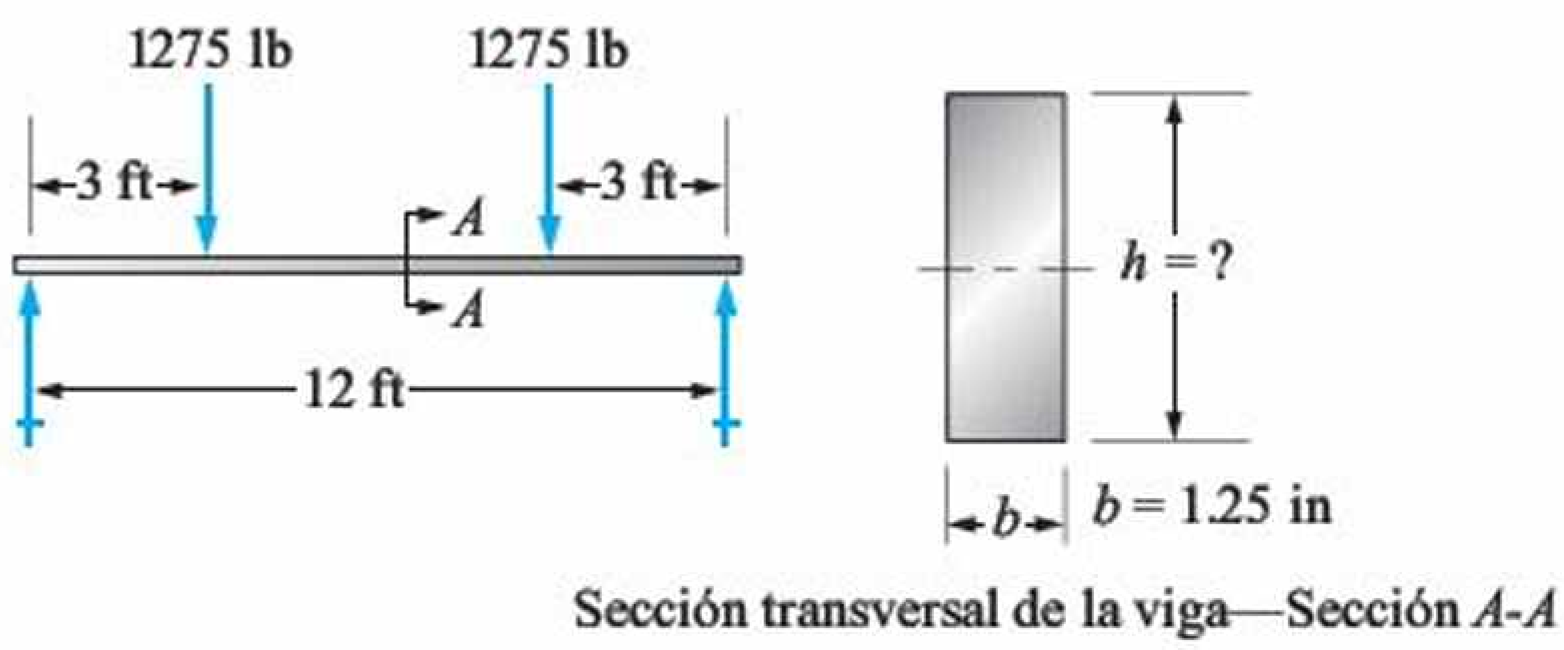


FIGURA 7–15 Carga y sección transversal de la viga del problema de ejemplo 7–4.

Solución

Objetivo: Especificar la altura de la sección transversal rectangular.

Datos: El patrón de carga mostrado en la figura 7–15. Acero estructural ASTM A36. Ancho de la viga de 1.25 in. Cargas estáticas.

Análisis: Se utilizará el procedimiento de diseño *A* de esta sección.

Resultados: ***Paso 1.*** La figura 7–16 muestra los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante completos. El momento flexionante máximo es de 45 900 lb·in entre las cargas, a la mitad de la viga entre $x = 3.00$ ft y 9.00 ft.

Paso 2. Según la tabla 7–1, para carga estática sobre material dúctil.

$$\sigma_d = S_y/2$$

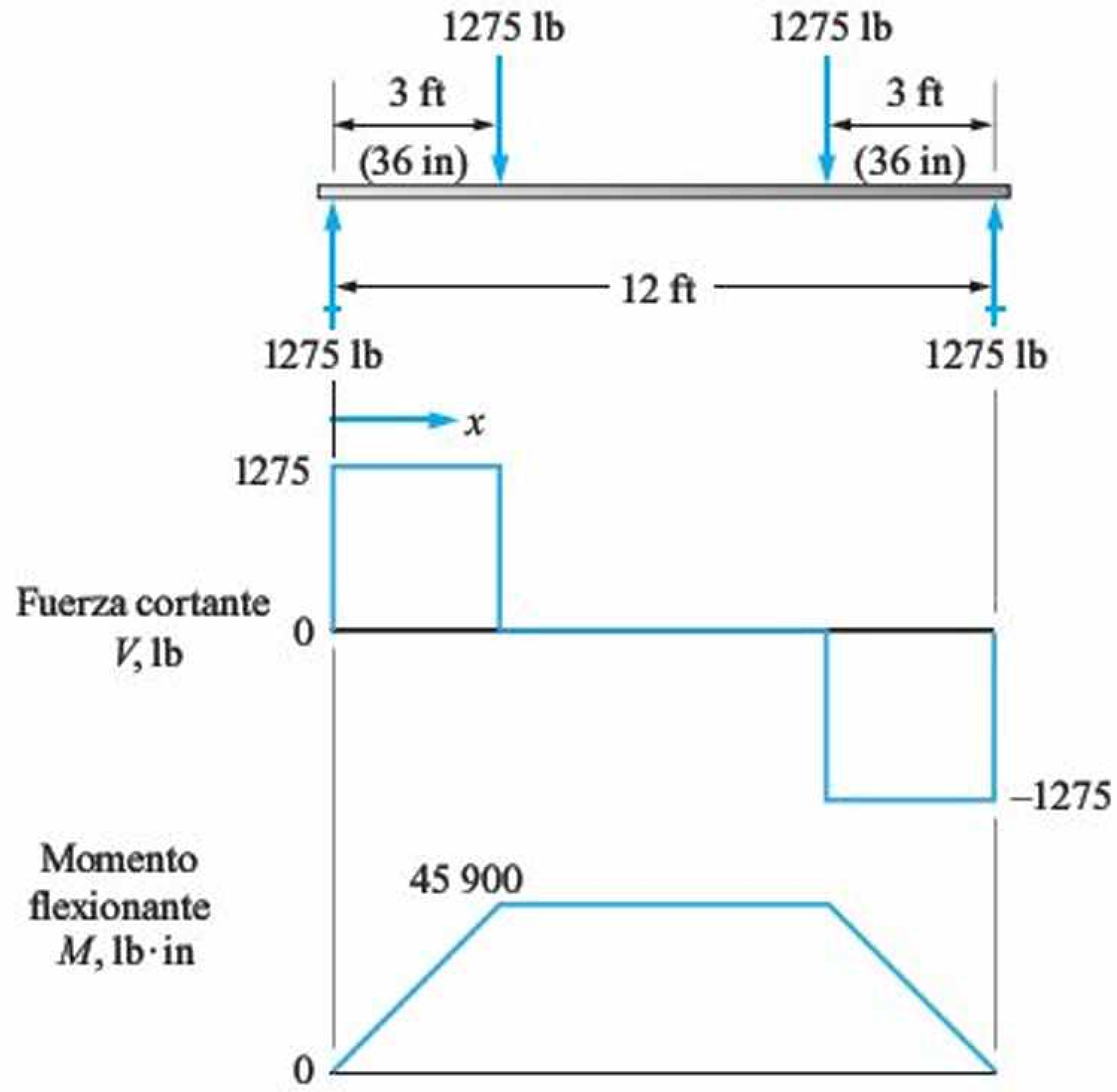


FIGURA 7–16 Diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante del problema de ejemplo 7–4.

Paso 3. En el apéndice A–16, s_y = 36 000 psi para acero ASTM A36. Para una carga estática, un factor de diseño de $N = 2$ basado en la resistencia a la cadencia es razonable. Entonces

$$\sigma_d = \frac{S_y}{N} = \frac{36\,000 \text{ psi}}{2} = 18\,000 \text{ psi}$$

Paso 4. El S requerido es

$$S = \frac{M}{\sigma_d} = \frac{45\,900 \text{ lb}\cdot\text{in}}{18\,000 \text{ lb/in}^2} = 2.55 \text{ in}^3$$

Paso 5. La fórmula del módulo de sección de una sección rectangular de altura h y espesor b es

$$S = \frac{I}{c} = \frac{bh^3}{12(h/2)} = \frac{bh^2}{6}$$

Para la viga de este problema de diseño, b será de 1.25 in. Luego resolviendo para h se obtiene

$$S = \frac{bh^2}{6}$$

$$h = \sqrt{\frac{6S}{b}} = \sqrt{\frac{6(2.55 \text{ in}^3)}{1.25 \text{ in}}}$$

$$h = 3.50 \text{ in}$$

Comentario El valor mínimo calculado para h es un tamaño conveniente. Especifique $h = 3.50$ in. El perfil de la viga será rectangular con dimensiones de 1.25 in × 3.50 in. Observe que como la viga es un tanto larga, 12 ft, puede que se deforme lateralmente por inestabilidad elástica. Puede que se requiera arriostramiento lateral. Además, la deflexión se deberá analizar con los métodos presentados en el capítulo 9.

Problema de ejemplo 7–5

El techo de una nave industrial tiene que ser soportado por vigas de patín ancho con una separación de 4 ft entre sí a lo largo de un claro de 20 ft, como se muestra en la figura 7–17. El techo será una losa de concreto colado, de 4 in de espesor. La carga viva de diseño sobre el techo es de 200 lb/ft². Especifique una viga de patín ancho que limite el esfuerzo que actúa en ella al esfuerzo de diseño para acero estructural ASTM A36 de acuerdo con la especificación del AISC.

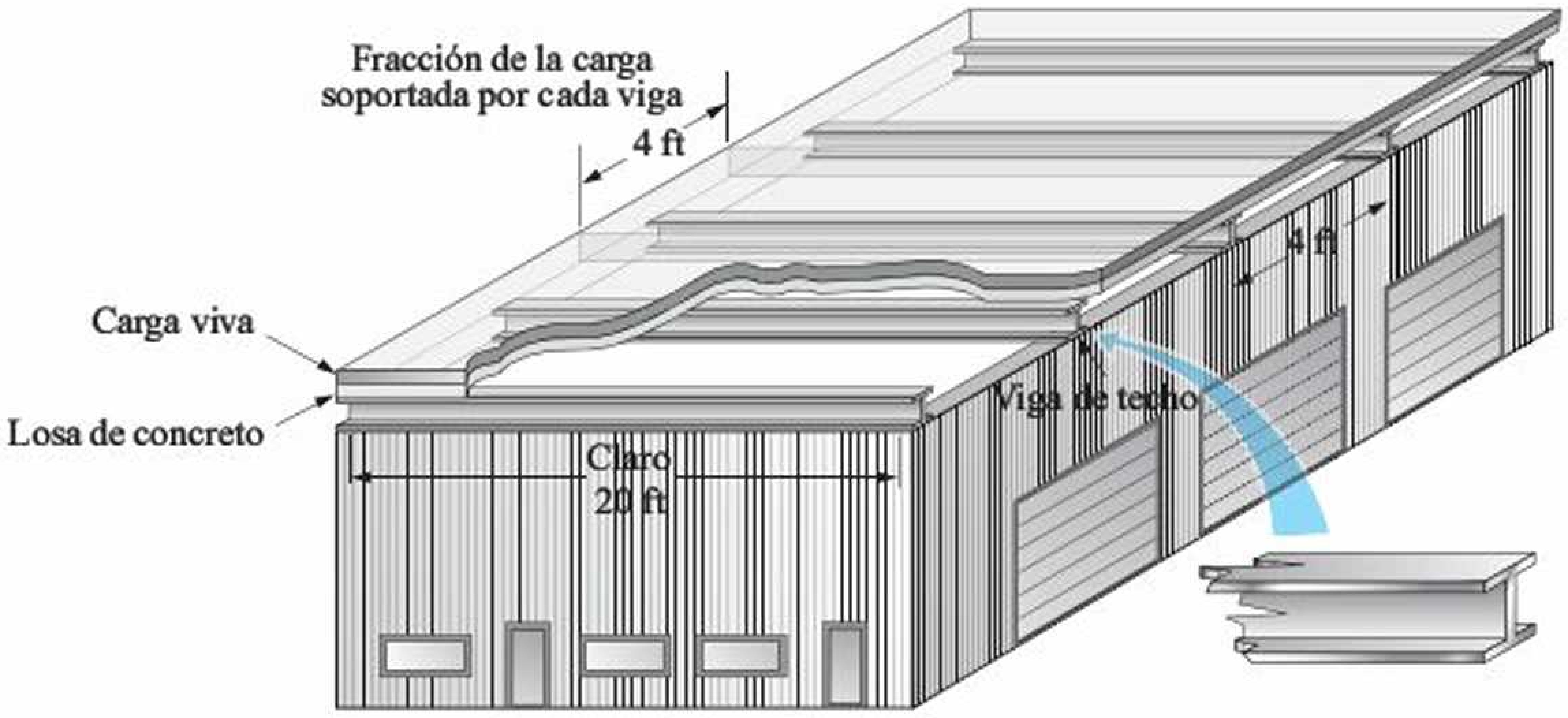


FIGURA 7–17 Estructura de techo del edificio del problema de ejemplo 7–5.

Solución

Objetivo Especificar una viga de patín ancho adecuada.

Datos El patrón de carga mostrado en la figura 7–17. Esfuerzo de diseño conforme a las especificaciones AISC para acero estructural ASTM A36.

Análisis Se utilizará el procedimiento de diseño *A* de esta sección.

Resultados ***Paso 1.*** Primero determinamos la carga sobre cada viga de la estructura del techo. Si la carga se reparte por igual entre las vigas adyacentes entonces cada viga soportaría un tramo de 4 ft de ancho de la carga del techo. Además de la carga viga de 200 lb/ft², el peso de la losa representa una carga medible. En la sección 2–10 vimos que el concreto pesa 150 lb/pie³. Entonces cada pie cuadrado del techo, de 4.0 in de espesor, pesaría 50 lb. Ésta es la *carga muerta*. Así pues la carga total producida por el techo es de 250 lb/ft². Ahora observe que cada pie de longitud de la viga soporta 4 ft² del techo. Por consiguiente, la carga sobre la viga es una carga uniformemente distribuida de 1000 lb/ft. La figura 7–18 muestra la viga cargada y los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. El momento flexionante máximo es de 50 000 lb·ft.

Pasos 2 y 3. La tabla 7–2 requiere que el esfuerzo de diseño sea

$$\sigma_d = 0.66\, s_y$$

Según el apéndice A–16, la resistencia a la cadencia del acero estructural ASTM A36 es de 36 000 psi. Entonces

$$\sigma_d = 0.66\, s_y = 0.66(36\,000 \text{ psi}) = 23\,760 \text{ psi}$$

Paso 4. Para seleccionar una viga de patín ancho, habrá que calcular el módulo de sección requerido,

$$\sigma = \frac{M}{S}$$

$$S = \frac{M}{\sigma_d} = \frac{50\,000 \text{ lb}\cdot\text{ft}}{23\,760 \text{ lb/in}^2} \times \frac{12 \text{ in}}{\text{ft}} = 25.3 \text{ in}^3$$

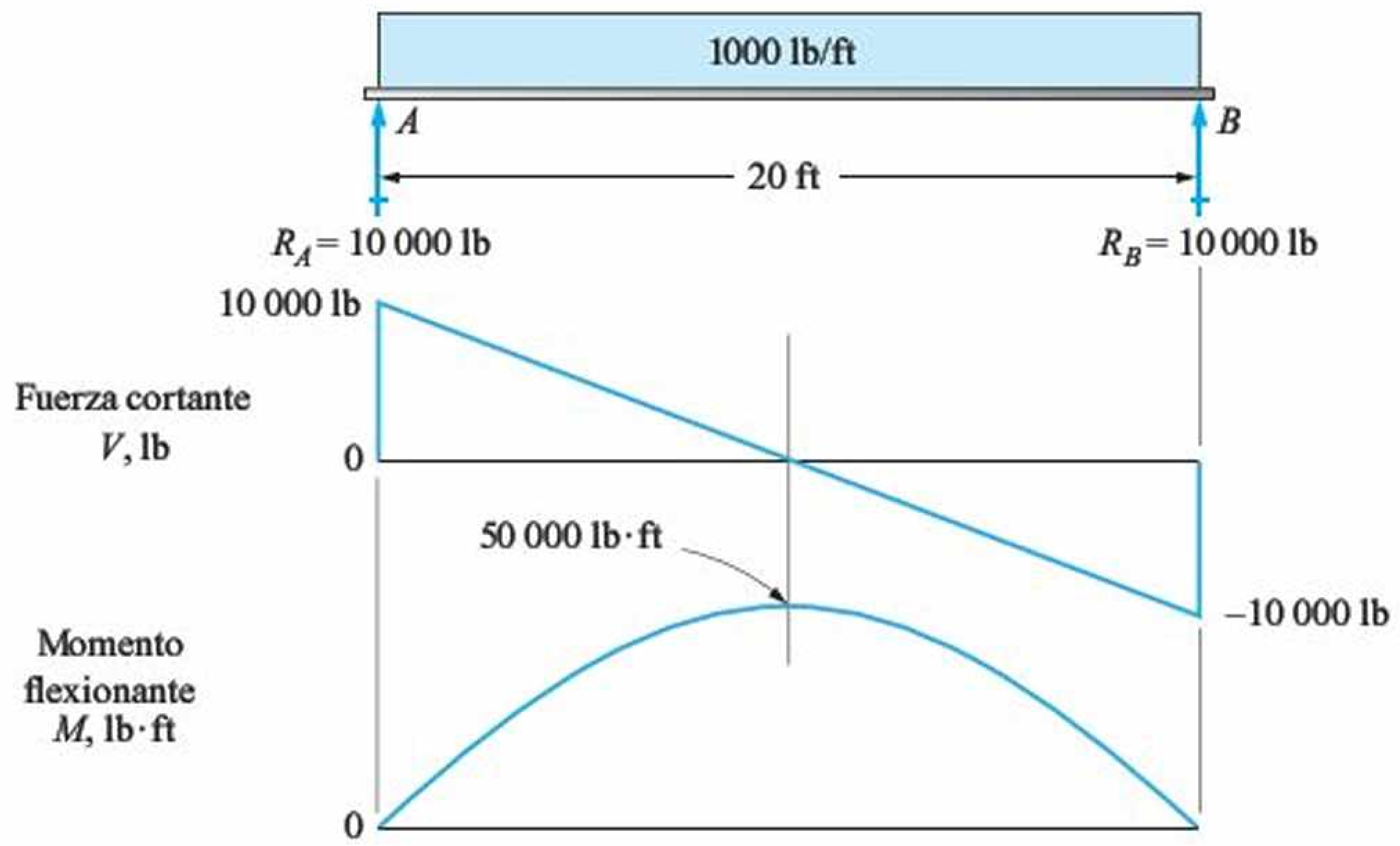


FIGURA 7–18 Diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante del problema de ejemplo 7–5.

Paso 5. Este paso no se aplica en este problema.

Paso 6. En el apéndice A–7 se localiza una viga cuyo valor de S es mayor que 25.3 in³. Al considerar diferentes opciones, de las que existen muchas, deberá buscar la viga más ligera que sea segura, puesto que su costo se basa en su peso. Algunas vigas posibles son

$$\text{W14} \times 26; \quad S = 35.3 \text{ in}^3, 26 \text{ lb/ft}$$

$$\text{W12} \times 30; \quad S = 38.6 \text{ in}^3, 30 \text{ lb/ft}$$

De éstas, se preferiría la W14 × 26, por ser la más ligera.

Comentario En el diseño final de la estructura, se requeriría arriostramiento lateral, tal como se define en la referencia 2. Además, la deflexión de la viga debe revisarse usando los métodos descritos en el capítulo 9.

Problema de ejemplo 7–6 Una viga de apoyo de un sistema transportador soporta las cargas mostradas en la figura 7–19. Los puntos de apoyo son los puntos A y C. La carga de 20 kN en B y la carga de 10 kN en D se tienen que aplicar repetidamente muchos miles de veces. Se propuso una barra de acero circular de 50 mm de diámetro para fabricar la viga. Especifique un acero adecuado para la viga.

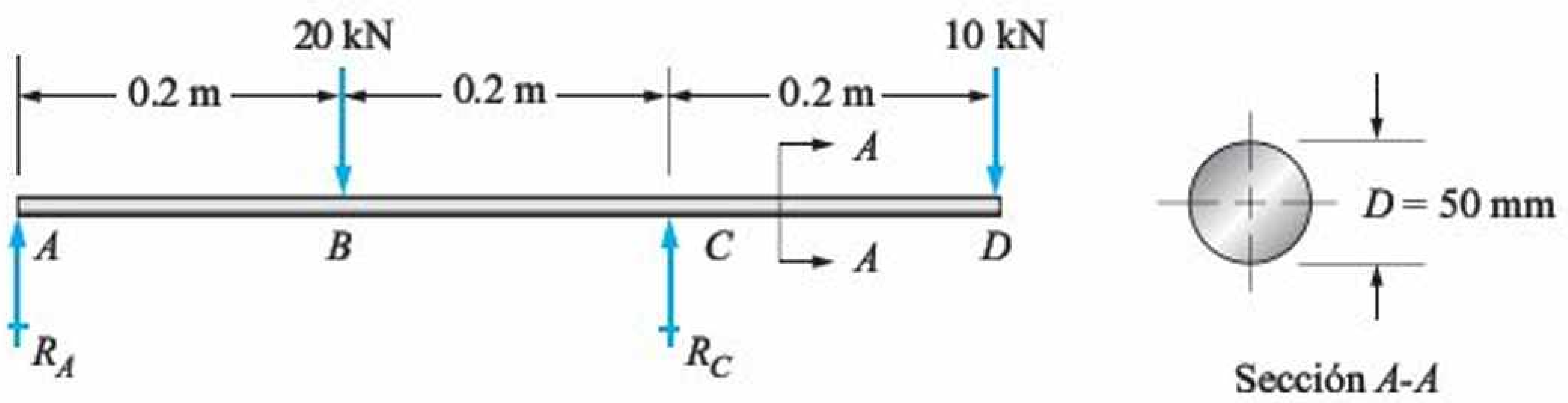


FIGURA 7–19 Cargas y sección transversal de la viga del problema de ejemplo 7–6

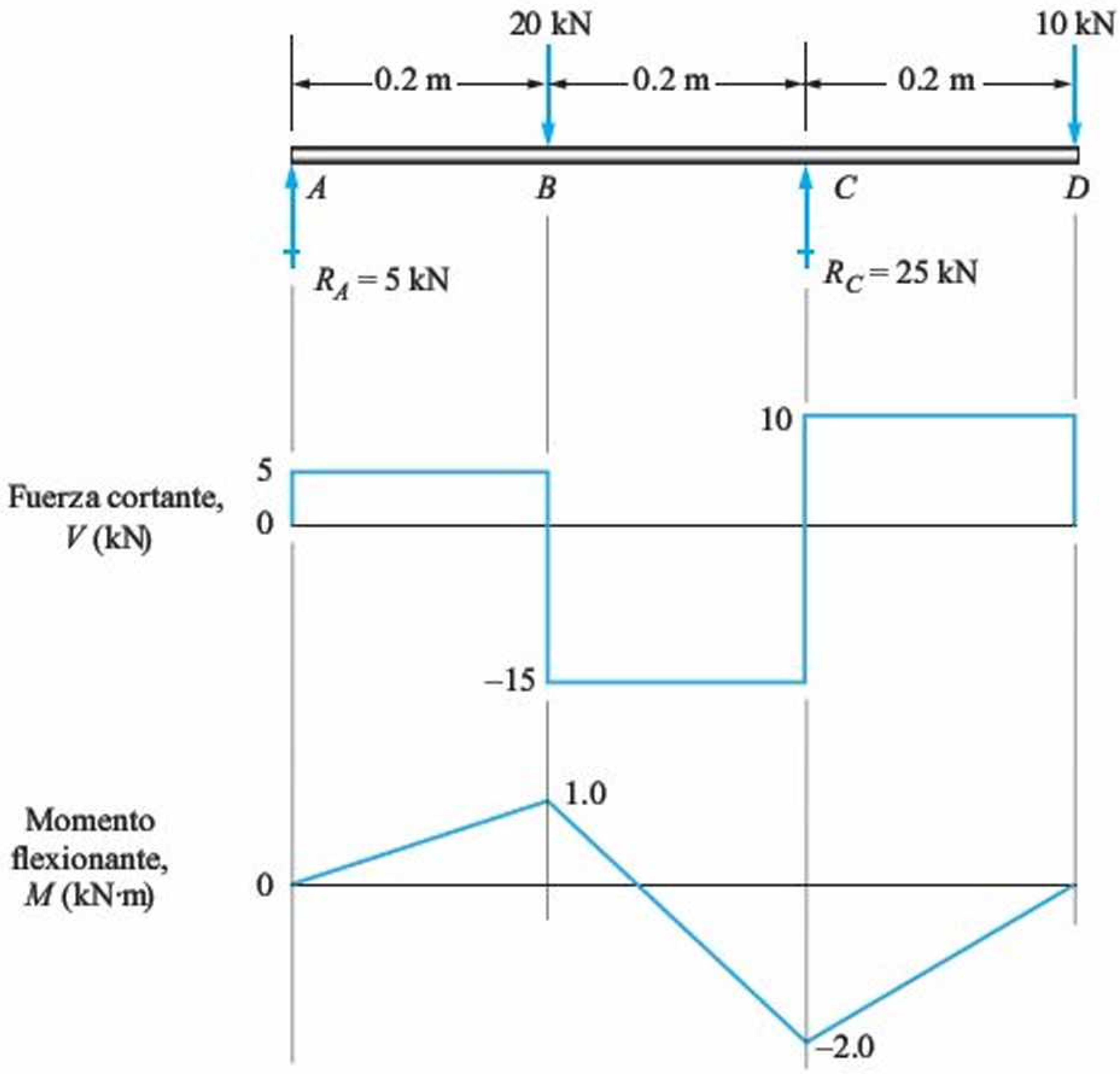
Solución Objetivo Especificar un acero adecuado.

Datos El patrón de carga de la figura 7–19. Cargas repetidas.
La viga tiene que ser circular, D = 50 mm.

Análisis Use el procedimiento tipo B dado en esta sección.

Resultados ***Paso 1.*** La figura 7–20 muestra los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. El momento flexionante máximo es de 2.00 kN·m en el apoyo C.

FIGURA 7–20
Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante del problema de ejemplo 7–6.



Paso 2. El apéndice A–1 da la fórmula de S para una barra redonda.

$$S = \pi D^3/32 = \pi\,(50\,\text{mm})^3/32 = 12\,272\,\text{mm}^3$$

Paso 3. Utilizando la ecuación (7–5),

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M}{S} = \frac{2.0\,\text{kN}\cdot\text{m}}{12\,272\,\text{mm}^3} \times \frac{10^3\,\text{mm}}{\text{m}} \times \frac{10^3\,\text{N}}{\text{kN}}$$

$$\sigma_{\text{máx}} = 163\,\text{N/mm}^2 = 163\,\text{MPa}$$

Paso 4. Podemos utilizar la tabla 7–1 para determinar una fórmula apropiada del esfuerzo de diseño. El acero seleccionado deberá ser extremadamente dúctil debido a la carga repetida. Entonces, utilizaremos $\sigma_d = s_u/8$.

Paso 5. Sea $\sigma_{\text{máx}} = 163\ \text{MPa} = \sigma_d = s_u/8$

Paso 6. Resolviendo para s_u se obtiene

$$s_u = 8(\sigma_{\text{máx}}) = 8(163\,\text{MPa}) = 1304\,\text{MPa}$$

Paso 7. Se decidió utilizar acero.

Paso 8. El apéndice A–14 incluye varias aleaciones de acero comunes. De esa tabla seleccionamos materiales candidato con buena ductilidad y una resistencia máxima de por lo menos 1304 MPa. A continuación se enumeran cuatro.

AISI 1080 OQT 700, s_u = 1303 MPa; 12% de alargamiento
AISI 1141 OQT 700, s_u = 1331 MPa; 9% de alargamiento
AISI 4140 OQT 700, s_u = 1593 MPa; 12% de alargamiento
AISI 5160 OQT 900, s_u = 1351 MPa; 12% de alargamiento

Paso 9. Para vigas que soportan cargas repetidas, en general se utiliza acero al mediano carbono. Se podría usar AISI 4140 o el AISI 5160. Con 12% de alargamiento, la ductilidad debe ser adecuada.

Comentario En el apéndice A–14 se ve que la resistencia máxima del AISI 4140 OQT 900 es de 1289 MPa y su alargamiento de 15%. La resistencia está dentro del 2% del valor calculado. Puede ser adecuado especificar este material para obtener una mejor ductilidad. El factor de diseño se reduce un poco. Como los valores que aparecen en la tabla 7–1 son un tanto conservadores, esto normalmente se justificaría. Por otra parte, se podría utilizar una barra de mayor diámetro y el resultado sería una esfuerzo de diseño más bajo. Puede ser más que posible utilizar un acero de bajo costo.

7–9 CONCENTRACIONES DE ESFUERZO

Las condiciones especificadas para el uso válido de la fórmula de flexión de la sección 7–3 incluían el planteamiento de que la viga debe tener una sección transversal uniforme. Los cambios de la sección transversal producen esfuerzos locales más elevados que los pronosticados por la aplicación directa de la fórmula de flexión. En capítulos anteriores se hicieron observaciones similares por lo concerniente a esfuerzos axiales directos y esfuerzos cortantes torsionales. El uso de *factores de concentración de esfuerzo* permite analizar vigas que sí incluyen cambios de sección transversal.

Para que visualice un ejemplo de concentración de esfuerzo, consulte en la figura un modelo fotoelástico de una viga simplemente apoyada y sometida a dos cargas idénticas. El patrón de carga es similar al que se utilizó en el problema de ejemplo 7–4 (figuras 7–15 y 7–16). El momento flexionante es el mismo en cualquier sección a la mitad de viga entre las dos cargas. Exactamente a la mitad de la viga hay dos muescas semicirculares que representan un cambio local de la geometría. Ocurren dos efectos. La remoción del material debido a las muescas reduce el módulo de sección la viga en ese lugar e incrementa el esfuerzo. Además, el cambio repentino de la geometría produce esfuerzos elevados cerca de cada muesca. Esto es evidente por las franjas extremadamente próximas entre sí alrededor de las muescas. Observe que el efecto de las muescas es muy local y se disipa a una corta distancia a ambos lados de las muescas. Factores de concentración de esfuerzo publicados permiten calcular tales esfuerzos localmente incrementados.

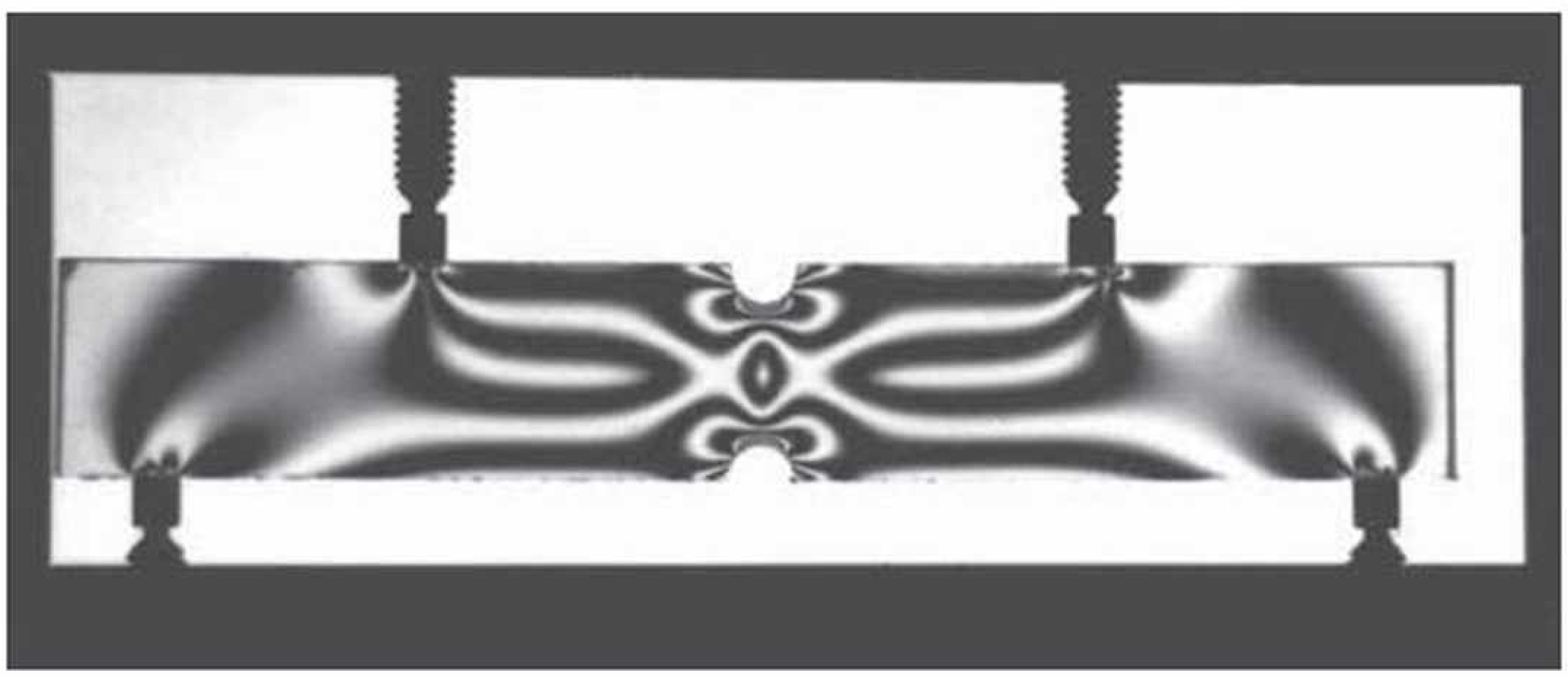


FIGURA 7–21 Modelo fotoelástico de una viga con concentraciones de esfuerzo producidas por muescas. (Fuente: Measurements Group, Inc., Raleigh, NC).

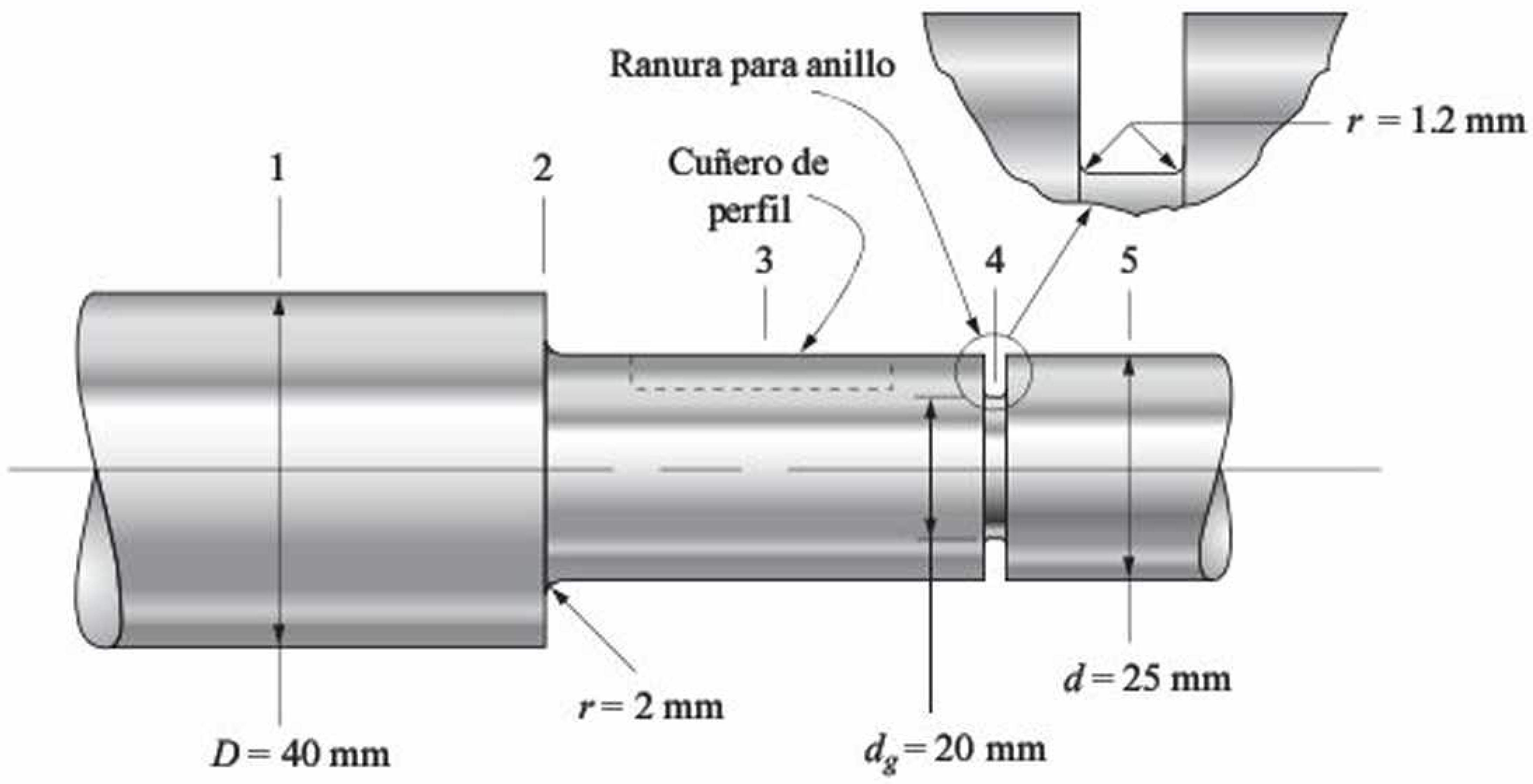


FIGURA 7–22 Segmento de una flecha con varios cambios de la sección transversal que producen concentraciones de esfuerzo.

También existe evidencia de los esfuerzos de contacto locales en los puntos de apoyo y donde se aplican las cargas. Esto se analizó en la sección 7–4 como el principio de St. Venant junto con el modelo fotoelástico mostrado en la figura 7–7.

Otro ejemplo de concentración de esfuerzo en una viga es el segmento de una flecha circular mostrado en la figura 7–22. En el diseño de flechas que llevan montados elementos transmisores de potencia, el uso de escalones o resaltos en el diámetro es frecuente. En el capítulo 4 se mostraron ejemplos donde se analizaron los esfuerzos cortantes torsionales. Si se considera la flecha como una viga sometida a momentos flexionantes, se presentarían concentraciones de esfuerzo en el hombro (2), el cuñero (3) y la ranura (4) como se muestra en la figura 7–22.

En las secciones donde ocurren concentraciones de esfuerzo, el esfuerzo producido por flexión se calcularía con una fórmula de flexión modificada,

Fórmula de flexión con concentración de esfuerzo

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{McK_t}{I} = \frac{M\,K_t}{S} \qquad \textbf{(7–6)}$$

El factor de concentración de esfuerzo K_t se determina experimentalmente, con los valores reportados en gráficas como las del apéndice A–22, casos 4, 5, 8, 9, 10 y 11. Consulte también la referencia 10 en el capítulo 3 para casos adicionales.

Problema de ejemplo 7–7

La figura 7–22 muestra una parte de una flecha donde se monta un engrane. En este lugar se aplica un momento flexionante de 30 N·m. Calcule el esfuerzo producido por flexión en las secciones 1, 2, 3, 4 y 5.

Solución

Objetivo Calcular el esfuerzo producido por flexión en las secciones 1, 2, 3, 4 y 5.

Datos La geometría de la viga mostrada en la figura 7–22. $M = 30$ N·m.

Análisis Es necesario considerar las concentraciones de esfuerzo a causa de los severos cambios de geometría en el área de interés. Se utilizará la ecuación (7–6) para calcular el esfuerzo máximo en cada sección. El apéndice A–22 es la fuente de datos en cuanto a factores de concentración de esfuerzo, K_t.

Resultados ***Sección 1.*** Ésta es la parte de la flecha donde el diámetro es de 40 mm y no hay cambios de geometría. Por consiguiente, el factor de concentración de esfuerzo es de 1.0 y el esfuerzo es el mismo que se calcularía con la fórmula de flexión. Es decir, $\sigma = M/S$.

$$S_1 = \frac{\pi(D)^3}{32} = \frac{\pi(40 \text{ mm})^3}{32} = 6283 \text{ mm}^3 \quad \text{[Apéndice A–1]}$$

$$\sigma_1 = \frac{MK_{t1}}{S_1} = \frac{(30 \text{ N}\cdot\text{m})(1.0)}{6283 \text{ mm}^3} \times \frac{10^3 \text{ mm}}{\text{m}} = 4.77 \text{ N/mm}^2 = 4.77 \text{ MPa}$$

Sección 2. El escalón en la flecha provoca una concentración de esfuerzo. Entonces el esfuerzo es

$$\sigma_2 = \frac{MK_{t2}}{S_2}$$

Para calcular S_2 se utiliza el menor de los diámetros en la sección 2. En el apéndice A–1,

$$S_2 = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi(25 \text{ mm})^3}{32} = 1534 \text{ mm}^3$$

El valor de K_{t2} depende las relaciones r/d y D/d. (Vea el apéndice A–22–9)

$$\frac{r}{d} = \frac{2 \text{ mm}}{25 \text{ mm}} = 0.08$$

$$\frac{D}{d} = \frac{40 \text{ mm}}{25 \text{ mm}} = 1.60$$

Según el apéndice A–22–9, $K_{t2} = 1.87$. Entonces

$$\sigma_2 = \frac{MK_t}{S_2} = \frac{(30 \text{ N}\cdot\text{m})(1.87)}{1534 \text{ mm}^3} \times \frac{10^3 \text{ mm}}{\text{m}} = 36.6 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_2 = 36.6 \text{ MPa}$$

Sección 3. El cuñero provoca un factor de concentración de esfuerzo de 2.0 según el apéndice A–22–11. S_3 se basa en el diámetro de 25 mm de la flecha. Por consiguiente, $S_3 = S_2 = 1534$ mm^3. Entonces

$$\sigma_3 = \frac{MK_{t3}}{S_3} = \frac{(30 \text{ N}\cdot\text{m})(2.0)}{1534 \text{ mm}^3} \times \frac{10^3 \text{ mm}}{\text{m}} = 39.1 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_3 = 39.1 \text{ MPa}$$

Sección 4. La ranura requiere el uso del apéndice A–22–9 de nuevo para determinar K_{t4}. Observe que el esfuerzo nominal se basa en el diámetro de raíz de la ranura, d_g. Para la ranura,

$$\frac{r}{d_g} = \frac{1.2 \text{ mm}}{20 \text{ mm}} = 0.06$$

$$\frac{d}{d_g} = \frac{25 \text{ mm}}{20 \text{ mm}} = 1.25$$

Entonces, $K_{t4} = 1.93$. El módulo de sección en la raíz de la ranura es

$$S_4 = \frac{\pi d_g^3}{32} = \frac{\pi(20 \text{ mm})^3}{32} = 785 \text{ mm}^3$$

Por consiguiente, el esfuerzo en la sección 4 es

$$\sigma_4 = \frac{MK_{t4}}{S_4} = \frac{(30\ \text{N}\cdot\text{m})(1.93)}{785\ \text{mm}^3} \times \frac{10^3\ \text{mm}}{\text{m}} = 73.8\ \text{N/mm}^2$$

$$\sigma_4 = 73.8\ \text{MPa}$$

Sección 5. Ésta es la parte de la flecha donde el diámetro es de 25 mm y la geometría no cambia. Por consiguiente, el factor de concentración de esfuerzo es de 1.0 y $S_5 = 1534\ \text{mm}^3$ como se calculó para la sección 2.

$$\sigma_5 = \frac{MK_{t5}}{S_5} = \frac{(30\ \text{N}\cdot\text{m})(1.0)}{(1534\ \text{mm}^3)} \times \frac{10^3\ \text{mm}}{\text{m}} = 19.6\ \text{N/mm}^2 = 19.6\ \text{MPa}$$

Comentario — Observe la gran variación de los niveles de esfuerzo que existe a lo largo de esta parte relativamente pequeña de la flecha. La figura 7–23 es una gráfica que muestra dicha variación. El esfuerzo en la sección 4 es con mucho el máximo debido al diámetro reducido en la base de la ranura y el factor de concentración de esfuerzo un tanto elevado, K_{t4}. El diseño de la flecha para determinar un material adecuado debe utilizar este nivel de esfuerzo como el esfuerzo máximo real.

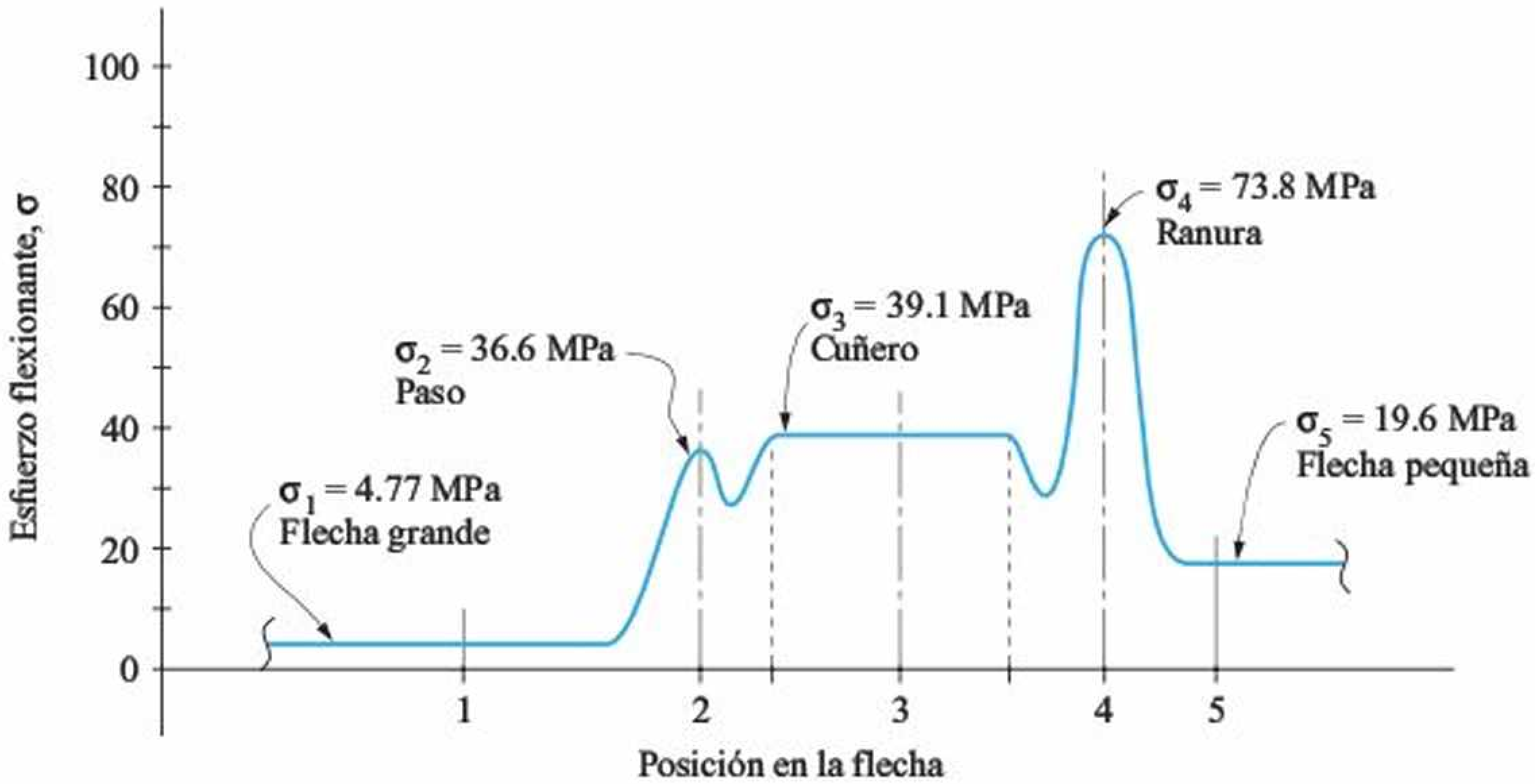


FIGURA 7–23 Variación del esfuerzo flexionante en la flecha del Problema de ejemplo 7–7.

Problema de ejemplo 7–8

La figura 7–24 muestra un ménsula en voladizo que soporta una carga parcial uniformemente distribuida a lo largo de 10 in y una carga concentrada en su extremo rígido. La geometría varía en las secciones A, B y C como se muestra. La ménsula es de aluminio 2014–T6 y se desea que tenga un factor de diseño máximo de 8 basado en la resistencia máxima. Evalúe la aceptabilidad del diseño; si cualquier sección resulta insegura, proponga otro que produzca un nivel de esfuerzo satisfactorio. Considere concentraciones de esfuerzo en las secciones B y C. El aseguramiento en A está hecho de tal modo que puede considerarse $K_t = 1.0$.

Solución

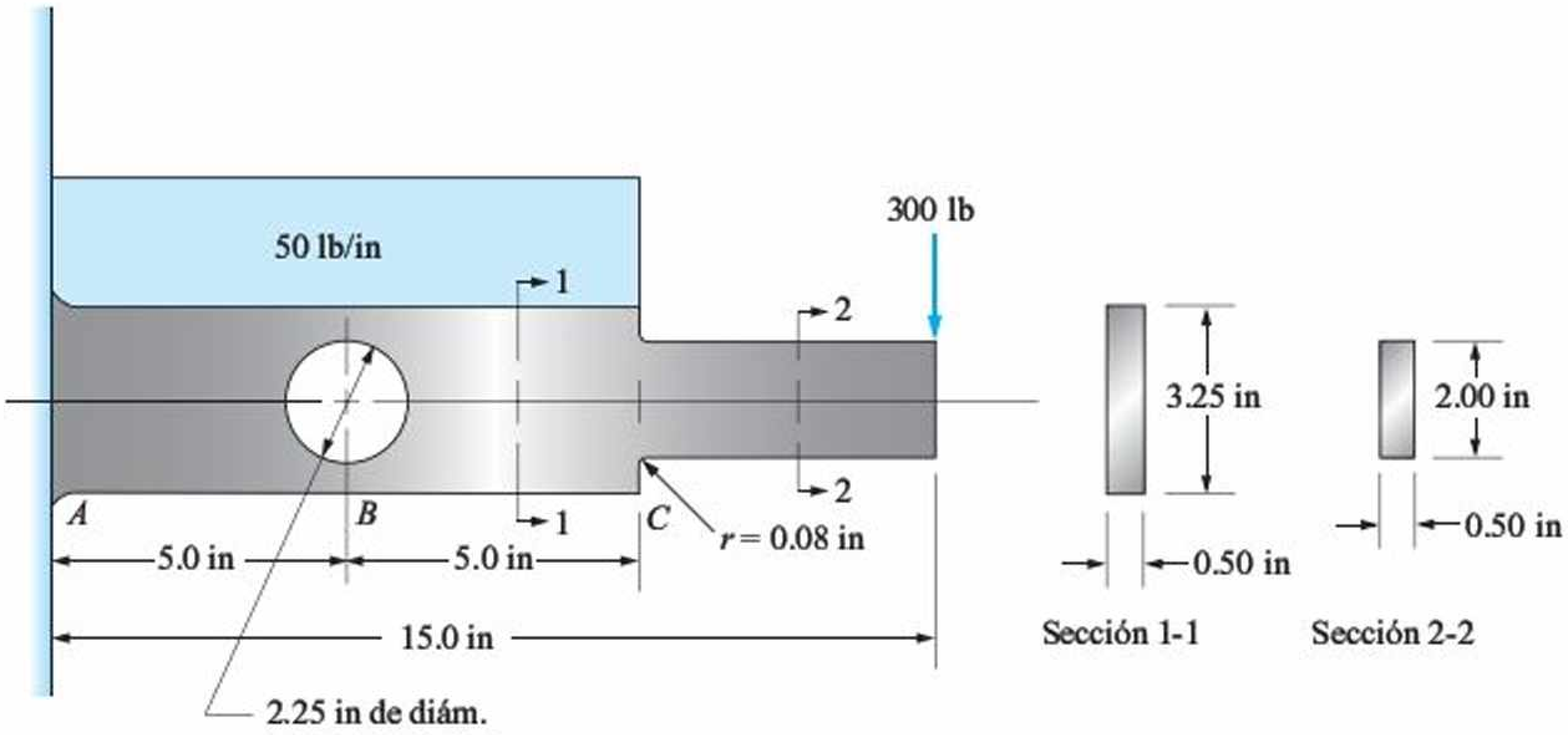
Objetivo — Evaluar la viga mostrada en la figura 7–24 para garantizar que el factor de diseño mínimo sea de 8 basado en la resistencia máxima. De no serlo, rediseñe la viga.

Datos — La carga y la geometría de la viga mostradas en la figura 7–24; aluminio 2014–T6.

Análisis

1. Se trazarán los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.
2. El esfuerzo de diseño se calculará con $\sigma_d = s_u/8$.

FIGURA 7–24
Viga y carga del Problema de ejemplo 7–8.



3. El esfuerzo se calculará en las secciones *A*, *B* y *C* y se considerarán concentraciones de esfuerzo en *B* y *C*. Estos son los tres puntos de falla probables debido al momento flexionante o a la concentración de esfuerzo. En cualquier otra parte el esfuerzo flexionante será menor. En cada sección, el esfuerzo se calculará con $\sigma = MK_t/S$ y se determinarán los valores de *M*, *K* y *S*.
4. Los esfuerzos calculados se compararán con el esfuerzo de diseño.
5. Para cualquier sección donde el esfuerzo sea mayor que el esfuerzo de diseño, se propondrá otro diseño y se volverá a calcular el esfuerzo para comprobar que es seguro.

Resultados

Paso 1. La figura 7–25 muestra los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante terminados. Observe que ya se calcularon los valores del momento flexionante en las secciones *B* y *C*. Deberá comprobar los valores dados.

Paso 2. En el apéndice A–18, encontramos $s_u = 70$ ksi $= 70\,000$ psi. Entonces,

$$\sigma_d = S_u/8 = (70\,000)/8 = 8750\,\text{psi}$$

Pasos 3 y 4. En cada sección, $\sigma = MK_t/S = K_t\sigma_{nom}$.

Sección A: $K_t = 1.0$ (dado). $M_A = 7000$ lb·in.
Dimensiones: $b = 0.50$ in; $h = 3.25$ in; rectángulo

$$S = bh^2/6 = (0.50\,\text{in})(3.25\,\text{in})^2/6 = 0.880\,\text{in}^3$$

$$\sigma = \frac{(7000\,\text{lb}\cdot\text{in})(1.0)}{0.880\,\text{in}^3} = 7953\,\text{psi} < 8750\,\text{psi} \quad \textbf{OK}$$

Sección B: $M_B = 3625$ lb·in. Encuentre K_t en el apéndice A–22–4.
Dimensiones: $t = b = 0.50$ in; $w = h = 3.25$ in; $d = 2.25$ in
$d/w = 2.25/3.25 = 0.692$; entonces $K_t = 1.40$ (curva C).

$$\sigma = K_t\sigma_{nom} = \frac{K_t(6Mw)}{(w^3 - d^3)t} = \frac{(1.40)(6)(3625)(3.25)}{[(3.25)^3 - (2.25)^3](0.50)}$$
$$\sigma = 8629\,\text{psi} < 8750\,\text{psi} \quad \textbf{OK}$$

Sección C: $M_C = 1500$ lb·in. Encuentre K_t en el apéndice A–22–10.
Dimensiones: $t = 0.50$ in; $H = 3.25$ in; $h = 2.00$ in; $r = 0.08$ in
$H/h = 3.25/2.0 = 1.625$; $r/h = 0.08/2.00 = 0.04$.
Entonces, $K_t = 2.40$.

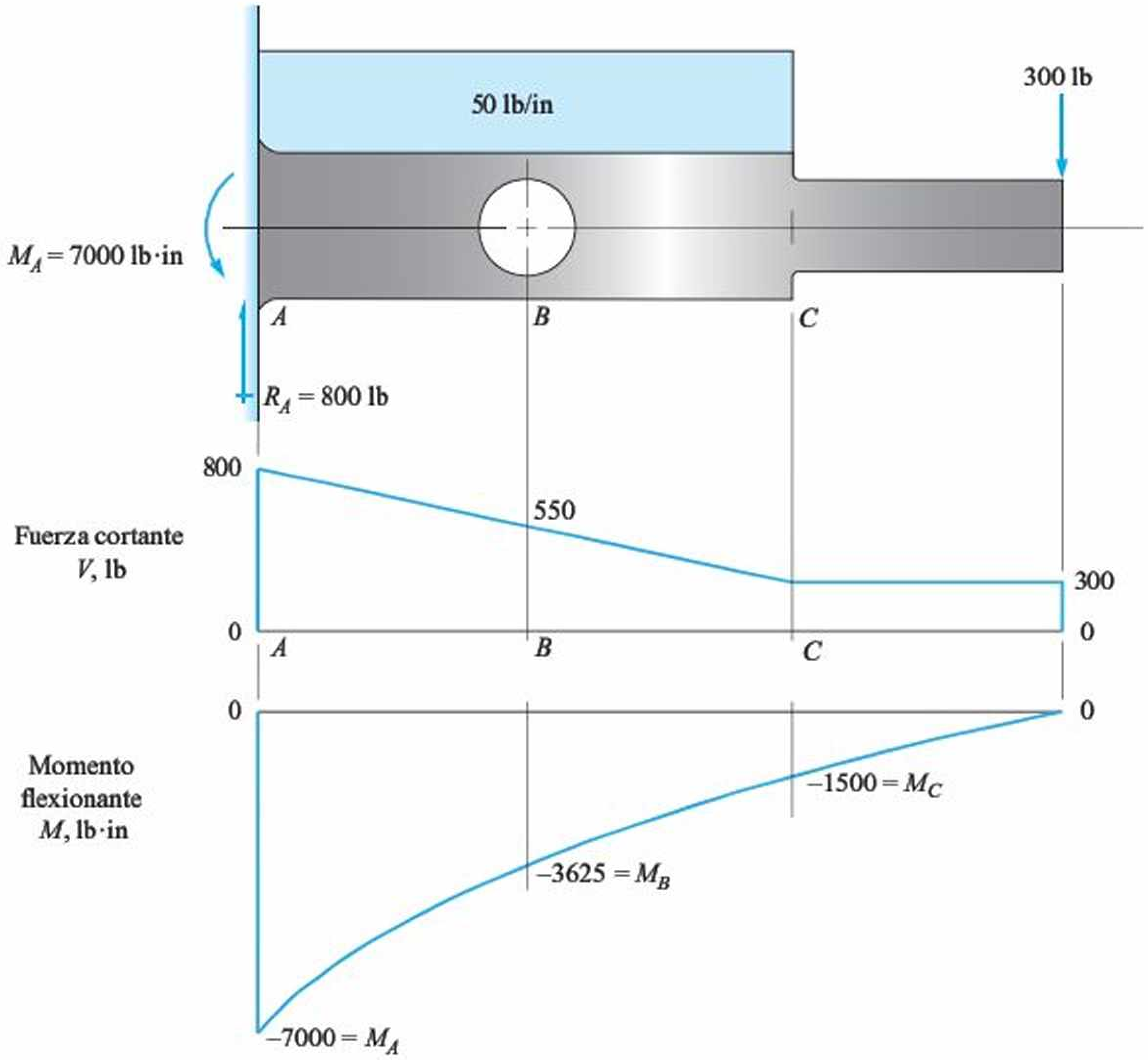


FIGURA 7–25 Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante del Problema de ejemplo 7–8.

$$\text{Módulo de sección} = S\ th^2/6 = (0.50)(2.00)^2/6 = 0.333\text{in}^3$$

$$\sigma = \frac{MK_t}{S} = \frac{(1500\ \text{lb}\cdot\text{in})(2.40)}{0.333\ \text{in}^3} = 10\,800\ \text{psi}\ \ \textbf{excesivo}$$

Paso 5. Rediseño propuesto en C: Como el factor de concentración de esfuerzo en la sección C es bastante elevado, incremente el radio del filete. El factor de concentración de esfuerzo máximo permisible se determina resolviendo la ecuación de esfuerzo para K_t y con $\sigma = \sigma_d = 8750$ psi. Entonces,

$$K_t = \frac{S\sigma_d}{M} = \frac{(0.333\ \text{in}^3)(8750\ \text{lb/in}^2)}{1500\ \text{lb}\cdot\text{in}} = 1.94$$

Según el apéndice A–22–10, el valor mínimo de $r/h = 0.08$ para limitar K_t a 1.94. Entonces, $r_{\min} = 0.08(h) = 0.08(2.00) = 0.16$.

Sea $r = 0.20$ in; $r/h = 0.20/2.00 = 0.10$; $K_t = 1.80$. Por consiguiente,

$$\sigma = \frac{MK_t}{S} = \frac{(1500\ \text{lb}\cdot\text{in})(1.80)}{0.333\ \text{in}^3} = 8100\ \text{psi}\quad \textbf{OK}$$

Comentario Este problema ilustra bien la necesidad de analizar cualquier punto de la viga donde pudiera presentarse un esfuerzo elevado a causa de un momento flexionante elevado, una concentración de esfuerzo elevada, un módulo de sección pequeño o alguna combinación de éstos. También demuestra un método de rediseñar una viga para garantizar la seguridad.

7–10 CENTRO DE FLEXIÓN O CENTRO DE CORTANTE

La fórmula de flexión sirve para calcular el esfuerzo en una viga siempre que las cargas aplicadas pasen por un punto llamado *centro de flexión*, o en ocasiones, *centro de cortante*. Si una sección tiene un eje de simetría y si las cargas pasan a través de dicho eje, entonces también lo hacen por el centro de flexión. Las secciones de viga mostradas en la figura 7–6 son de este tipo.

En secciones cargadas fuera del eje de simetría, debe localizarse la posición del centro de flexión indicada por Q. En la figura 7–7 se identificaron tales secciones.

Para que produzcan flexión pura, las cargas deben pasar a través de Q, como se muestra en la figura 7–26. De no hacerlo, entonces se presenta una condición de *flexión asimétrica* y se tendrían que realizar otros análisis, los cuales no se abordan en este libro. Las secciones del tipo mostrado en la figura 7–26 se utilizan con frecuencia en estructuras. Algunas se prestan muy bien para su producción por extrusión y por ende son muy económicas. Debido a la posibilidad de producir flexión asimétrica, se debe tener cuidado en su aplicación.

En la figura 7–27 se muestra un ejemplo de una aplicación de viga en la que ocurriría flexión asimétrica. Un canal American Standard se instala en voladizo con su alma en posición vertical. Cuando está descargado, el canal está recto, como se muestra en la parte (a) de la figura. Sin embargo, con una carga vertical aplicada al patín superior, como se muestra en la parte (b) de la figura, el canal se tuerce además de flexionarse hacia abajo. Evidentemente, esta situación no es flexión pura y la fórmula de flexión, la ecuación 7–1, no predecería con precisión la condición de esfuerzo en el canal.

Consulte la figura 7–26 donde se ve que el centro de flexión, punto Q, de un canal con su alma en posición vertical, está muy a la izquierda de ésta, afuera del canal mismo. Para que se produzca flexión pura, la línea de acción de la carga aplicada debe pasar a través de este punto. Podría diseñar una ménsula como la que se muestra en la figura 7–27(c) para aplicar la carga a través de ella.

Observe que puede utilizar el canal como viga con las patas hacia abajo o hacia arriba y aplicar la carga a través del eje de simetría, como se muestra en la parte (d) de la figura. En ese caso la acción flexionante no produciría torsión y se puede utilizar la fórmula de flexión para calcular el esfuerzo flexionante.

Los dos ejemplos siguientes demuestran el método de localizar el centro de flexión, Q.

Problema de ejemplo 7–9 Localice el centro de flexión de las dos secciones mostradas en la figura 7–28.

Solución

Objetivo Localizar el centro de cortante, Q, de los dos perfiles.

Datos Los perfiles de la figura 7–28: el canal de la 7–28(a); la sección acopada de la figura 7–28(b).

Análisis En la figura 7–26 se muestra la ubicación general del centro de cortante de cada perfil junto con el procedimiento de calcular el valor de e que localiza a Q con respecto a características específicas de los perfiles.

Resultados ***Sección en canal (a).*** Según la figura 7–26, la distancia e al centro de flexión es

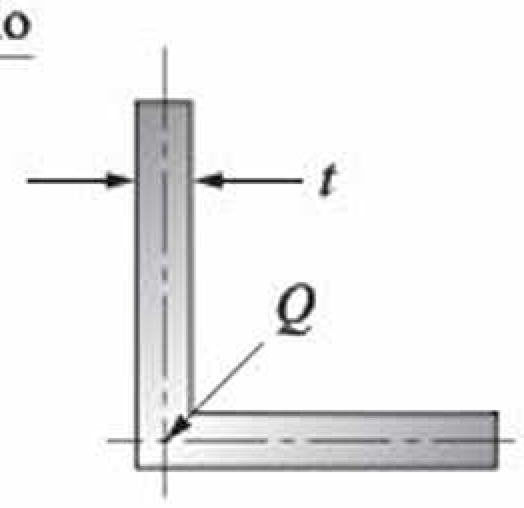
$$e = \frac{b^2h^2t}{4I_x}$$

Observe que las dimensiones b y h se miden a la mitad del patín o alma. Entonces $b = 40$ mm y $h = 50$ mm. Por simetría con respecto al eje X, se ve que I_x es la diferencia entre el valor de I del rectángulo grande externo (54 mm por 42 mm) y el rectángulo pequeño removido (46 mm por 38 mm).

$$I_x = \frac{(42)(54)^3}{12} - \frac{(38)(46)^3}{12} = 0.243 \times 10^6\,\text{mm}^4$$

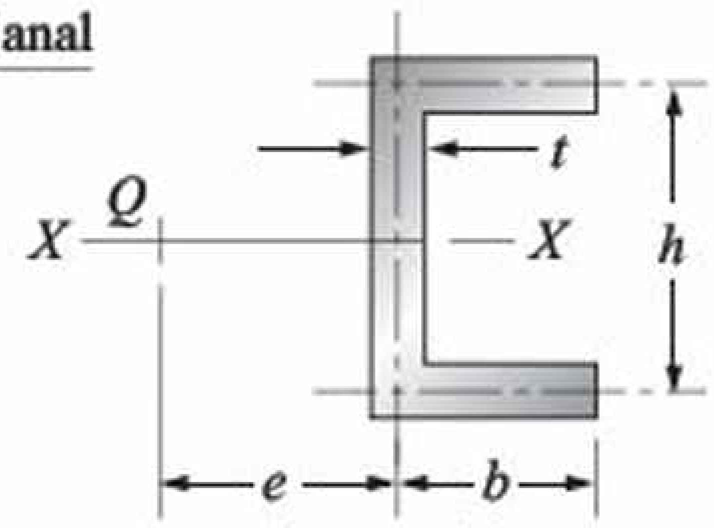
FIGURA 7–26
Localización del centro de flexión Q.

Ángulo



Si t es pequeño, Q se localiza aproximadamente como se muestra

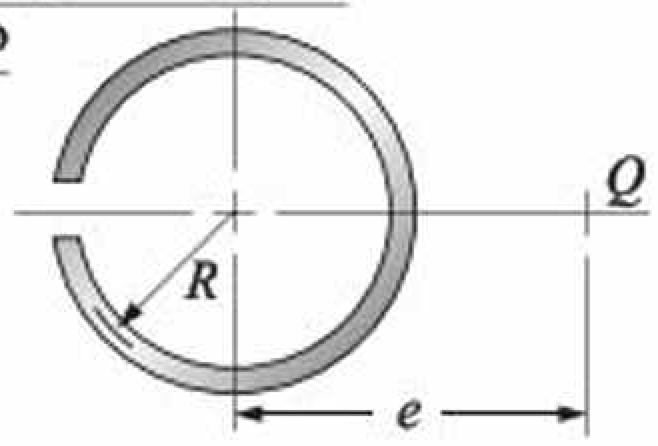
Canal



$$e = \frac{b^2h^2t}{4I_x}$$

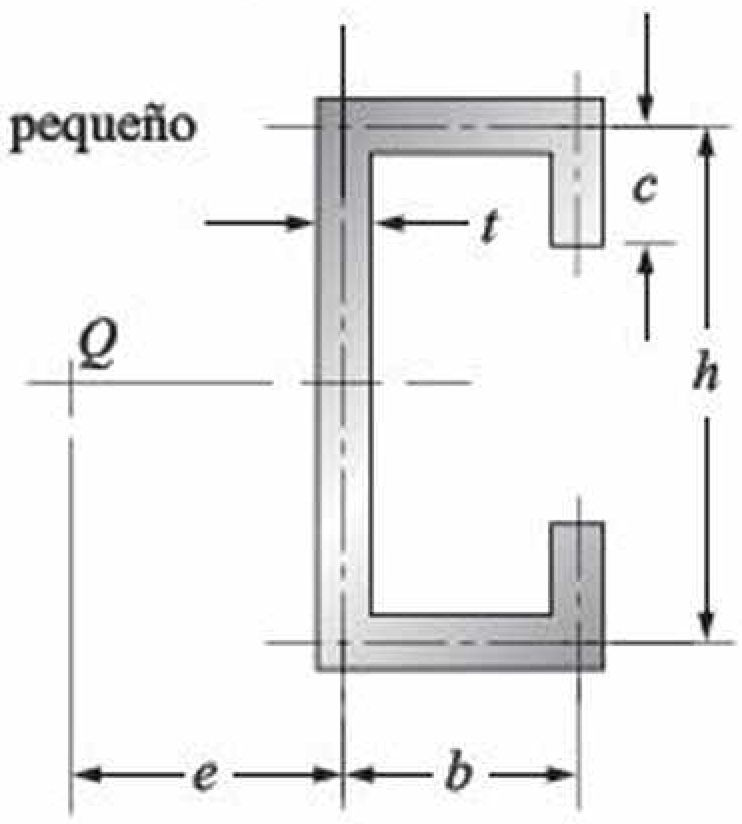
t uniforme

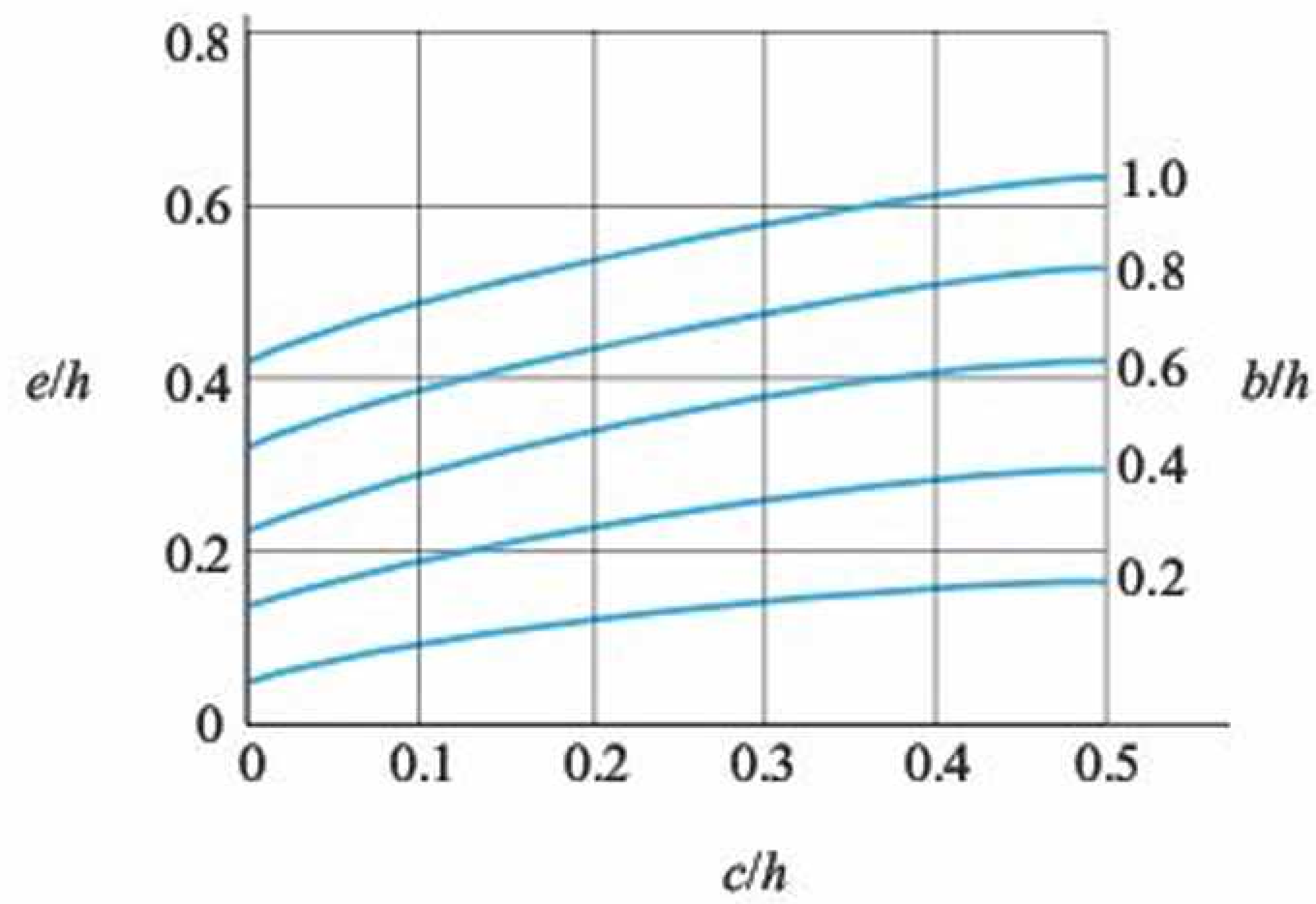
Tubo de pared delgada partido



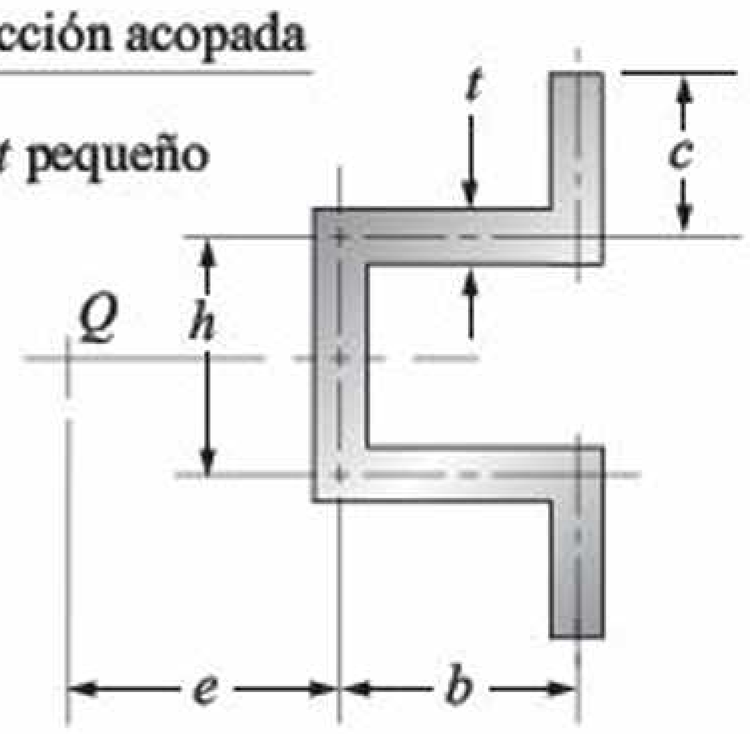
$e = 2R$

Canal alabiado





Sección acopada



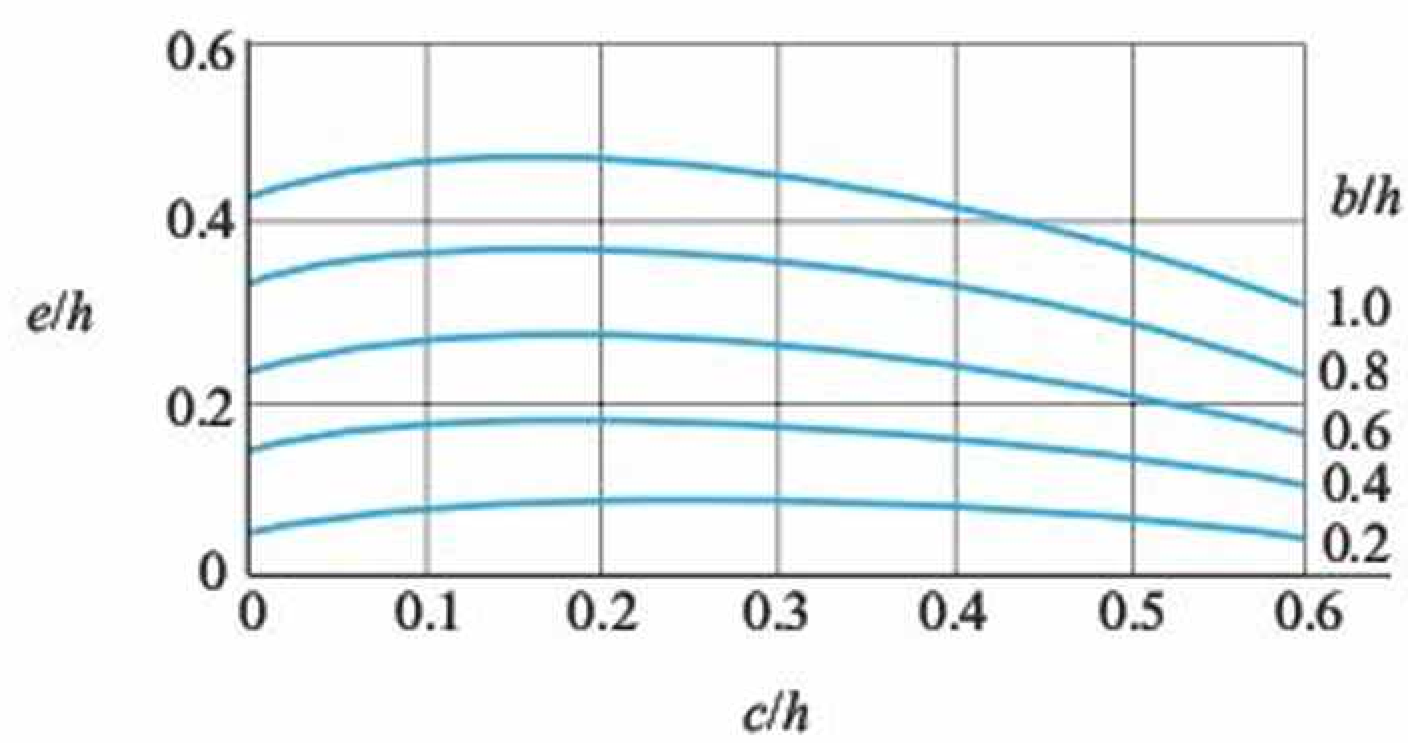
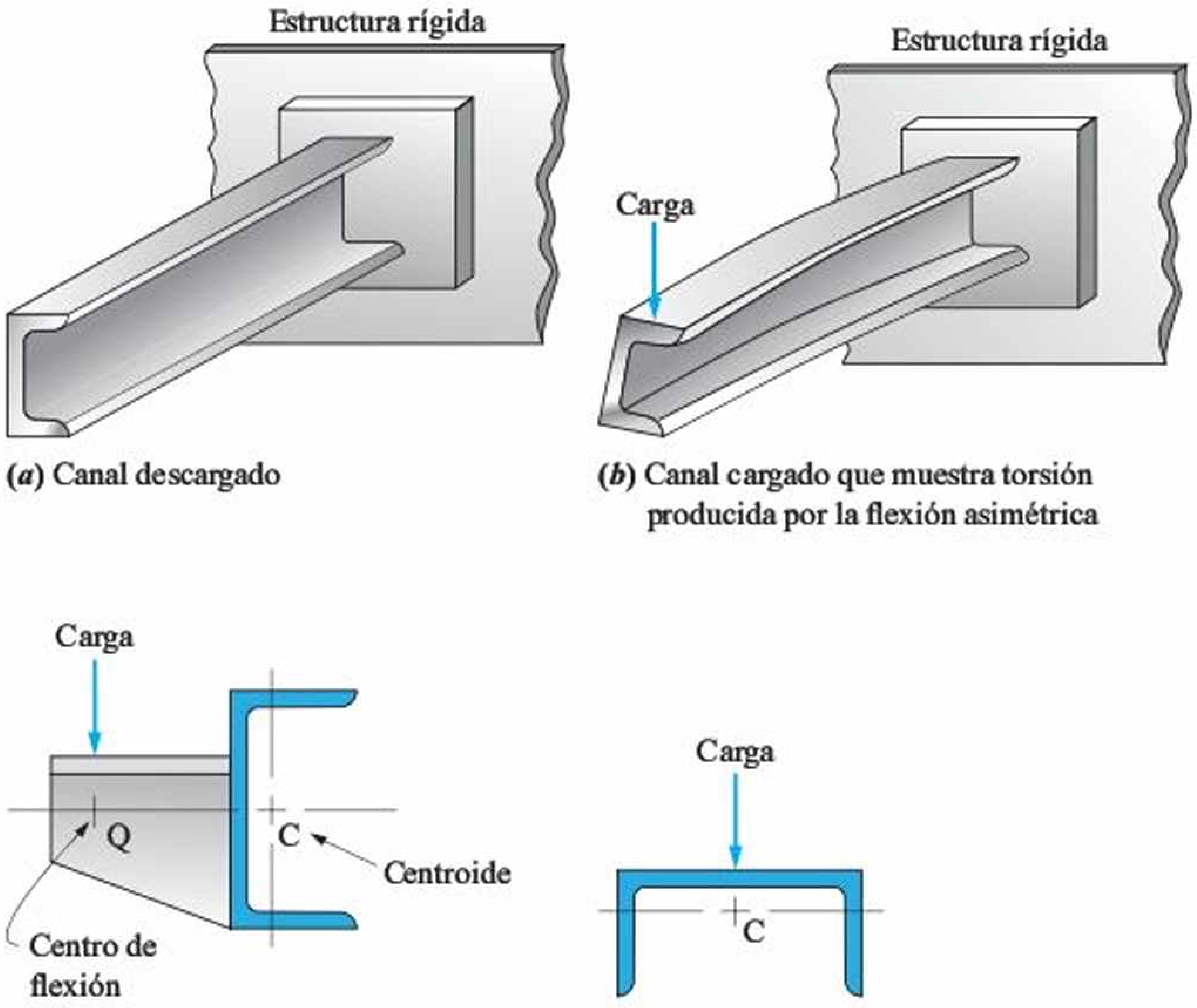


FIGURA 7–27
Ilustración de flexión asimétrica y dos formas de evitarla.



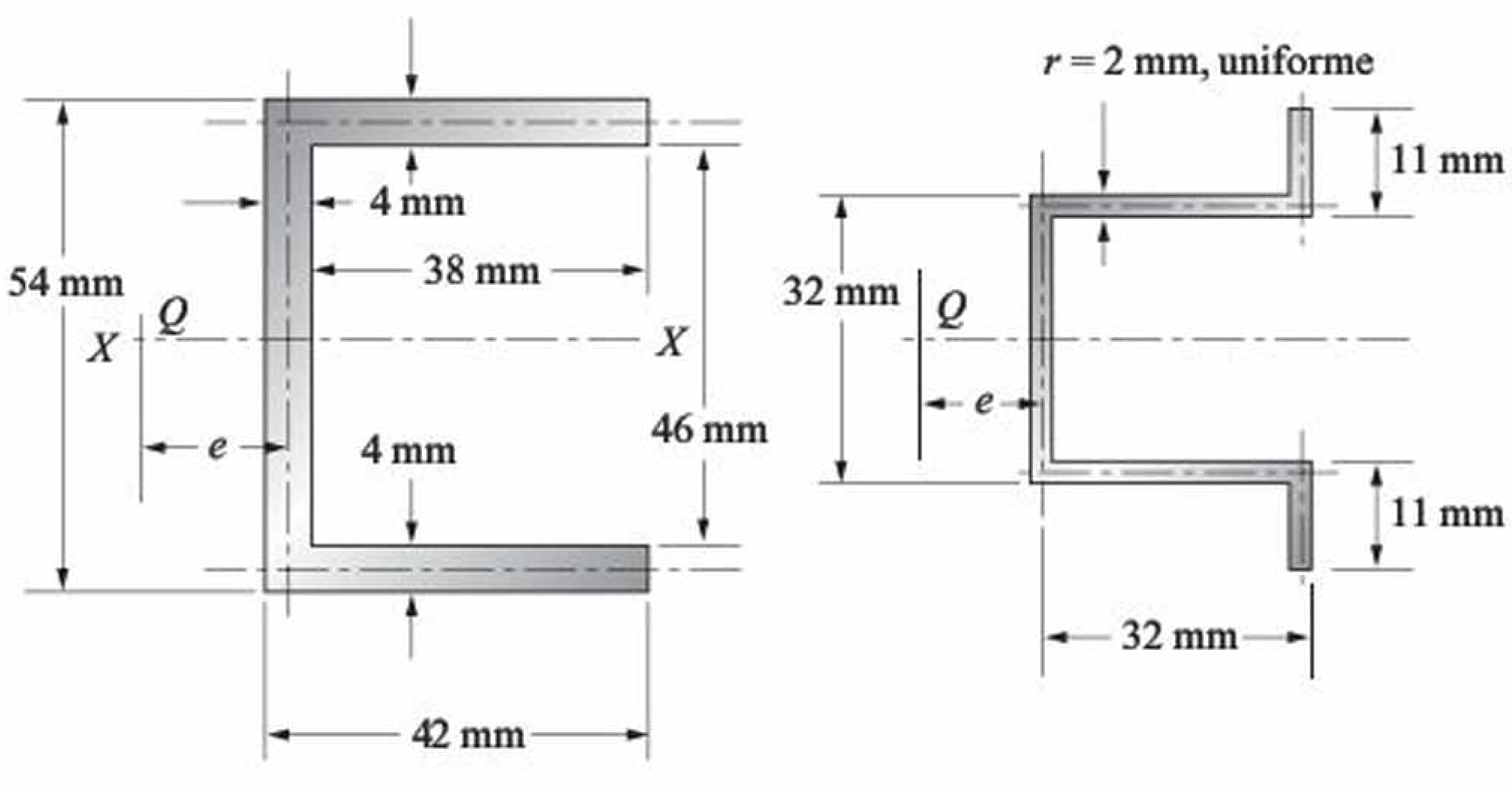
(*a*) Canal descargado

(*b*) Canal cargado que muestra torsión producida por la flexión asimétrica

(*c*) Carga aplicada a través del centro de flexión para evitar la torsión

(*d*) Carga aplicada al alma a través del eje de simetría para evitar la torsión

FIGURA 7–28
Secciones de viga para las cuales se localizaron los centros de flexión en el problema de ejemplo 7–9.



(*a*) Canal

(*b*) Sección acopada

Entonces

$$e = \frac{(40)^2(50)^2(4)}{4(0.243 \times 10^6)} \text{mm} = 16.5 \text{ mm}$$

Esta dimensión está dibujada a escala en la figura 7–28(a).

Sección acopada (b). En ésta la distancia c es una función de las relaciones c/h y b/h.

$$\frac{c}{h} = \frac{10}{30} = 0.3$$

$$\frac{b}{h} = \frac{30}{30} = 1.0$$

Entonces según la figura 7–26, $e/h = 0.45$. Resolviendo para e se obtiene

$$e = 0.45h = 0.45(30 \text{ mm}) = 13.5 \text{ mm}$$

Esta dimensión está dibujada a escala en la figura 7–28(b).

Comentario Ahora, ¿puede idear un diseño para usar una u otra sección como viga y contemplar la aplicación de la carga a través del centro de flexión Q para que produzca flexión pura?

7–11 PERFILES PREFERIDOS PARA SECCIONES TRANSVERSALES DE VIGAS

Recuerde la exposición al principio de este capítulo de la distribución de esfuerzo en la sección transversal de una viga caracterizada por las ecuaciones

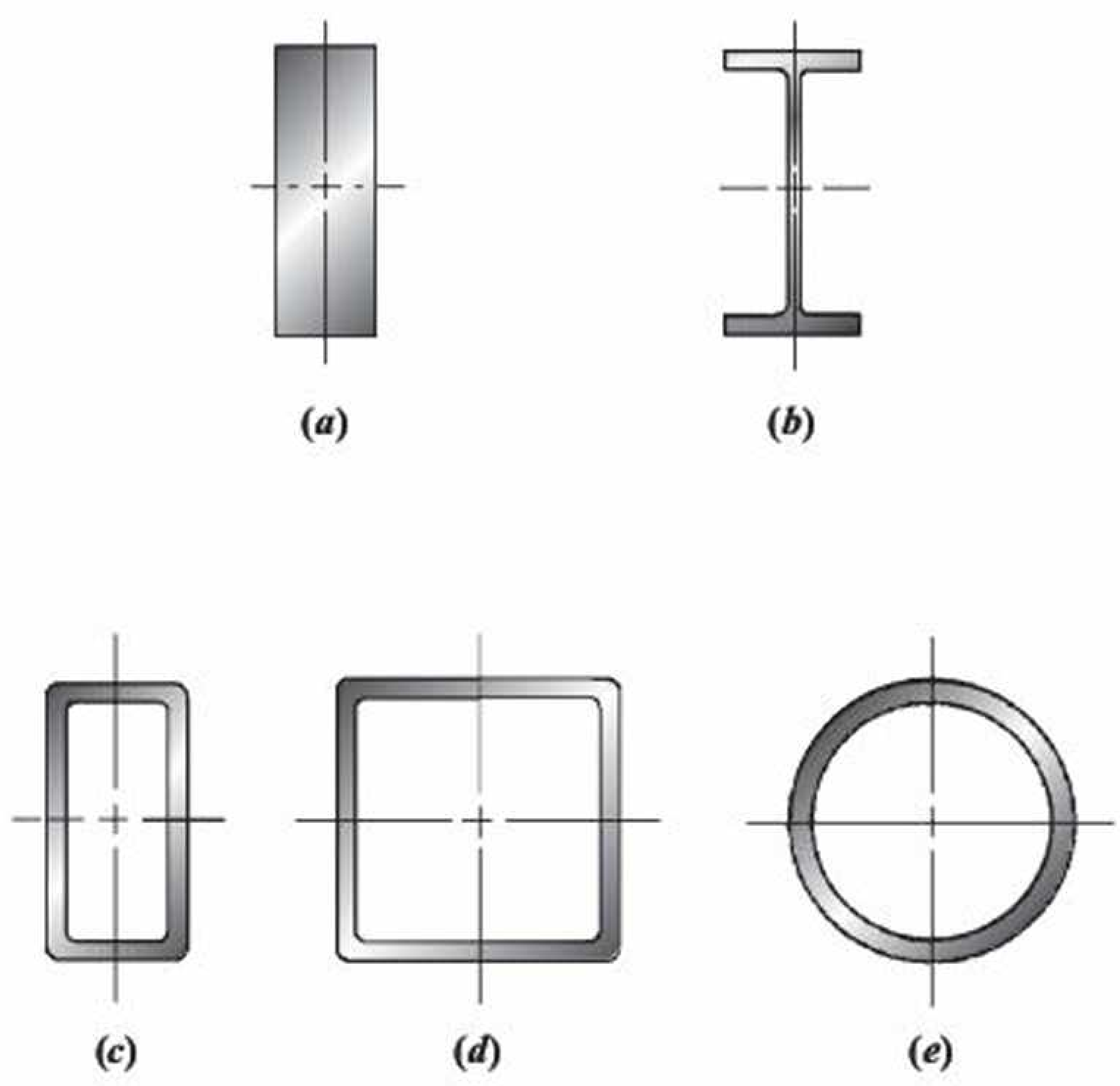
$$\sigma_{\text{máx}} = M_C/I = M/S \text{ en la fibra más externa de una viga}$$
$$\sigma = \sigma_{\text{máx}}(y/c) \text{ en cualquier punto a una distancia } y \text{ del eje neutro}$$

Las figuras 7–9 y 7–10 ilustran la distribución del esfuerzo. Se debe entender que estas ecuaciones se aplican estrictamente sólo a vigas hechas de materiales homogéneos isotrópicos, es decir, que tienen propiedades iguales en todas direcciones.

Como los esfuerzos máximos ocurren cerca de las caras superior e inferior de la sección transversal, el material en ellas opone la mayor parte de la resistencia al momento flexionante externamente aplicado en comparación con el material más próximo al eje neutro. De ahí que es deseable colocar la mayor parte del material lejos del eje neutro para utilizarlo con eficiencia. En esta exposición, eficiencia se refiere a maximizar el momento de inercia y el módulo de sección del perfil para una cantidad dada de material, como lo indica el área de la sección transversal.

La figura 7–29 muestra varios ejemplos de perfiles eficientes de secciones transversales de vigas. Estas ilustraciones están basadas en la suposición de que el esfuerzo de mayor importancia es el flexionante, producido por cargas que actúan en la cara superior de la viga y perpendiculares al eje neutro. En las figuras 7–5, 7–15 y 7–18 se muestran ejemplos. En esos casos, se dice que la flexión es positiva con respecto al eje neutro. También se supone que el material tiene la misma resistencia a compresión y a tensión.

FIGURA 7–29 Perfiles eficientes para vigas.



Comenzando con el perfil rectangular simple mostrado en la figura 7–29(a), se prefiere orientar la dimensión larga verticalmente como se muestra, porque el momento de inercia es proporcional al *cubo* de la altura del rectángulo, donde la altura es la dimensión perpendicular al eje neutro. Por ejemplo, considere el caso de un rectángulo de 40 mm × 125 mm y compare los valores resultantes de I y S.

	125 mm dimensión vertical	40 mm dimensión vertical
$I = bh^3/12$	$I_1 = (40)(125)^3/12 = 6.51 \times 10^6\ \text{mm}^4$	$I_2 = (125)(40)^3/12 = 0.667 \times 10^6\ \text{mm}^4$
$S = bh^2/6$	$S_1 = (40)(125)^2/6 = 1.04 \times 10^5$ mm3	$S^2 = (125)(40)^2/6 = 0.333 \times 10^5\ \text{mm}^3$

Al comparar estos resultados se obtiene

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{6.51 \times 10^6\ \text{mm}^4}{0.667 \times 10^6\ \text{mm}^4} = 9.76 \qquad \frac{S_1}{S_2} = \frac{1.04 \times 10^5\ \text{mm}^3}{0.333 \times 10^5\ \text{mm}^3} = 3.12$$

La comparación de los valores del módulo de sección, S, es lo más pertinente cuando se trata de comparar esfuerzos en vigas porque contiene tanto el momento de inercia I como la distancia, c, a la fibra más externa de la sección transversal de la viga. Si bien una sección con la dimensión larga en posición vertical tiene un momento de inercia de casi diez veces el de una sección con la dimensión larga en posición horizontal, es tres veces más alta, lo cual se traduce en una mejora del módulo de sección en aproximadamente tres veces. No obstante, ésa es una mejora significativa.

Un factor afín en la comparación de perfiles es que la *deflexión* de una viga es inversamente proporcional al momento de inercia, I, como se demostrará en el capítulo 9. Por consiguiente, es de esperarse que la viga rectangular más alta del ejemplo anterior se deflexione sólo 1/9.76 veces tanto como la corta, o sea casi 10%.

El perfil mostrado en la figura 7–29(b) es la muy conocida "viga I". Si se coloca la mayor parte del material en los patines horizontales superior e inferior que son las regiones de los esfuerzos máximos se obtiene la resistencia máxima al momento flexionante. El alma vertical relativamente esbelta sirve para mantener los patines en posición y genera resistencia a las fuerzas cortantes, como se describe en el capítulo 8. Convendría estudiar las proporciones de los perfiles I estándar que aparecen en los apéndices A–7, A–8 y A–11 para tener una idea de espesores de patín y alma razonables. El espesor del patín sometido a compresión es crítico con respecto a pandeo cuando la viga es relativamente larga. Las referencias 1–3 contienen datos sobre proporciones apropiadas.

El tubo rectangular alto mostrado en la figura 7–29(c) es muy similar al perfil I por lo que se refiere a su resistencia a momentos flexionantes producidos por cargas verticales. Los lados verticales desempeñan una función similar a la del alma del perfil I. De hecho, el momento de inercia del área de la sección transversal con respecto al eje centroidal del tubo en (c) sería idéntico al del perfil I en (b), si el espesor de las partes horizontales superior e inferior fuera igual y si cada uno de los lados verticales del tubo tuviera la mitad del espesor del alma del perfil I. El tubo es superior al perfil I cuando se presentan combinaciones de cargas que provocan flexión con respecto a los ejes vertical y horizontal, porque la colocación de los lados verticales lejos del eje Y–Y incrementa el momento de inercia con respecto a dicho eje. El tubo también es superior cuando se aplica torsión, como se expuso en el capítulo 4. Cuando la torsión o la flexión con respecto al eje vertical es significativa, es preferible utilizar el perfil de tubo cuadrado mostrado en la figura 7–29(d). Consulte en el apéndice A–9 lo que se refiere a secciones estructurales huecas (HSS) de acero cuadradas y rectangulares, con frecuencia llamadas simplemente *tubos*.

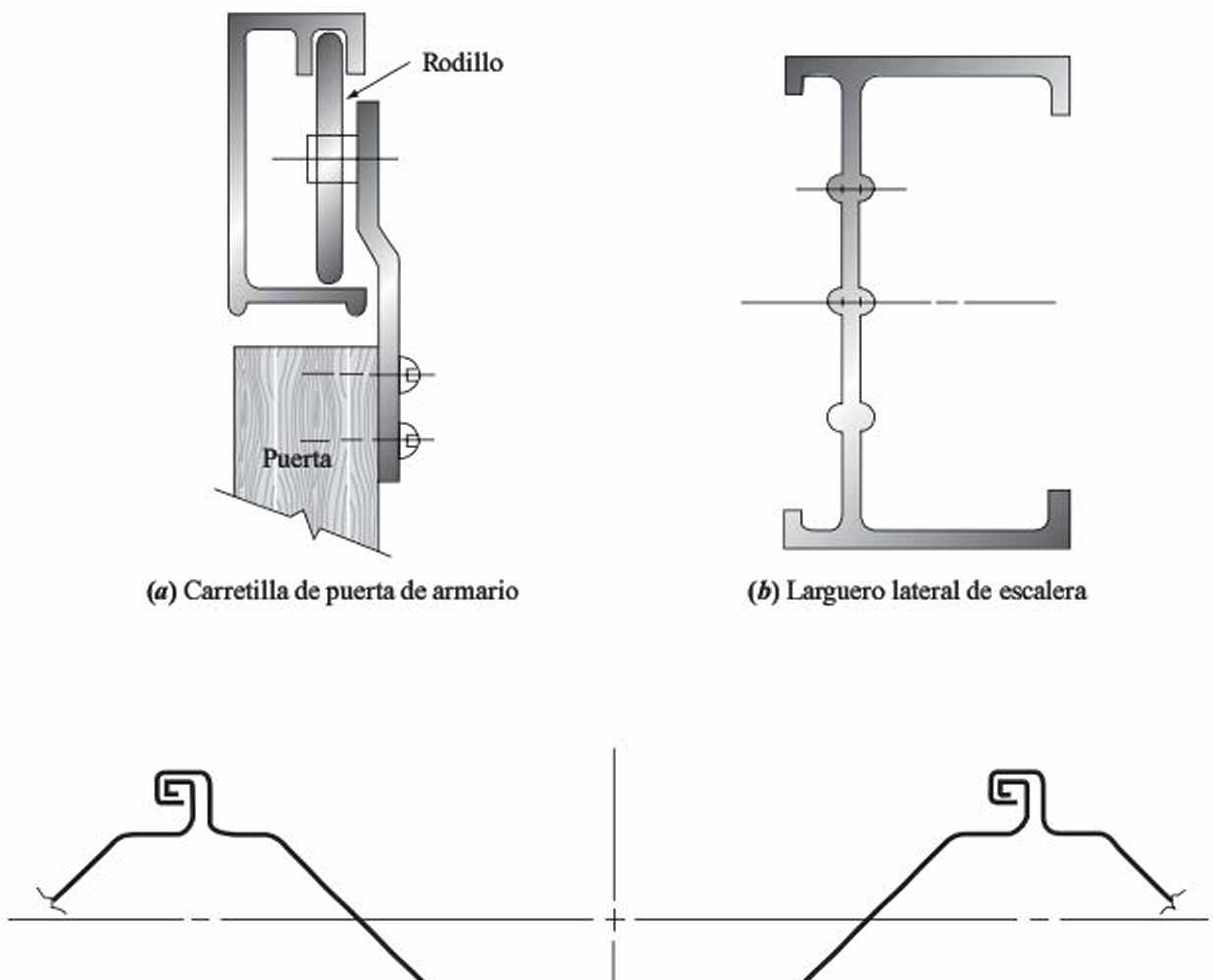
Los tubos circulares mostrados en la figura 7–29(e) producen vigas muy eficientes por las mismas razones citadas con anterioridad para tubos cuadrados. Son superiores a los tubos cuadrados cuando la flexión y torsión se presentan en cantidades significativas. Un ejemplo

obvio de una viga en donde se prefiere un tubo circular es el caso de una flecha rotatoria sometida a cargas flexionantes y torsionales, tal como la flecha motriz y los ejes de un automóvil o camión. Consulte el apéndice A–12 por lo que se refiere tubos de acero y el A13 por lo que se refiere a tubería mecánica circular.

Perfiles hechos de materiales delgados. La producción económica de vigas de dimensiones moderadas se logra mediante laminación o troquelado de láminas metálicas planas relativamente delgadas. El aluminio y muchos plásticos se extruyen para producir perfiles de sección transversal uniforme, a menudo con paredes delgadas y patines extendidos. En las figuras de la P6–10 a la P6–20 del capítulo 6 se muestran ejemplos. Tales perfiles se adaptan sobre todo al uso de la viga. Vea si puede identificar miembros semejantes a vigas con perfiles especiales en torno suyo. En su hogar es posible que encuentre vigas como ésas, utilizadas como rieles de puerta de armario, varillas de cortinero, estructuras de muebles de metal, cubiertas o toldos de patio, escaleras, partes de juguetes de plástico, herramientas en el taller o partes de aparatos domésticos o herramientas de mantenimiento de jardín. En su automóvil examine los brazos de limpiaparabrisas, partes de la suspensión, palancas de velocidades, varillajes o soportes en el compartimiento del motor y las defensas. Las estructuras de aeronaves contienen numerosos ejemplos de perfiles de pared delgada diseñados para sacar provecho de su peso ligero. Visite también los sitios de Internet citados en este capítulo.

La figura 7–30 muestra tres ejemplos de perfiles extruidos o laminados utilizados en el hogar. La parte (a) muestra un riel de puerta de armario donde el carril de rodamiento del rodillo que soporta la puerta se produjo como una parte integral de la extrusión de aluminio.

FIGURA 7–30 Ejemplos de secciones de viga de pared delgada.



(*a*) Carretilla de puerta de armario

(*b*) Larguero lateral de escalera

(*c*) Panel de toldo de patio

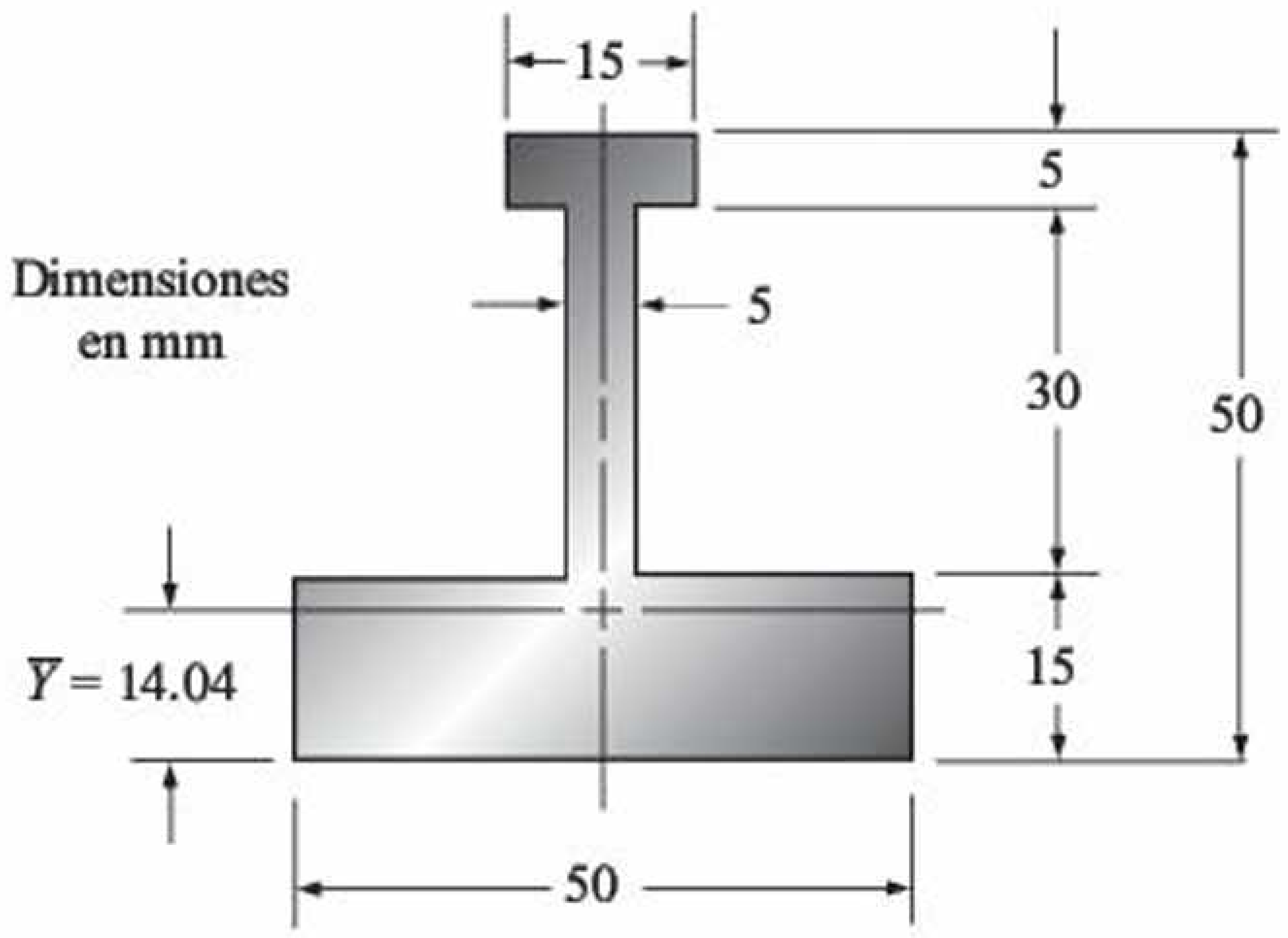


FIGURA 7–31 Sección transversal asimétrica del problema de ejemplo 7–10.

El larguero lateral extruido de una escalera extensible de aluminio se ilustra en la parte (b). La parte (c) muestra una parte de cubierta de patio laminada hecha de lámina de aluminio de sólo 0.025 in (0.64 mm) de espesor. El perfil está especialmente diseñado para que embone entre sí para formar un panel continuo capaz de cubrir un área amplia. Algunas características sobresalientes de diseño de estas secciones son de hacerse notar. Los patines extendidos se refuerzan con salientes en forma de bulbo para volverlos rígidos localmente y resistentes al arrugamiento o pandeo. Las áreas planas amplias se refuerzan por medio de nervaduras o corrugaciones laminadas, también para inhibir el pandeo local. Las referencias 1–3 contienen indicaciones para el diseño de tales características.

Vigas hechas de materiales anisotrópicos. El diseño de vigas que se van a fabricar con materiales de resistencias diferentes a tensión y a compresión requiere una atención especial. La mayoría de los tipos de hierro colado, por ejemplo, son mucho más resistentes a compresión que a tensión. El apéndice A–17 da las propiedades del hierro maleable ASTM A220, grado 80002 como,

Resistencia máxima a tensión: s_u = 655 MPa (95 ksi)

Resistencia máxima a compresión: s_{uc} = 1650 MPa (240 ksi)

Un perfil de viga eficiente que tendría en cuenta esta diferencia es el perfil I modificado mostrado en la figura 7–31. Como el momento flexionante positivo típico somete al patín inferior a tensión, con un patín inferior más grande, el eje neutro se desplaza hacia abajo y el esfuerzo de tensión resultante se reduce en el patín inferior en relación con el esfuerzo de compresión en el patín superior. El ejemplo 7–10 ilustra el resultado con el factor de diseño basado en la resistencia la tensión casi igual a aquella basada en la resistencia a la compresión.

Problema de ejemplo 7–10

La figura 7–31 muestra la sección transversal de una viga de hierro maleable, ASTM A220, grado 80002. La viga se somete a un momento flexionante máximo de 1025 N·m que actúa de tal modo que somete a la cara inferior de la viga a tensión y a la cara superior a compresión. Calcule el factor de diseño resultante para la viga basado en la resistencia máxima del hierro. El momento de inercia del área de la sección transversal es de 1.80×10^5 mm^4.

Solución

Objetivo: Calcular el factor de diseño basado en la resistencia máxima.

Datos: El perfil de viga mostrado en la figura 7–11, $I = 1.80 \times 10^5$ mm^4. M = 1025 N·m. El material es hierro maleable, ASTM A220, grado 80002.

Análisis Como la sección transversal de la viga no es simétrica, el valor del esfuerzo de tensión máximo en la cara inferior de la viga, σ_{tb}, será menor que el esfuerzo de compresión máximo en la cara superior, σ_{ct}. Calcularemos:

$$\sigma_{tb} = Mc_b/I \quad \text{y} \qquad \sigma_{ct} = Mc_t/I$$

donde $c_b = \overline{Y} = 14.04$ mm y $c_t = 50 - 14.04 = 35.96$ mm. El esfuerzo de tensión en la cara inferior se comparará con la resistencia máxima a la tensión para determinar el factor de diseño basado en tensión, N_t, con

$$\sigma_{tb} = s_u/N_t \quad \text{o} \quad N_t = s_u/\sigma_{tb}$$

donde $s_u = 655$ MPa según el apéndice A–17. Entonces el esfuerzo de compresión en la cara superior se comparará con la resistencia máxima a la compresión para determinar el factor de diseño basado en la compresión, N_c, con

$$\sigma_{ct} = s_{uc}/N_c \quad \text{o} \quad N_c = s_{uc}/\sigma_{ct}$$

donde $s_{uc} = 1650$ MPa en el apéndice A–17. El menor de los dos valores de N será el factor de diseño final para la viga.

Resultados En la cara inaferior de la viga,

$$\sigma_{tb} = \frac{Mc_b}{I} = \frac{(1025\,\text{N}\cdot\text{m})(14.04\,\text{mm})}{1.80 \times 10^5\,\text{mm}^4}\cdot\frac{(1000\,\text{mm})}{\text{m}} = 79.95\,\text{MPa}$$
$$N_t = S_u/\sigma_{tb} = 655\,\text{MPa}/79.95\,\text{MPa} = 8.19$$

En la cara superior de la viga,

$$\sigma_{ct} = \frac{Mc_t}{I} = \frac{(1025\,\text{N}\cdot\text{m})(35.96\,\text{mm})}{1.80 \times 10^5\,\text{mm}^4}\cdot\frac{(1000\,\text{mm})}{\text{m}} = 204.8\,\text{MPa}$$
$$N_c = s_{uc}/\sigma_{ct} = 1650\,\text{MPa}/204.8\,\text{MPa} = 8.06$$

Comentario El esfuerzo de compresión en la cara superior de viga es el valor límite en este problema porque ahí se presenta el factor de diseño menor. Observe que los dos valores del factor de diseño resultaron casi iguales, lo que indica que el perfil de la sección transversal se optimizó razonablemente bien para las diferentes resistencias a la tensión y a la compresión.

7–12 DISEÑO DE VIGAS HECHAS DE MATERIALES COMPUESTOS

Los materiales compuestos, descritos en el capitulo 2, ofrecen propiedades superiores cuando se utilizan en el diseño de vigas por la capacidad de adaptación de los constituyentes al compuesto y su colocación en la viga. El procesamiento de los materiales compuestos a menudo permite diseñar perfiles únicos que optimizan la geometría de la estructura con respecto a la magnitud y dirección de la cargas a ser soportadas. La combinación de estas propiedades con la ventaje inherente de los compuestos en función de las relaciones de resistencia elevada a peso y de rigidez a peso los hace muy deseables para usarlos en vigas. Consulte las referencias 5, 6, 8, 11, 12, 15 y 17.

El análisis de la sección 7–10 se aplica igualmente bien al diseño de vigas compuestas. El diseñador deberá seleccionar un perfil para la sección transversal de la viga que por sí misma sea eficiente en cuanto a resistencia a momentos flexionantes. Además, el diseñador puede requerir que la mayor parte de las fibras más resistentes y más rígidas se concentre en las regiones donde se espera que ocurran los esfuerzos más elevados, o sea, en las fibras más

externas de la viga situadas lejos del eje. Se pueden colocar más capas de un relleno tipo tela en la regiones de esfuerzo elevado.

Una técnica efectiva de diseño de vigas compuestos es emplear un núcleo de material muy ligero para formar una estructura hecha de espuma rígida o un material apanalado cubierta por capas relativamente delgadas de fibras resistentes rígidas en una matriz de polímero. Si se sabe que los momentos flexionantes siempre van a actuar en la misma dirección, la fibras del compuesto pueden alinearse en la dirección de los esfuerzos de tensión y compresión presentes en la viga. Si se espera que los momentos flexionantes actúen en varias direcciones, se puede especificar una colocación más dispersa de las fibras o se pueden colocar capas de tela a varios ángulos, como se sugiere en la figura 2–28.

Se debe tener cuidado al diseñar y probar estructuras armadas con vigas compuestas debido a los múltiples modos de falla posibles. La estructura puede fallar en la región de esfuerzo de tensión elevado por falla de las fibras o la matriz o por del desprendimiento de las fibras de la matriz. Pero tal vez un modo de falla más probable de un compuesto laminado es la falla por cortante interlaminar en regiones de esfuerzo cortante elevado cerca del eje neutro, como se ilustra en la figura 7–2(f). La falla también podría presentarse en la región de esfuerzo de compresión por pandeo local del perfil o por deslaminación.

Cuando la viga se diseñe con la suposición de flexión en un cierto plano, es esencial que las cargas se apliquen correctamente y que el perfil mismo promueva la flexión pura y no una combinación de flexión y torsión. Se debe repasar la exposición del *centro de cortante*, sección, 7–10.

El perfil y las dimensiones de la sección transversal de la viga se pueden modificar de conformidad con la magnitud del momento flexionante en varias posiciones en una viga. Por ejemplo, un viga en voladizo que soporta una carga concentrada en su extremo libre experimenta el momento de flexión máximo en el punto de apoyo, y la magnitud de este momento de flexión disminuye linealmente hacia el extremo libre de la viga. Entonces la sección transversal puede ser más alta en el apoyo y progresivamente más baja hacia el extremo libre. Una viga simplemente apoyada con una carga en el centro experimenta su momento flexionante máximo precisamente en ese lugar, y disminuye hacia cada apoyo. Entonces la viga puede ser más gruesa en el centro y más delgada hacia los extremos.

Las vigas con superficies curvas o planas amplias, como las alas de un avión, se deben diseñar de modo que los amplios paneles resulten rígidos y adecuadamente resistentes. Es posible que el revestimiento de los paneles tenga que ser reforzados con nervaduras internas para dividirlos en áreas más pequeñas.

Las penetraciones en una viga compuesta se diseñarán con cuidado para que transfieran uniformemente las cargas de una parte de la viga a otra. De ser factible, las penetraciones se situarán en regiones de esfuerzo reducido. Asimismo, los sujetadores se diseñarán con cuidado para que se encajen adecuadamente en el material compuesto fibroso. Se pueden considerar protuberancias engrosadas donde se van colocar los sujetadores. Se puede reducir al mínimo el número de sujetadores mediante la configuración inteligente de la estructura como, por ejemplo, mediante el moldeo de ménsulas integradas a la estructura principal.

En resumen, el diseñador de vigas compuestas ha de analizar con cuidado la distribución de los esfuerzos en la viga e intentar optimizar la colocación del material para optimizar el perfil y las dimensiones de la viga. El diseñador debe visualizar la trayectoria de la transferencia de la carga desde su punto de aplicación hasta el último punto de apoyo.

REFERENCIAS

1. Aluminum Association, *Aluminum Design Manual*, Washington, D.C., 2005.
2. American Institute of Steel Construction, *Specification for Structural Steel Buildings*, AISC, Chicago, IL, 2005.
3. American Institute of Steel Construction, *Manual of Steel Construction: Load and Resistance Factor Design*, 3ª ed., AISC, Chicago, IL, 2001.
4. American Institute of Steel Construction, *Manual of Steel Construction: Allowable Stress Design*, 9ª ed., AISC, Chicago, IL, 1989.
5. ASM International, *ASM Handbook, Volume 21: Composites*, Materials Park, OH, 2001.
6. ASTM International, *The Composite Materials Handbook–MIL 17*, ASTM, West Conshohocken, PA, 2002

7. Halperin, D.A. y T.G. Bible, *Principles of Timber Design for Architects and Builders*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1994.
8. Jang, Bor Z., *Advanced Polymer Composites: Principles and Applications*, ASM International, Materials Park, OH, 1994.
9. Mallick, P.K., *Composites Engineering Handbook*, Marcel Dekker, Nueva York, 1997.
10. McCormac, J.C y J. Nelson, *Structural Steel Design–LRFD Method*, 4ª ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2007.
11. Miravete, A., *Optimisation of Composite Structures Design*, Woodhead Publishing, Cambridge, Inglaterra, 1996.
12. Quinn, J. A., *Composites Design Manual*, Woodhead Publishing, Cambridge, Inglaterra, 1999.
13. Segui, W.T., T. Ziolkowski y B. Stenquist, *LRFD Steel Design*, 3ª ed., Thomson–Engineering, Toronto, Ontario, Canadá, 2002.
14. Speigel, L y G. F. Limbrunner, *Applied Structural Steel Design*, 4ª ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 2001.
15. Staab, George H., *Laminar Composites*, Butterworth–Heinemann, Boston, 1999.
16. Young, W.C. y R. G. Budynas, *Roark's Formulas for Stress and Strain*, 7ª ed., McGraw–Hill, Nueva York, 2002.
17. Zweben, Carl, Composite Materials, Parte 1, Sección 10, *Mechanical Engineers Handbook, Materials and Mechanical Design*, 3ª ed., Myer Kutz, Ed., John Wiley & Sons, Nueva York, 2005.

SITIOS DE INTERNET

Cualquier problema de diseño abierto, donde el objetivo es especificar un perfil de viga adecuado y el tamaño de su sección transversal, podría utilizar la gran variedad de perfiles y tamaños disponibles en los siguientes sitios, repetidos del capítulo 6, para complementar los datos dados en el apéndice.

1. Profiles, Inc. www.profiles–inc.com. Fabricante de perfiles laminados o estirados, hechos sobre pedido, para componentes de precisión de acero al carbón y de aleación, cobre, latón y otros materiales no ferrosos.
2. iLevel by Weyerhaeuser www.ilevel.com/floors Fabricante de viguetas de piso para la construcción de edificios hechas como elaboraciones de perfil I eficientes a partir de componentes de madera simples. Seleccione el producto "TJ18 Joists". La Joist Specifier Guide da dimensiones detalladas y datos de aplicación de los productos Silent Floor–Trus Joist.
3. Nucor Coporation–Vulcraft Group www.vulcraft.com Fabricante de viguetas de acero de alma abierta, trabes, perfiles para plataformas de piso y techo y sistemas de viguetas de piso compuestos para usarse en centros comerciales, escuelas y edificios de oficinas.
4. Unistrut Corporation www.unistrut.com Fabricante de sistemas de componentes hechos de acero o fibra de vidrio que pueden ser armados en varias configuraciones para producir marcos, estructuras, soportes, unidades de almacenamiento, sistemas de apoyo, unidades móviles y otros dispositivos. Hay catálogos en línea que proporcionan datos de propiedades, información sobre aplicaciones, instrucciones de ensamble e ilustraciones de usos.
5. 80/20 Inc. www.8020.net Fabricante de sistemas de componentes hechos de aluminio extruido que pueden ser armados en varias configuraciones para usarse como equipo de producción, carretones, dispositivos automáticos, estaciones de trabajo, unidades de almacenamiento y muchos otros sistemas.
6. Paramount Extrusion Company http://paramountextrusions.com/shapes Fabricante de varias extrusiones estándar tales como canales, secciones H, secciones T, tubos huecos (redondos, cuadrados, rectangulares), barras cuadradas y rectangulares, secciones de manijas y muchos otros para usarse en muebles de oficina, productos de consumo, gabinetes, etc. El catálogo da datos que pueden ser útiles en los problemas que vienen en este libro.
7. Jackson Tube Service, Inc. www.jackson–tube.com/shapes.htm Fabricante de una amplia variedad de perfiles y tamaños de tubería que pueden ser útiles en la solución de los problemas incluidos en este libro.

PROBLEMAS

Análisis de esfuerzos flexionantes

7–1.M Se utiliza una barra cuadrada de 30 mm por lado como viga simplemente apoyada, sometida a un momento flexionante de 425 N·m. Calcule el esfuerzo máximo producido por flexión en la barra.

7–2.M Calcule el esfuerzo máximo producido por flexión en una barra redonda de 20 mm de diámetro cuando se somete a una momento flexionante de 120 N·m.

7–3.E Se aplica un momento flexionante de 5800 lb·in a una viga de sección transversal rectangular de 0.75 in × 1.50 in. Calcule el esfuerzo flexionante máximo en la viga (a) si el lado vertical es de 1.50 in, y (b) el lado vertical es de 0.75 in.

7–4.E Una viga de madera soporta un momento flexionante de 15 500 lb·in. Su sección transversal es rectangular de 1.50 in de ancho × 7.25 in de altura. Calcule el esfuerzo máximo producido por flexión en la viga.

7–5.E La carga mostrada en la figura P7–5 debe ser soportada por una viga de acero W12 × 16. Calcule el esfuerzo producido por flexión.

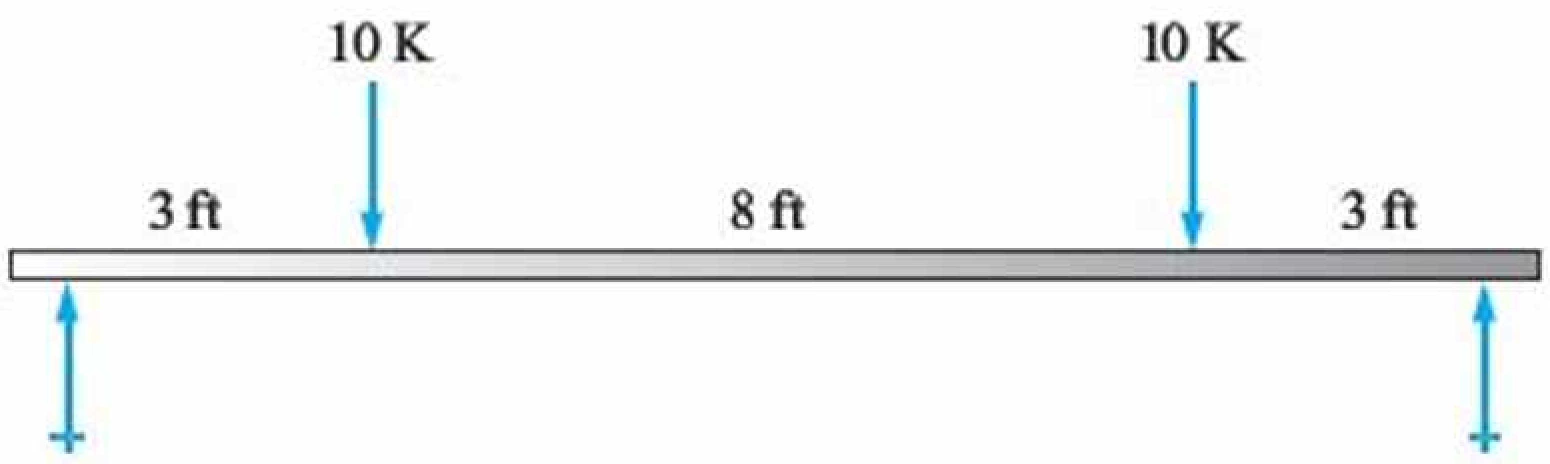


FIGURA P7–5

7–6.E Una viga American Standard, W12 × 35, soporta la carga mostrada en la figura P7–6. Calcule el esfuerzo producido por flexión.

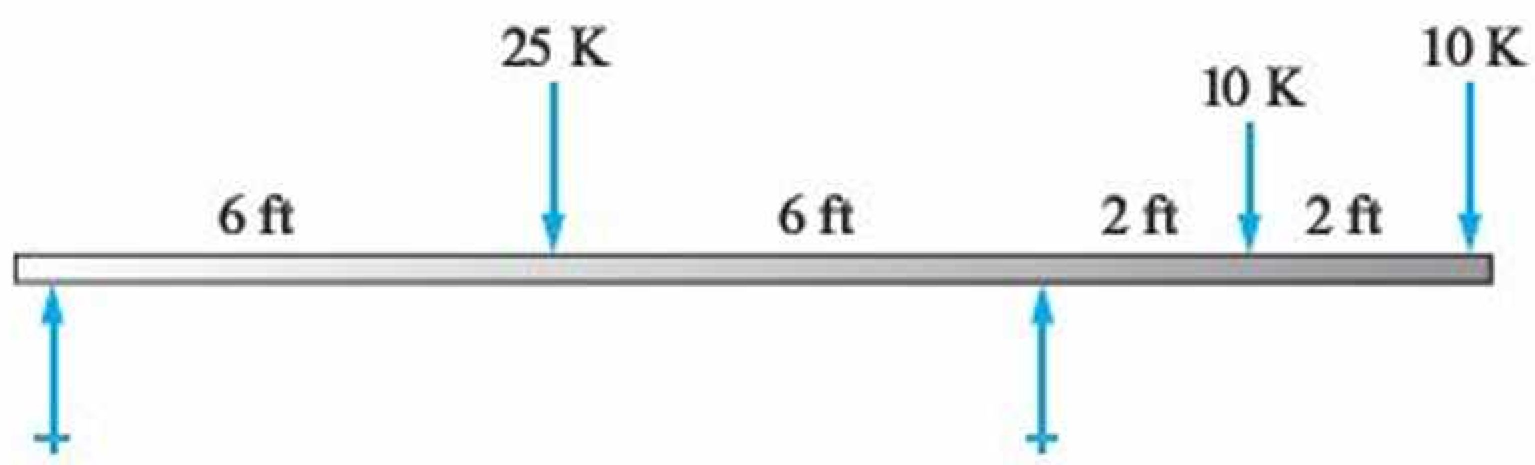


FIGURA P7–6

7–7.E La viga de 24 in de largo mostrada en la figura P7–7 es un canal de aluminio, C4 × 2.331, colocada con las patas hacia abajo de tal modo que la cara plana de 4 in pueda soportar las cargas aplicadas. Calcule los esfuerzos de tensión y compresión máximos en el canal.

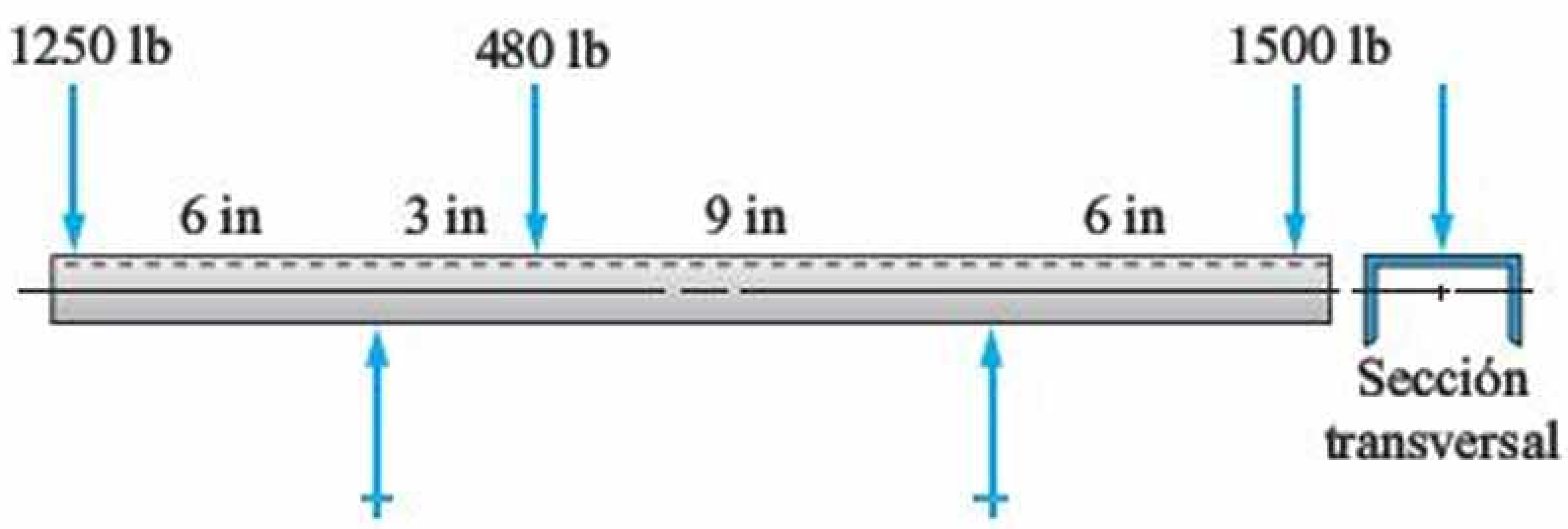


FIGURA P7–7

7–8.E La carga de 650 lb aplicada en el centro de la barra de 28 in de largo mostrada en la figura P7–8 es soportada por un tubo de acero estándar, cédula 40 de $1\frac{1}{2}$ in. Calcule el esfuerzo en el tubo producido por flexión.

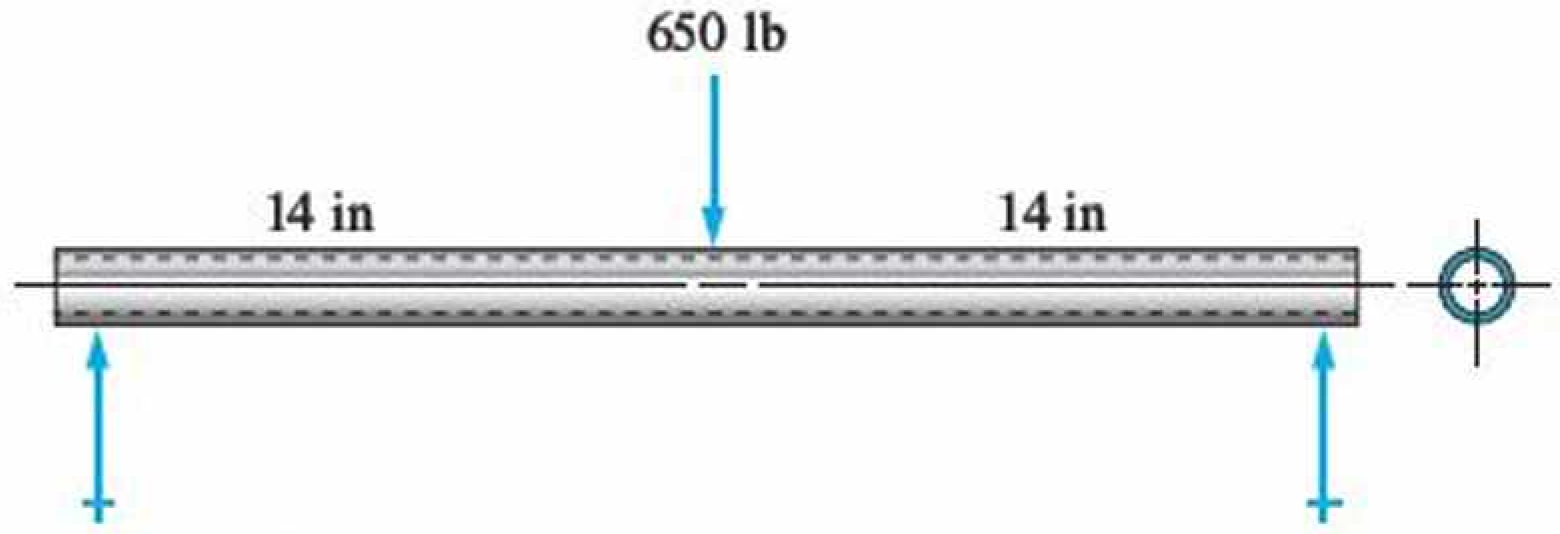
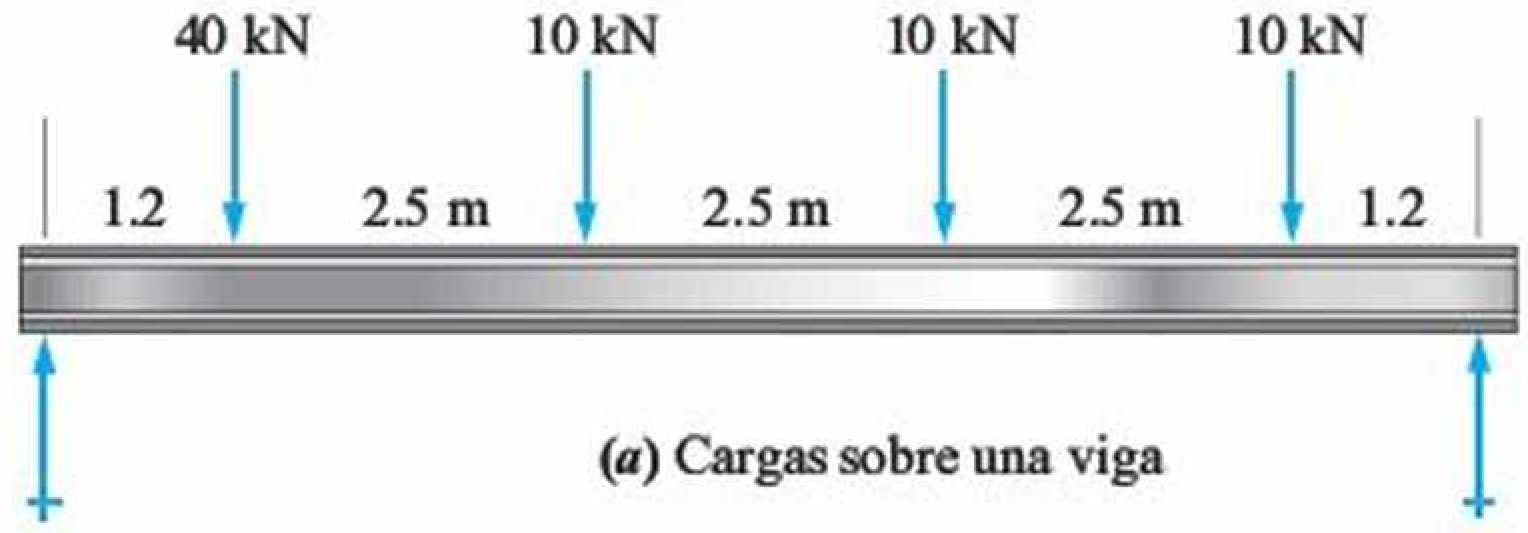
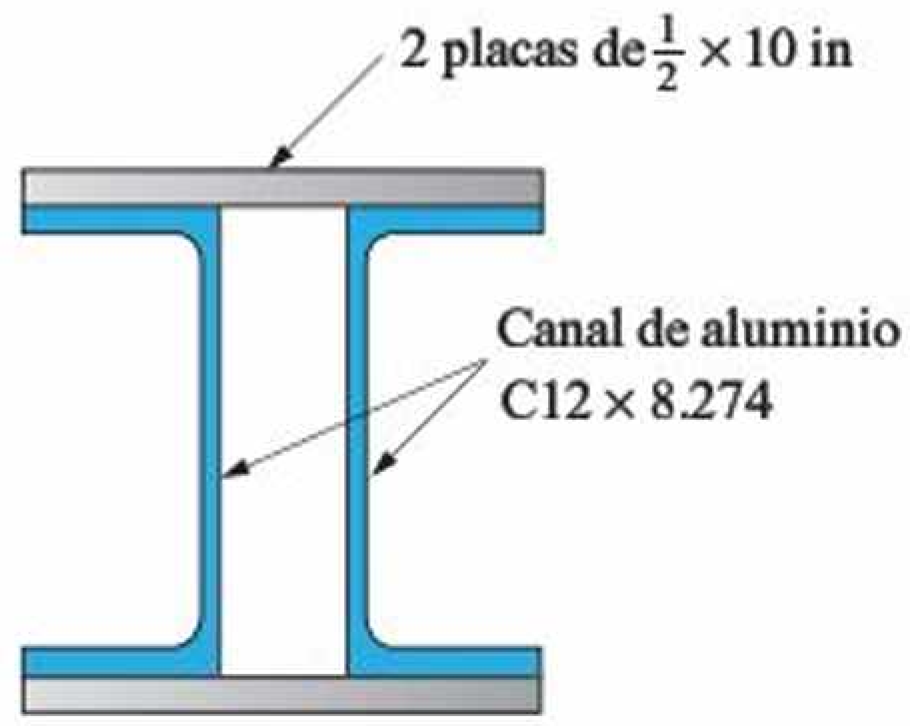


FIGURA P7–8

7–9.M La carga mostrada en la figura P7–9(a) tiene que ser soportada por la viga mostrada en la figura P7–9(b). Calcule el esfuerzo producido por flexión en la viga.



(*a*) Cargas sobre una viga



(*b*) Sección transversal

FIGURA P7–9

7–10.C Una viga I de aluminio, 19 × 8.361 soporta la carga mostrada en la figura P7–10. Calcule el esfuerzo producido por flexión en la viga.

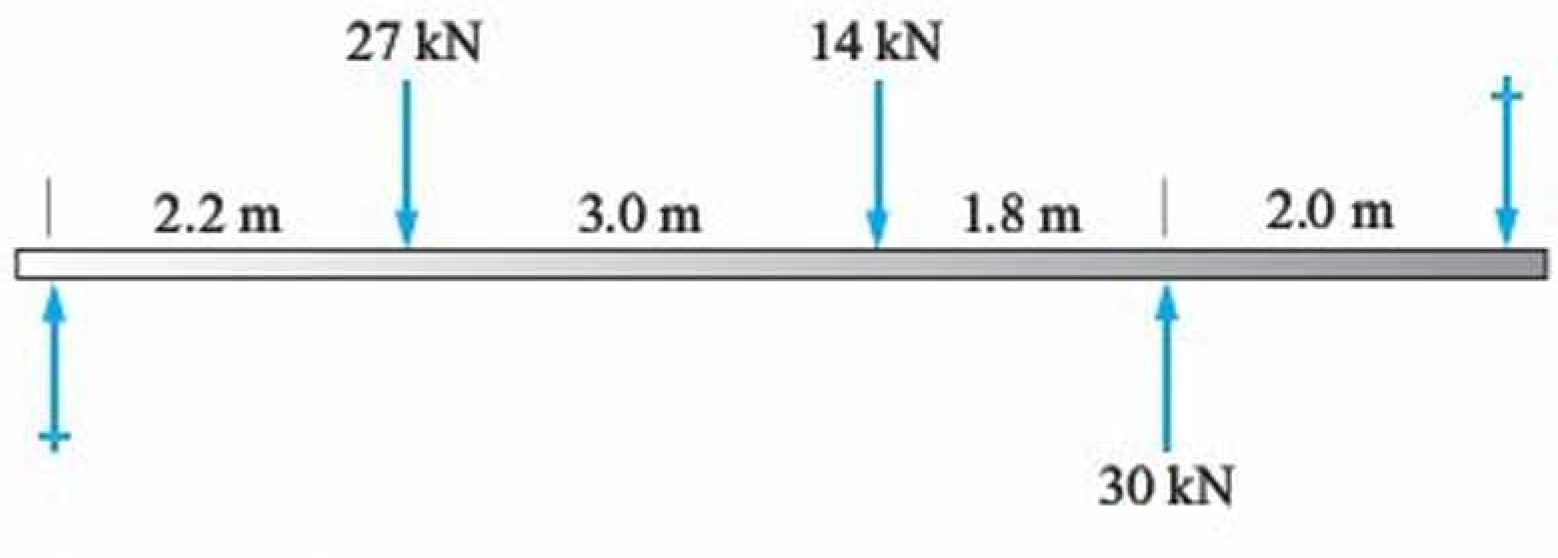


FIGURA P7–10

7–11.E Una parte de un chasis de camión se compone de dos miembros acanalados, como se muestra en la figura P7–11. Si el momento en la sección es de 60 000 lb·ft, calcule el esfuerzo flexionante en el chasis. Suponga que los dos canales actúan como una viga simple.

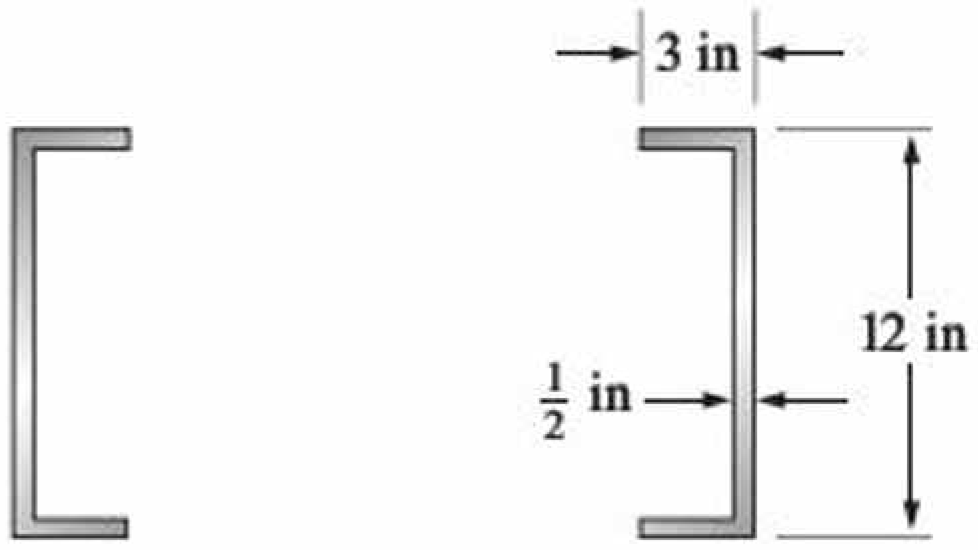


FIGURA P7–11 Componentes del chasis del camión del Problema 7–11

Diseño de vigas

7–12.M Calcule el diámetro mínimo requerido de barra circular utiliza como viga sometida a un momento flexionante de 240 N·m con un esfuerzo no mayor que 125 MPa.

7–13.M Se va a utilizar una barra rectangular como una viga sometida a un momento flexionante de 145 N·m. Si su altura tiene que ser tres veces su ancho, calcule las dimensiones mínimas requeridas para limitar el esfuerzo a 55 MPa.

7–14.M La sección T mostrada en la figura P7–14 tiene que soportar un momento flexionante de 28.0 kN·m. Se tiene que formar con placas de acero soldadas entre sí. Si la carga que actúa en la viga es una carga muerta, ¿sería satisfactorio el acero AISI 1020 laminado en caliente para las placas?

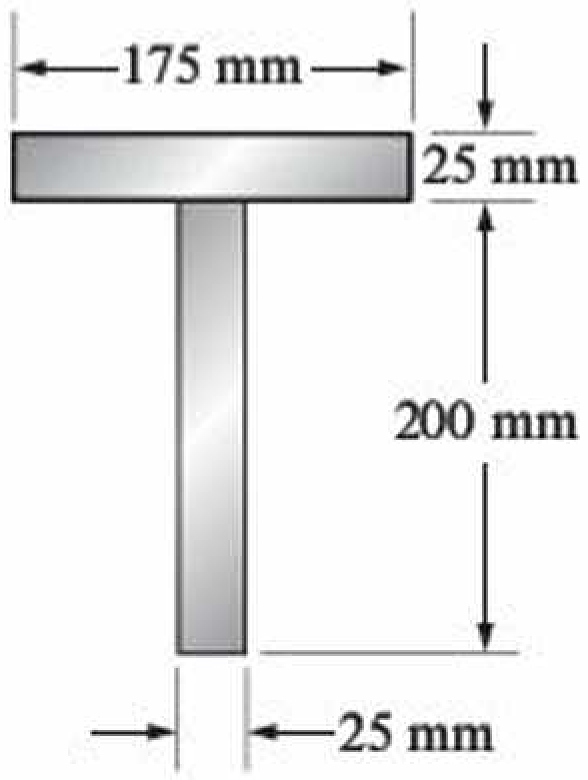


FIGURA P7–14

7–15.M La sección I modificada mostrada en la figura P7–15 tiene que ser extruida de aluminio. Especifique una aleación de aluminio adecuada para que la viga soporte una carga repetida producida por un momento flexionante de 275 N·m.

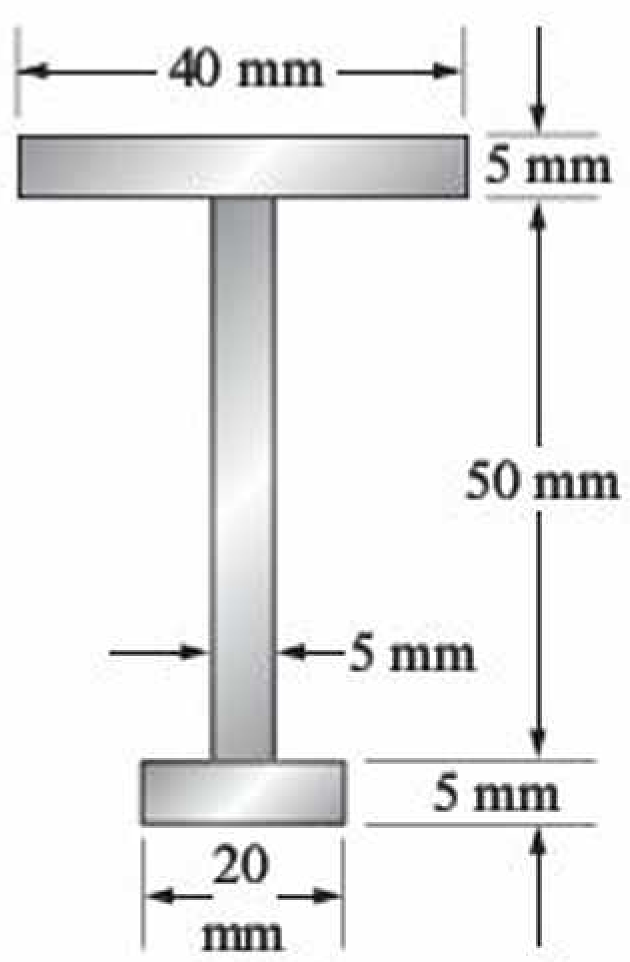
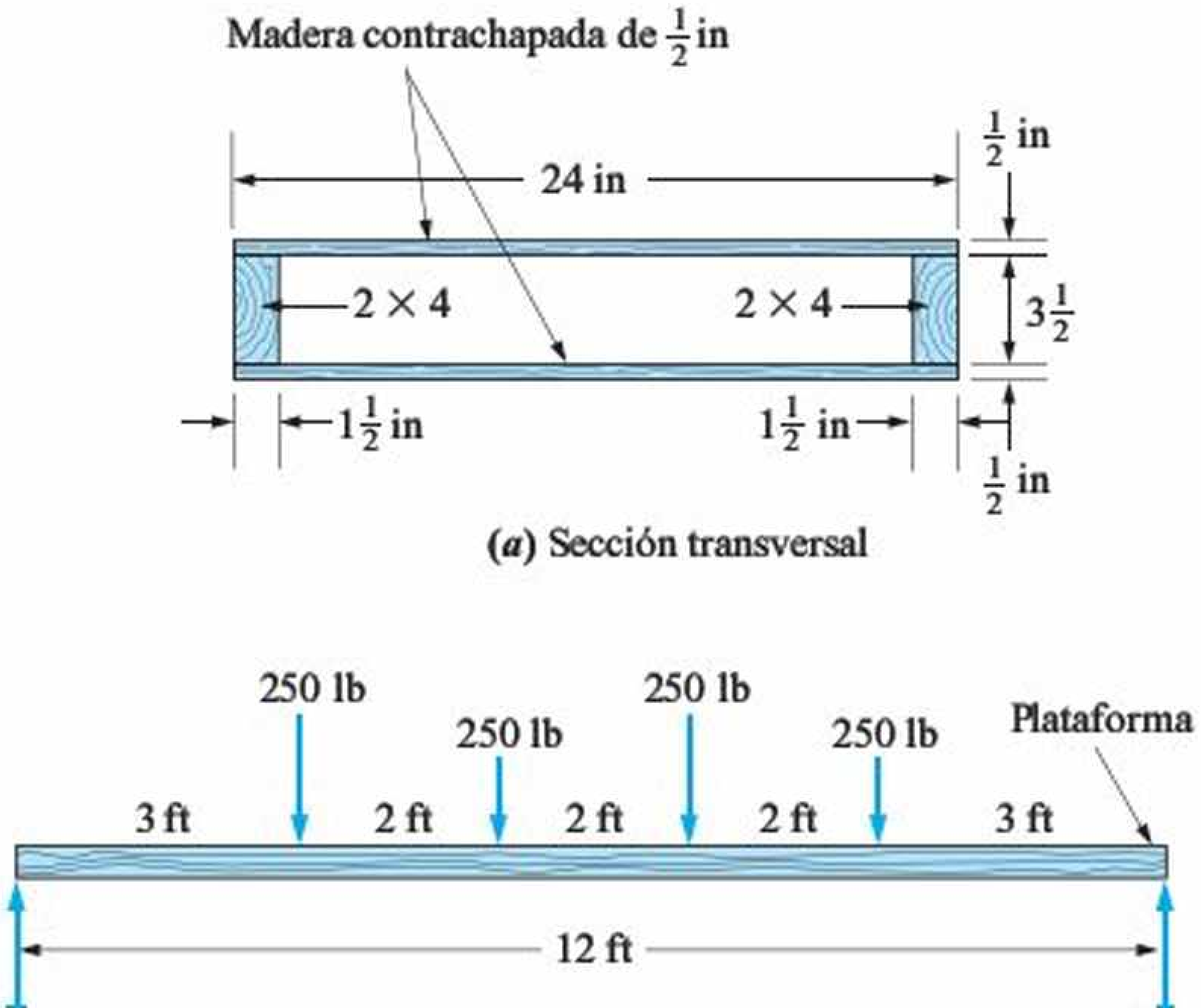


FIGURA P7–15

7–16.E Un tubo de acero estándar se utiliza como barra fija para hacer ejercicio. La barra tiene que ser de 42 in de largo y estar simplemente apoyada en sus extremos. Especifique un tubo de tamaño adecuado si el esfuerzo flexionante tiene que limitarse a 10 000 psi cuando un hombre de 280 lb se cuelga de una mano en el centro.

7–17.E Un oleoducto tiene que ser soportado por vigas horizontales de 14 ft de largo apoyadas en el suelo. Considere que cada viga está simplemente apoyada en sus extremos. Cada viga soporta el peso combinado de 50 ft de tubo de 48 in de diámetro y del petróleo que circula a través de él, aproximadamente 42 000 lb. Suponiendo que la carga actúa en el centro de la viga, especifique el módulo de sección requerido de la viga para limitar el esfuerzo flexionante a 20 000 psi. Luego especifique un patín de ancho adecuado o una viga American Standard.

7–18.E Se tiene que construir una plataforma con madera de construcción terminada y madera contrachapada estándar con la sección mostrada en la figura P7–18(a). ¿Sería segura la plataforma si cuatro hombres, de 250 lb cada uno, se paran a 2 ft uno de otro, como se muestra en la figura P7–18(b)? Considere sólo esfuerzos flexionantes (vea el capítulo 8 por lo que se refiere a esfuerzos cortantes).

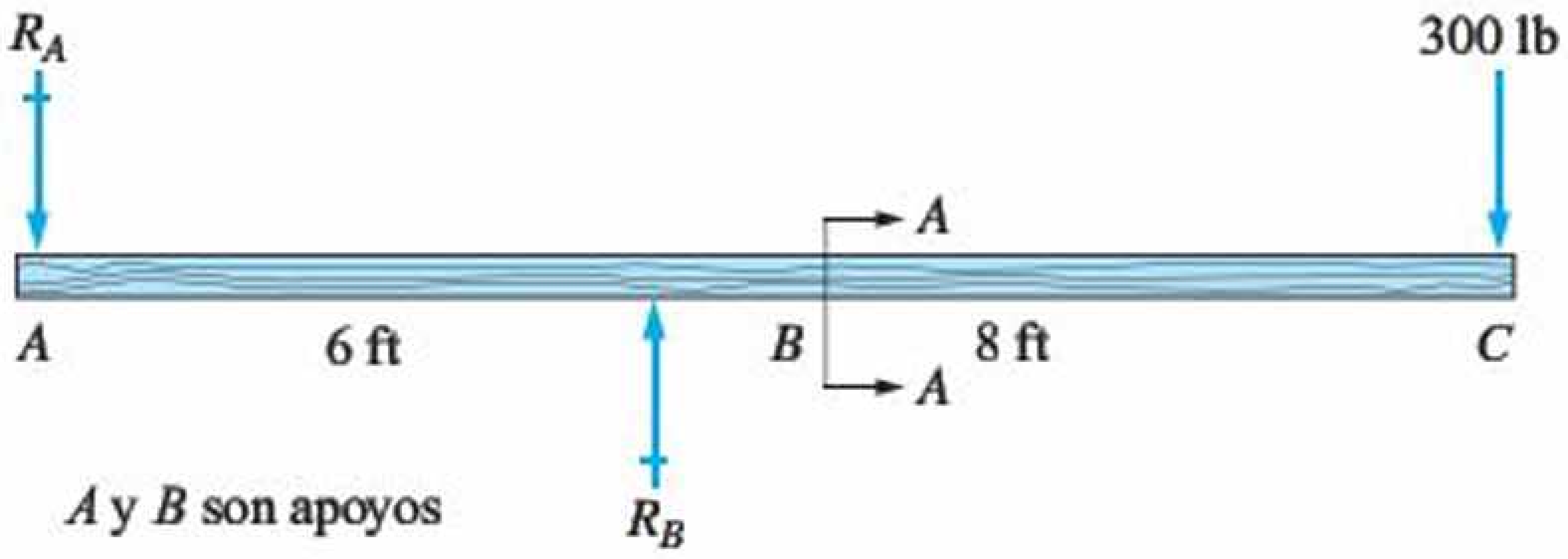


(*b*) Cargas sobre una viga

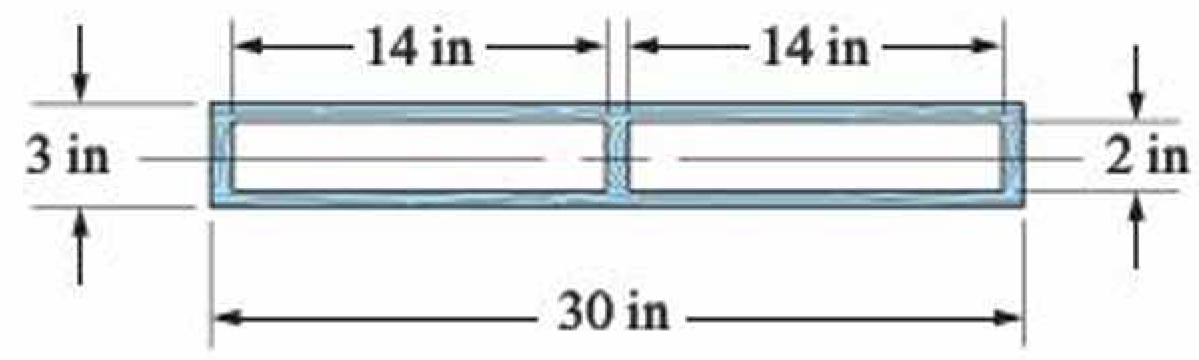
FIGURA P7–18

7–19.E Un trampolín tiene una sección transversal rectangular hueca de 30 in de ancho por 3.0 in de espesor y está apoyado como se muestra en la figura P7–19. Calcule el esfuerzo máximo producido por flexión en él cuando una persona de 300 lb se para en el extremo. ¿Sería seguro el trampolín si se hiciera de aluminio 6061–T4 extruido y la persona aterrizara en el extremo con un impacto?

7–20.M La carga mostrada en la figura P7–20(a) tiene que ser soportada por una viga de aluminio extruido cuya sección transversal se muestra en la figura P7–20(b). Calcule el esfuerzo máximo producido por flexión en la viga. Si se



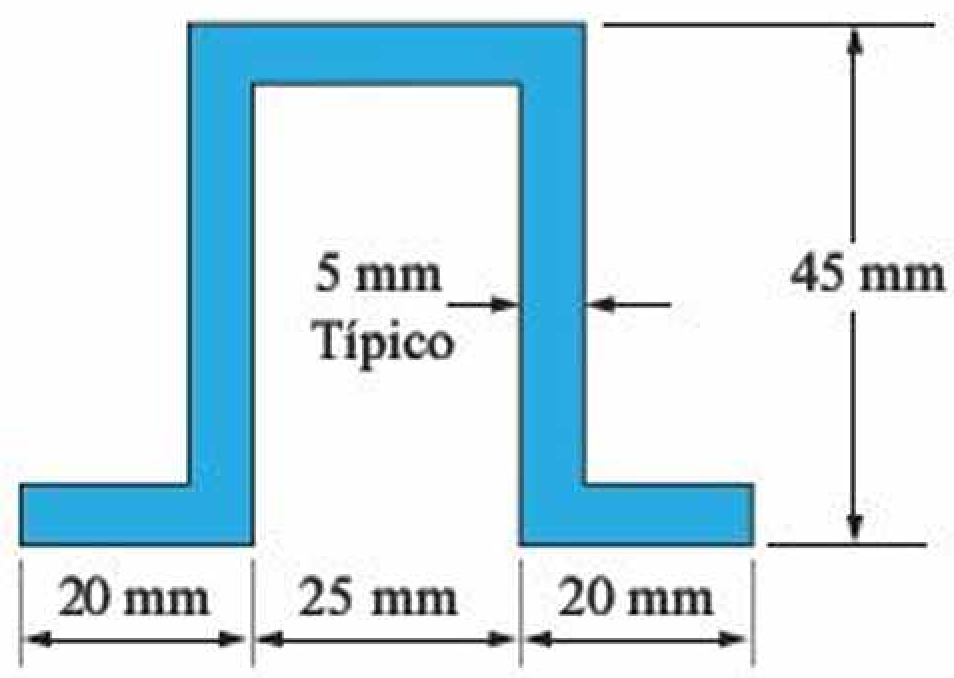
(*a*) Cargas en un trampolín



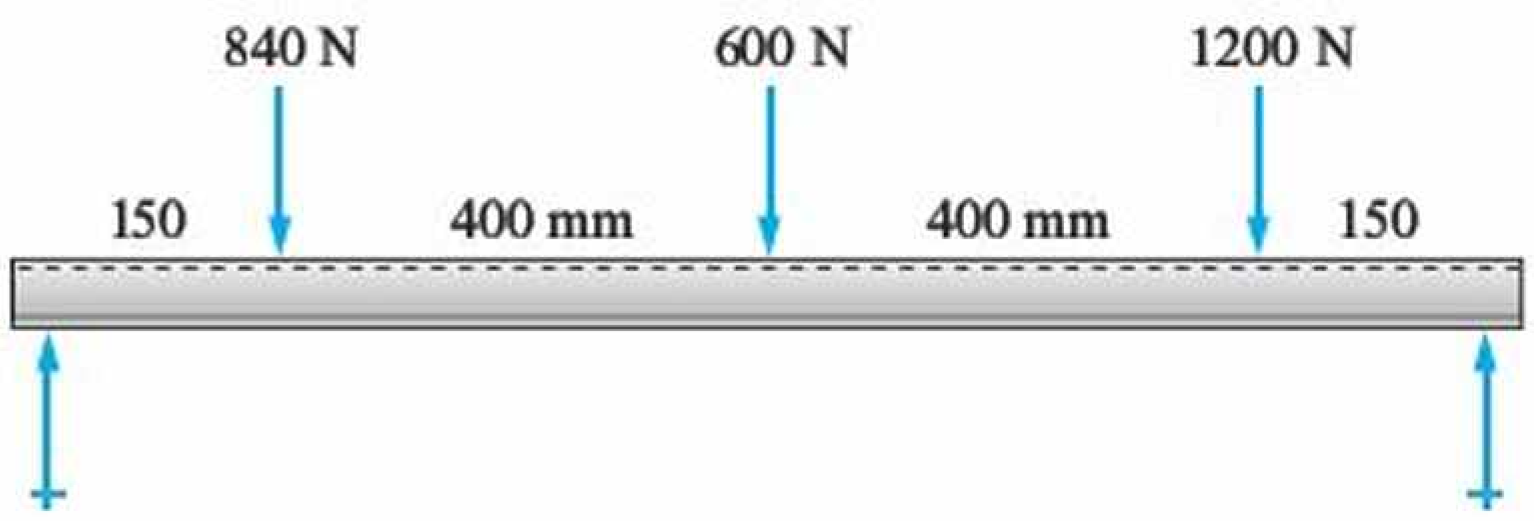
(*b*) Sección *A-A* a través del tablón

FIGURA P7–19 Trampolín del problema 7–19

fabrica de aluminio 6061–T4 extruido y las cargas son cargas muertas, ¿sería segura la viga?



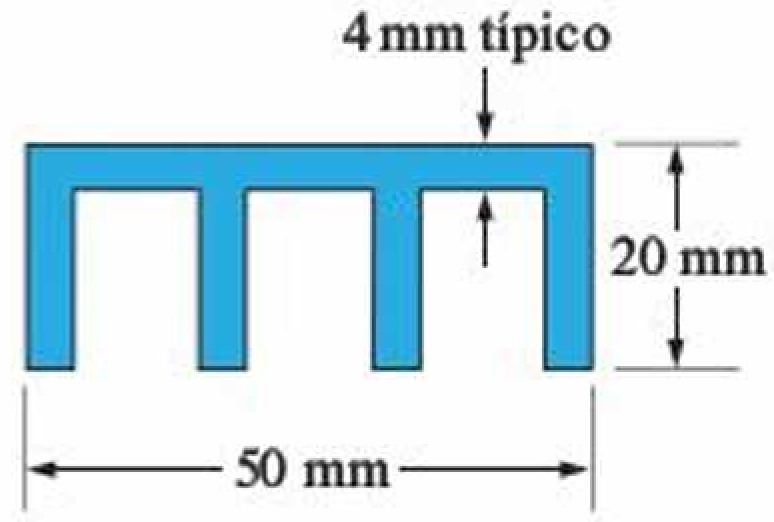
(*b*)



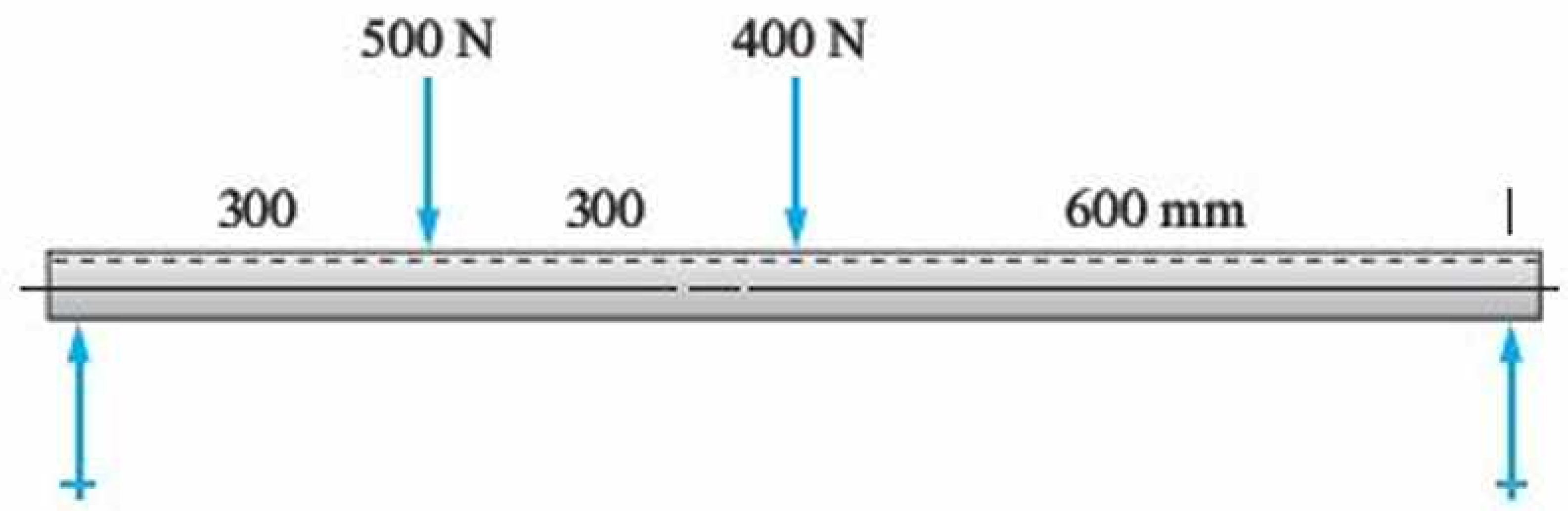
(*a*)

FIGURA P7–20

7–21.M Se tiene que utilizar el perfil extruido mostrado en la figura P7–21(a) para que soporte las cargas mostradas en la figura P7–21(b), el cual es una parte del armazón de una máquina industrial. Las cargas se deben a un motor montado en el armazón y se consideran como cargas muertas. Especifique una aleación de aluminio adecuada para la viga.



(*a*)



(*b*)

FIGURA P7–21

7–22.M Se va a diseñar una viga para que soporte las cargas mostradas en la figura P7–22. Los cuatro perfiles propuestos son (a) una barra circular, (b) una barra cuadrada, (c) una barra rectangular cuya altura es cuatro veces su espesor y (d) la viga American Standard más ligera. Determine las dimensiones requeridas de cada perfil propuesto para limitar el esfuerzo flexionante a MPa. Luego compare la magnitud de las áreas de las secciones transversales de los cuatro perfiles. Como el peso de la viga es proporcional a su área, la de menor área será la más ligera.

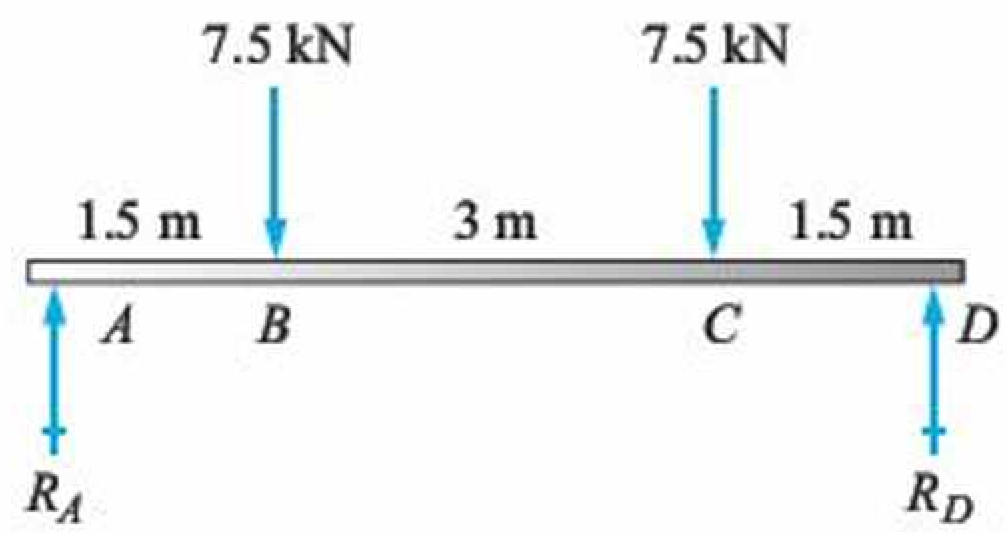


FIGURA P7–22

7–23.E Un parque de juegos infantil incluye una viga de la que cuelgan cuatro columpios, como se muestra en la figura P7–23. Suponga que cada columpio soporta 300 lb. Se desea utilizar un tubo de acero estándar para la viga, y mantener el esfuerzo flexionante a menos de 10 000 psi. Especifique el tubo de diámetro adecuado para usarlo como viga.

7–24.E Una viga de 60 in simplemente apoyada en sus extremos tiene que soportar dos cargas de 4800 lb, cada una colocada a 14 in de un extremo. Especifique el tubo de acero adecuado más ligero para la viga, cuadrado o rectangular, para producir un factor de diseño de 4 basado en la resistencia a la cadencia. El tubo tiene que ser formado en frío con acero ASTM A500, grado B.

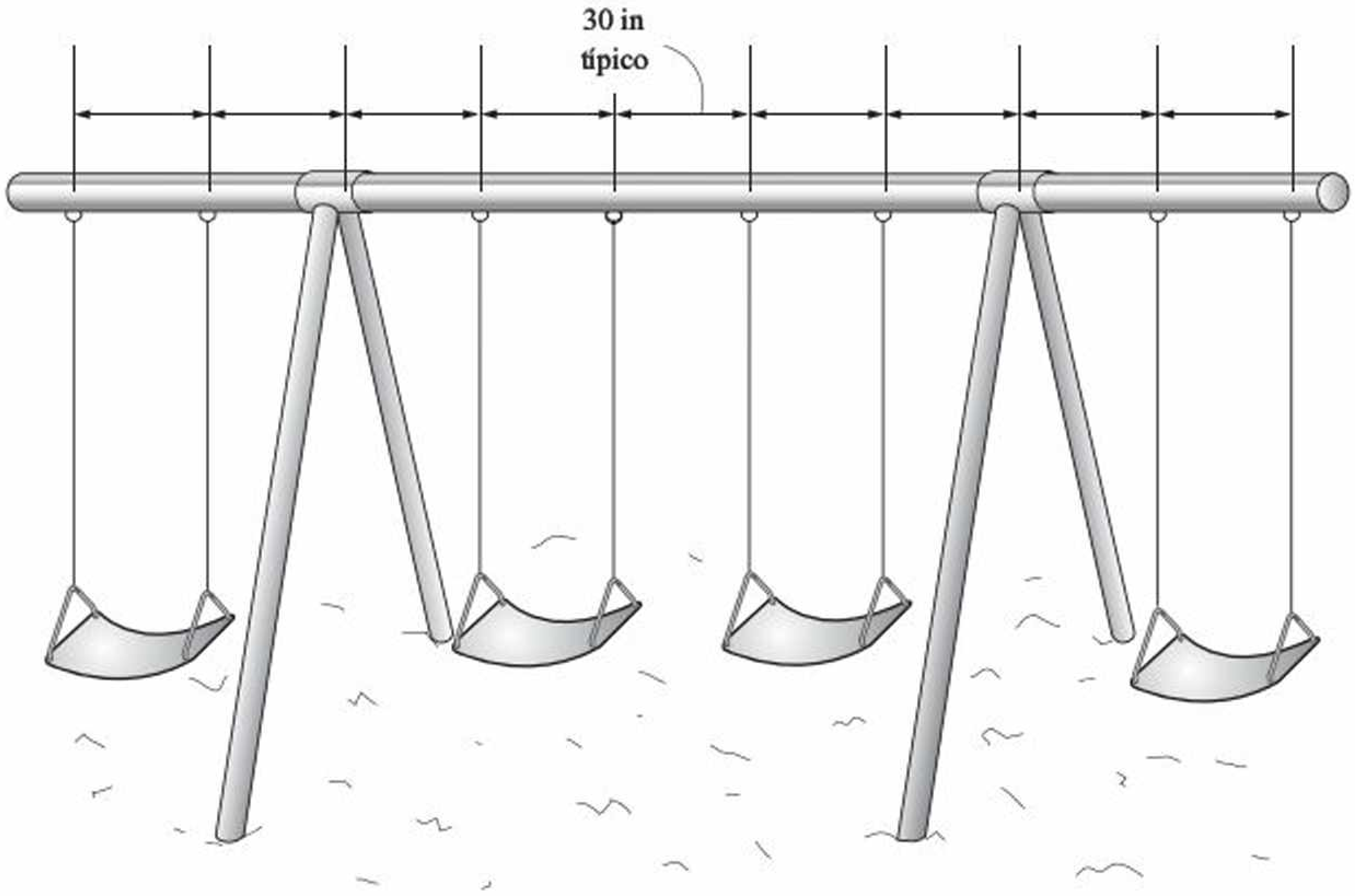


FIGURA P7–23

7–25.E Repita el problema 7–24, pero ahora especifique la viga I de aluminio estándar más ligera que encuentre en el apéndice A–11. La viga será de aluminio 6061–T6 extruido.

7–26.E Repita el problema 7–24, pero ahora especifique el perfil de acero de patín ancho más ligero que encuentre en el apéndice A–7. La viga se fabricará de acero estructural ASTM A992.

7–27.E Repita el problema 7–24, pero ahora especifique el canal de acero estructural más ligero que encuentre en el apéndice A–6. El canal se instalará con las patas hacia abajo de modo que las cargas puedan aplicarse al dorso plano del alma del canal. El canal se fabricará de acero estructural ASTM A36.

7–28.E Repita el problema 7–24, pero ahora especifique el tubo de acero cédula 40 estándar más ligero del apéndice A–12. El tubo tiene que ser de acero ASTM A501 formado en caliente.

7–29.E Repita el problema 7–24, pero ahora diseñe la viga utilizando cualquier material y perfil de su elección para lograr una viga segura y más ligera que las de los problemas 7–24 a 7–28.

7–30.E El perfil mostrado en la figura P7–30 tiene que ser de plástico extruido y utilizado como una viga simplemente apoyada, de 12 ft de largo, para que soporte dos cables eléctricos cuyo peso total es de 6.5 lb/ft de longitud. Especifique un plástico adecuado para la extrusión para que produzca un factor de diseño de 4.0 basado en la resistencia a la flexión.

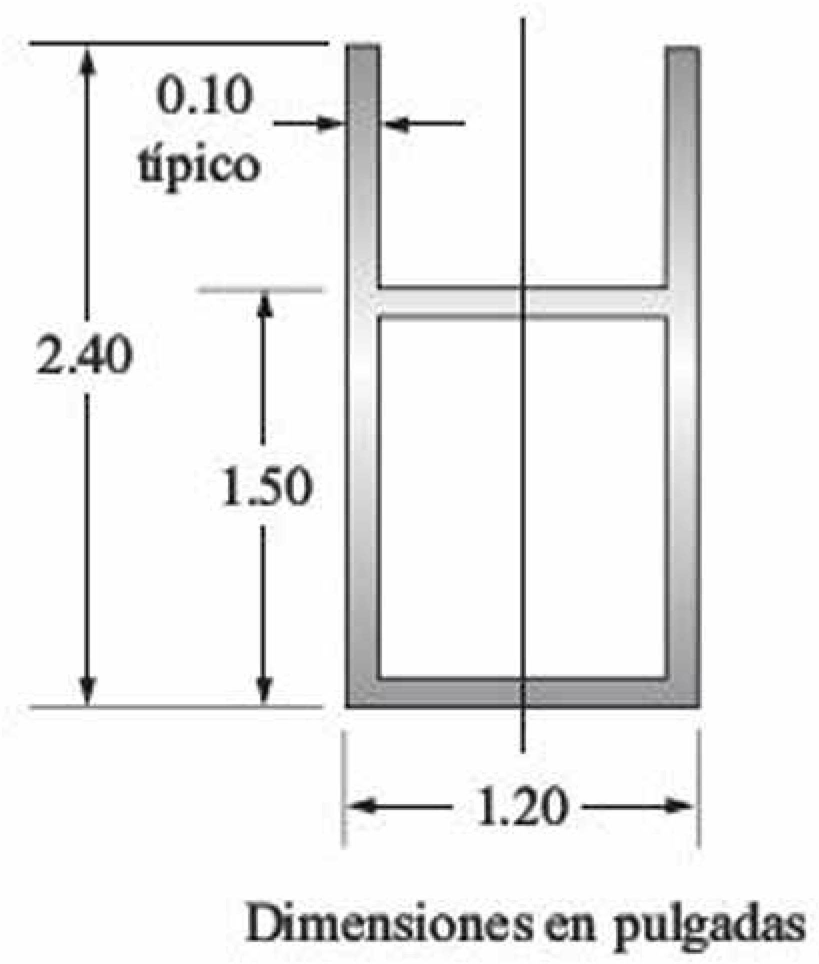


FIGURA P7–30

7–31.C La carga mostrada en la figura P7–31 representa la carga que actúa en una viga de piso de un edificio comercial. Determine el momento flexionante máximo en la viga y luego especifique un perfil de patín ancho que limite el esfuerzo a 150 MPa.

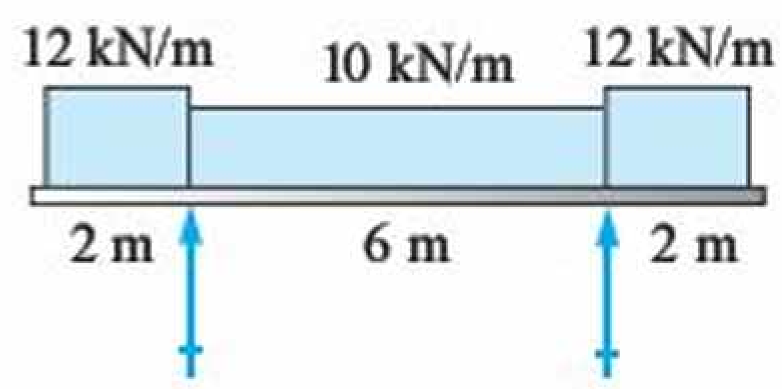


FIGURA P7–31

7–32.M La figura P7–32 representa la carga aplicada a la flecha de un motor, y los dos apoyos son cojinetes en el bloque del motor. La carga mayor entre los apoyos se debe al rotor más las fuerzas dinámicas. La carga menor aplicada en el extremo volado se debe a cargas externas. Utilizando acero AISI 1141 OQT 1300 para la flecha, especifique un diámetro adecuado basado en el esfuerzo flexionante únicamente. Use un factor de diseño de 8 basado en la resistencia máxima.

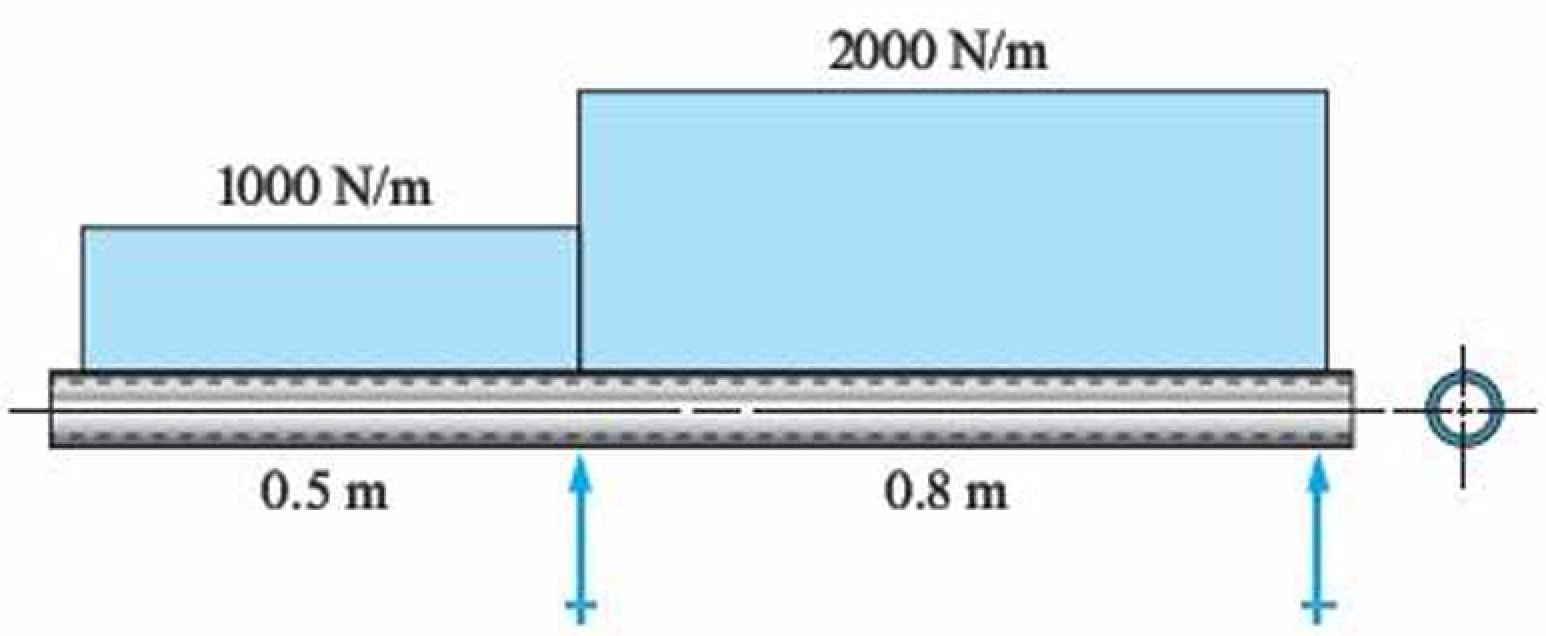


FIGURA P7–32

7–33 a 7–42 Utilizando la carga indicada, especifique el perfil de viga de patín ancho estándar más ligero (perfil W) que limite el esfuerzo flexionante al esfuerzo de diseño permisible de acuerdo con la especificación AISC. Todas las cargas son estáticas y las vigas son de acero estructural ASTM A992. Los números de los problemas corresponden al número de figura.

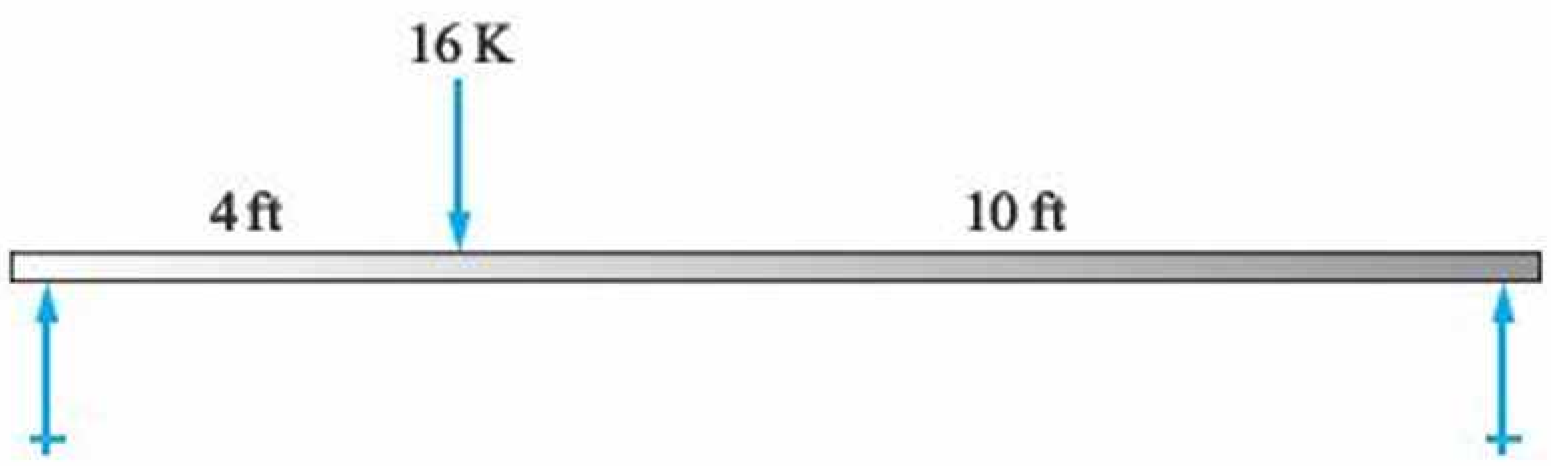


FIGURA P7–33

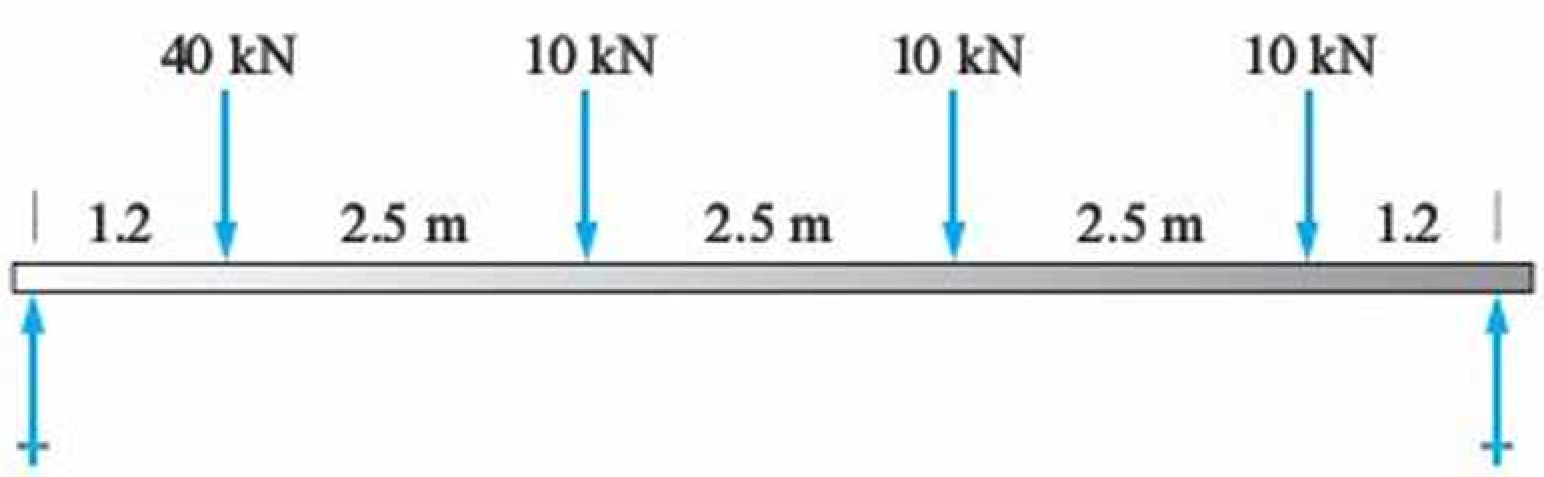


FIGURA P7–34

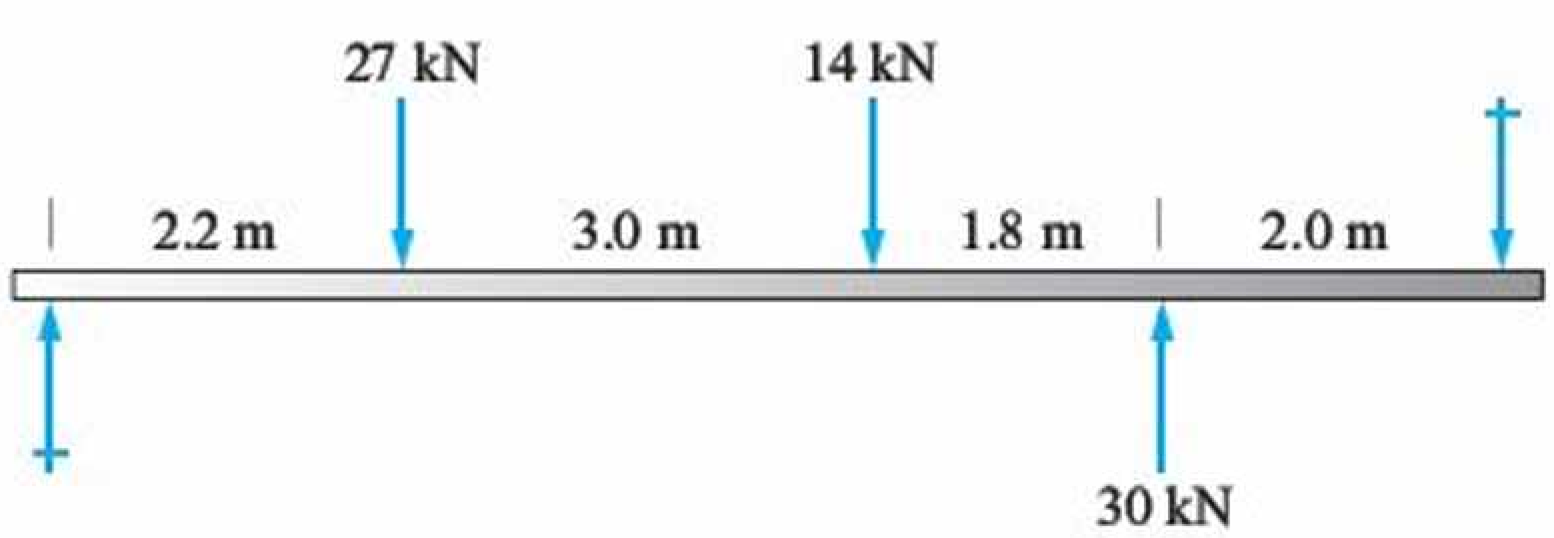


FIGURA P7–35

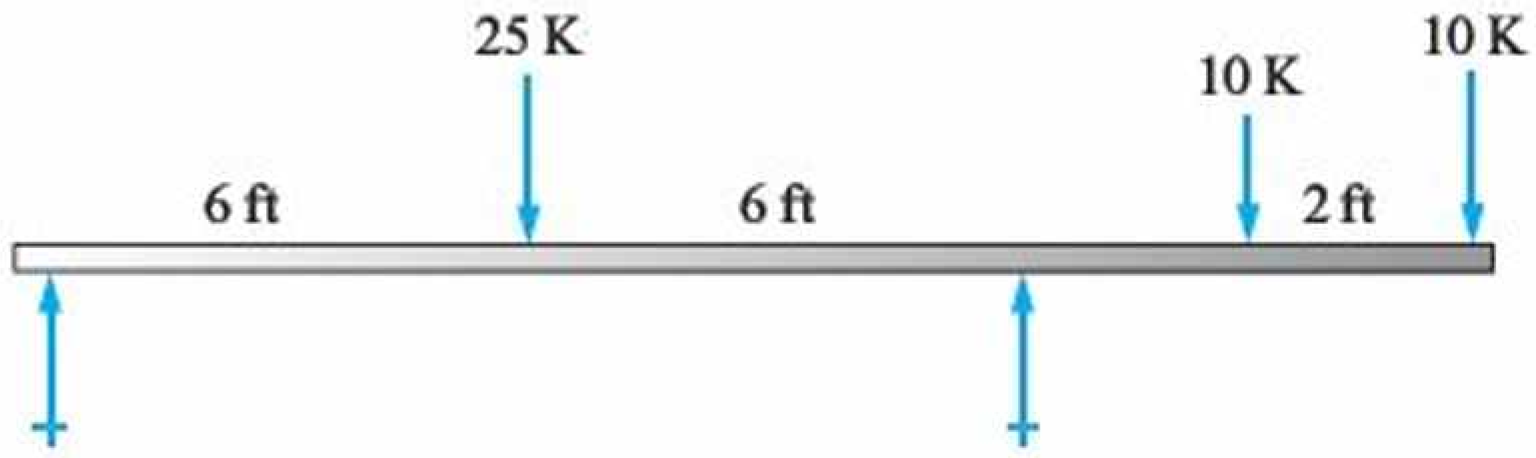


FIGURA P7–36

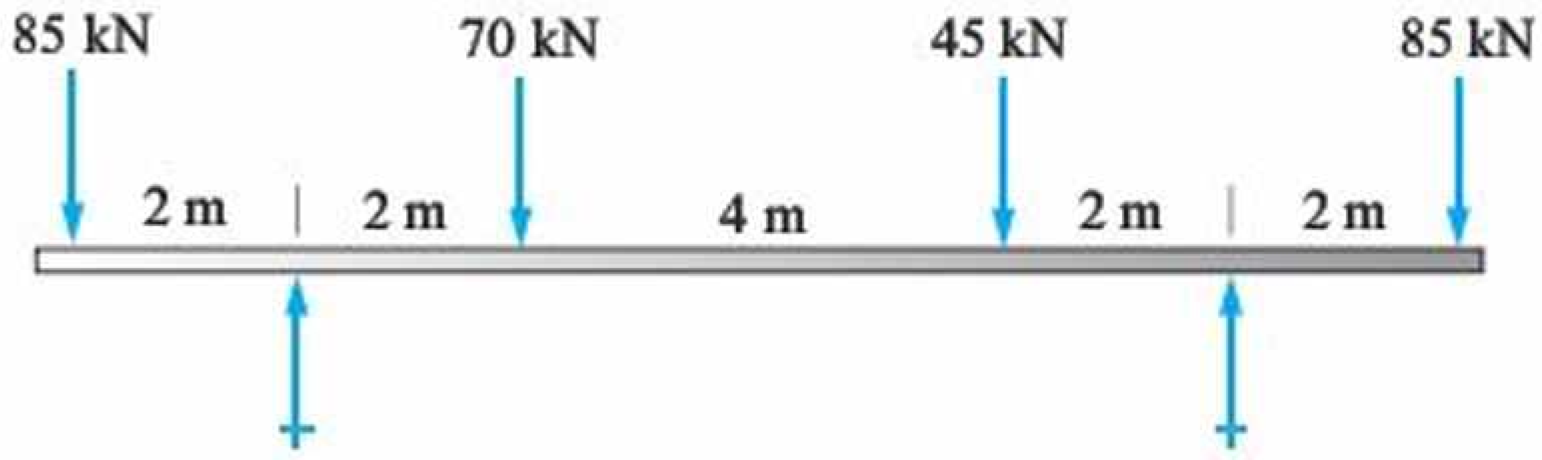


FIGURA P7–37

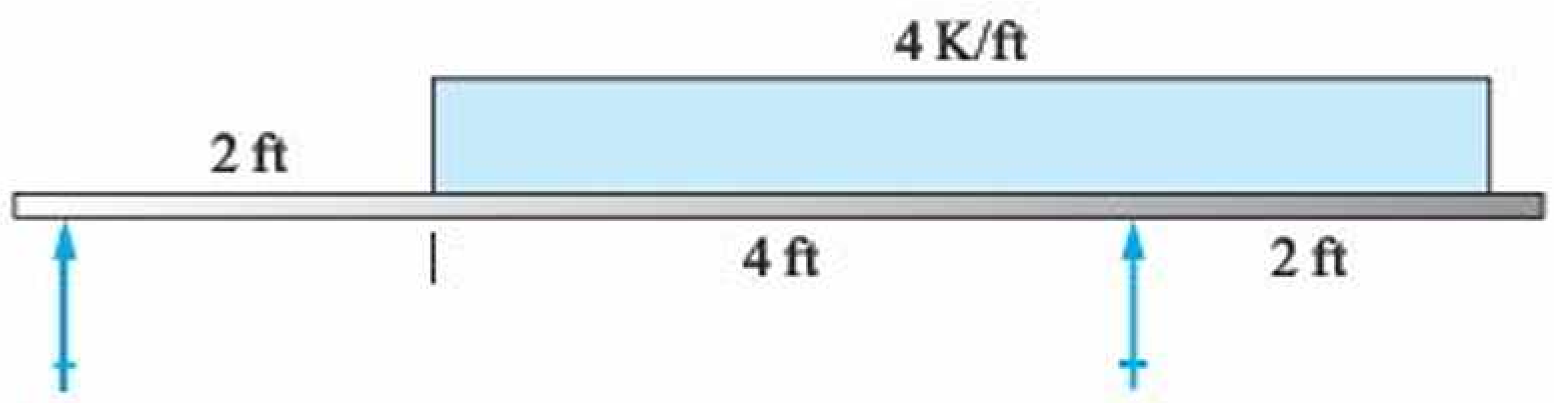


FIGURA P7–38

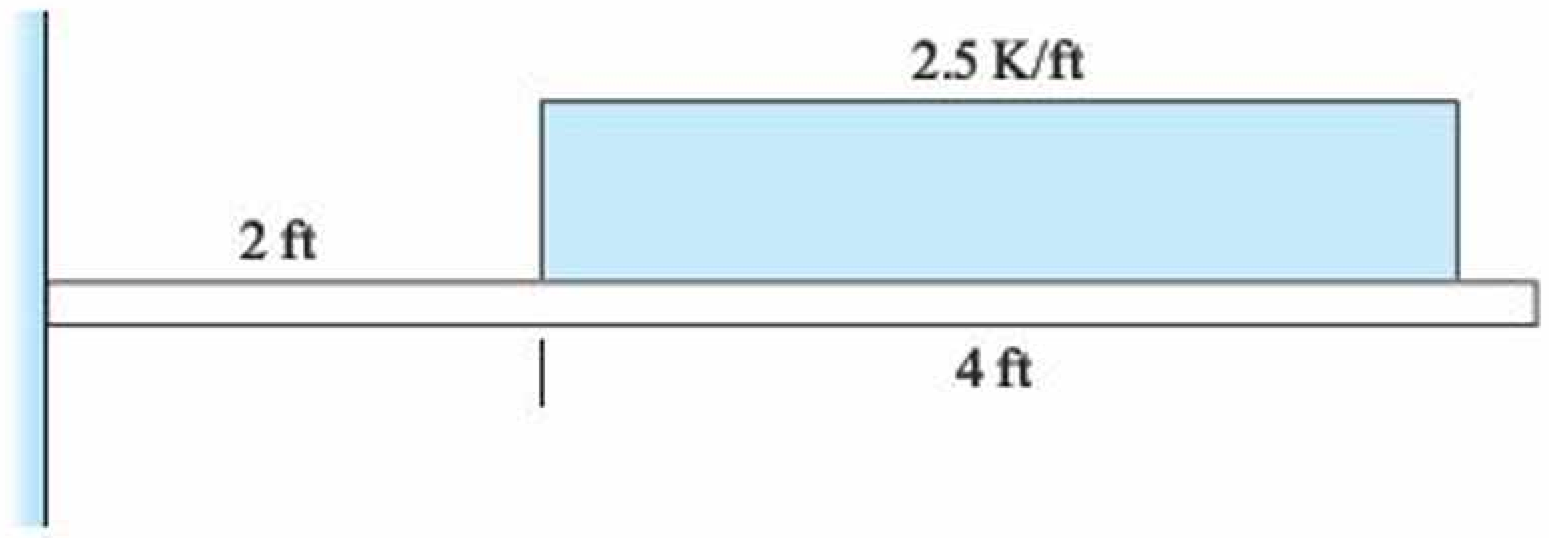


FIGURA P7–39

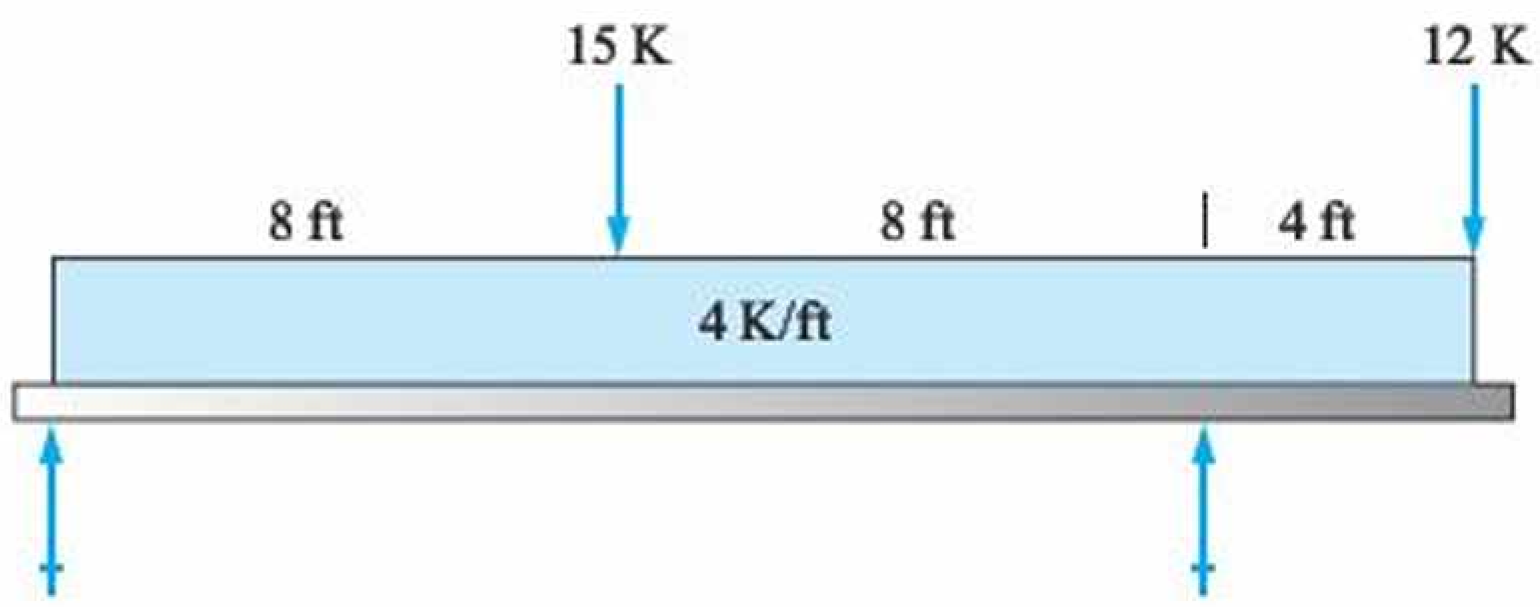


FIGURA P7–40

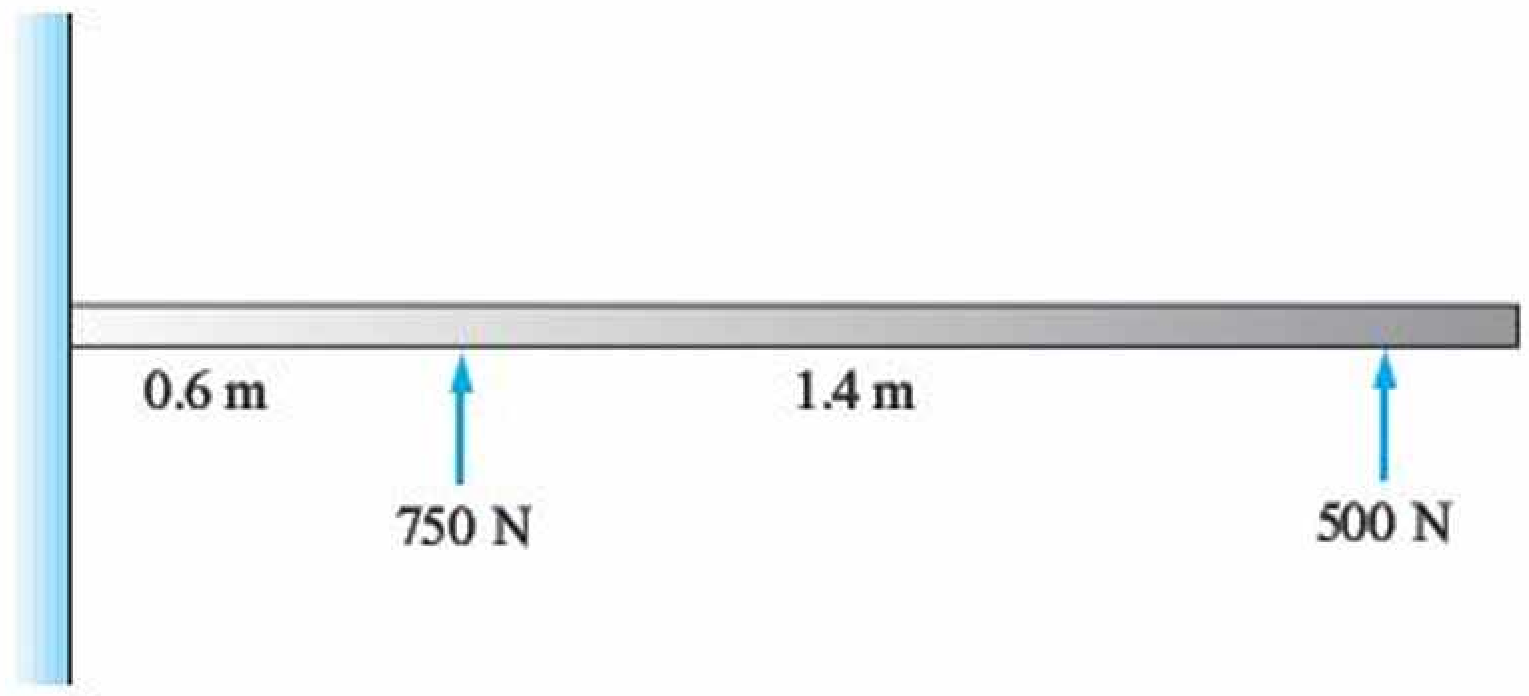


FIGURA P7–41

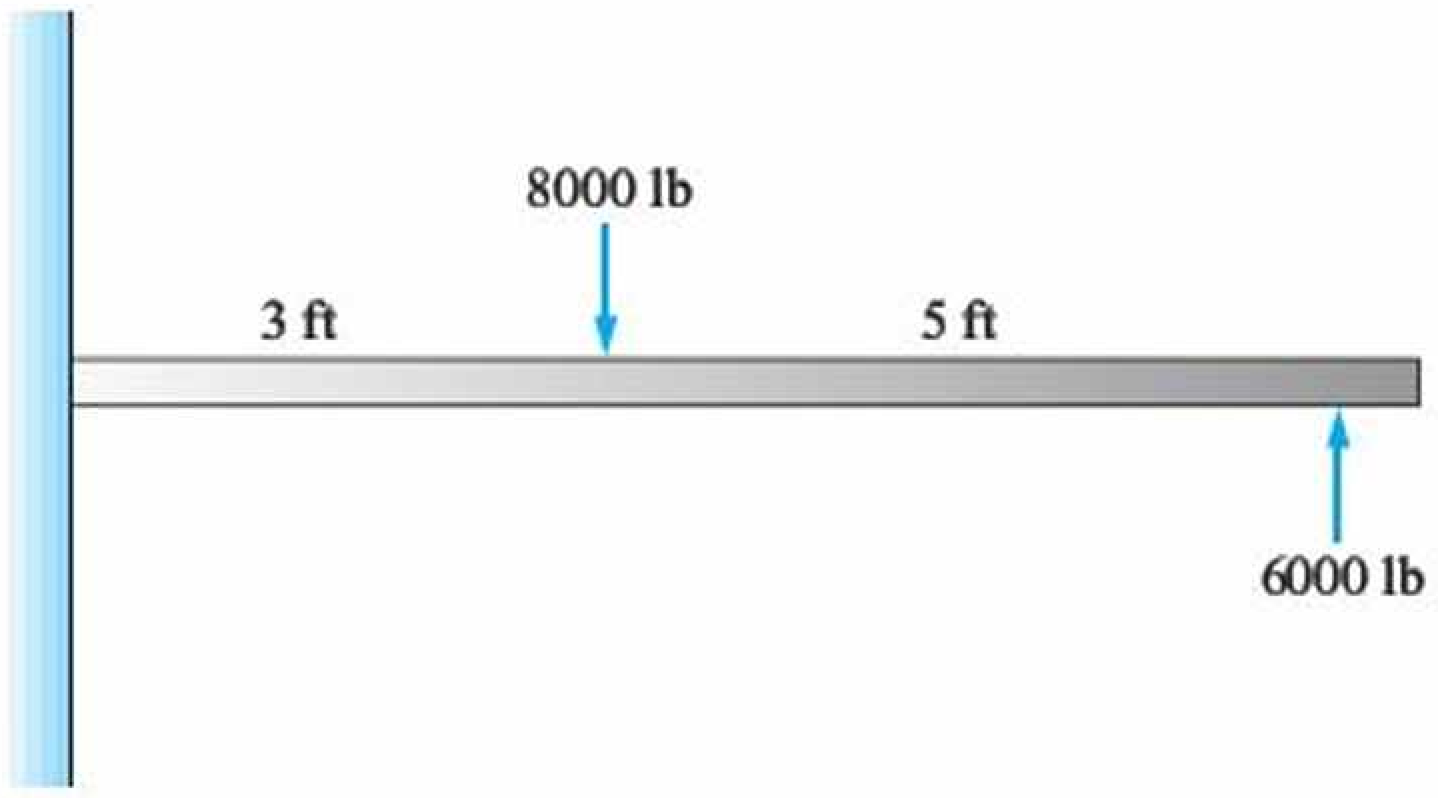


FIGURA P7–42

7–43 a 7–52 Repita los problemas del 7–33 al 7–42 pero ahora especifique la viga American Standard más ligera (perfil S).

7–53 a 7–62 Repita los problemas del 7–33 al 7–42 pero ahora use un acero estructural de baja aleación y baja resistencia ASTM A572 grado 60.

7–63.E Una vigueta de piso de un edificio tiene que ser de madera estándar seleccionada del apéndice A–4. Si la viga está simplemente apoyada en sus extremos y soporta una carga uniformemente distribuida de 125 lb/ft a todo lo largo de su longitud de 10 ft, especifique un tamaño adecuado para la viga. Ésta será de pino del sur grado núm. 2. Considere sólo esfuerzo flexionante.

7–64.E Una banca para futbolistas tiene que soportar la carga mostrada en la figura P7–64 que se produce cuando se sientan 10 jugadores, cada uno de 300 lb, de modo que cada uno ocupe 18 in de la longitud de la banca. Si la sección transversal de ésta es como se muestra en al figura P7–64, ¿sería segura para esfuerzo flexionante? La madera es de abeto grado 2.

7–65.E Se tiene que diseñar una banca para jugadores de fútbol. Tiene que soportar la carga mostrada en la figura P7–64 que se produce cuando se sientan 10 jugadores, cada uno de 300 lb, de modo que cada uno ocupe 18 in de la longitud de la banca. Ésta debe tener un perfil en T, hecha de abeto grado 2, como se muestra con el tablón de arriba de 2 × 12. Especifique el miembro vertical requerido para que la banca sea segura cuando se someta a esfuerzo flexionante.

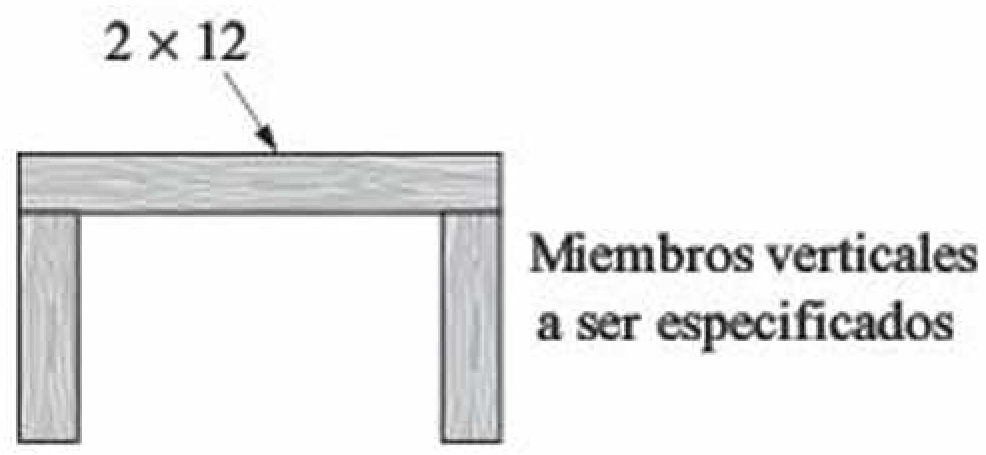


FIGURA P7–66 Sección transversal de la banca del problema 7–60.

7–66.E Repita el problema 7–65, pero ahora use la sección mostrada en la figura P7–66.

7–67.E Repita el problema 7–65, pero ahora utilice cualquier sección transversal de su elección hecha de vigas de madera estándar del apéndice A–4. Trate de lograr un diseño más ligero que el de los problemas 7–65 o 7–66. Observe que un diseño más ligero tendría un área de sección transversal más pequeña.

7–68.E Se va a diseñar una plataforma de madera para que soporte una carga uniformemente distribuida de 100 lb/ft² en toda su área. Se tienen que utilizar las viguetas mostradas en la figura P7–68, colocadas a 16 in entre centros. Si la cubierta tiene que ser de 8 ft por 12 ft, determine el tamaño requerido para las viguetas. Use secciones de viga de madera estándar tomadas del apéndice A–4 y de abeto núm. 2.

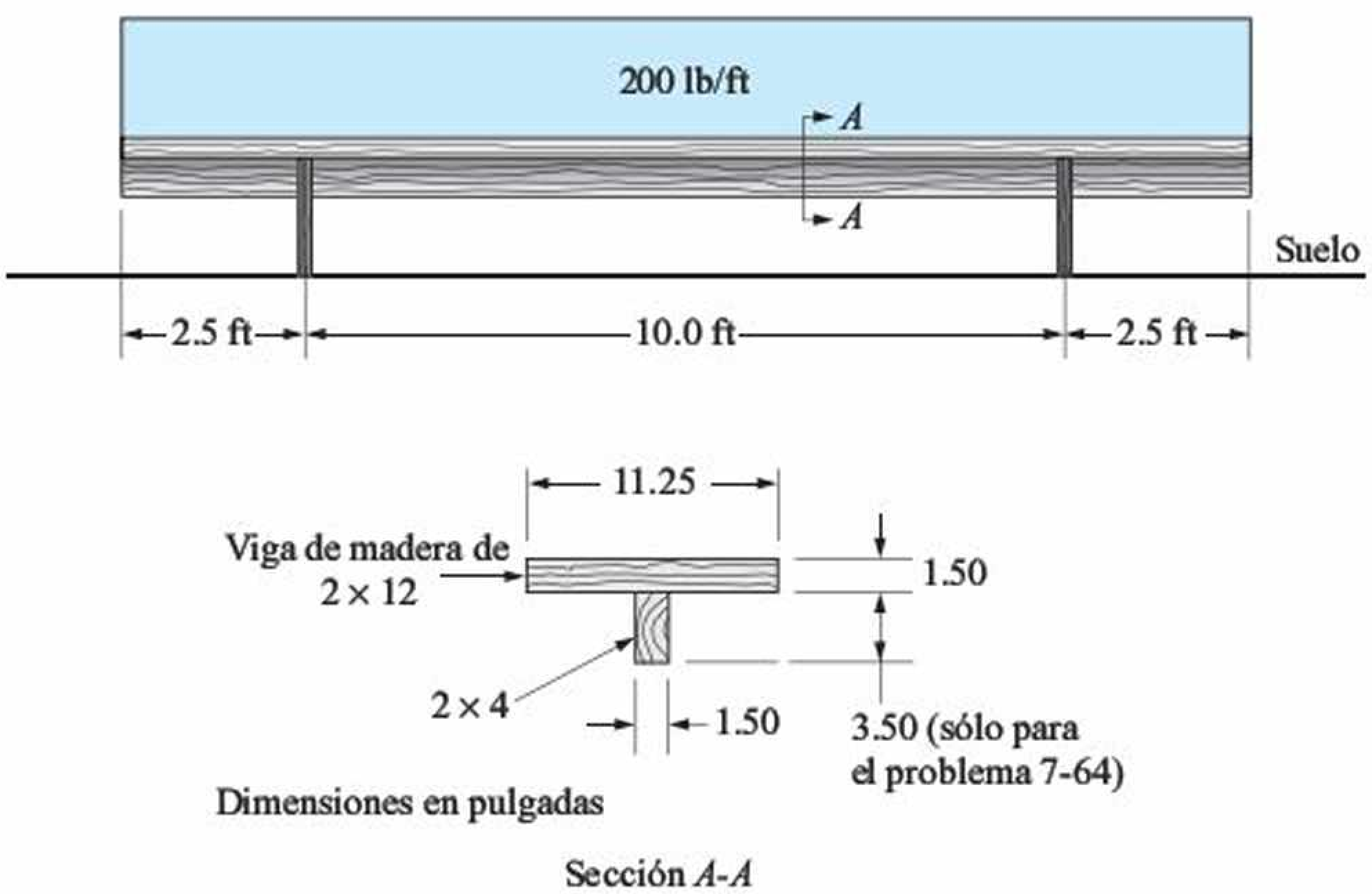


FIGURA P7–64 Banca y carga de los problemas 7–64, 7–65, 7–66 y 7–67.

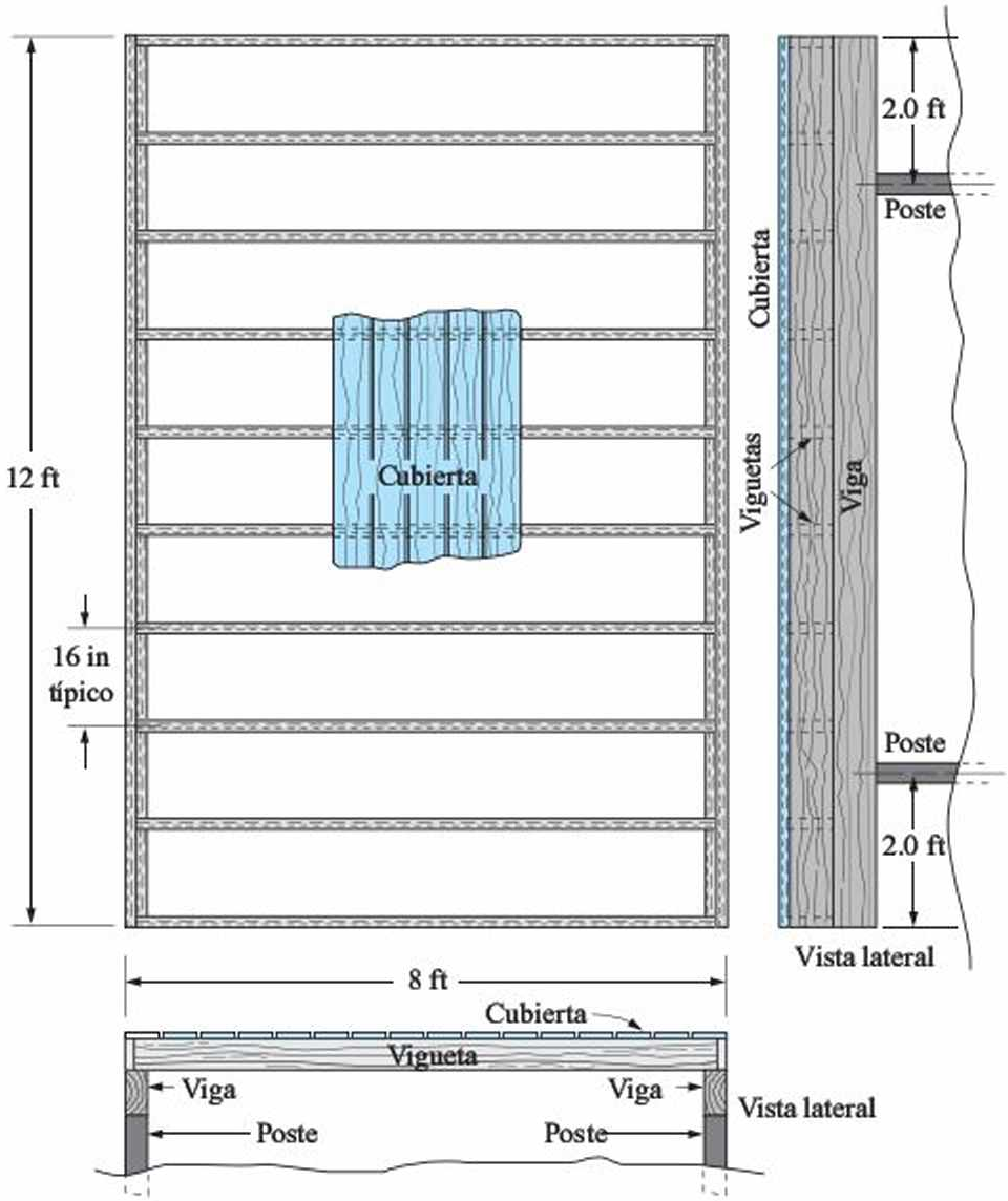


FIGURA P7–68 Diseño de la cubierta del problema 7–68.

7–69.E Repita el problema 7–68, con las viguetas dispuestas a lo largo de la longitud de 12 ft y no a lo largo del ancho de 8 ft.

7–70.E Repita el problema 7–68 con las vigas de apoyo a 18 in de los extremos de la vigas en lugar de en los extremos.

7–71.E Repita el problema 7–69 con las vigas de apoyo a 18 in de los extremos de las viguetas en lugar de en los extremos.

7–72.E Para el diseño de cubierta mostrado en la figura P7–68 especifique un tamaño adecuado para los travesaños que soportan las viguetas.

7–73.E Diseñe un puente para cruzar un pequeño arroyo. Suponga que se dispone de apoyos rígidos en cada margen del arroyo, a 10 ft uno de otro. El puente tiene que ser de 3.0 ft de ancho y soportar una carga uniformemente distribuida de 60 lb/ft^2 en toda su área. Diseñe sólo los tablones de la cubierta y las vigas. Use dos o más vigas de cualquier tamaño tomadas del apéndice A–4, u otras de su propio diseño.

7–74.E ¿Sería seguro el puente que diseñó en el problema 7–73 si un caballo y su jinete que pesan 2200 lb lo cruzan lentamente?

7–75.E El instalador de transmisiones en una fábrica tiene que colgar una máquina que pesa 10 500 lb de una viga de 12 ft de longitud de modo que un camión pueda retroceder debajo de ella. Suponga que la viga está simplemente apoyada en sus extremos. Dos cables aplican la carga, cada uno a 3.0 ft de un apoyo. Diseñe una viga adecuada. Considere vigas de madera o acero o una de su propio diseño.

7–76.E En una producción de teatro experimental, un pirata debe cumplir con el castigo de "caminar por el tablón". Si el pirata pesa 220 lb, ¿sería seguro el diseño mostrado en la figura P7–76? De no serlo, diseñe uno que lo sea.

7–77.M La rama de un árbol tiene las dimensiones aproximadas mostradas en la figura P7–77. Suponiendo que la resistencia a la flexión de la madera es similar a la de abeto grado núm. 3, ¿sería seguro para una persona de 135 kg de masa sentarse en el columpio?

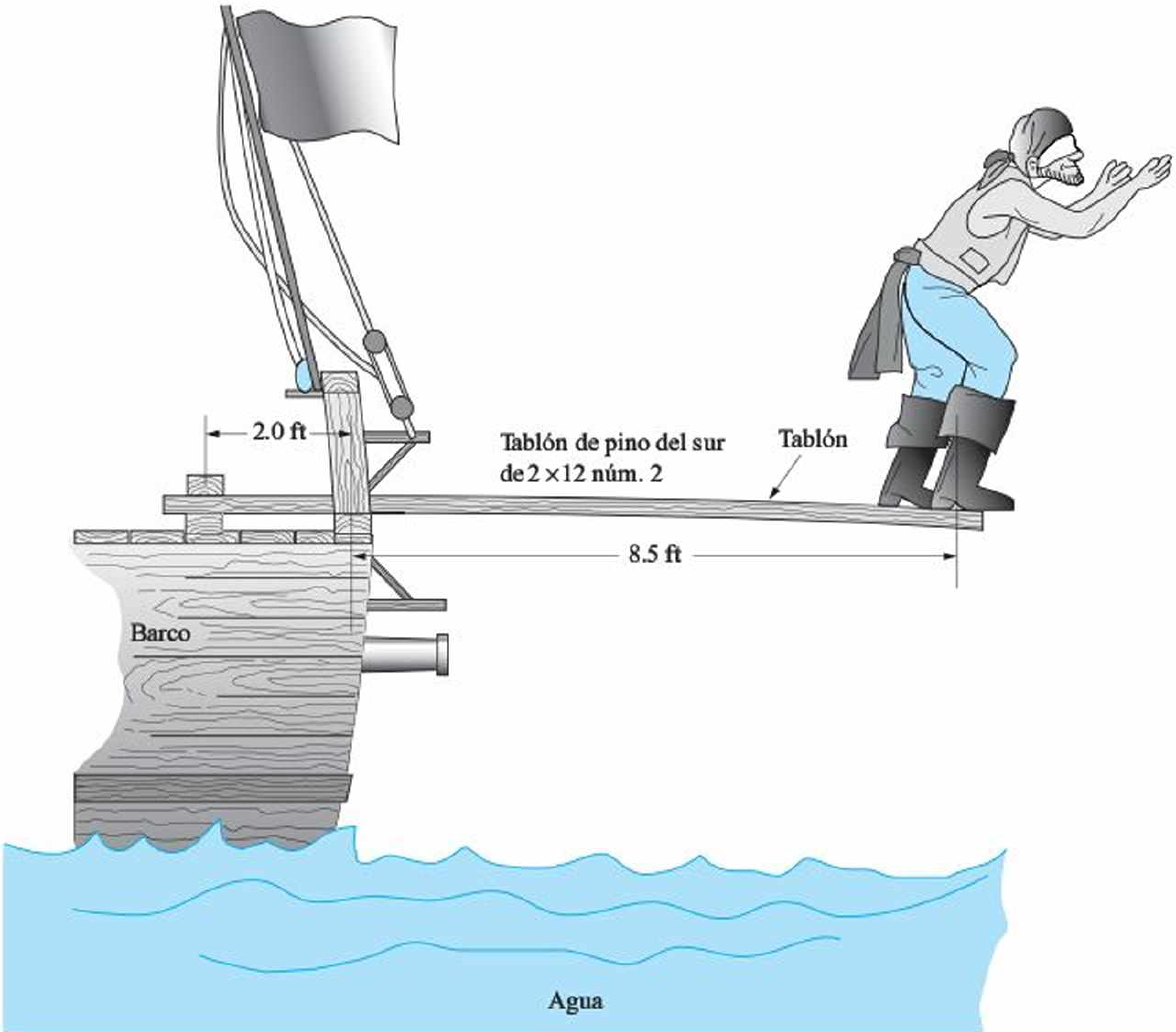


FIGURA P7–76 Pirata caminando por el tablón de la viga del problema 7–76.

7–78.E ¿Sería seguro utilizar un perfil estándar de 2 × 4 de pino del sur grado núm. 2 como palanca, como se muestra en la figura P7–78 para levantar un lado de una máquina? De no serlo, ¿qué sugeriría utilizar?

7–79.M La figura P7–79 muestra la sección transversal de una viga de nylon 66 extruido. Especifique la carga uniformemente distribuida máxima en N/mm que la viga podría soportar si está simplemente apoyada con un claro de 0.80 m. El esfuerzo flexionante máximo no debe ser de más de la mitad de la resistencia a la flexión del nylon.

7–80.M La viga I de la figura P7–80 tiene que soportar dos cargas concentradas idénticas de 2.25 kN cada una, simétricamente colocadas sobre una viga simplemente apoyada con un claro de 0.60 in. Cada carga está a 0.2 de un extremo. ¿Cuál de los plásticos del apéndice A–20 soportaría estas cargas con un esfuerzo flexionante de no más de la mitad de su resistencia a la flexión?

7–81.M Un puente de un juego de construcción de juguete se tiene que fabricar de copolímero de acetal con la resistencia a la flexión dada en el apéndice A–20. La sección transversal de una viga se muestra en la figura P7–81. ¿Qué carga concentrada máxima se podría aplicar a la mitad de la viga si el claro fuera de 1.25 m y los extremos están simplemente apoyados? No sobrepase la mitad de la resistencia a la flexión del plástico.

7–82.M Un elemento estructural de una impresora de computadora tiene que soportar la carga mostrada en la figura P–82(a) donde la carga uniformemente distribuida representa los componentes electrónicos montados en una tarjeta de circuito impreso y las cargas concentradas aplicadas por una fuente de potencia. Se propone hacer la viga de policarbonato con la sección transversal mostrada en la figura P7–82(b). Calcule el esfuerzo en la viga y compárelo con la resistencia a la flexión del policarbonato del apéndice A–20.

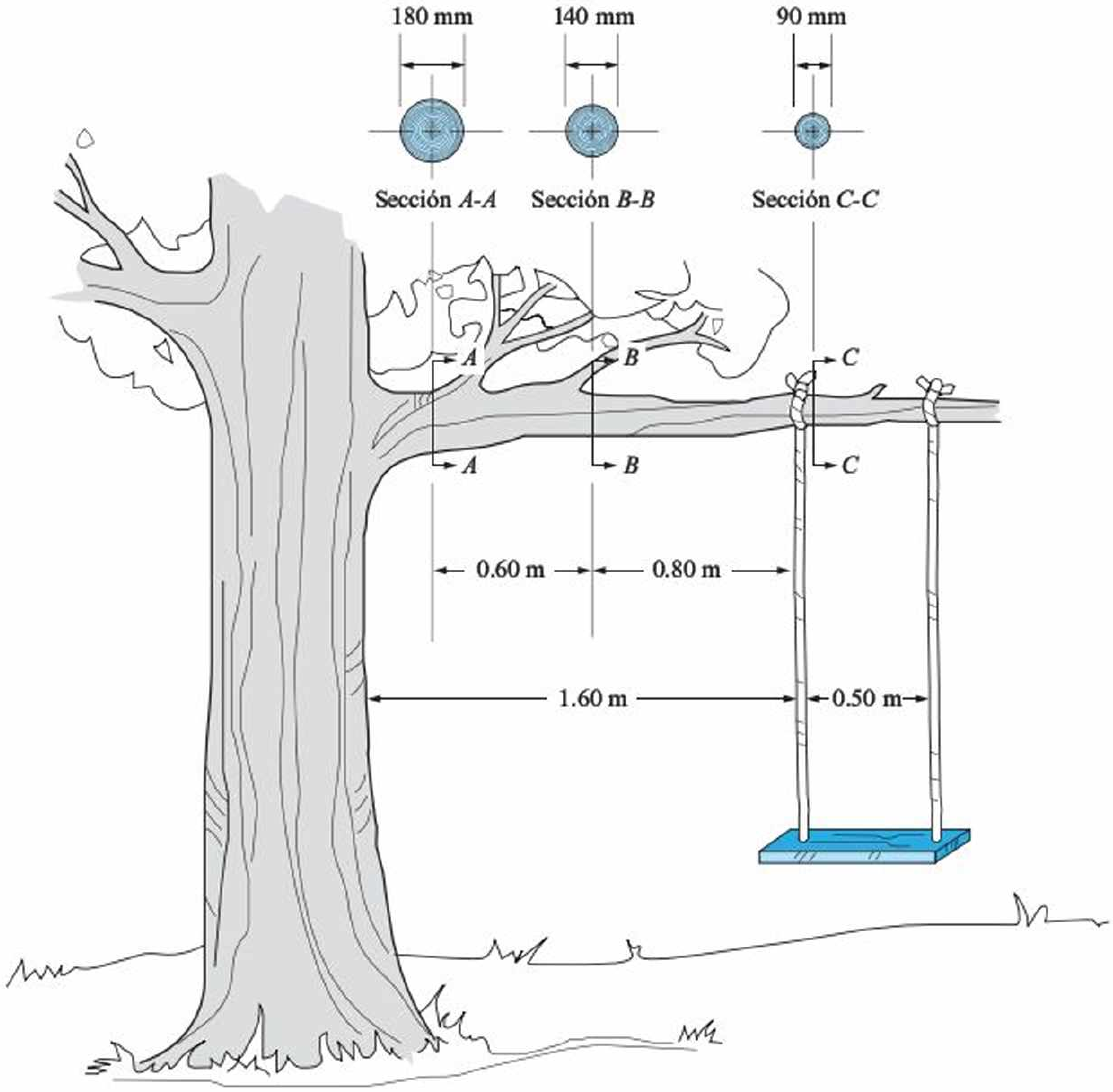


FIGURA P7–77 Rama y columpio del problema 7–77.

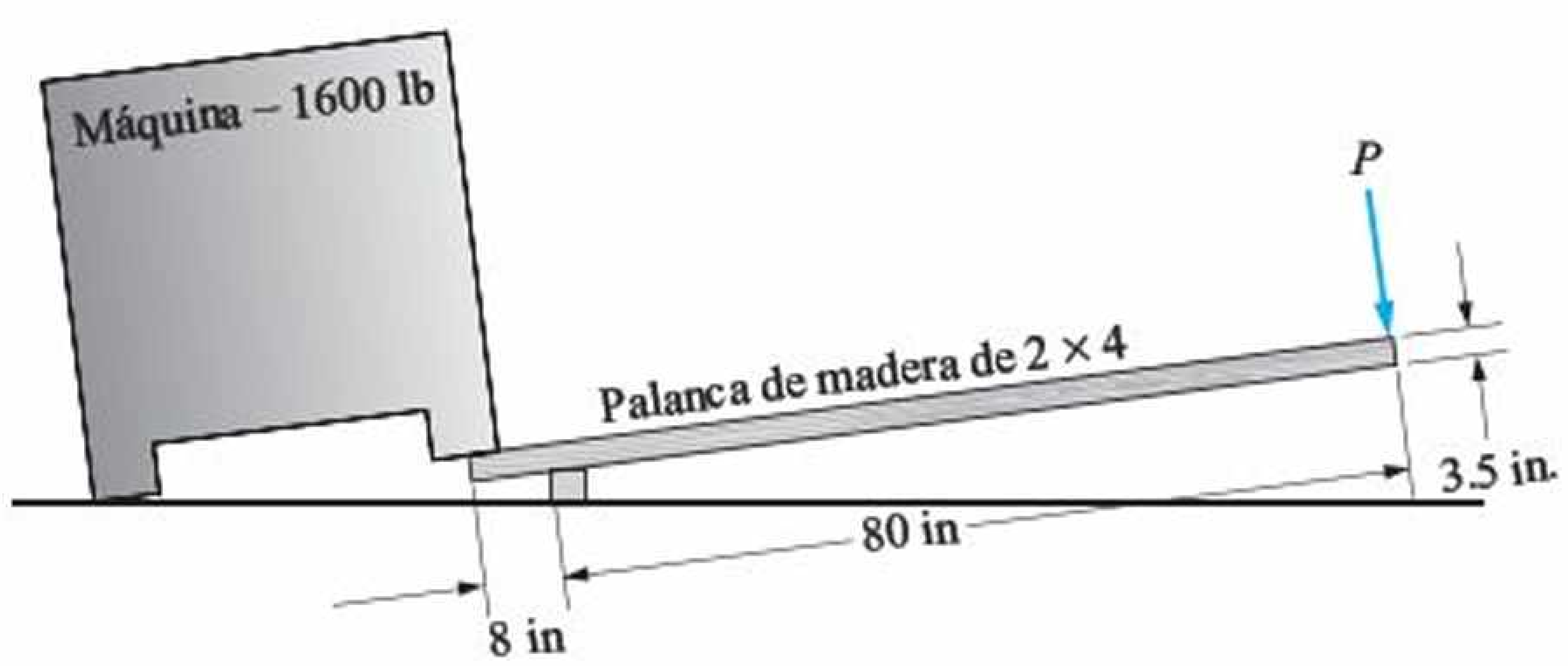


FIGURA P7–78 Tabla de 2 × 4 utilizada como palanca en el problema 7–78.

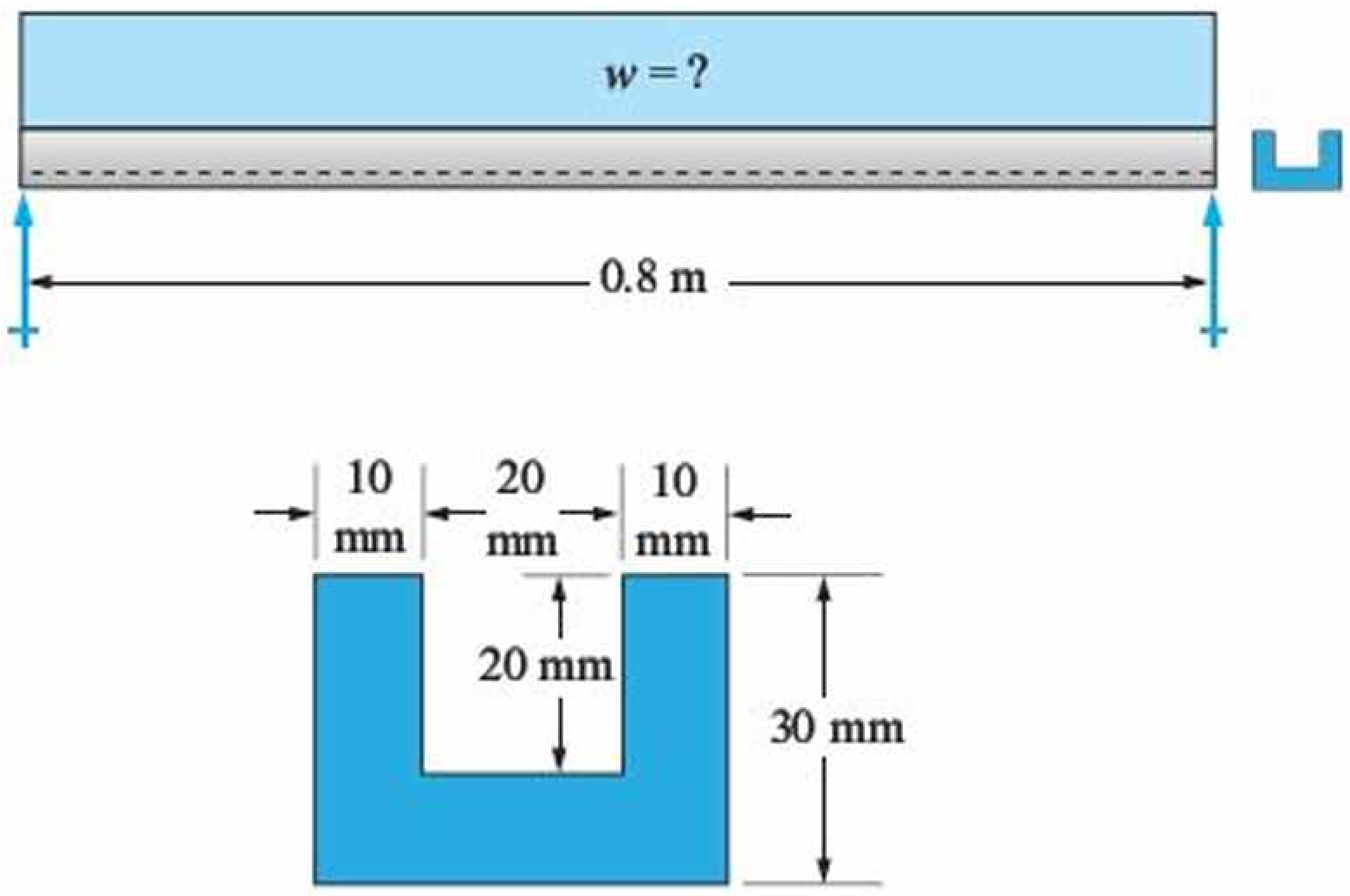


FIGURA P7–79

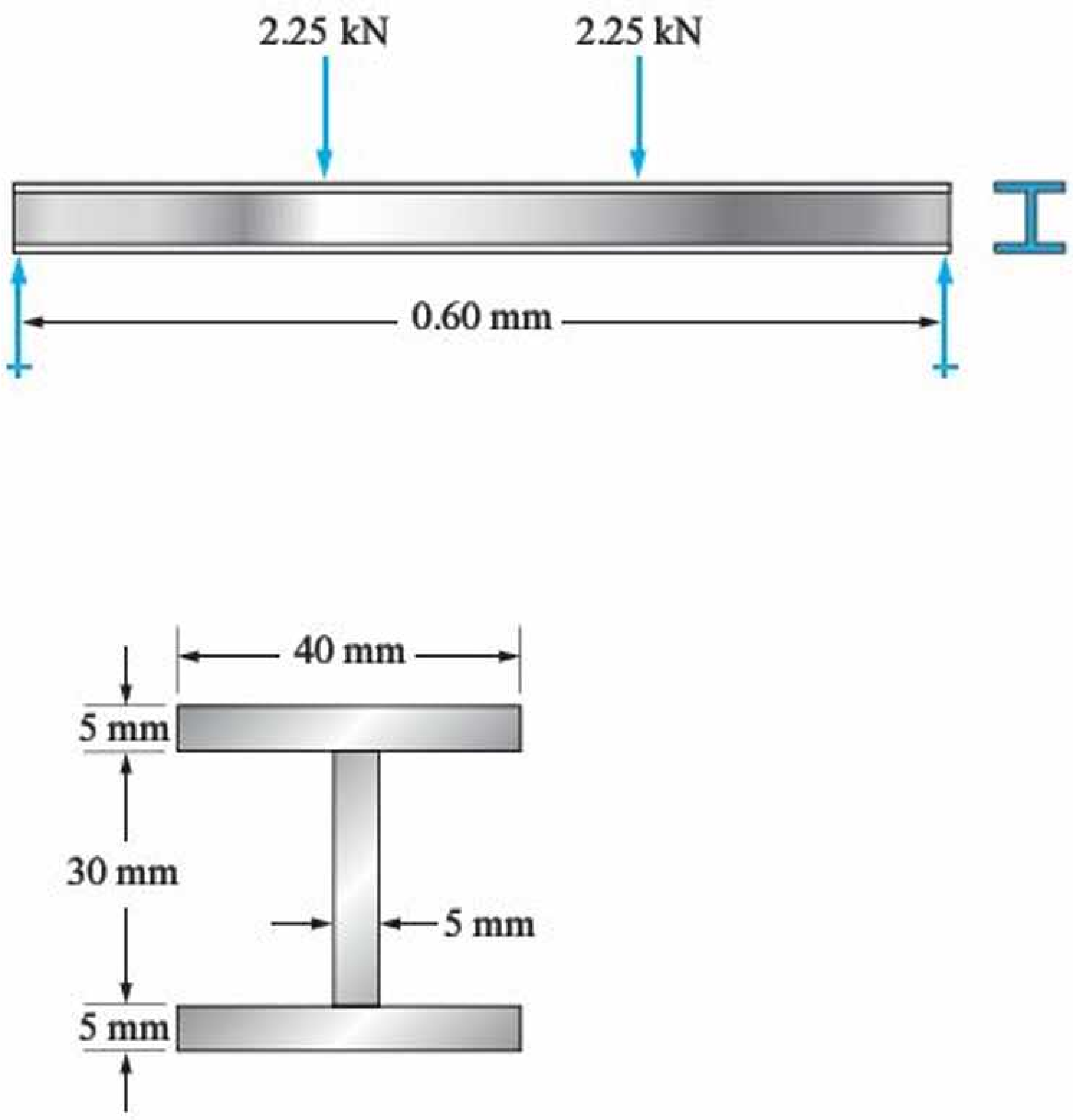


FIGURA P7–80

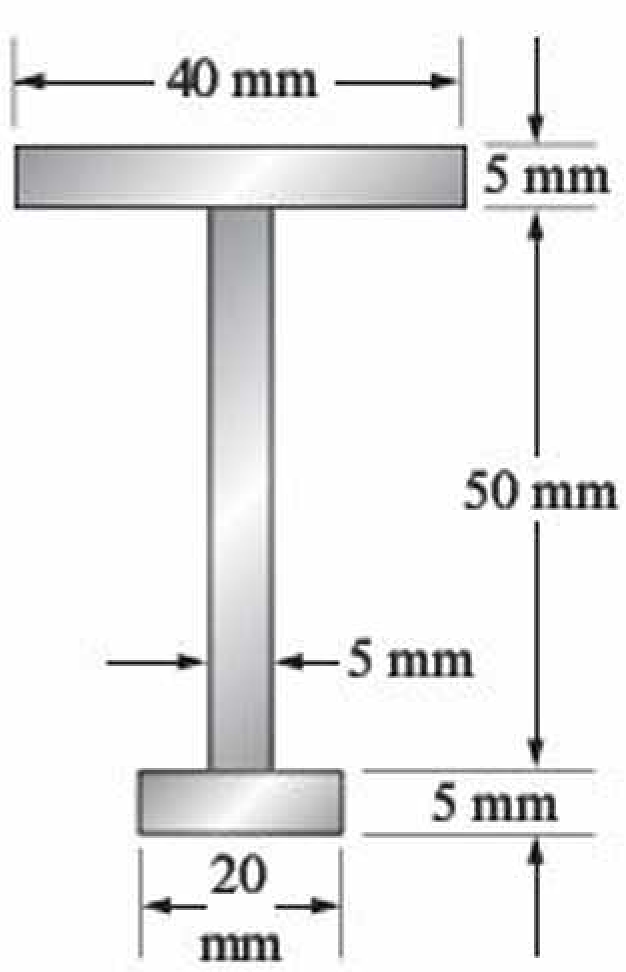


FIGURA P7–81

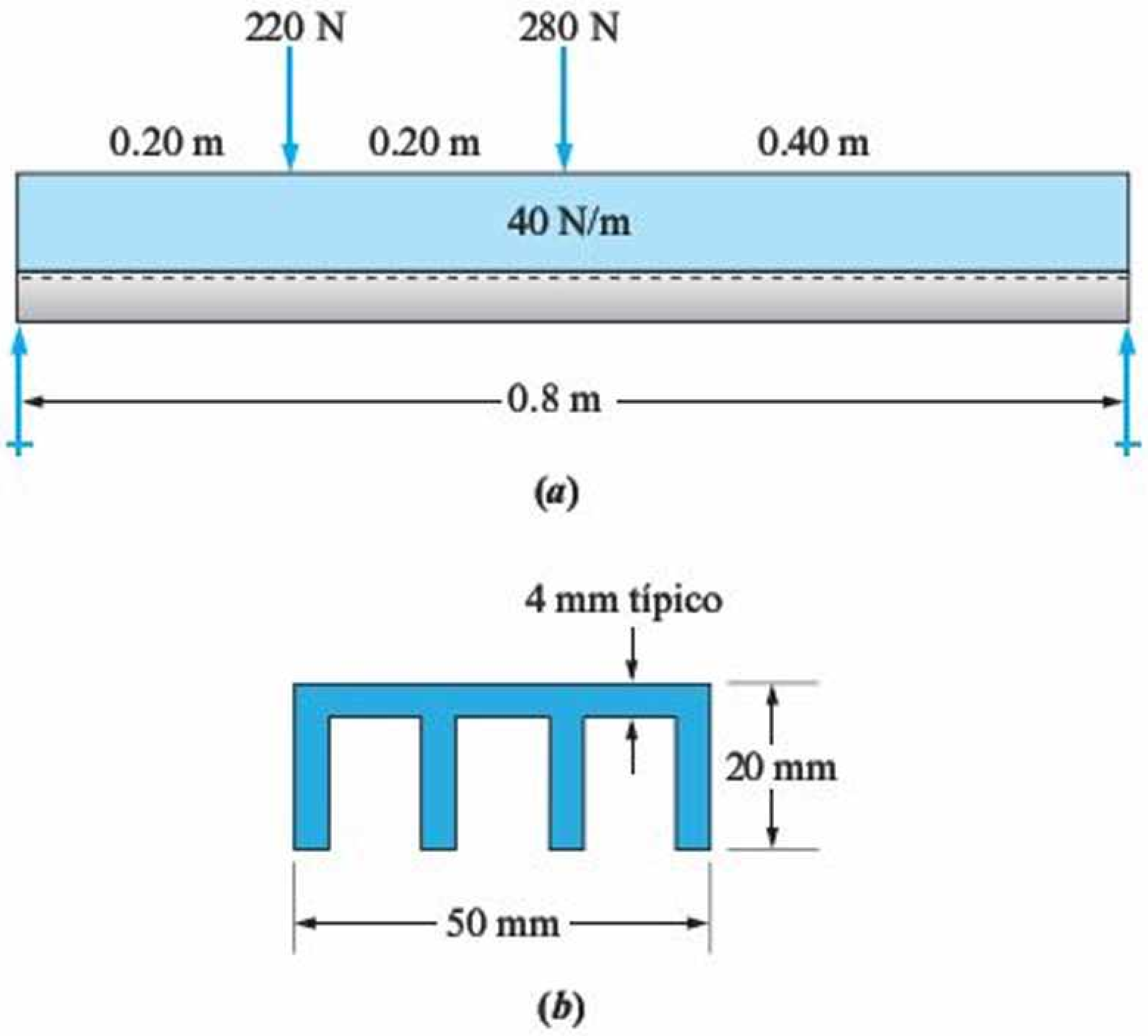


FIGURA P7–82 Viga de la impresora del problema 7–82.

7–83.E Se propone fabricar los escalones de una resbaladilla infantil de policarbonato moldeado con la sección transversal mostrada en la figura P7–83. Los escalones tienen que ser de 14.0 in y estarán simplemente apoyados en los extremos. ¿Qué peso máximo se puede aplicar en el centro del escalón si el esfuerzo flexionante no debe exceder de un tercio de la resistencia a la flexión del policarbonato del apéndice A20?

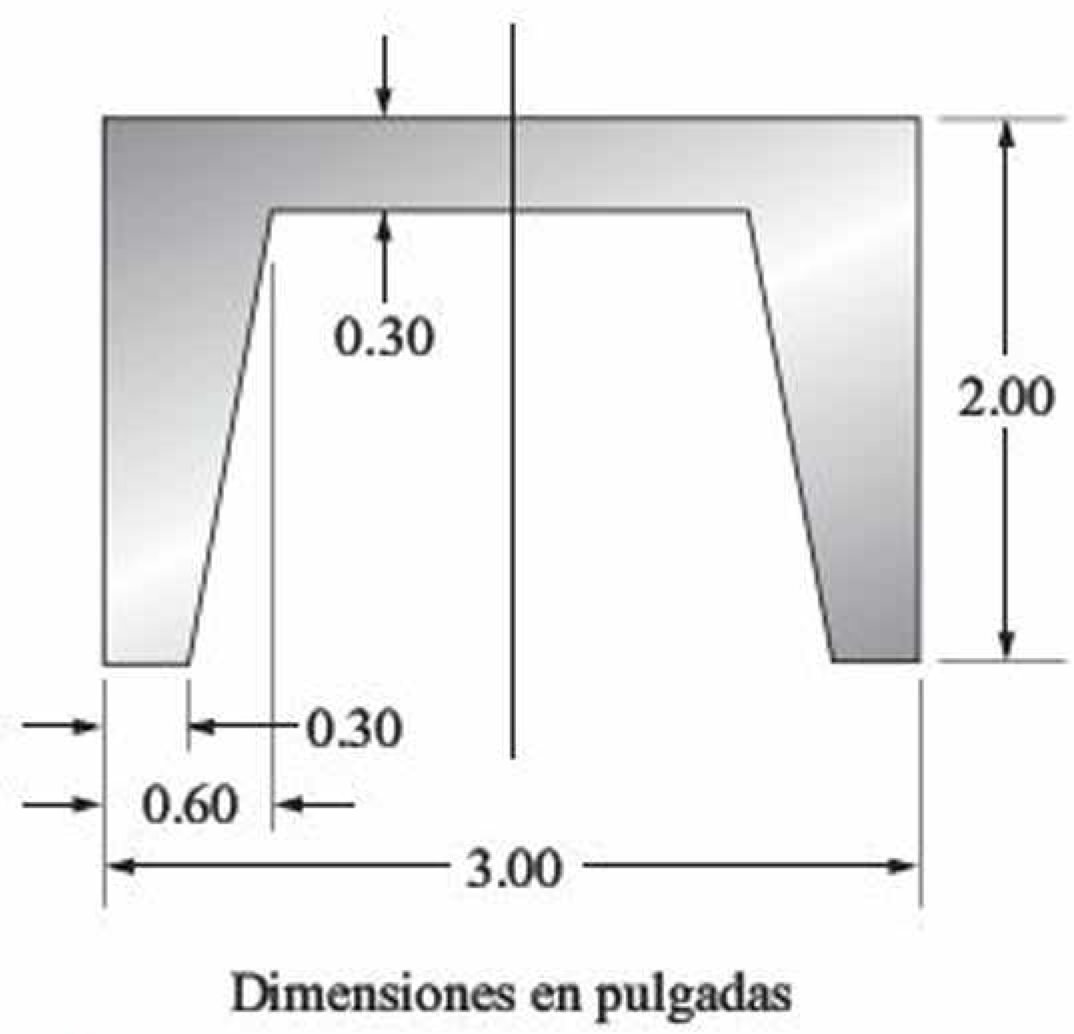


FIGURA P7–83

7.84.E El perfil mostrado en la figura P7–84 se utiliza como viga de un toldo para autos. El claro de la viga será de 8.0 ft. Calcule la carga uniformemente distribuida máxima que la viga puede soportar si se extruye de aluminio 6061–T4. Use un factor de diseño de 2 basado en resistencia a la cadencia.

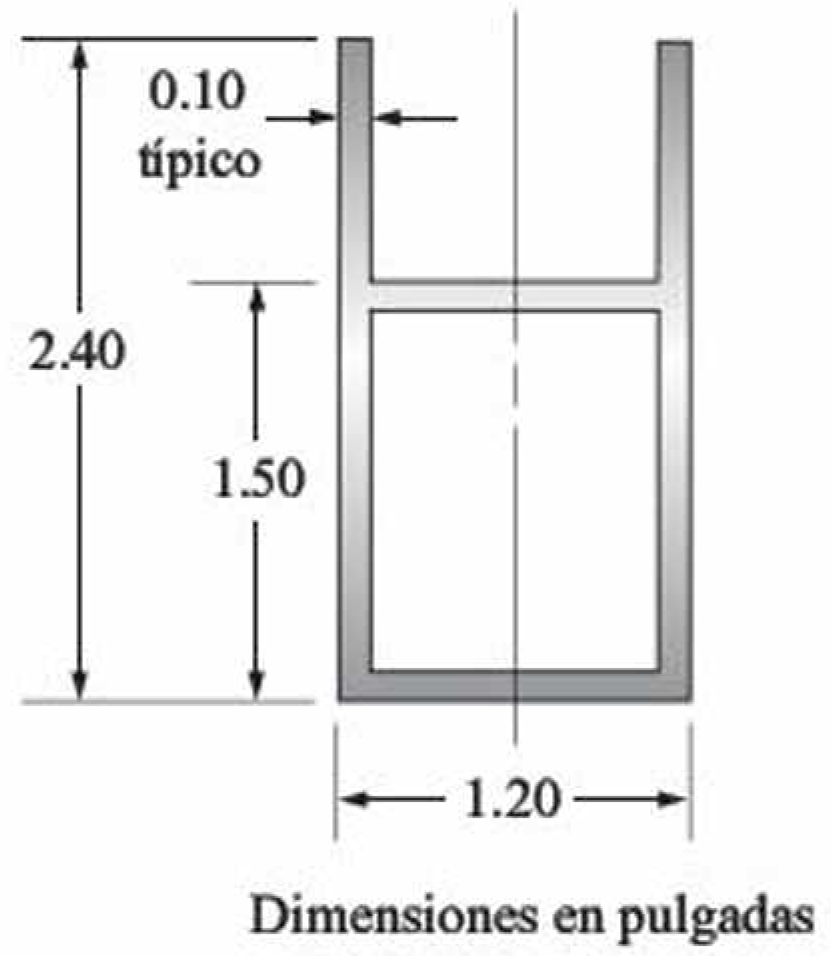


FIGURA P7–84

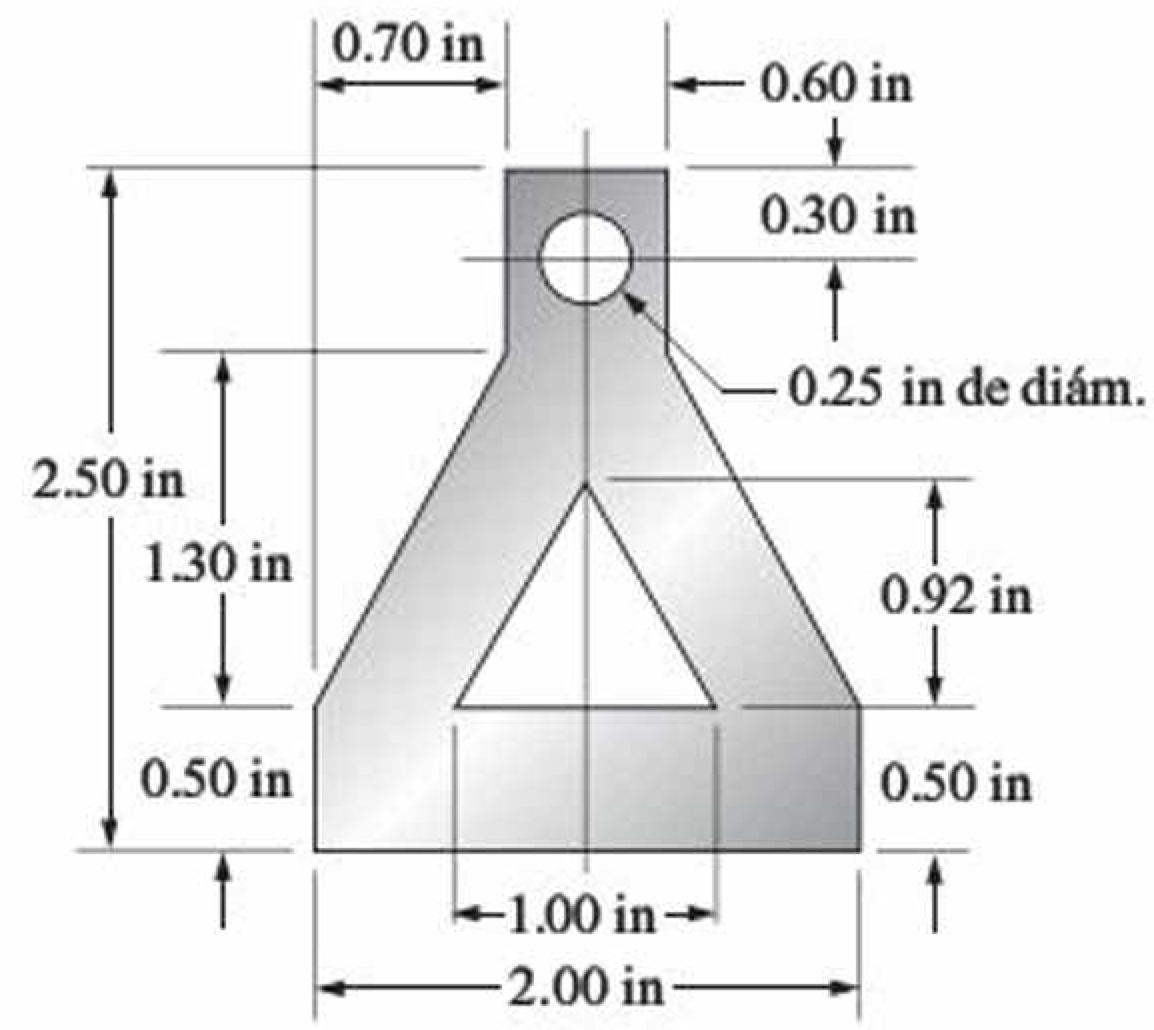


FIGURA P7–87

7–85.E La figura P7–85 muestra la sección transversal de una viga de aluminio hecha con una placa plana unida a la parte inferior de una sección acopada. La viga se utiliza como voladizo, de 24 in de largo; calcule la carga concentrada máxima permisible que se puede aplicar en el extremo si el esfuerzo máximo tiene que ser de no más de un octavo de la resistencia máxima del aluminio 2014–T4.

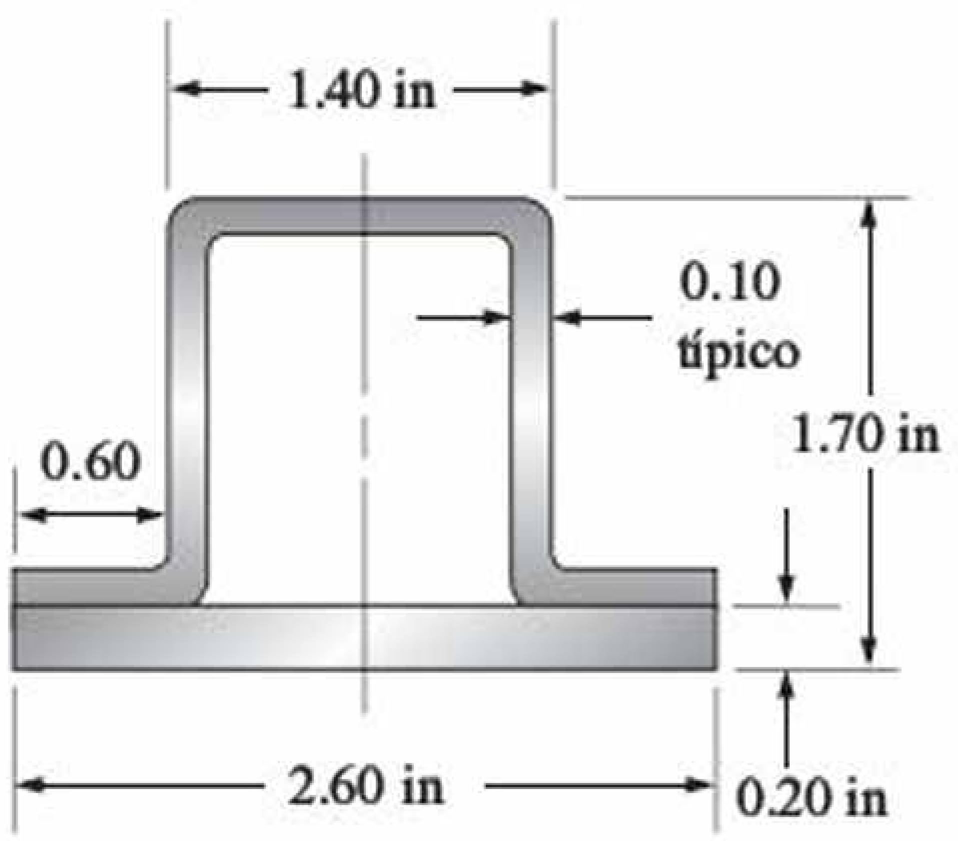


FIGURA P7–85

7–86.E Repita el problema 7–85 pero ahora utilice sólo la sección acopada sin la cubreplaca.

7–87.E La figura muestra la sección transversal de una viga que tiene que ser extruida de aleación de aluminio 6061–T6. Si la viga se va a utilizar como voladizo, de 42 in de largo, calcule la carga máxima permisible uniformemente distribuida que podría soportar al mismo tiempo que el esfuerzo flexionante se limita a una sexta parte de la resistencia máxima del aluminio.

7–88.E Repita el problema 7–87, pero ahora utilice la figura P7–83 para la sección transversal y aleación de fundición 356–0–T6.

Vigas con concentraciones de esfuerzo y secciones transversales variables

7–89.E En la figura P7–89 el tubo de 4 in se acopla perfectamente bien con sus apoyos de modo que no existe ninguna concentración de esfuerzo en *D*. En *C* el tubo de $3\frac{1}{2}$ in se inserta en el tubo de 4 in con anillo espaciador para que ajuste bien. Luego se utiliza una soldadura de filete perfectamente redondeada para unir las secciones. Teniendo en cuenta la concentración de esfuerzo en la unión, ¿qué tan afuera debe quedar el punto *C* para limitar el esfuerzo a 20 000 psi? Use el apéndice A–22–9 para determinar el factor de concentración de esfuerzo. ¿Es seguro el tubo de 4 in en *D*?

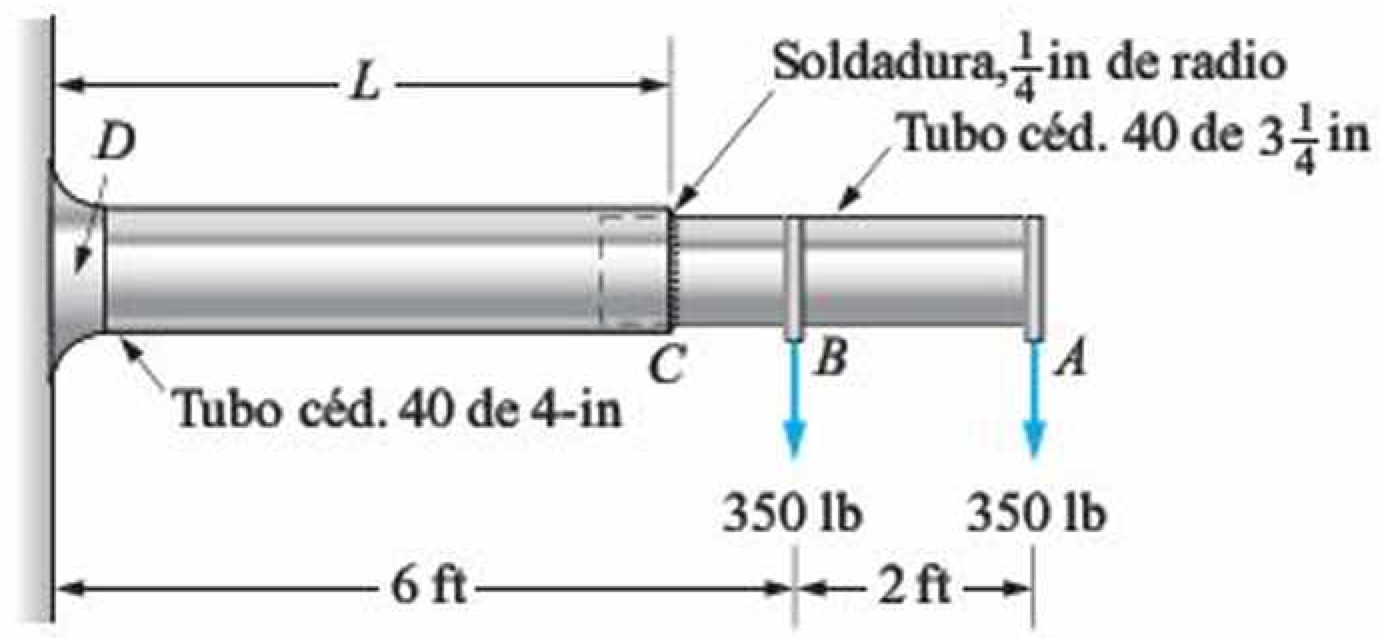


FIGURA P7–89

7–90.M La figura P7–90 muestra una flecha circular de una transmisión de engranes. Los engranes van montados en los puntos *A*, *C* y *E*. En *B* y *D* van los cojinetes de apoyo. Las fuerzas transmitidas por los engranes a la flecha se muestran actuando hacia abajo. Calcule el esfuerzo flexionante máximo en la flecha, teniendo en cuenta las concentraciones de esfuerzo.

7–91.M Las fuerzas mostradas en la flecha de la figura P7–91 se deben a los engranes montados en *B* y *C*. Calcule el esfuerzo flexionante máximo en la flecha.

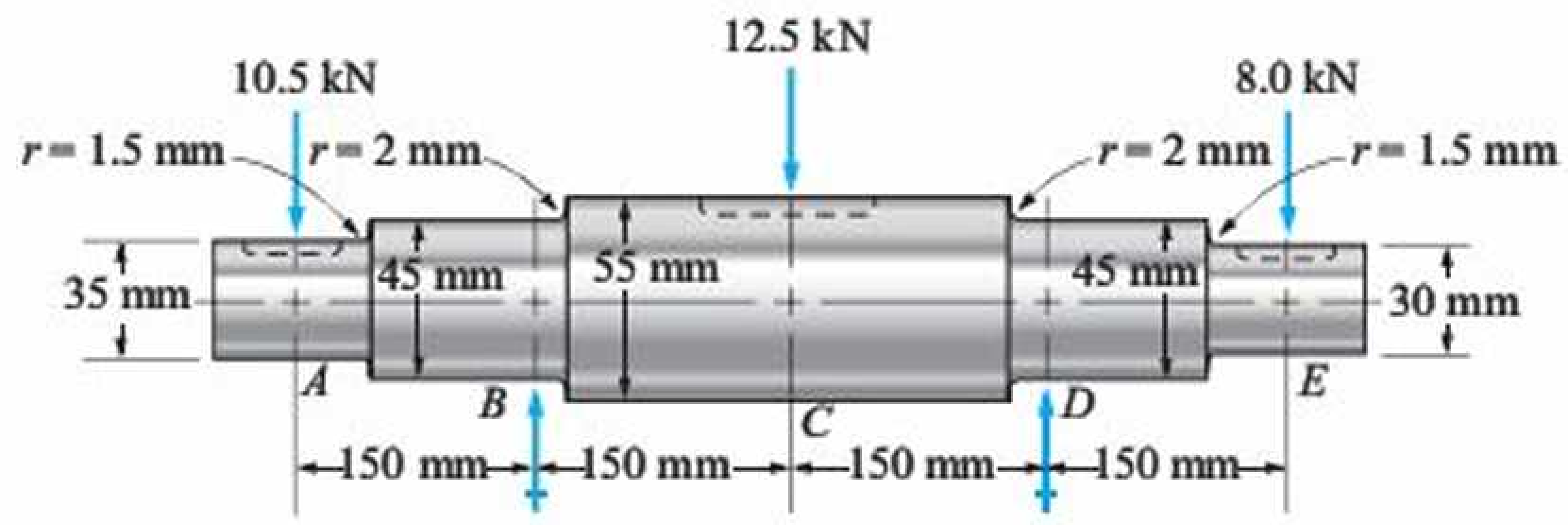


FIGURA P7–90

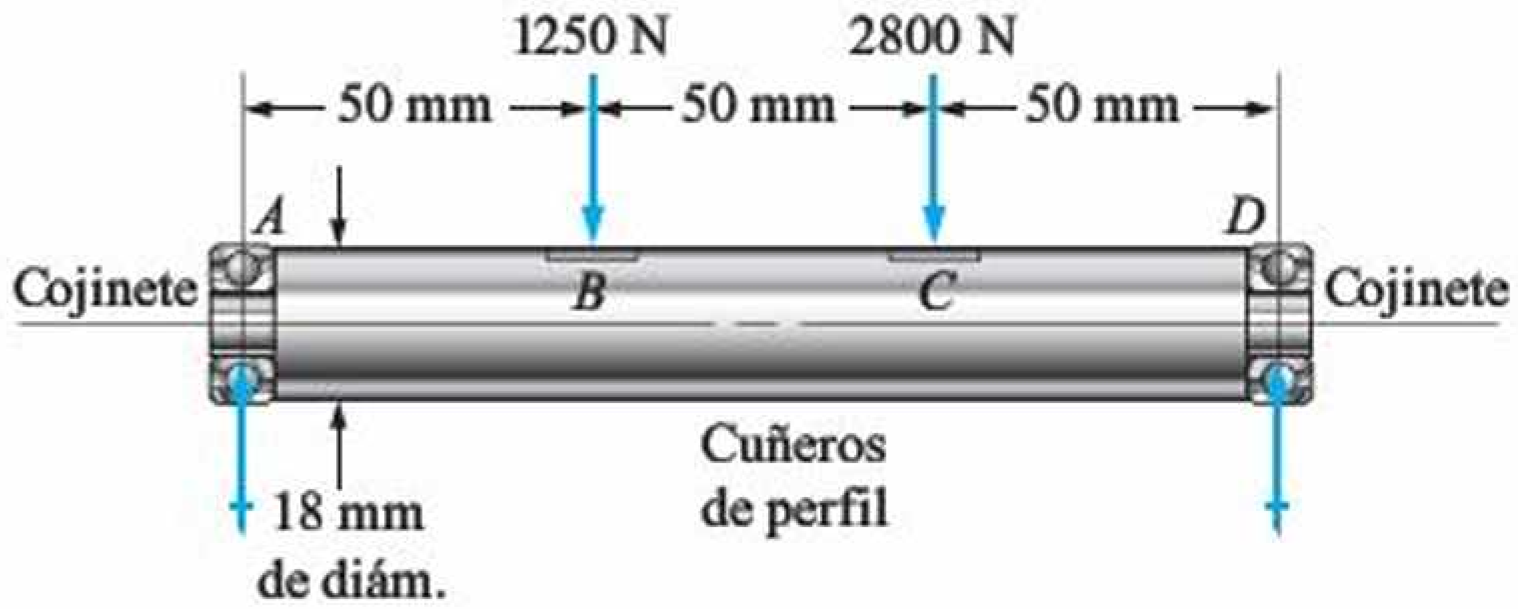


FIGURA P7–91

7–92.E La figura P7–92 muestra la flecha de una máquina soportada por dos cojinetes en sus extremos. Las dos fuerzas que actúan en flecha son ejercidas por los engranes. Considerando sólo esfuerzos flexionantes, calcule el esfuerzo máximo en la flecha y señale dónde ocurre.

7–93.E La figura P7–93 muestra una palanca hecha de una barra rectangular de acero. Calcule el esfuerzo flexionante en el punto de apoyo de la palanca, a 20 in del pivote y en cada uno de los agujeros de la barra. El diámetro de cada agujero es de 0.75 in.

7–94.E Repita el problema 7–93 pero ahora con los agujeros de 1.38 in de diámetro.

7–95.E En la figura P7–93 los agujeros de la barra permiten ajustar la longitud de la barra con respecto al pivote. Calcule el esfuerzo flexionante máximo en la palanca conforme el pivote se cambia a cada uno de los agujeros. El diámetro de los agujeros es de 1.25 in.

7–96.M La ménsula mostrada en la figura P7–96 soporta las cargas oponentes creadas por un resorte. Si la fuerza, F, es de 2500 N, calcule el esfuerzo flexionante en una sección como A–A, alejada de los agujeros.

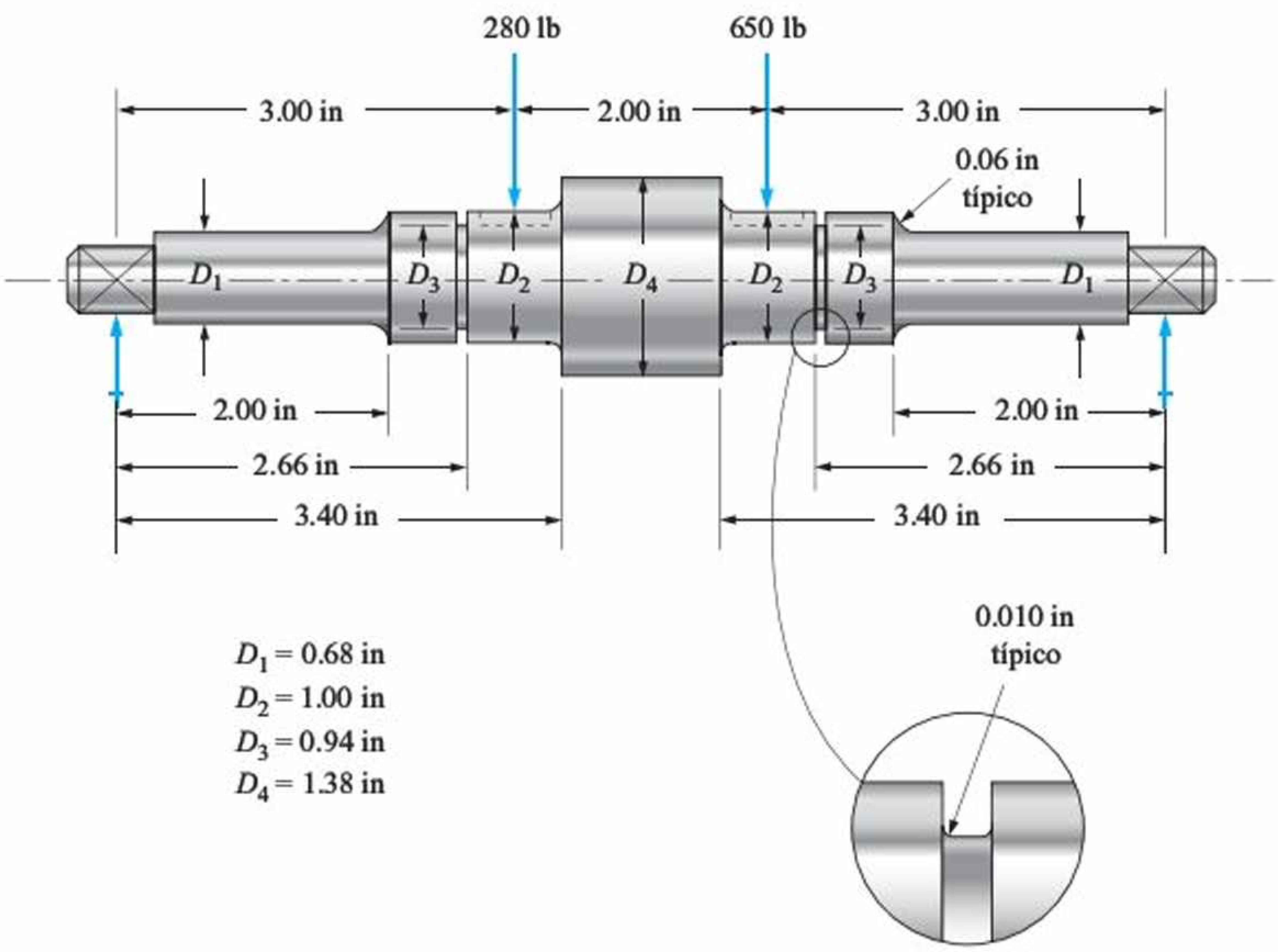


FIGURA P7–92

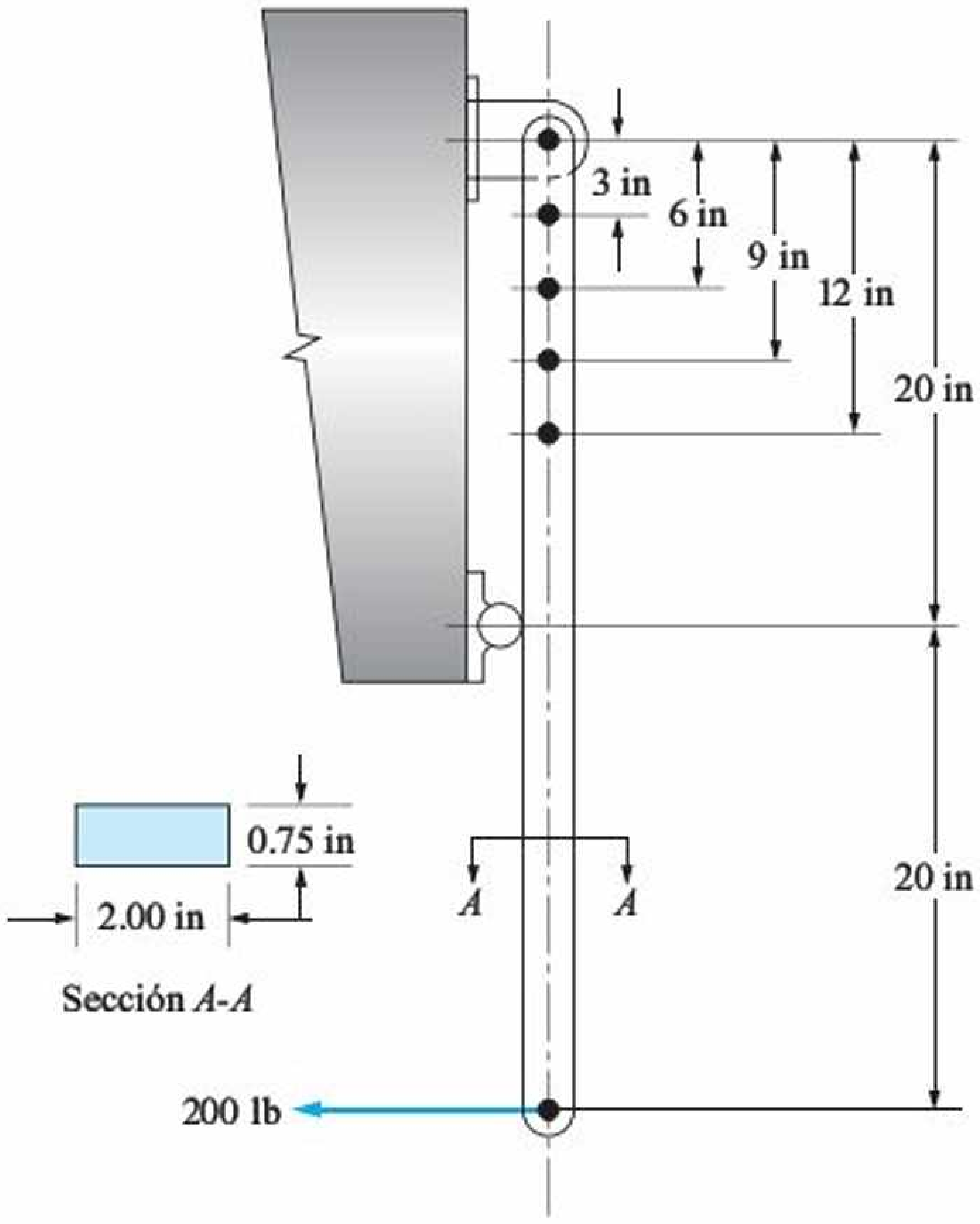


FIGURA P7–93 Palanca de los problemas 7–93 a 7–95.

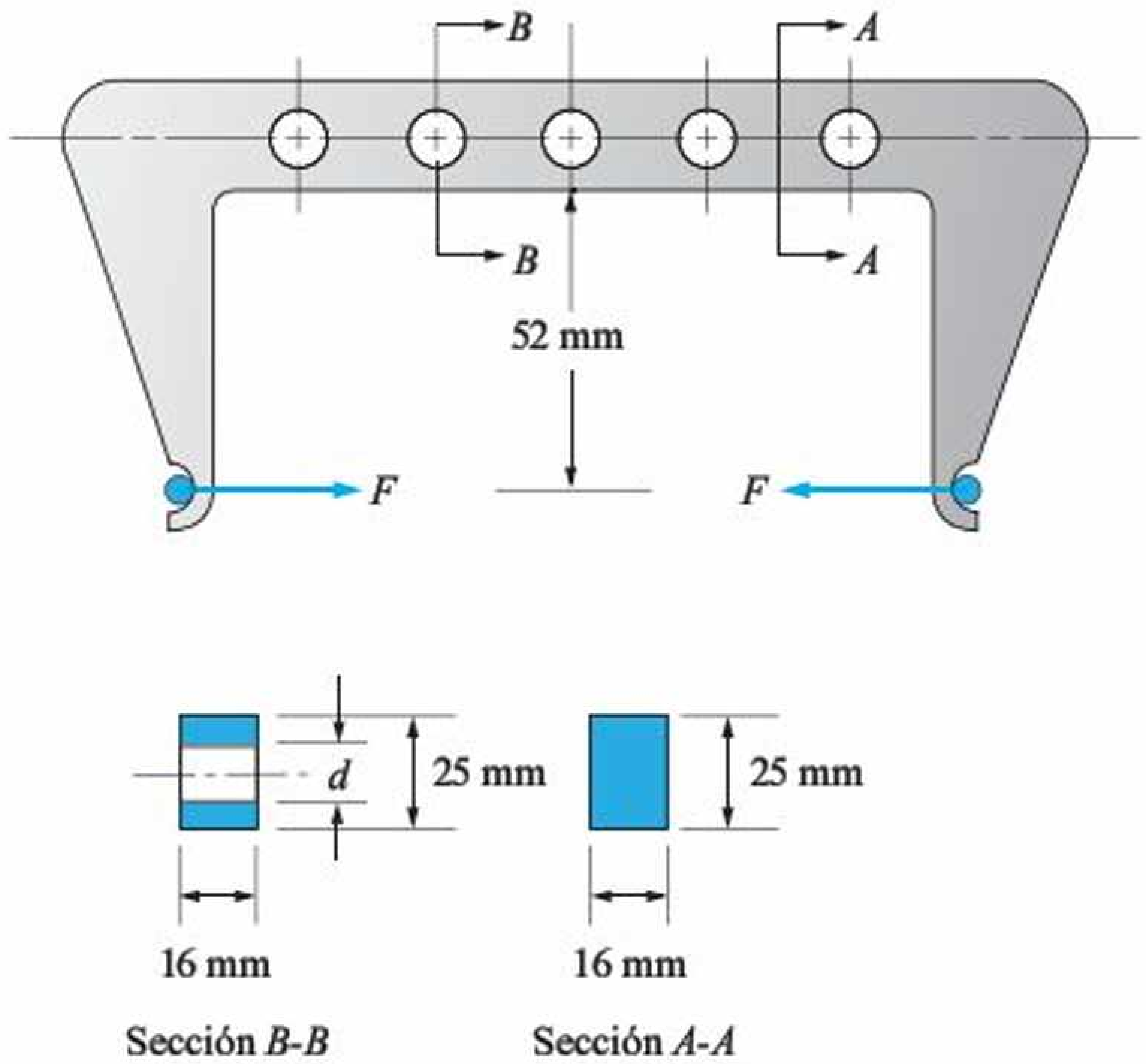


FIGURA P7–96 Ménsula de los problemas 7–96 a 7–99.

7–97.M Si la fuerza, F, en la figura P7–96 es de 2500 N, calcule el esfuerzo flexionante en una sección que pase a través de los agujeros tal como B–B. Use $d = 12$ mm como diámetro de los agujeros.

7–98.M Repita el problema 7–97 pero ahora con $d = 15$ mm como diámetro de los agujeros.

7–99.M Para el esfuerzo resultante calculado en el problema 7–98, especifique un acero adecuado para la ménsula si la fuerza se repite muchas miles de veces.

7–100.M La figura P7–100 muestra una barra plana escalonada sometida a flexión. Si la barra es de acero AISI 1040 estirado en frío, calcule la fuerza repetida máxima, F, que se puede aplicar con seguridad a la barra.

7–101.M Repita el problema 7–100, con $r = 2.0$ mm como radio del filete.

7–102.M Cambie la dimensión de 75 mm en la barra plana escalonada mostrada en la figura P7–100 que sitúa al escalón en un valor que hace que el esfuerzo flexionante en él sea igual a aquel en el punto de aplicación de la carga.

7–103.M Cambie el radio del filete en la barra escalonada plana mostrada en la figura P7–100 para hacer que el esfuerzo flexionante en el filete sea igual a aquel en el punto de aplicación de la carga.

7–104.M Repita el problema 7–100, pero cambie la altura de la barra de 60 mm a 75 mm.

7–105.M ¿Sería posible perforar una agujero a la mitad de la altura de 60 mm de la barra plana escalona mostrada en la figura P7–100 entre las dos fuerzas sin que se incremente el esfuerzo flexionante máximo en ella? De ser así, ¿cuál es el agujero de diámetro máximo que se puede perforar?

7–106.M La figura P7–106 muestra una barra plana escalonada que soporta tres cargas concentradas. Sean P = 200 N, $L_1 = 180$ mm, $L_2 = 80$ mm y $L_3 = 40$ mm. Calcule el esfuerzo

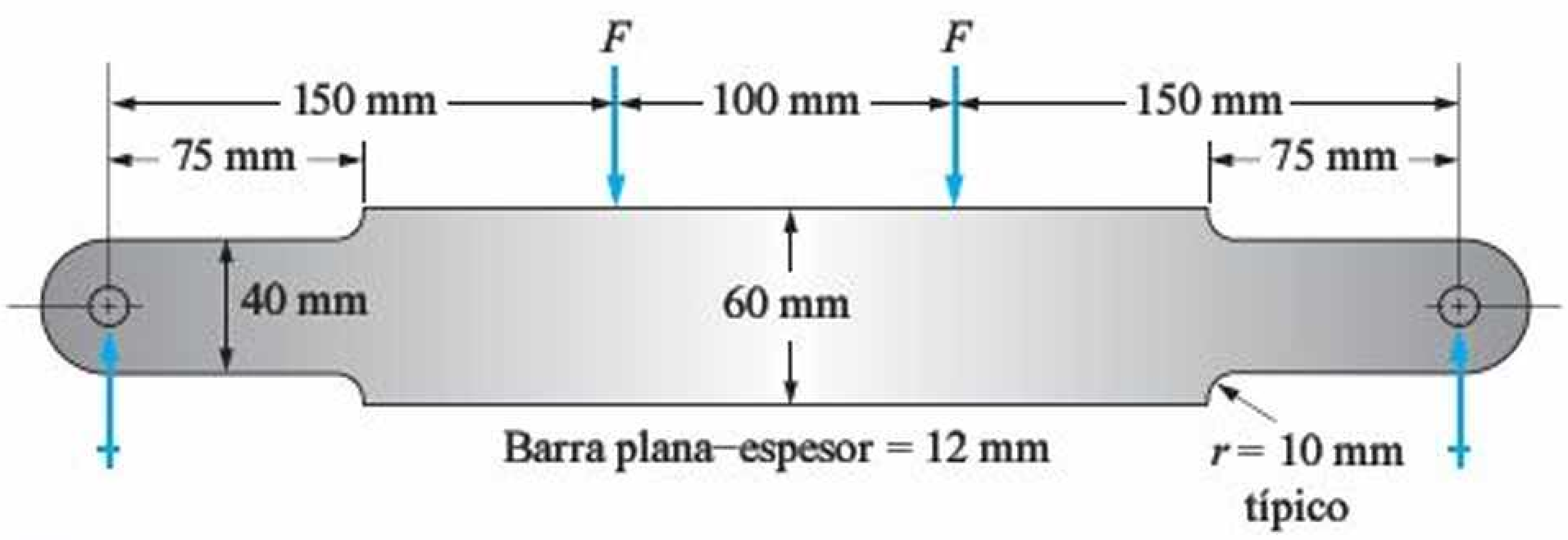


FIGURA P7–100 Barra plana escalonada de los problemas 7–100 a 7–105.

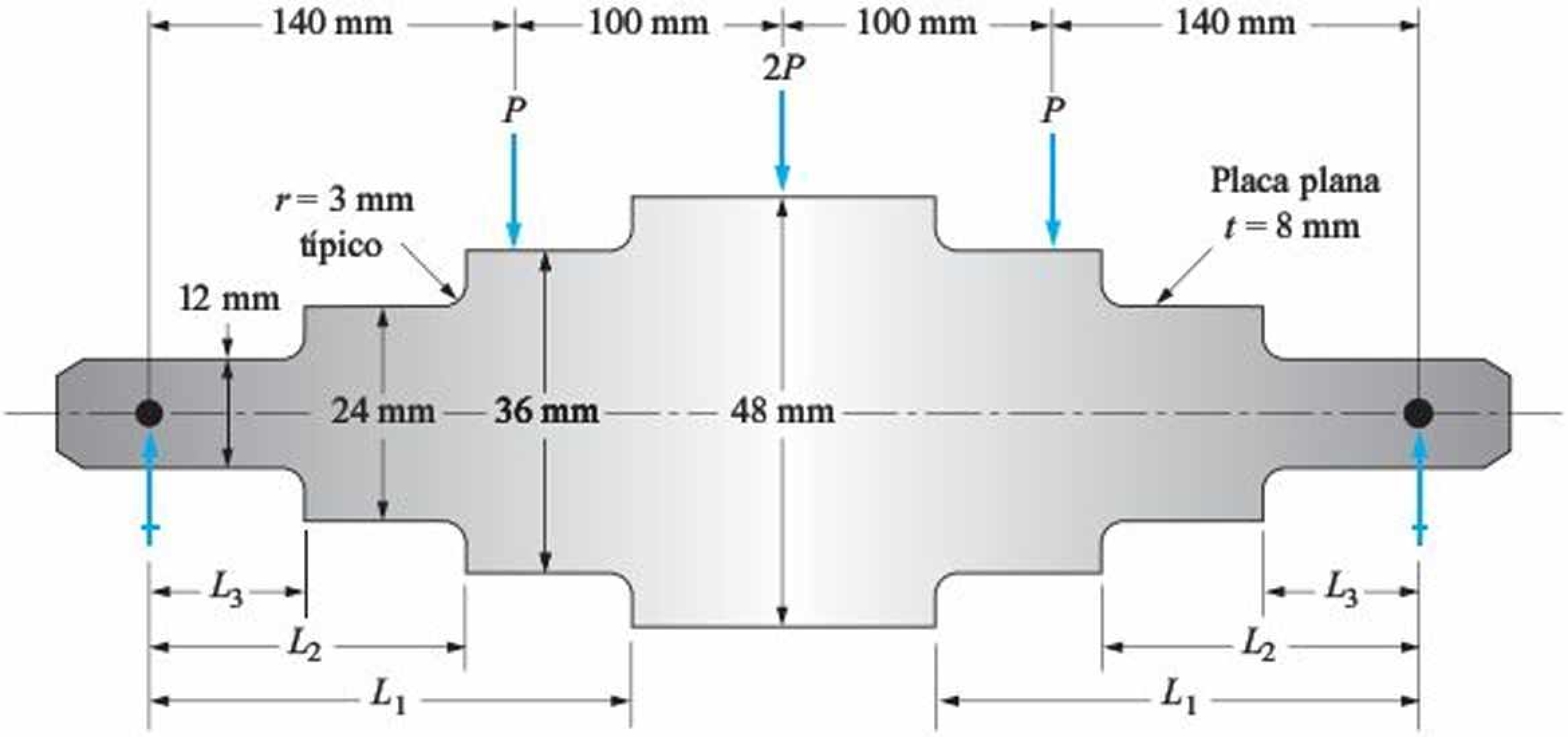


FIGURA P7–106 Barra plana escalonada de los problemas 7–106 a 7–110.

flexionante máximo y señale dónde ocurre. La barra se refuerza con flexión lateral y torsión. Observe que las longitudes no están dibujadas a escala en la figura.

7–107.M Con los datos del problema 7–106, especifique un material adecuado para que la barra produzca un factor de diseño de 8 basado en la máxima resistencia.

7–108.M Repita el problema 7–107 con $r = 1.50$ mm como radio del filete.

7–109.M Para la barra plana escalonada mostrada en la figura P7–106, sea $P = 400$ N. La barra debe ser de titanio Ti–6A1–4V y se desea un factor de diseño de 8 basado en la resistencia máxima. Especifique las longitudes máximas permisibles, L_1, L_2 y L_3 que serían seguras.

7–110.M La barra escalonada de la figura P7–106 tiene que ser de acero AISI 4140 OQT 1100. Use $L_1 = 180$ mm, $L_2 = 80$ mm y $L_3 = 40$ mm. Calcule la fuerza máxima permisible P que se podría aplicar a la barra si se desea un factor de diseño de 8 basado en la resistencia máxima.

7–111.M La figura P7–111 muestra una barra plana con espesor uniforme de 20 mm. La altura se reduce desde $h_1 = 40$ mm hasta $h_2 = 20$ mm para ahorrar peso. Calcule el esfuerzo flexionante en la barra en puntos separados 40 mm localizados entre el apoyo y la carga. Luego trace una gráfica de esfuerzo contra distancia al apoyo. La barra es simétrica con respecto a su centro. Sea $P = 5.0$ kN.

7–112.M Para la barra mostrada en la figura P7–111, sea $h_1 = 60$ mm y $h_2 = 20$ mm. La barra tiene que ser de policarbonato. Calcule la carga máxima permisible P que producirá un factor de diseño de 4 basado en la resistencia a la flexión del plástico. La barra es simétrica con respecto a su centro.

7–113.M En la figura P7–111, la carga $P = 1.20$ kN y la barra tiene que ser de acero AISI 5160 OQT 1300. Calcule las dimensiones requeridas h_1 y h_2 que producirá un factor de diseño de 8 basado en la resistencia máxima. La barra es simétrica con respecto a su centro.

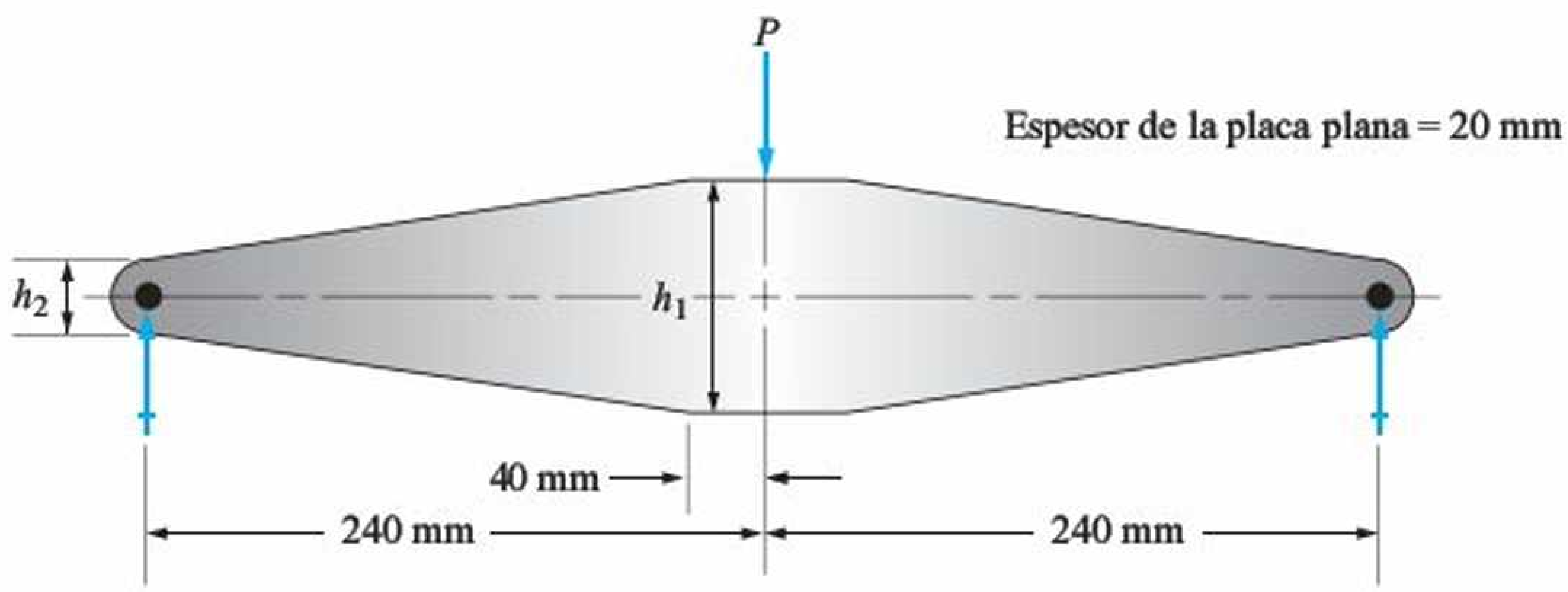


FIGURA P7–111 Barra plana ahusada de los problemas 7–111 a 7–113.

7–114.E Se va a diseñar un estante para almacenar tubos, como se muestra en la figura P7–114. Cada tubo ejerce una fuerza de 2500 lb en el brazo de soporte. La altura del brazo debe reducirse el extremo fijo al extremo libre como se sugiere en la figura, pero el espesor se mantendrá constante a 1.50 in. Determine la altura del brazo en las secciones *B* y *C*, considerando sólo el esfuerzo flexionante. Use acero AISI 1040 laminado en caliente para el brazo y un factor de diseño de 4 basado en la resistencia a la cadencia.

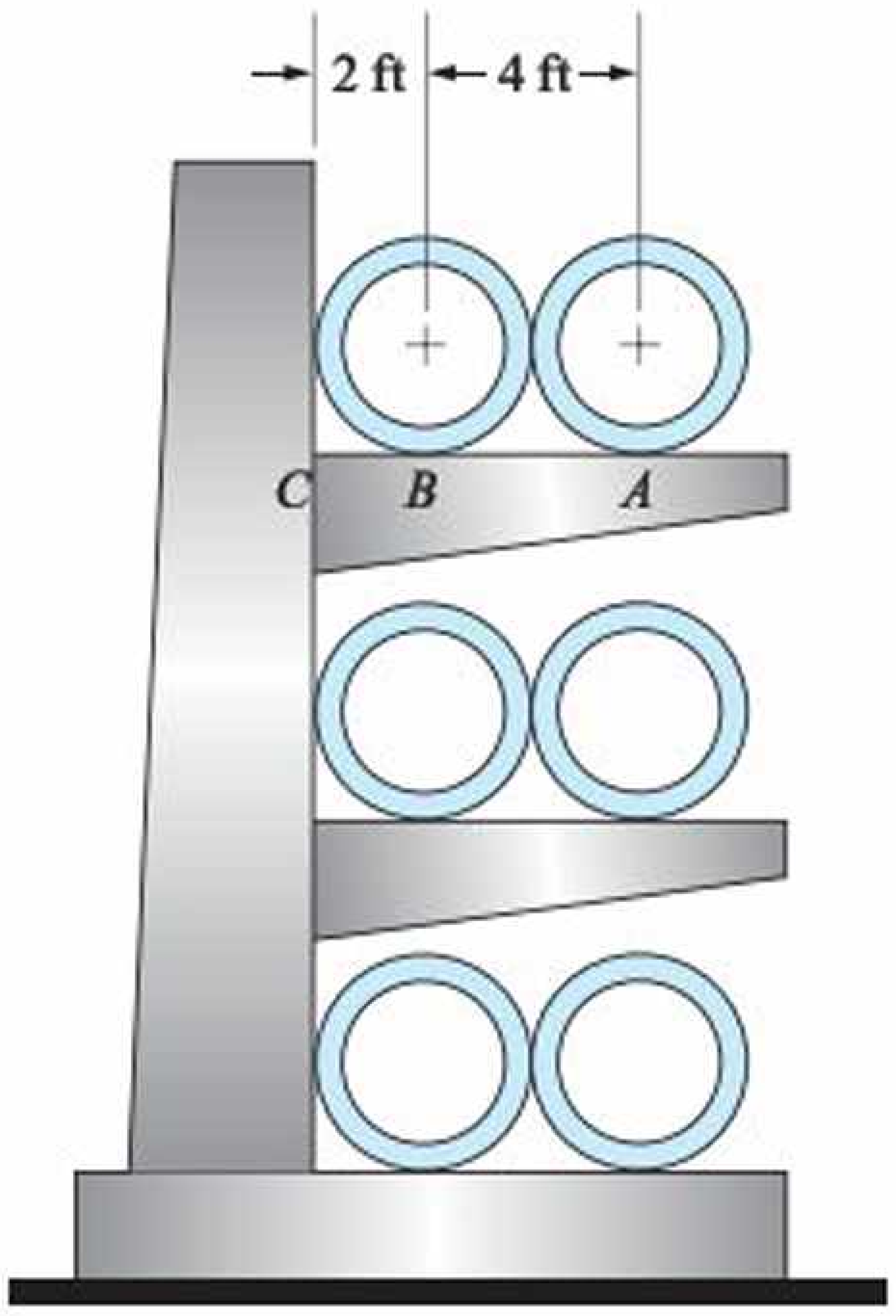


FIGURA P7–114 Estante para almacenar tubos del problema 7–114.

7–115.E Especifique el perfil de viga de patín ancho más ligero (perfil W) capaz de soportar una carga estática uniformemente distribuida de 2.5 kip/ft a lo largo de un claro simplemente apoyado, de 12 ft de longitud. Use la especificación AISC y acero estructural ASTM A992.

7–116.E Se propone evaluar la viga del problema 7–115 para ahorrar peso. El resultado de este problema requirió una viga W14 × 26 de solamente 192 lb de peso pero su módulo de sección, *S*, no es suficiente. Para incrementarlo, se propone agregar placas de acero, de 0.25 in de espesor y 3.50 in de ancho, tanto al patín superior como al inferior a la mitad de la viga. Realice los análisis siguientes:

(a) Calcule el módulo de sección de la parte de la viga W12 × 16 con las cubreplacas.

(b) Si el resultado de la parte (a) es satisfactorio para limitar el esfuerzo a un nivel aceptable, calcule la longitud requerida a lo largo de la cual se tendría que colocar las placas al 0.5 ft más cercano.

(c) Calcule el peso resultante de la viga compuesta y compárela con el de la viga original W14 × 26.

7–117.E La figura P7–117 muestra una viga compuesta formada por un canal agregado a una viga American Standard. Ambos son de acero estructural ASTM A36. Si la viga está simplemente apoyada y soporta una carga uniformemente distribuida a lo largo del claro de 15.0 ft, calcule la carga permisible para la viga compuesta y para el perfil S. La carga es estática y se tiene que utilizar la especificación AISC para el esfuerzo de diseño.



FIGURA P7–117

Centro de flexión

7–118.M Localice el centro de flexión del canal mostrado en la figura P7–118 medido a partir de la cara izquierda del alma vertical.

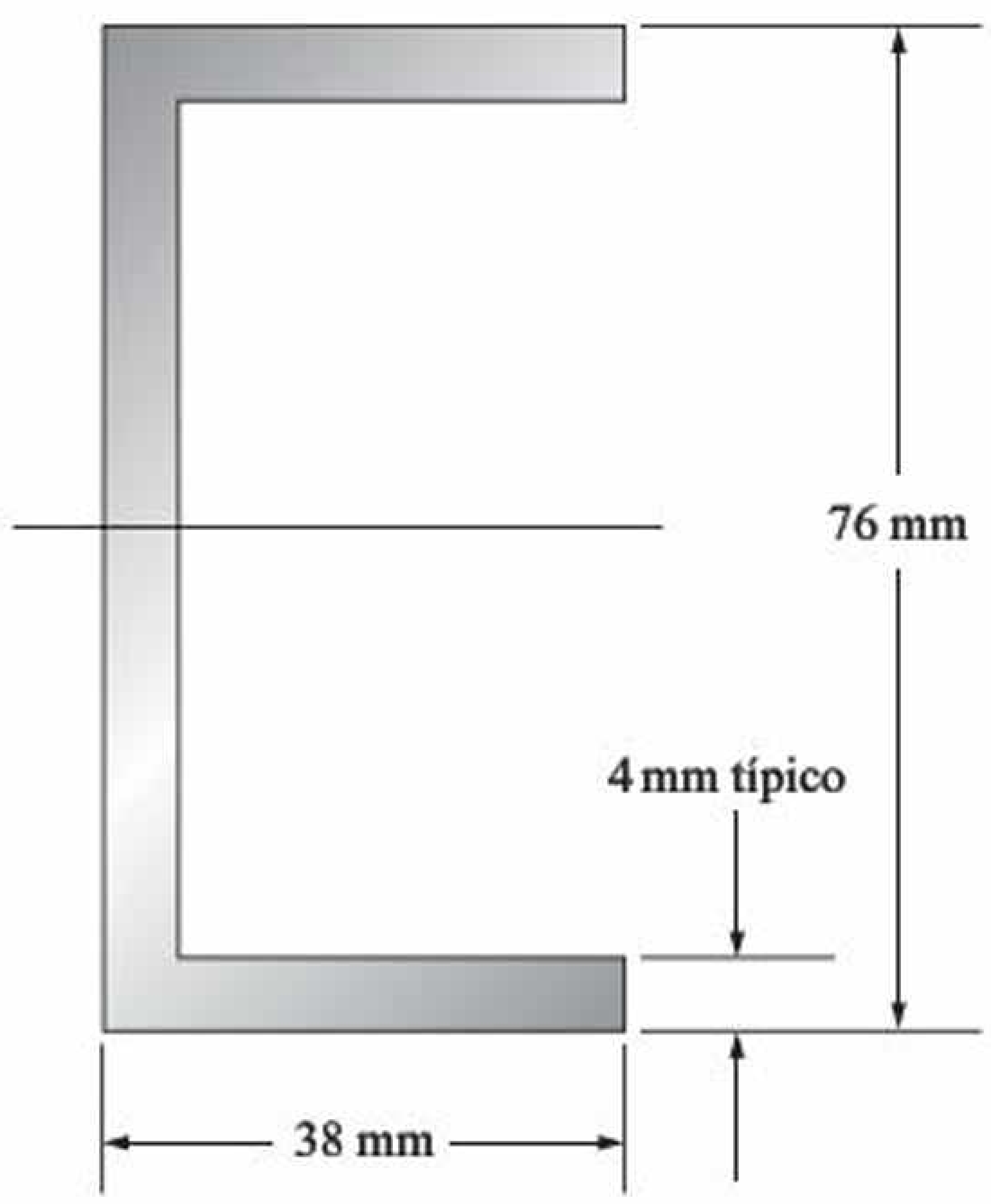


FIGURA P7–118

7–119.M Una compañía planea fabricar una serie de vigas acanaladas laminándolas con lámina de aluminio plana. Cada canal debe tener las dimensiones externas mostrada en la figura P7–118, pero diferentes espesores, 0.50, 1.60 y 3.00 mm. Para cada diseño, calcule el momento de inercia con respecto al eje centroidal horizontal y la ubicación del centro de flexión, medido a partir de la cara izquierda del alma vertical.

7–120.E Localice el centro de flexión de la sección acopada de la figura P7–120 medido a partir de la cara izquierda del alma vertical.

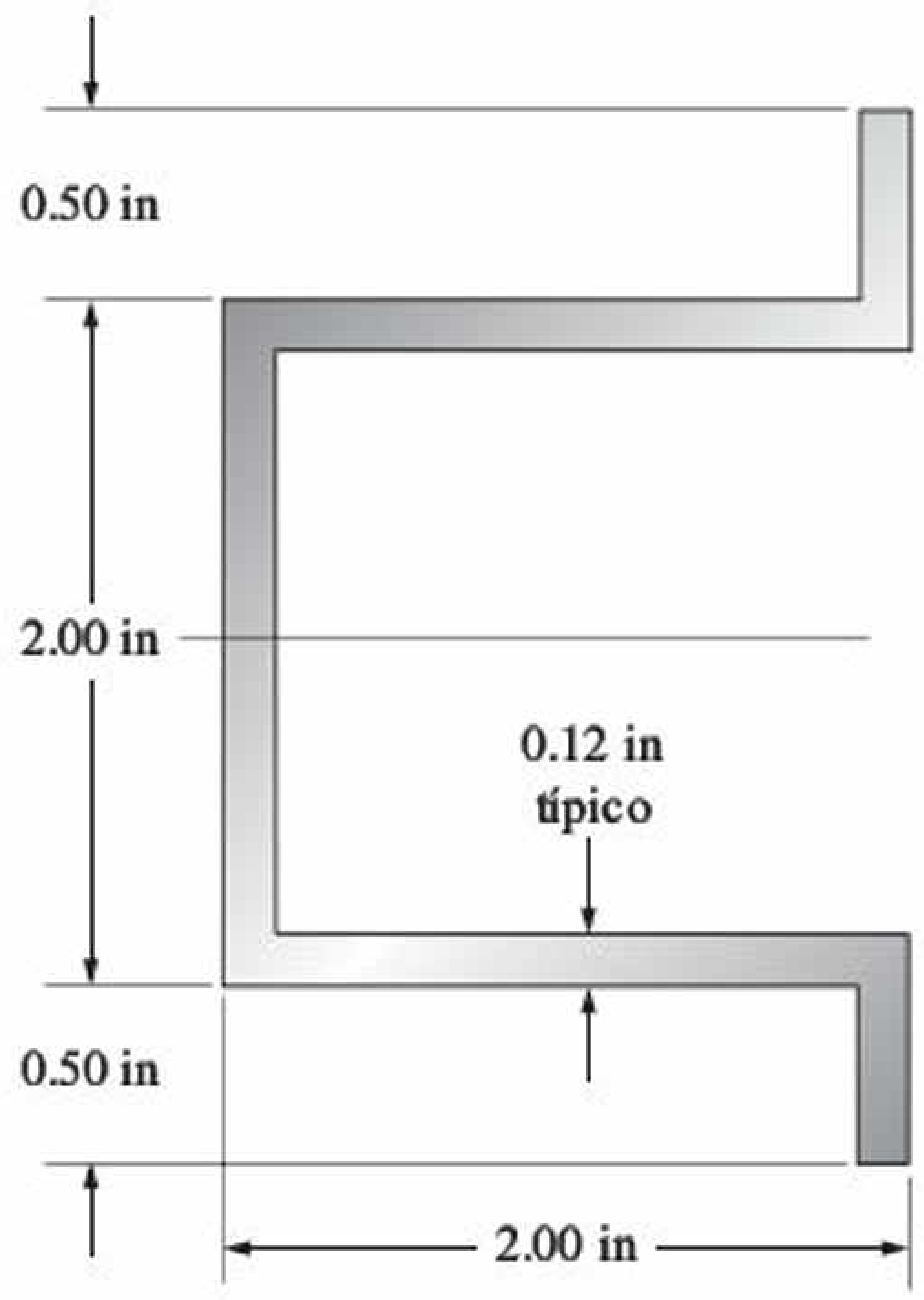


FIGURA P7–120

7–121.E Una compañía planea fabricar tres secciones acopadas laminándolas con lámina de aluminio plana. Cada sección debe tener las dimensiones externas mostradas en la figura P7–120, pero diferentes espesores, 0.020, 0.063 y 0.125 in. Para cada diseño, localice el centro de flexión medido a partir de la cara izquierda del alma vertical.

7–122.M Localice el centro de flexión del canal alabiado mostrado en la figura P7–122, medido a partir de la cara del alma vertical.

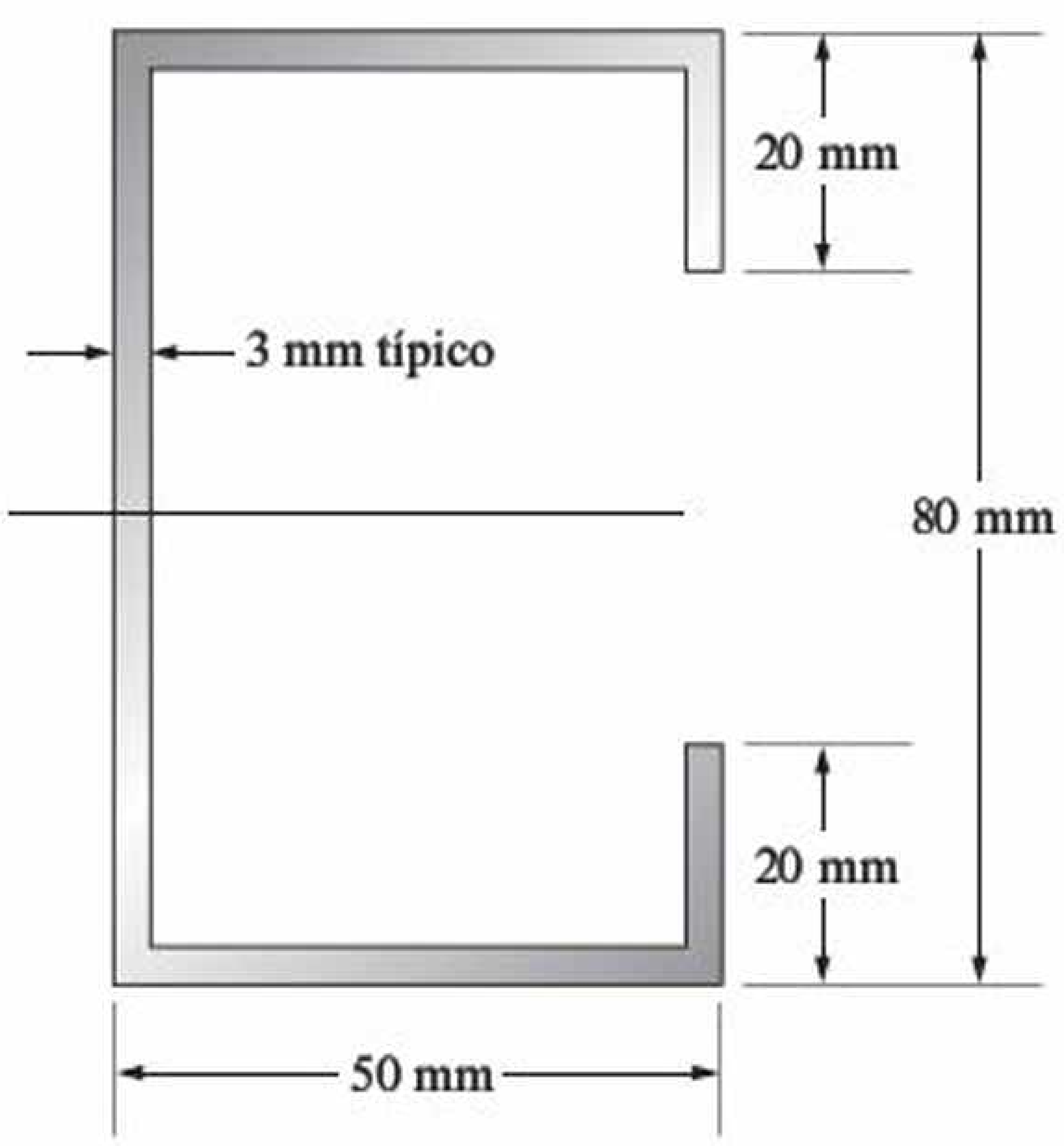


FIGURA P7–122

7–123.M Una compañía planea fabricar una serie de tres canales alabiado laminándolos con lámina de aluminio plana. Cada canal debe tener las dimensiones externas mostradas en la figura P7–122, pero diferentes espesores, 0.50, 1.60 y 3.00 mm. Para cada diseño, localice el centro de flexión, medido a partir de la cara izquierda del alma vertical.

7–124.M Localice el centro de flexión de un tubo delgado partido de 50 mm de diámetro externo y 4 mm de espesor de pared.

7–125.E En un canal de aluminio C2 × 0.577 con su alma en posición vertical, localice el centro de flexión. Ignore el efecto de los filetes entre los patines y el alma.

7–126.M Si la sección acopada mostrada en la figura P7–126 se girara 90 grados con respecto a la posición mostrada, localice el centro de flexión.

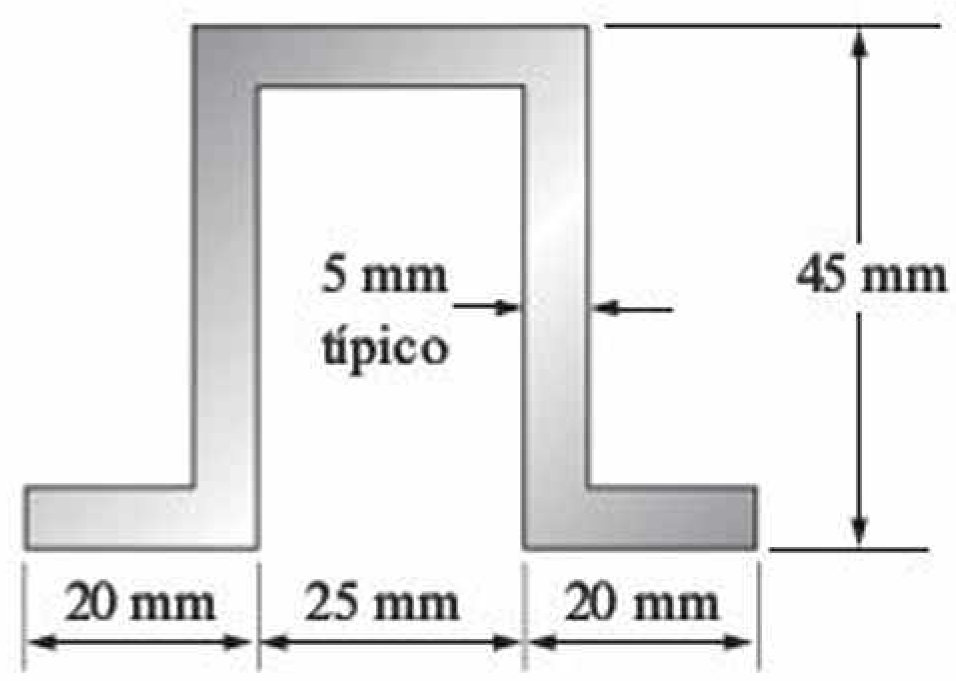


FIGURA P7–126

Vigas hechas de materiales anisotrópicos

7–127.E La sección de viga mostrada en la figura P7–127 tiene que ser extruida de aluminio 6061–T6. La resistencia a la tensión permisible es de 19 ksi. Por sus patas largas relativamente delgadas en la parte superior, la resistencia a la compresión permisible es de sólo 14 ksi. La viga tiene que cubrir un claro de 6.5 ft y estará simplemente apoyada en sus extremos. Calcule la carga uniformemente distribuida máxima permisible.

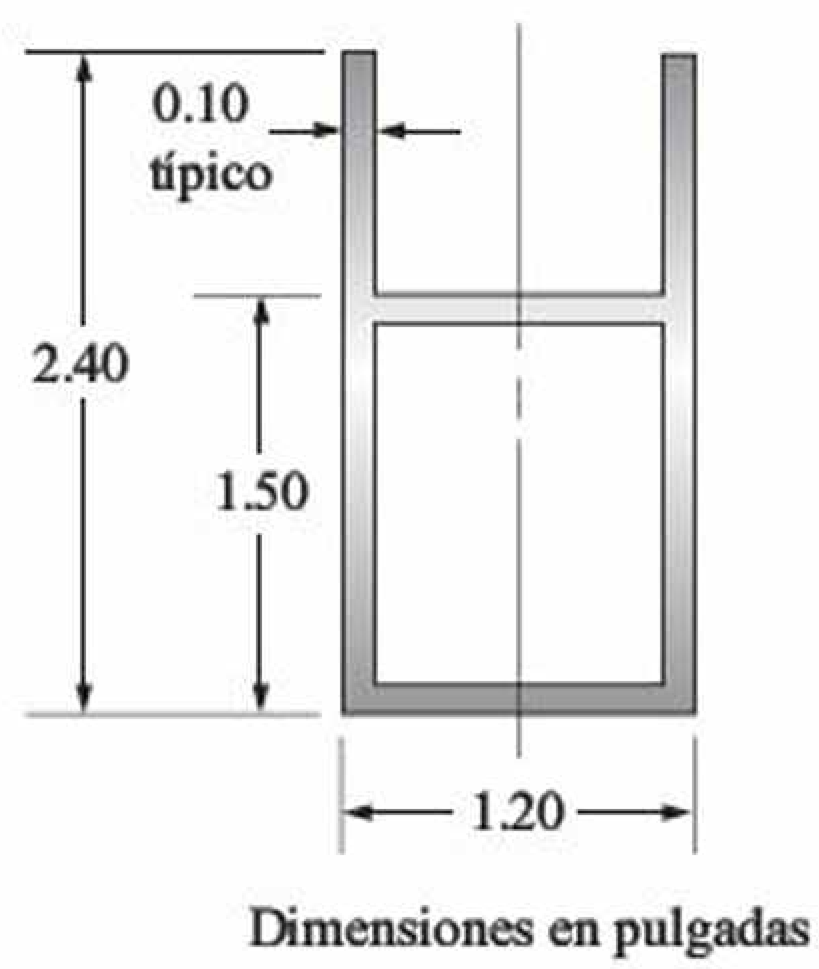


FIGURA P7–127

7–128.E Repita el problema 7–127 con la sección invertida. Con las patas hacia abajo, se ven sometidas a tensión y pueden soportar 19 ksi. La parte superior de la sección sometida a tensión ahora está bien apoyada y es capaz de soportar 21 ksi.

7–129.M El perfil de la figura P7–129 se somete a una carga concentrada única aplicada en el centro del claro de 1200 mm. La resistencia permisible a tensión es de 100 MPa, en tanto que la resistencia permisible a compresión en cualquier otra parte es de 70 MPa. Calcule la carga permisible.

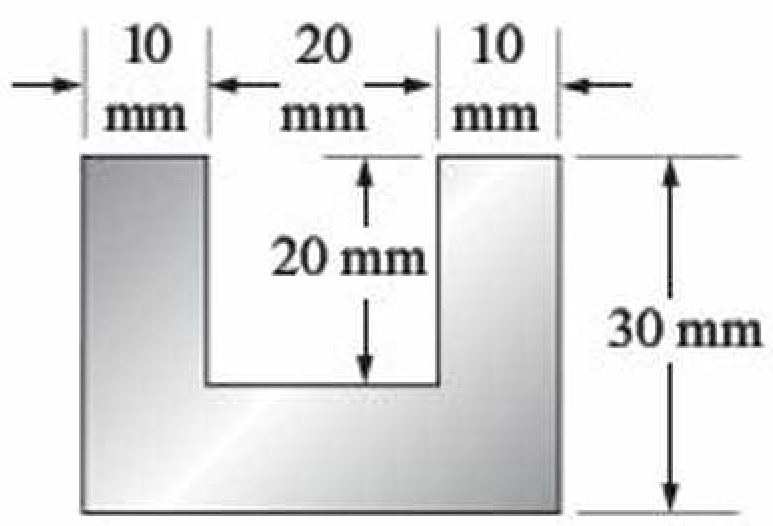


FIGURA P7–129

7–130.M Repita el problema 7–129 con la sección con la sección invertida.

7–131.M Repita el problema 7–129 con el perfil mostrado en la figura P7–131.

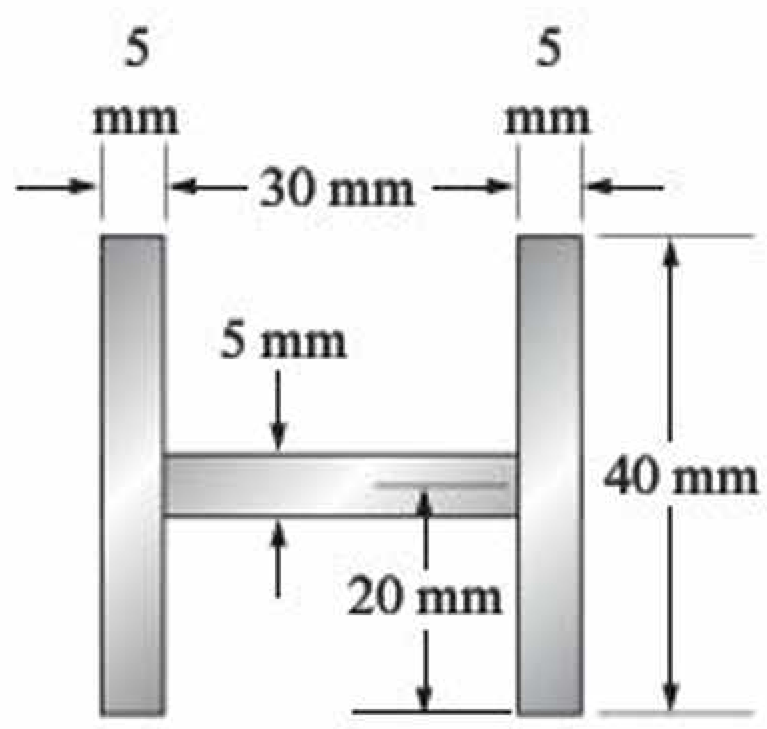


FIGURA P7–131

7–132.M Repita el problema 7–129 con el perfil mostrado en la figura P7–132.

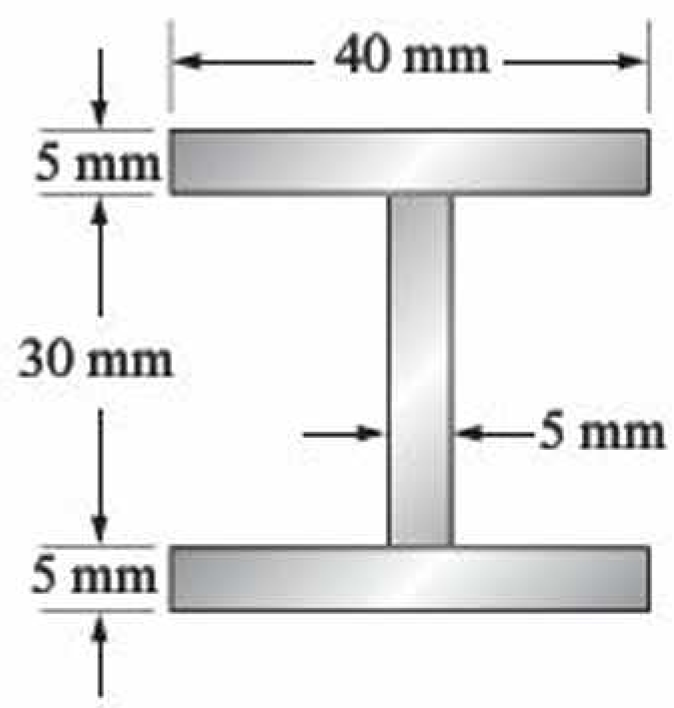


FIGURA P7–132

7–133.M La viga T mostrada en la figura P7–133 se tiene que fabricar de hierro colado gris, ASTM A48 grado 40. La viga de 2.80 m de largo se va a someter a dos cargas iguales, P, aplicadas a 1.0 m de sus extremos. Especifique la carga estática máxima P que la viga podría soportar. Use $N = 4$.

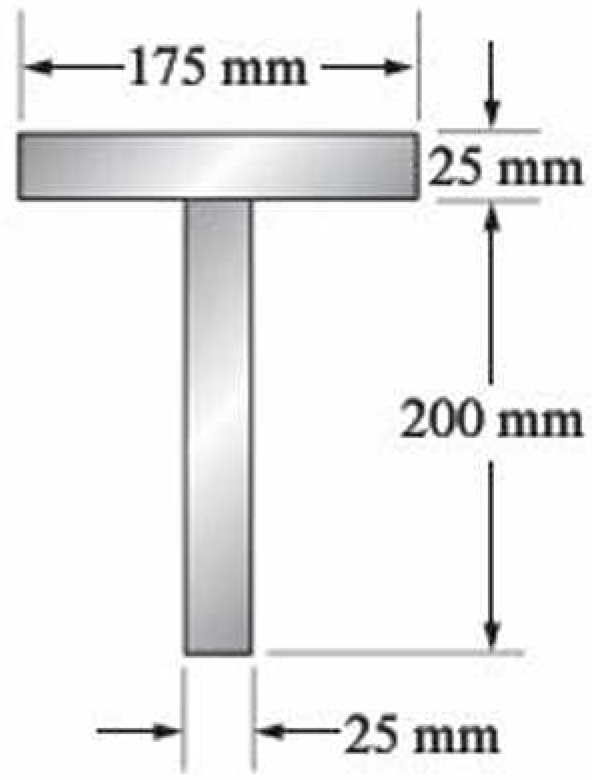


FIGURA P7–133

7–134.M La viga I modificada mostrada en la figura P7–134 tiene que soportar una carga uniformemente distribuida a todo lo largo de su longitud de 1.20 m. Especifique la carga máxima permisible si la viga tiene que ser de hierro maleable, ASTM A220, clase 80002. Use $N = 4$.

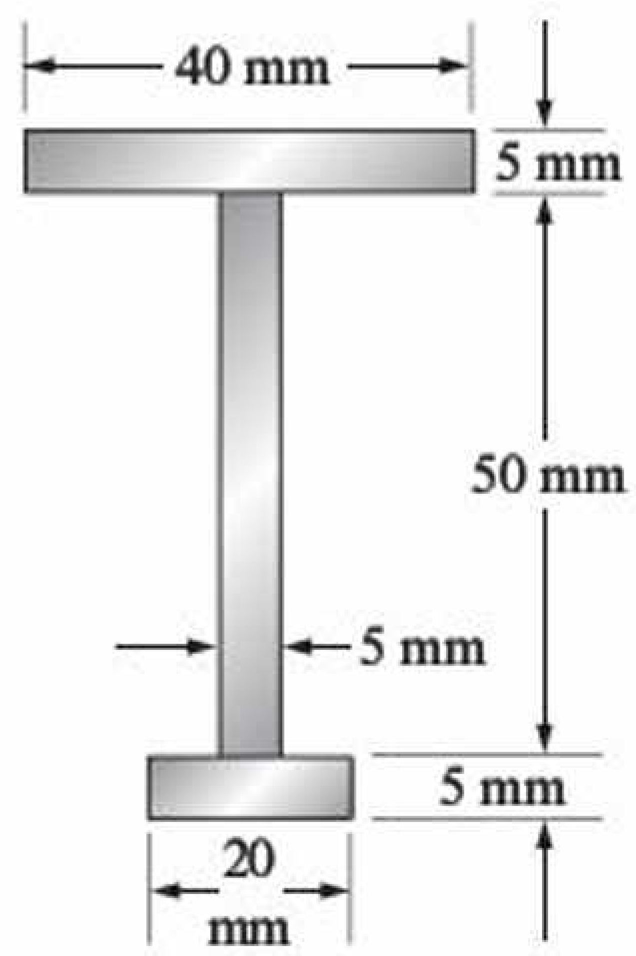
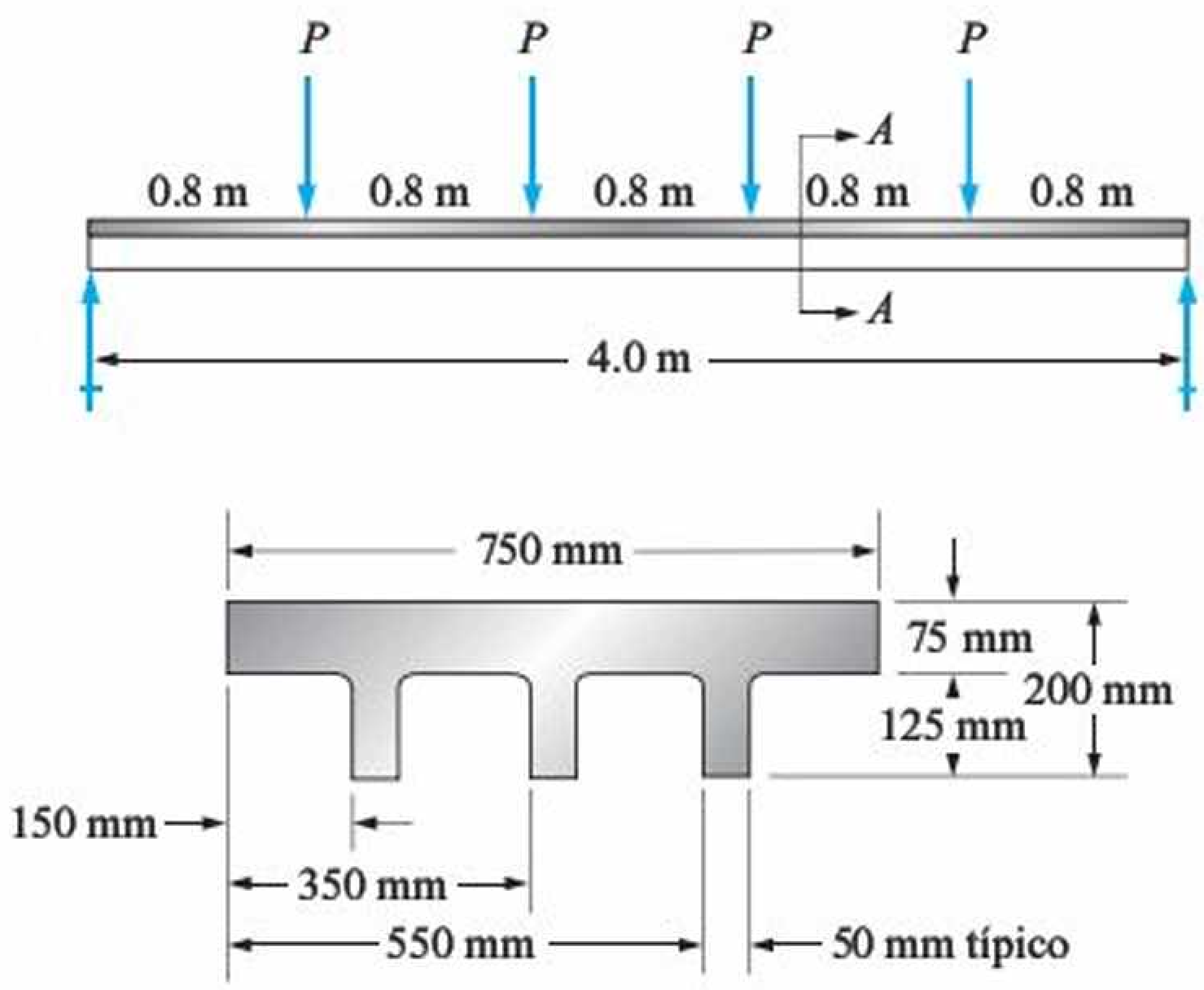


FIGURA P7–134

7–135.M Repita el problema 7–134 pero con la sección invertida.

7–136.M La viga mostrada en la figura P7–136 es de hierro dúctil, ASTM A536, grado 120–90–2. Calcule la carga máxima P que puede soportar con un factor de diseño resultante de 10 basado ya sea en la resistencia máxima a tensión o a compresión.



Sección *A-A*–sección transversal de viga

FIGURA P7–136

7–137.M Repita el problema 7–136, pero incremente la profundidad de las costillas verticales en un factor de 2.0.

7–138.M Los problemas del 7–133 al 7–137 ilustran que un perfil de viga fabricado como un perfil I optimiza más el uso de la resistencia disponible de un material que tiene distintas fuerzas de tensión y de compresión. Diseñe un perfil I que tenga un factor de diseño casi uniforme con base en la resistencia máxima tanto a tensión como a compresión, que sea de acero gris, de grado 20, y que sea capaz de soportar una carga uniformemente distribuida de 20kN/m sobre su longitud de 1.20. (*Nota:* Podría usar el programa de computación escrito para la asignación 3 al final del capítulo 6 para facilitar los cálculos. Puede usar una solución basada en prueba y error).

PROBLEMAS ADICIONALES DE PRÁCTICA Y REPASO

7–139 Un barra circular de 50 mm de diámetro y 350 mm de longitud se instala en el armazón de una máquina como viga en voladizo y soporta una carga concentrada estática única de 2.40 kN en su extremo. ¿Sería segura la barra si se hace de hierro colado gris ASTM A40? Considere sólo esfuerzo flexionante.

7–140 Se va a diseñar un viga para que soporte la carga mostrada en la figura 7–15, sección 7–9. La carga se tiene que aplicar y quitar repetidamente. Especifique la viga I estándar más ligera si tiene que ser de aluminio 6061 T6.

7–141 Calcule el esfuerzo máximo producido por flexión en la viga mostrada en la figura P7–141.

7–142 La carga mostrada en la figura P7–142 tiene que ser soportada por una barra circular sólida rotatoria de 30.0 mm de diámetro. El material es acero AISI 1040, WQT 1300. ¿Es segura la barra a flexión?

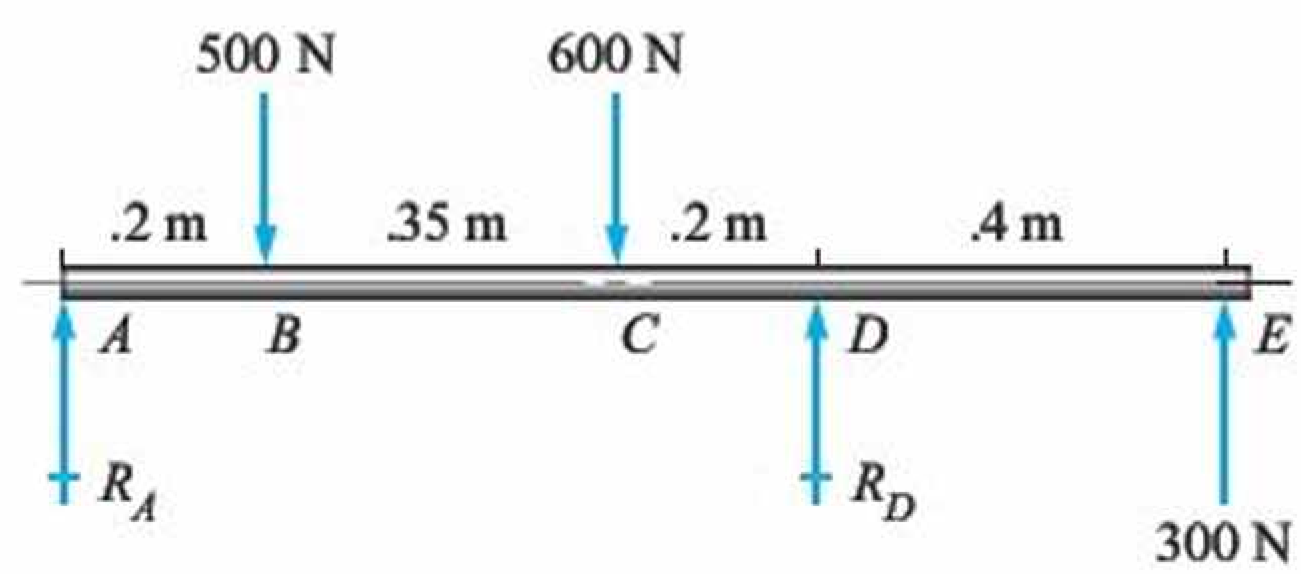


FIGURA P7–142

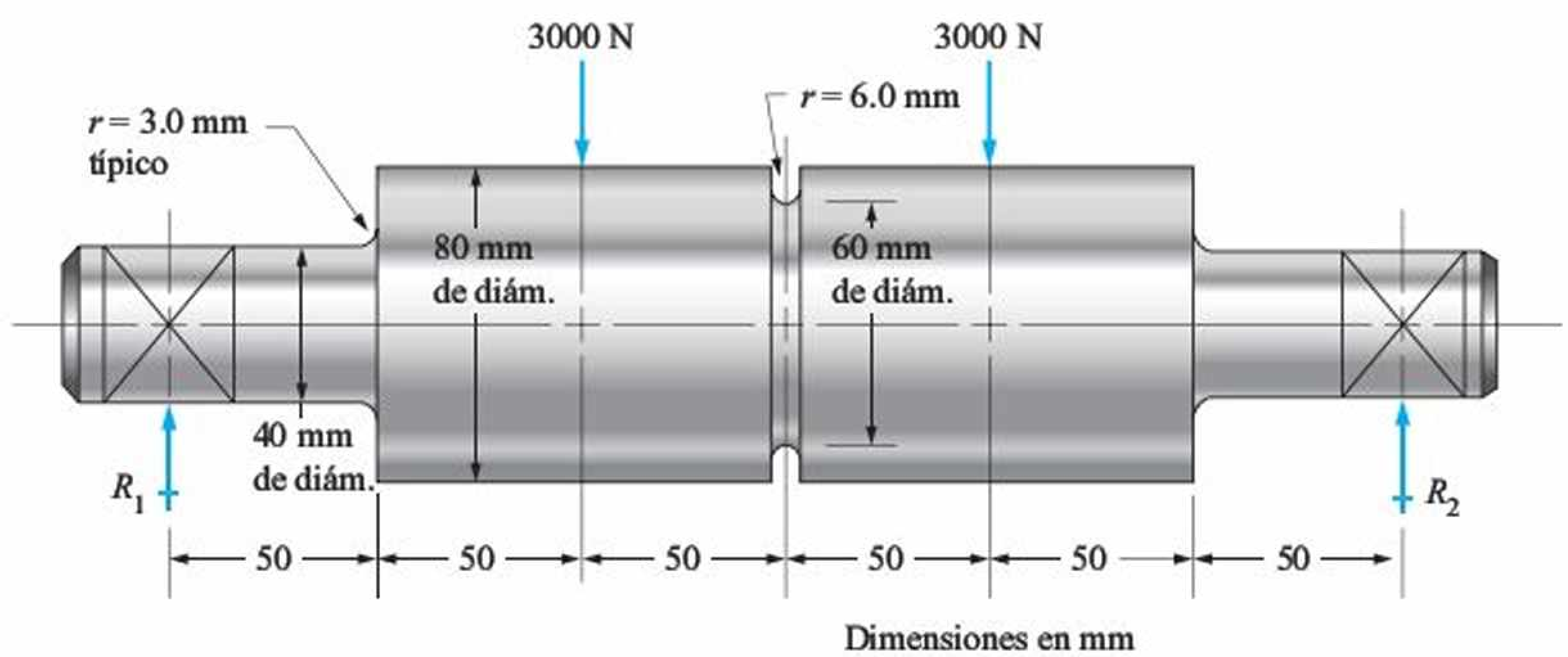


FIGURA P7–141

7–143. Especifique la viga de perfil de patín ancho óptima para soportar la carga mostrada en la figura P7–143 si tiene que ser de acero estructural ASTM A992. Use las especificaciones AISC.

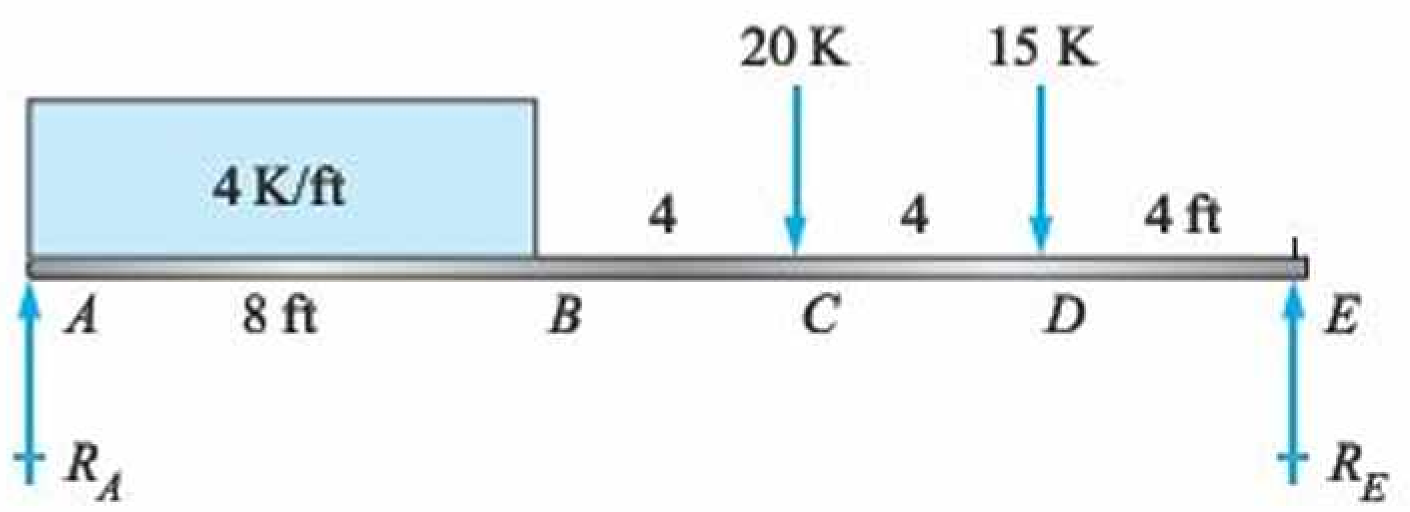


FIGURA P7–143

7–144. Si la viga descrita en el problema 7–143 tiene que ser de acero ASTM A572 HSLA, grado 65, especifique la viga óptima. ¿Existe alguna ventaja si se utiliza el acero de alta resistencia?

7–145. Para la viga mostrada en la figura P7–145, especifique un perfil estructural hueco rectangular o cuadrado (HSS) adecuado si tiene que ser de acero ASTM A500 grado C. Use las especificaciones AISC.

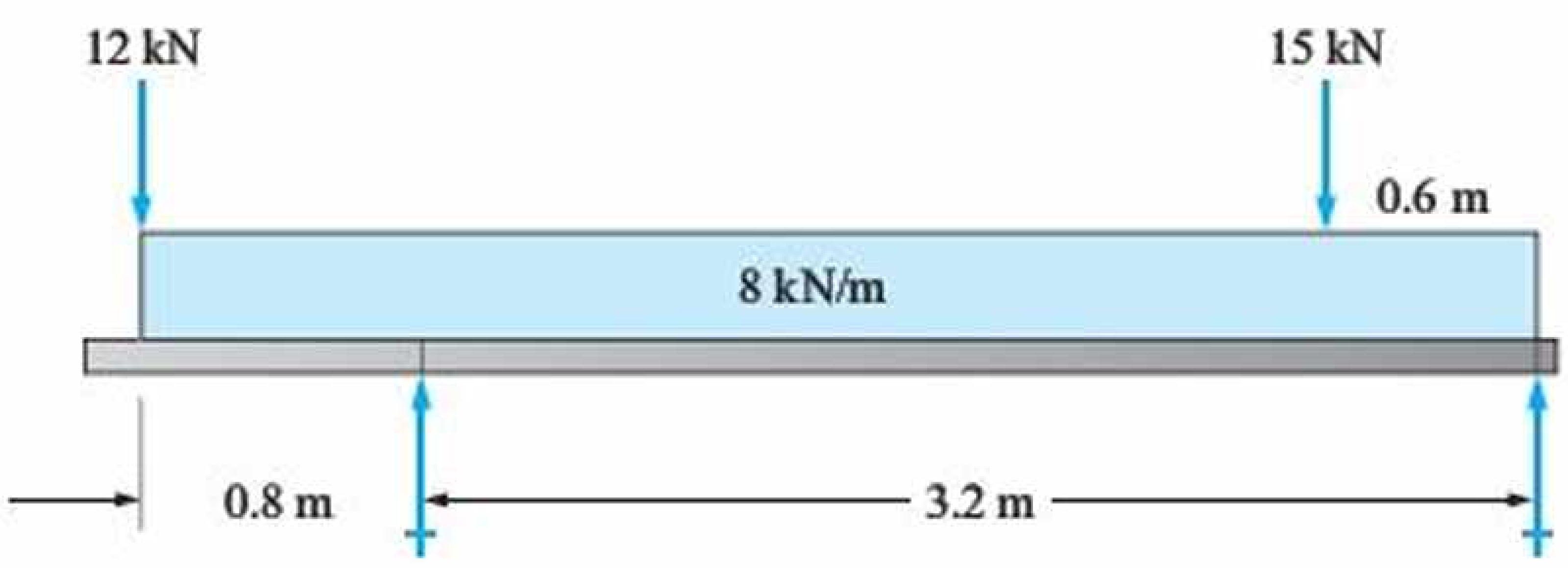


FIGURA P7–145

7–146 La carga mostrada en la figura P7–146 tiene que ser soportada por una viga hecha de tubo de acero cédula 40 estándar. Se desea un factor de diseño de 4.0 basado en la resistencia a la cadencia con el tubo hecho de acero ASTM A500 grado C formado en frío. Especifique el diámetro del tubo.

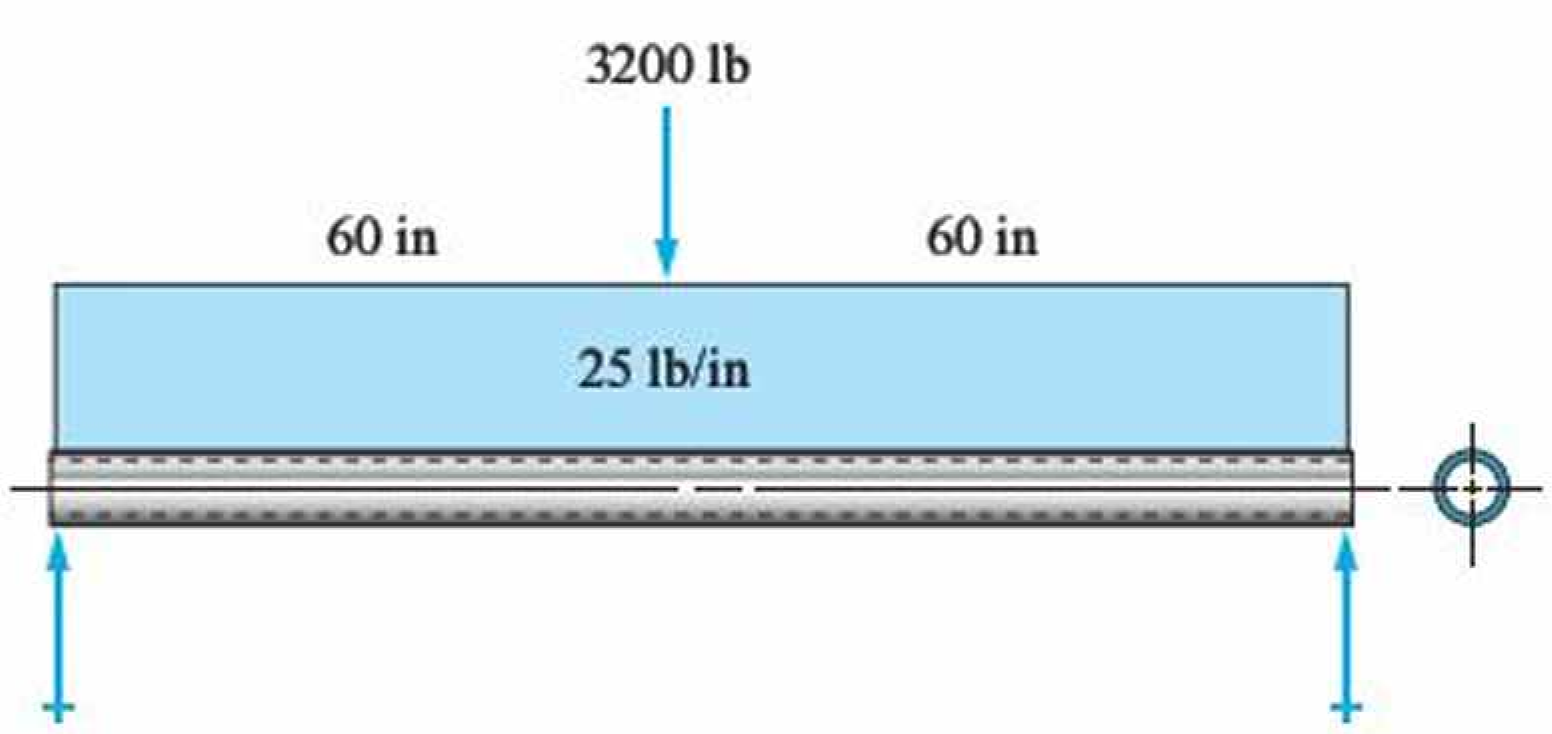


FIGURA P7–146

7–147 La carga mostrada en la figura P7–147 tiene que ser soportada por un perfil de acero estructural hueco (HSS) rectangular o cuadrado de acero estructural ASTM A501 formado en caliente. La carga se aplicará y removerá repetidamente. Especifique el perfil adecuado más ligero.

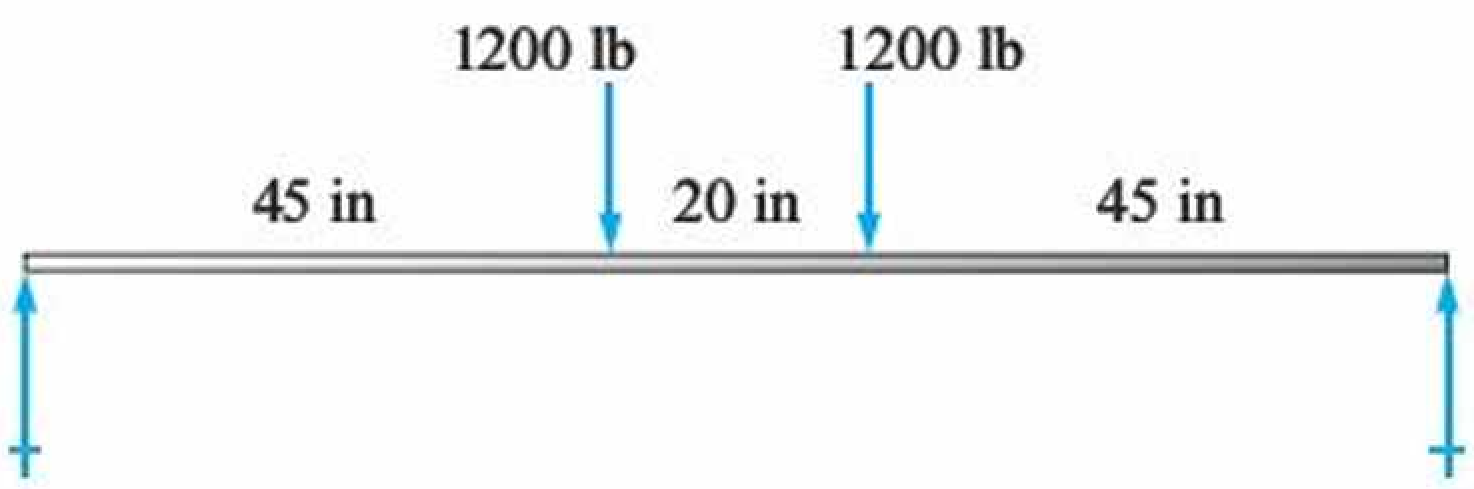


FIGURA P7–147

7–148. Una viga en voladizo tiene la sección transversal mostrada en la figura P7–148. Es de 36.0 in de largo y soportará una carga concentrada única en su extremo. Se desea un factor de diseño de 4.0 cuando se utiliza hierro colado gris ASTM A48 grado 60. Calcule la carga permisible en la viga.

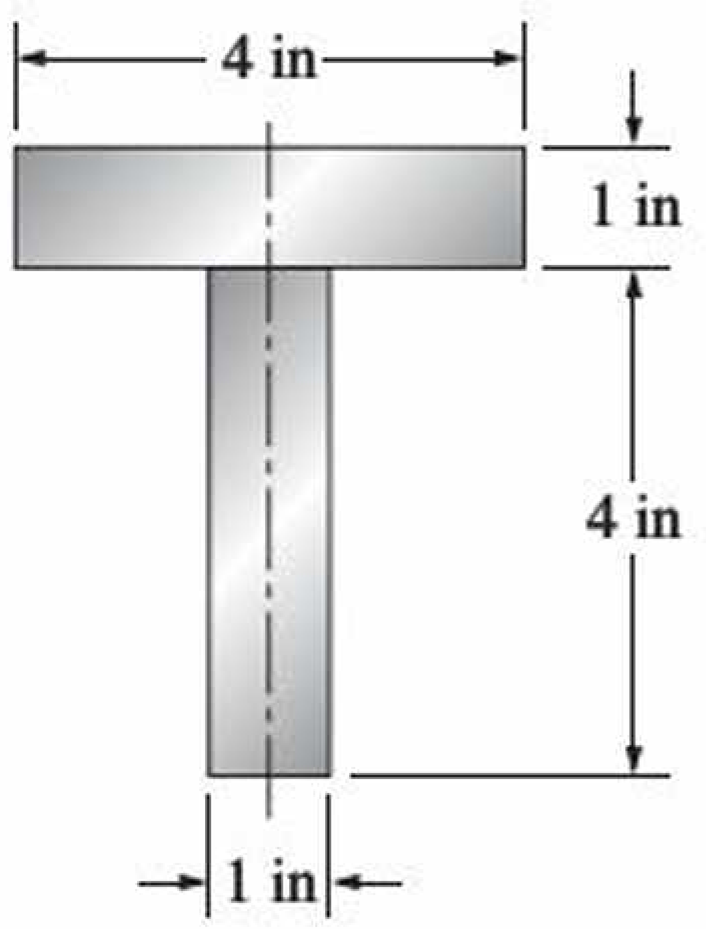


FIGURA P7–148

7–149. Rediseñe el perfil de la viga del problema 7–148 de modo que soporte una carga mínima de 6000 lb con el mismo material y factor de diseño.

7–150. Para la carga mostrada en la figura P7–150, especifique la viga de patín ancho estándar más ligera si tiene que ser de acero estructural ASTM A992. La carga es estática. Use las especificaciones AISC. Calcule el peso total de la viga.

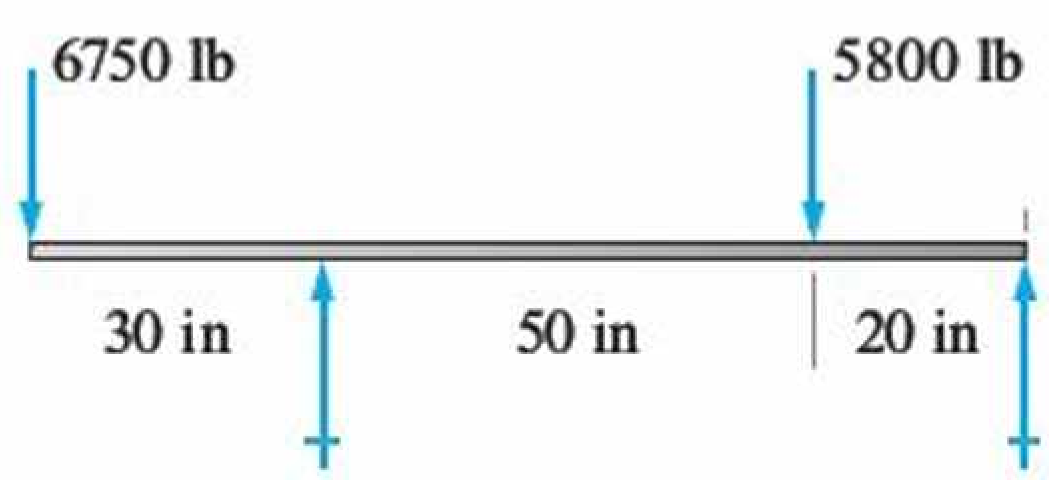


FIGURA P7–150

7–151. Un diseño alterno de la viga que va a soportar la carga mostrada en la figura P7–150 se muestra en la figura P7–151. El material para el tubo hueco es acero estructural ASTM A501 formado en caliente, y las placas están hechas de acero estructural ASTM A36. Evalúe si este diseño es o no seguro. También, calcule su peso total y compárelo con el del perfil W que especificó en el problema 7–150.

7–152. Proponga un diseño diferente para la viga que se va a someter a la carga mostrada en la figura P7–150 que resulte segura y más ligera que el diseño descrito en el problema 7–150 o 7–151.

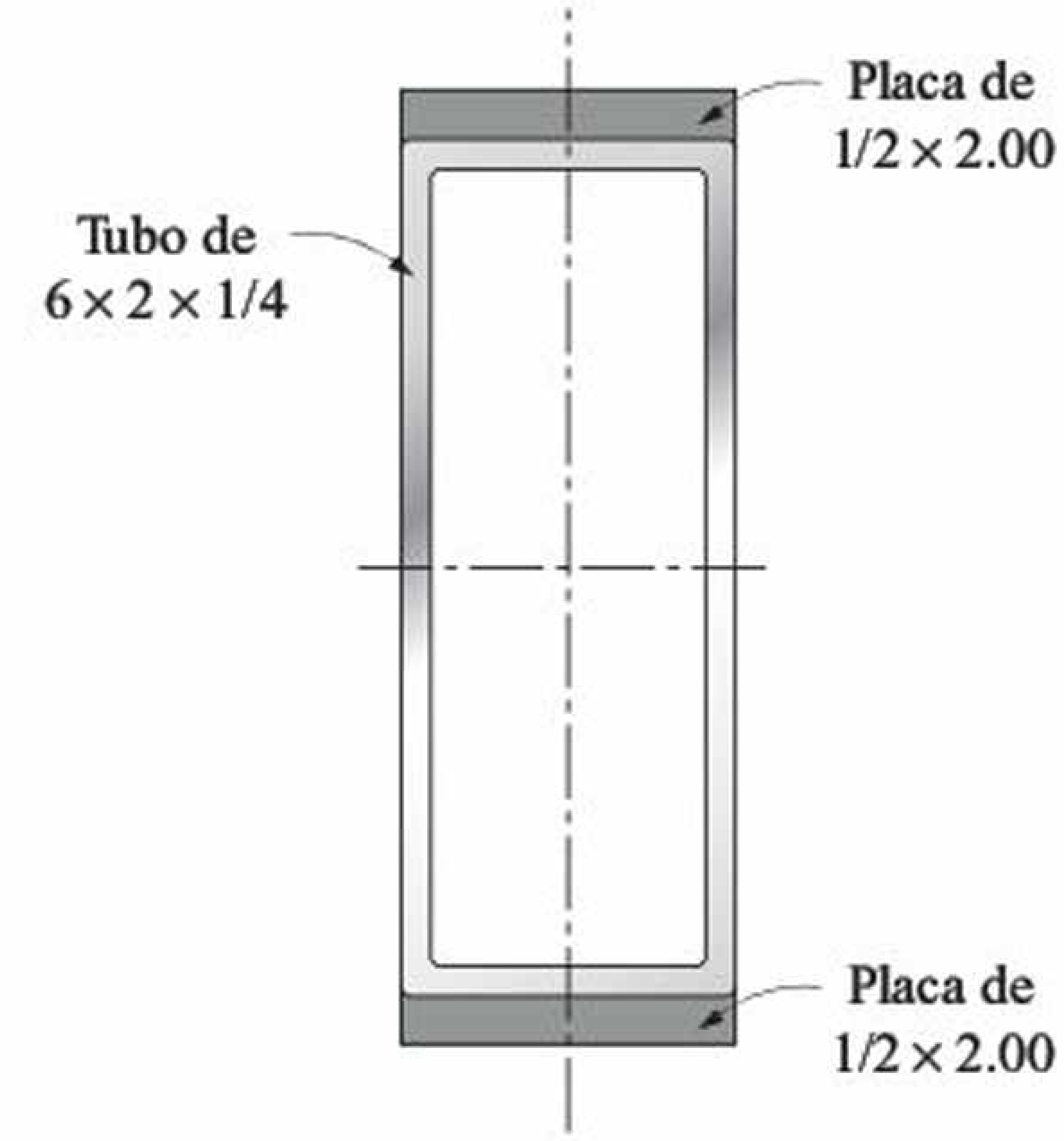


FIGURA P7–151

TAREAS PARA RESOLVERSE CON COMPUTADORA

1. Escriba un programa u hoja de cálculo para calcular el esfuerzo flexionante máximo en una viga simplemente apoyada sometida a una carga concentrada única en su centro. Permite que el operador introduzca la carga, el claro y las propiedades de la sección de la viga. Los datos de salida deberán incluir el momento flexionante máximo y el esfuerzo flexionante máximo e indique dónde ocurre el esfuerzo máximo.

Adiciones a la tarea 1

(a) Para el esfuerzo calculado, calcule la resistencia requerida del material para que la viga produzca un factor de diseño dado.

(b) Además de (a) incluya una tabla de propiedades de un material seleccionado tal como los datos para acero del apéndice A–14. Luego busque en la tabla un acero adecuado del cual se pueda hacer la viga.

2. Repita la tarea 1 pero ahora utilice una carga uniformemente distribuida.
3. Repita la tarea 1 excepto que la viga es un voladizo con una sola carga concentrada en su extremo.
4. Escriba un programa u hoja de cálculo para calcular el momento flexionante máximo en una viga simplemente apoyada que soporta una carga concentrada única en su centro. Permita que el operador introduzca la carga y el claro. Luego calcule el módulo de sección requerido para la sección transversal de la viga para limitar el esfuerzo flexionante máximo a un nivel dado o para obtener un factor de diseño para un material dado. Los datos de salida deberán incluir el momento flexionante máximo y el módulo de sección requerido.

Adiciones a la tarea 4

(a) Después de calcular el módulo de sección requerido haga que el programa termine el diseño de la sección transversal de la viga con un perfil general dado, tal como rectangular con una relación específica de espesor a altura (vea el problema 7–13) o circular.

(b) Incluya una tabla de propiedades de secciones de viga estándar como las de los apéndices A–4 a A–13 y haga que el programa busque una sección de viga adecuada que produzca el módulo de sección requerido.

5. Repita la tarea 4, pero ahora utilice una carga uniformemente distribuida.
6. Repita la tarea 4, pero ahora utilice la carga descrita en el problema 7–22.
7. Repita la tarea 4, pero ahora utilice cualquier patrón de carga asignado por el instructor.
8. Escriba un programa u hoja de cálculo para facilitar la solución del problema 7–138, incluido el cálculo de las propiedades de sección para el perfil I modificado por medio de las técnicas del capítulo 6.
9. Escriba un programa u hoja de cálculo para facilitar la solución de los problemas del tipo dado en el problema 7–116. Haga que el programa sea general, de modo que permita que el usuario introduzca la carga que actuará en la viga, las propiedades de sección de la viga deseadas y las dimensiones de las placas que se agregarán a la sección de viga básica.
10. Escriba un programa u hoja de cálculo para realizar los cálculos solicitados en el problema 7–111, pero haga que el programa

sea más general, de modo que permita al usuario introducir los valores de carga, las dimensiones de la sección transversal de la viga y el intervalo para calcular el esfuerzo flexionante. Haga que el programa trace la gráfica de esfuerzo contraposición en la viga.

11. Escriba un programa u hoja de cálculo para localizar el centro de flexión del perfil acanalado generalizado en la figura P7–118. Permita que el usuario introduzca todas las dimensiones.

12. Escriba un programa u hoja de cálculo para localizar el centro de flexión de la sección acopada generalizada que la figura P7–120 muestra. Permita que el usuario introduzca todas las dimensiones. Se pueden utilizar técnicas de ajuste de curvas e interpolación para interpretar la gráfica o la figura 7–27.

13. Escriba un programa u hoja de cálculo para localizar el centro de flexión del canal alabiado generalizado mostrado en la figura P7–122. Permita que el usuario introduzca todas las dimensiones. Se pueden utilizar técnicas de ajuste de curvas e interpolación para interpretar la gráfica de la figura 7–27.

8

Esfuerzos cortantes en vigas

La imagen completa y actividad

8–1 Objetivos de este capítulo

8–2 Importancia de los esfuerzos cortantes en vigas

8–3 Fórmula general de cortante

8–4 Distribución del esfuerzo cortante en vigas

8–5 Desarrollo de la fórmula general de cortante

8–6 Fórmulas especiales de cortante

8–7 Esfuerzo cortante de diseño

8–8 Flujo de cortante

La imagen completa

Esfuerzos cortantes en vigas

Mapa de análisis

- En este capítulo 8, el objetivo es continuar desarrollando su habilidad para analizar y diseñar vigas. Se apoyará en su conocimiento de fuerzas cortantes y momentos flexionantes del capítulo 5, del momento de inercia del capítulo 6 y de los esfuerzos flexionantes del 7. Repase todos los ejemplos de vigas y patrones de carga que analizó en la imagen completa del capítulo 5 y los tipos de secciones transversales de vigas del capítulo 6.
- Para que una viga sea segura cuando se somete a una carga dada, debe satisfacer los límites de los *esfuerzos de diseño tanto flexionantes como cortantes*. En la mayoría de los casos, el esfuerzo flexionante es el más crítico. Pero los esfuerzos cortantes siempre deben ser verificados y, como se expone en la sección 8-2, se presentan algunas situaciones importantes en las que los esfuerzos cortantes son el modo predominante de falla. Desde luego, la rigidez o la resistencia a la deflexión es también un objetivo importante cuando se diseña una viga.
- Continuando con el análisis de viga, este capítulo se ocupa de los esfuerzos creados en una viga por la presencia de fuerzas cortantes. Como se muestra en la figura 8-1, las fuerzas cortantes se visualizan actuando en la sección transversal de la viga y dirigidas transversalmente, es decir, perpendiculares a su eje. Por consiguiente tienden a crear *esfuerzos cortantes transversales*, en ocasiones llamados *esfuerzos cortantes verticales*.
- Pero si se aísla un elemento infinitesimal sometido a esfuerzos cortantes, como se muestra en la figura 8-2, se puede ver que también deben existir esfuerzos cortantes horizontales para que el elemento esté en equilibrio. Así, ambos esfuerzos cortantes verticales y horizontales tienen la misma magnitud en un punto dado y son creados por esfuerzos cortantes en vigas.

Actividad

Demuéstrese a sí mismo la existencia de esfuerzos cortantes horizontales en una viga completando el siguiente ejercicio.

1. *Haga una viga de varias tiras planas delgadas, como se ilustra en la figura 8–3(a). La tira deberá ser angosta con respecto a su longitud. Por ejemplo, haga que la longitud sea de aproximadamente 125 mm (5.0 in) y el ancho aproximadamente de 25 mm (1.0 in).*
2. *Un material ideal estaría constituido por cinco tiras cortadas de tarjetas estándar de aproximadamente 75 mm por 125 mm (3.0 in × 5.0 in). Haga por lo menos tres juegos de tiras cada uno. Otros materiales adecuados son barajas de plástico delgadas o láminas de metal delgadas. También necesitará una engrapadora y pegamento blanco.*
3. *Disponga dos apoyos simples de aproximadamente 25 mm (1.0 in) de altura. Colóquelos aproximadamente a 100 mm (4.0 in) uno del otro.*
4. *Con una pequeña pesa simple, provoque que una de las tiras de material se flexione por lo menos 25 mm (1.0 in), hasta tocar la mesa. Una pila de seis monedas de 25 centavos de dólar funciona bien.*
5. *No es de sorprender que una pila de seis monedas de 25 centavos de dólar provoque en la tira que construyó una flexión de por lo menos una pulgada. Pero ¿qué pasaría si hace su viga con dos, tres, cuatro o cinco tiras, cada una colocada encima de las demás? Inténtelo y documente lo que sucede.*
6. *Es probable que la prueba del paso 5 demuestre que cuatro o cinco tiras mantienen las monedas por encima de la mesa, pero la deflexión sería significativa.*
7. *Ahora tome otra pila de cinco tiras y engrápelas. Coloque una grapa a aproximadamente 12 mm (0.25 in) de cada extremo y una aproximadamente a 45 mm (1.75 in) de cada extremo, para un total de cuatro grapas. Esto deja un área a la mitad para cargar este diseño de viga con la pila de monedas. ¿Qué sucede?*
8. *¡Hey! Eso funciona muy bien. La viga se flexiona un poco. ¿Cómo difiere esta viga de la pila de cinco tiras sueltas? La figura 8–3(b) demuestra que la tiras sueltas se deslizan una sobre otra cuando soportan la carga. Cada tira agregada soporta un poco más carga pero las tiras no actúan juntas. Las grapas en la segunda pila de cinco tiras mantienen a cada tira firmemente unida a la siguiente e impiden que se deslicen. Por ello las tiras actúan como una unidad.*
9. *Con este ejercicio podrá visualizar que existen fuerzas horizontales que actúan entre las tiras de baraja. La pila suelta es capaz de resistir sólo las fuerzas por fricción, lo cual en general es insuficiente para evitar que las tiras se deslicen. Pero la resistencia de las grapas es adecuada para resistir las fuerzas horizontales.*
10. *En el proceso, el material de las grapas se somete a cortante. La viga engrapada se flexiona un poco*

porque utilizó sólo cuatro grapas; algunos segmentos de la viga aún pueden deslizarse un poco. Si se agregan más grapas se producirá una viga aún más rígida.

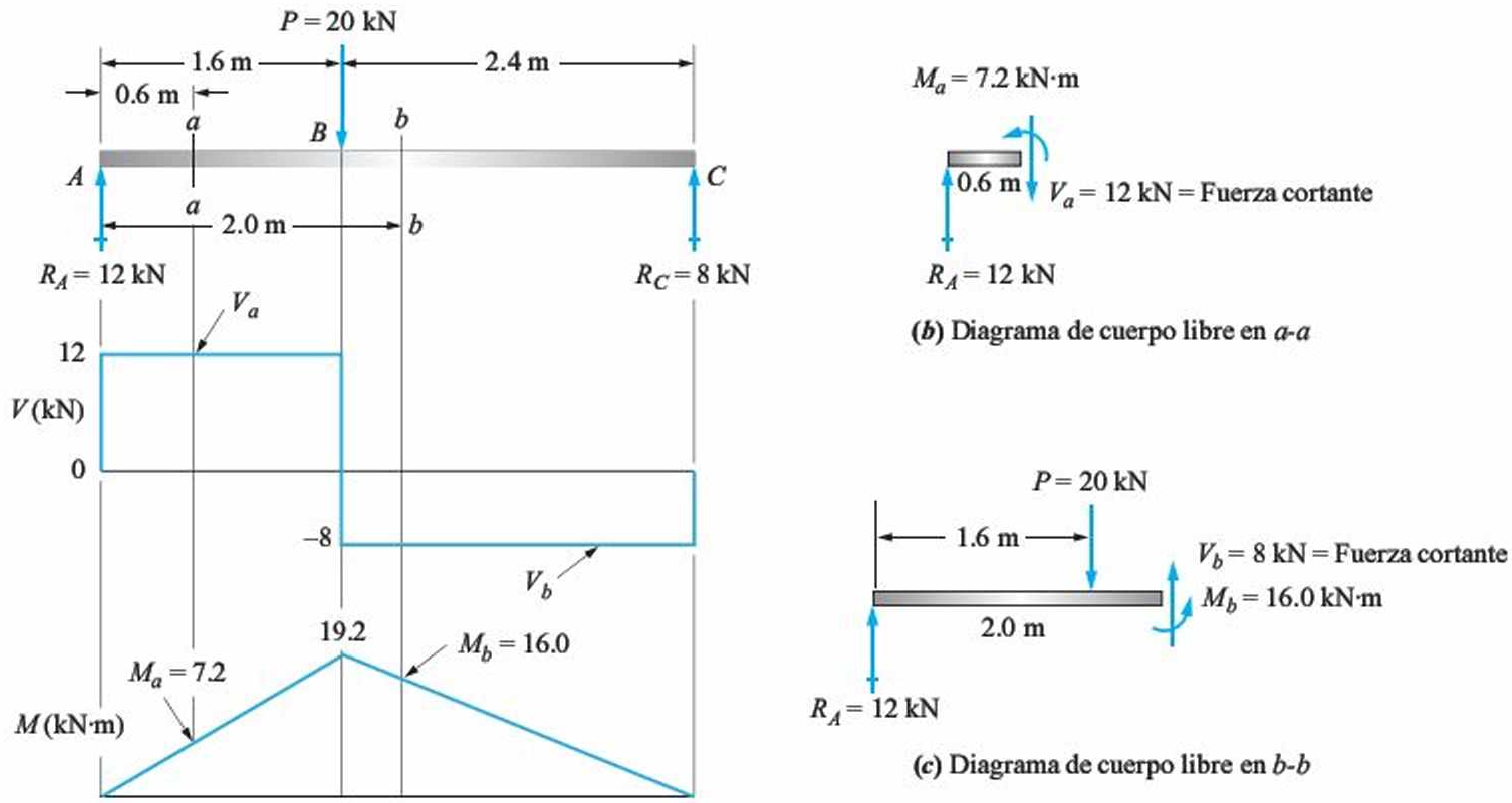
11. *Ahora considere qué sucedería si la tendencia de las tiras a deslizarse se restringe a lo largo de toda la superficie de cada tira en contacto con su tira adyacente. Trate de utilizar pegamento. Ahora pruebe la viga y compare su desempeño con el de la viga engrapada.*
12. *En la viga pegada notará que prácticamente no se flexiona cuando se carga con seis monedas. La película continua de pegamento impide el deslizamiento de las tiras individuales de modo que la viga actúa como una barra gruesa, sólida que es significativamente más resistente a deformarse que las vigas apiladas o engrapadas. En la viga pegada, el pegamento debe tener una resistencia al cortante suficiente para que resista los esfuerzos cortantes originales creados.*
13. *Ahora, ¿qué pasaría si pudiera formar la viga con una sola tira de cartón de espesor igual al de la pila pegada de cinco tiras delgadas? ¿Podría demostrar la equivalencia de los dos diseños? Vea si puede conseguir un pedazo de cartón grueso y pruébelo.*
14. *En conclusión, este ejercicio le habrá permitido descubrir que se desarrollan esfuerzos cortantes en el material de una viga sometida a flexión.*

Su objetivo principal al estudiar este capítulo es que sea capaz de analizar una viga para determinar los esfuerzos cortantes que se crean en ella. También aplicará esta capacidad para evaluar la seguridad de la viga con respecto a cortante y diseñar una viga segura. Cuando utilice un adhesivo, soldadura, soldadura de latón o sujetadores mecánicos tales como clavos, remaches, pernos, pasadores o incluso grapas para mantener unidos los componentes de una viga, deberá ser capaz de analizarlos para garantizar que tengan una resistencia adecuada.

8–1 OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

Al término de este capítulo, usted podrá:

1. Describir las condiciones en las que se crean los esfuerzos cortantes en vigas.
2. Calcular la magnitud de los cortantes en vigas con la fórmula general de cortante.
3. Definir y evaluar el *primer momento del área* requerido en el análisis de esfuerzos cortantes.
4. Especificar dónde ocurre el esfuerzo cortante en la sección transversal de una viga.
5. Calcular el esfuerzo cortante en cualquier punto de la sección transversal de una viga.
6. Describir la distribución general del esfuerzo cortante en función de la posición en la sección transversal de una viga.
7. Entender el fundamento para el desarrollo de la fórmula de esfuerzo cortante general.
8. Describir cuatro aplicaciones de diseño donde los esfuerzos cortantes podrían ser críticos en vigas.



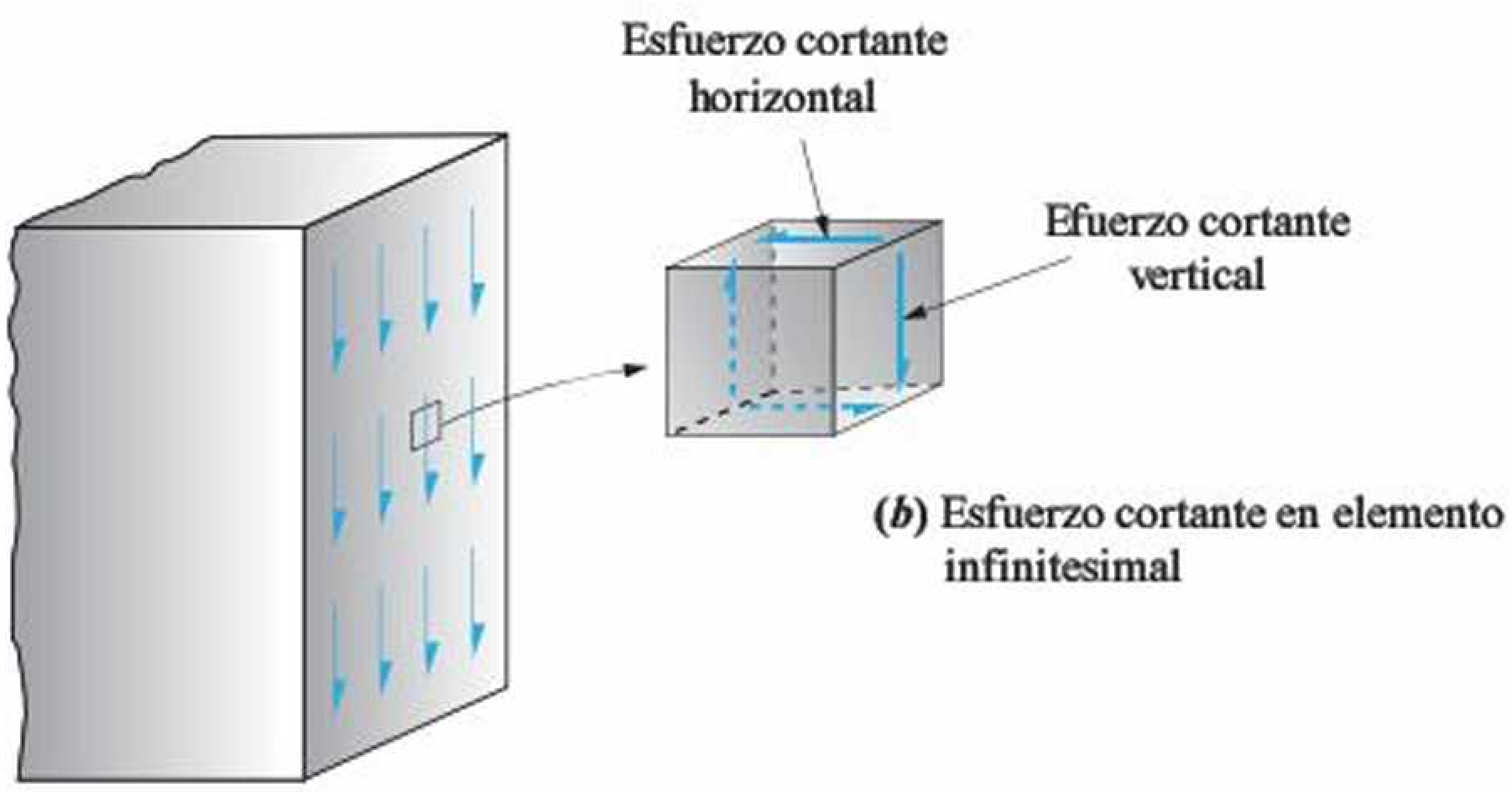
(*a*) Diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante

(*b*) Diagrama de cuerpo libre en *a-a*

(*c*) Diagrama de cuerpo libre en *b-b*

FIGURA 8–1 Fuerzas cortantes en vigas.

FIGURA 8–2 Esfuerzo cortante en una viga.



(*b*) Esfuerzo cortante en elemento infinitesimal

(*a*) Esfuerzo cortante en una sección recortada de una viga

9. Desarrollar y utilizar fórmulas de cortante especiales para calcular el esfuerzo cortante máximo en vigas de secciones transversales o circulares sólidas.
10. Entender el desarrollo de relaciones aproximadas para estimar el esfuerzo cortante máximo en vigas que tienen secciones transversales con almas altas esbeltas, o en aquellas con perfiles tubulares huecos de pared delgada.
11. Especificar un esfuerzo cortante de diseño adecuado y aplicarlo para evaluar la aceptabilidad de un diseño de viga dado.
12. Definir *flujo de cortante* y calcular su valor.
13. Utilizar el flujo de cortante para evaluar el diseño de secciones de viga fabricadas y unidas con clavos, pernos, remaches, adhesivos, soldadura u otros medios de sujeción.

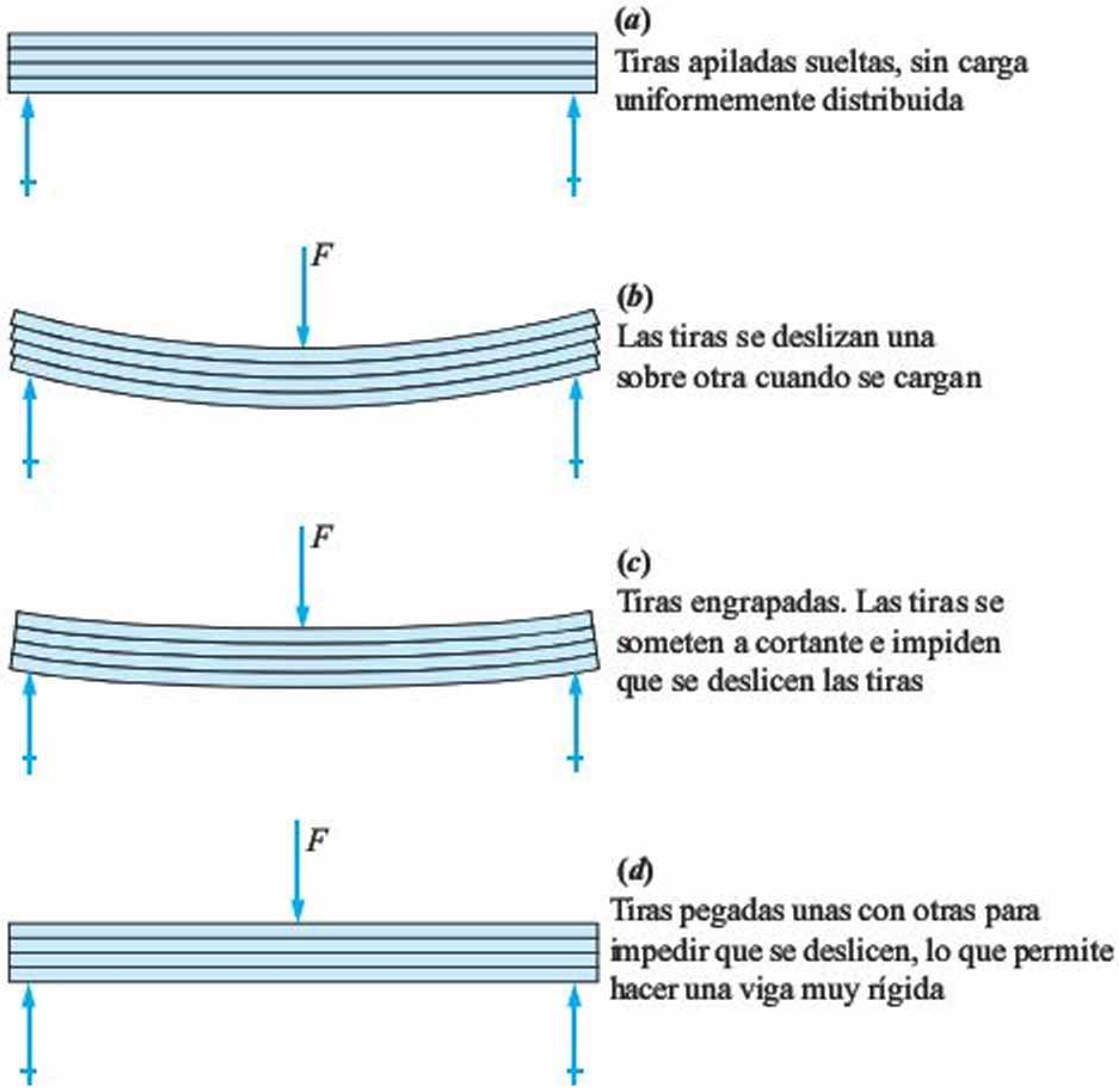


FIGURA 8–3 Ilustración de la presencia de esfuerzo cortante en una viga.

8–2 IMPORTANCIA DE LOS ESFUERZOS CORTANTES EN VIGAS

En el diseño práctico se presentan varias situaciones en las que el modelo de falla probable sea el cizallamiento de una parte o de un sujetador de una viga compuesta. A continuación se describen cuatro situaciones como éstas.

Vigas de madera. La madera es inherentemente débil a cortante a lo largo de planos paralelos a su veta. Considere la viga mostrada en la figura 8–4, la cual es similar a las viguetas utilizadas en estructuras de techo y piso para construcciones de madera. La veta en general corre paralela al eje largo en madera de construcción comercialmente disponible. Cuando se somete a cargas transversales, es probable que la falla inicial en una viga de madera sea por separación a lo largo de su veta, debido a un esfuerzo cortante horizontal excesivo. Observe en el apéndice A–19 que el esfuerzo cortante permisible en clases comunes de madera varía desde sólo 70 hasta 95 psi (0.48 hasta 0.66 MPa), valores extremadamente bajos.

Vigas de alma delgada. Una sección transversal de una viga eficiente sería una con patines horizontales relativamente gruesos arriba y abajo con una delgada alma vertical que los conecte. Ésta es la descripción general de la conocida "viga I", la viga de patines anchos o la viga American Standard. En la figura 8–5 se ilustra un ejemplo típico. En los apéndices A–7, A–8 y A–11 se dan las dimensiones reales de otros tipos de viga.

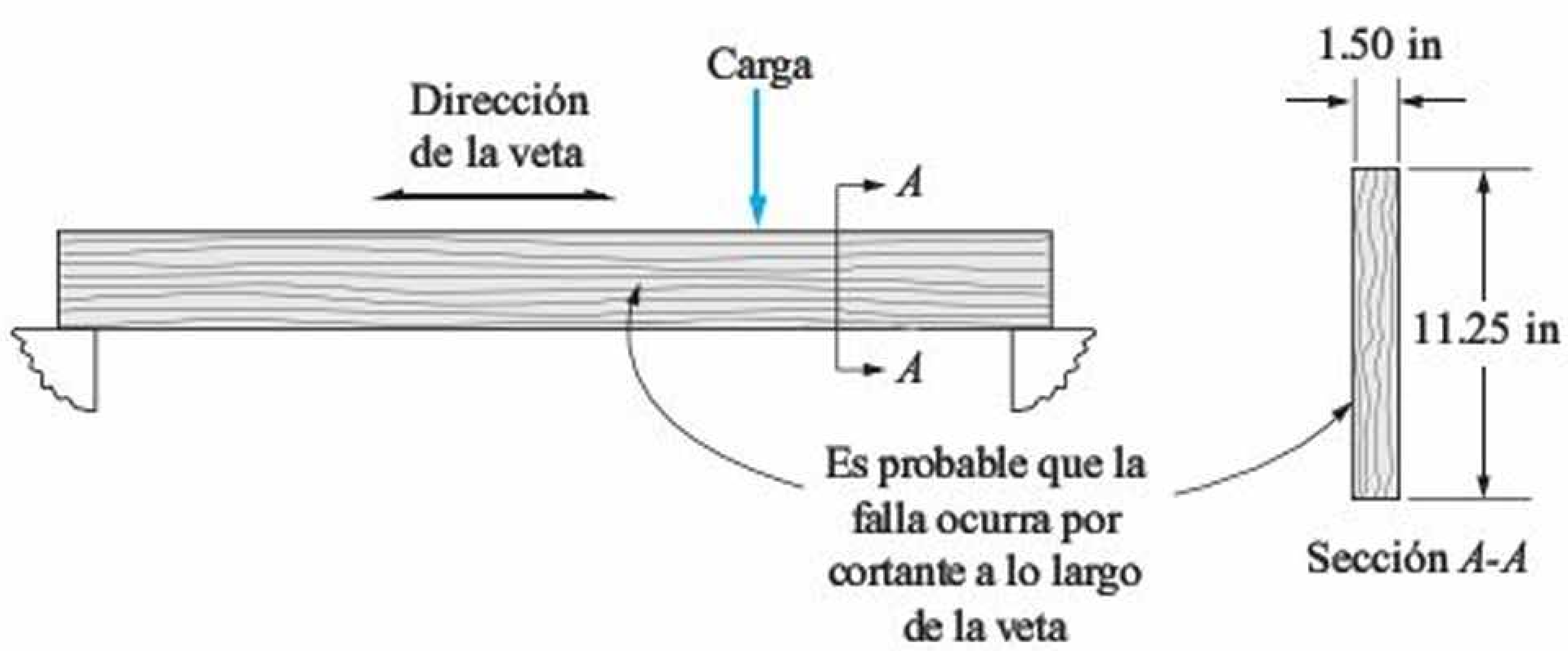
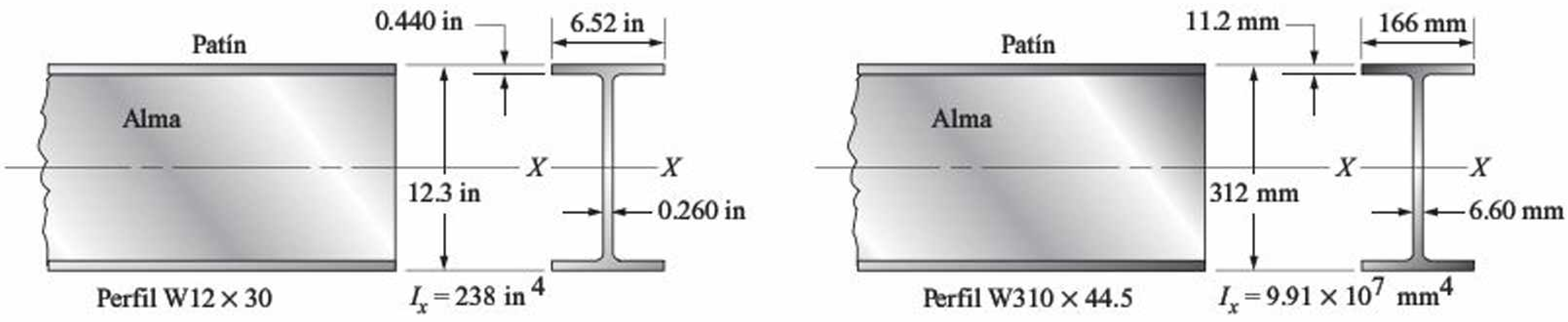


FIGURA 8–4 Falla por cortante en una viga de madera.



(*a*) Viga W12 × 30 de acero

(*b*) Dimensiones en unidades SI para la viga W12 × 30 de acero. Designada W310 × 44.5

FIGURA 8–5 Ejemplo de un perfil de viga de alma esbelta.

Si el alma es excesivamente delgada, no sería suficientemente rígida ni estable para mantener su forma, y fallaría por esfuerzo cortante en ella. El AISC (Instituto Americano de Acero para la Construcción, American Institute of Steel Construction) define el esfuerzo cortante permisible en las almas de vigas de acero. Vea la referencia 5; también consulte la *fórmula del esfuerzo cortante en almas*, definida más adelante en las sección 8–6 de este capítulo.

Vigas cortas. En vigas muy cortas es probable que el momento flexionante y por consiguiente el esfuerzo flexionante alcancen valores reducidos. En vigas como ésas, el esfuerzo cortante puede ser el esfuerzo limitante.

Sujetadores en vigas fabricadas. Como se muestra en la figura 8–3, los sujetadores en una sección de viga compuesta se someten a esfuerzos cortantes. El concepto de *flujo de cortante*, desarrollado más adelante, se utiliza para evaluar la seguridad de vigas como ésas o especificar el tipo, número y separación requeridos de los sujetadores que han de utilizarse. Asimismo, las vigas hechas de materiales compuestos son ejemplos de vigas fabricadas. La separación de las capas del compuesto, llamada *cortante interlaminar*, es un modo potencial de falla.

Estructuras de recubrimientos sometidas a esfuerzo. Las estructuras de aviones, naves espaciales y algunos vehículos terrestres y equipo industrial se fabrican por medio de un diseño de *revestimiento sometido a esfuerzo*. Las llamadas estructuras *monocasco* se diseñan para soportar la mayor parte de la carga presente en los delgados revestimientos de la estructura. Por lo general, se utiliza el método de flujo de cortante para evaluar estructuras como éstas, aunque esta aplicación no se desarrolla en este libro.

8–3 FÓRMULA GENERAL DE CORTANTE

Aquí se presenta la fórmula general de cortante con la que se puede calcular la magnitud del esfuerzo en un punto cualquiera de la sección transversal de una viga que soporta una fuerza cortante vertical. En la sección 8–5 se desarrolla la fórmula. Es posible que desee estudiar el desarrollo de la fórmula junto con esta sección.

La fórmula de cortante general se expresa como sigue:

Fórmula general de cortante

$$\tau = \frac{VQ}{It} \tag{8–1}$$

donde V = *fuerza cortante vertical* en la sección de interés. El valor de V se calcula con el diagrama de fuerza cortante descrito en el capítulo 5. En general se utiliza el valor absoluto máximo de V, positivo o negativo.

I = *momento de inercia del área* de la sección transversal completa de la viga con respecto a su eje centroidal. Éste es el mismo valor de I utilizado en la fórmula de flexión ($\sigma = Mc/I$) para calcular el momento flexionante.

t = *espesor* de la sección transversal medido en el eje donde se va a calcular el esfuerzo cortante.

Q = *primer momento*, con respecto al eje centroidal general, *del área* de esa parte de la sección transversal alejada del eje donde se va a calcular el esfuerzo cortante.

En algunos libros Q se llama *momento estático*. Utilizaremos el término *primer momento del área* para referirnos a Q en este libro. Pero deberá recordar todas las partes de la definición dada. Para calcular el valor de Q, lo definimos matemáticamente como

Primer momento del área

$$Q = A_p\bar{y} \tag{8–2}$$

donde A_p = área de esa parte de la sección transversal distante del eje donde se va a calcular el esfuerzo cortante.

$\bar{y}$ = distancia del eje centroidal de toda la sección transversal al centroide de A_p.

Observe que Q es el *momento de un área*; es decir, área por distancia. Por consiguiente, sus unidades serán de longitud al cubo, tales como in^3, m^3 o mm^3.

La evaluación cuidadosa de Q es crítica para el uso correcto de la fórmula general de cortante. Es útil dibujar la sección transversal de la viga y realzar el área parcial, A_p. Luego se localiza el centroide del área parcial en el dibujo. La figura 8–6 muestra un ejemplo de lo anterior. En este ejemplo, el objetivo es calcular el esfuerzo cortante en el eje *a–a*. El área sombreada es A_p, mostrada como la parte alejada del eje *a–a*.

Los tres ejemplos siguientes ilustran el método de calcular Q. En cada uno de ellos se utiliza el siguiente procedimiento.

Método para calcular *Q*, el primer momento del área

1. Localice el eje centroidal de toda la sección transversal.
2. Trace el eje donde se va a calcular el esfuerzo cortante.
3. Identifique el área parcial A_p, alejada del eje de interés, y sombréela para resaltarla.

Si el área parcial A_p es un área simple cuyo centroide es fácil de localizar por medio de cálculos simples, use los pasos 4 a 7 para calcular Q; de lo contrario, use los pasos 8 a 11.

4. Calcule la magnitud de A_p.
5. Localice el centroide del área parcial.
6. Calcule la distancia $\bar{y}$ del eje centroidal de toda la sección al centroide del área parcial.
7. Calcule $Q = A_p\bar{y}$.

Cuando el área parcial está compuesta por varias partes se siguen los pasos 8 a 11.

8. Divida el área A_p en partes componentes que sean áreas simples y desígnelas A_1, A_2, A_3, etc. Calcule sus valores.
9. Localice el centroide de cada área componente.
10. Determine las distancias del eje centroidal de toda la sección transversal al centroide de cada área componente y desígnelas y_1, y_2, y_3, etc.
11. Calcule $Q = A_p\bar{y}$ con

$$Q = A_p\bar{y} = A_1y_1 + A_2y_2 + A_3y_3 + \cdots \tag{8–3}$$

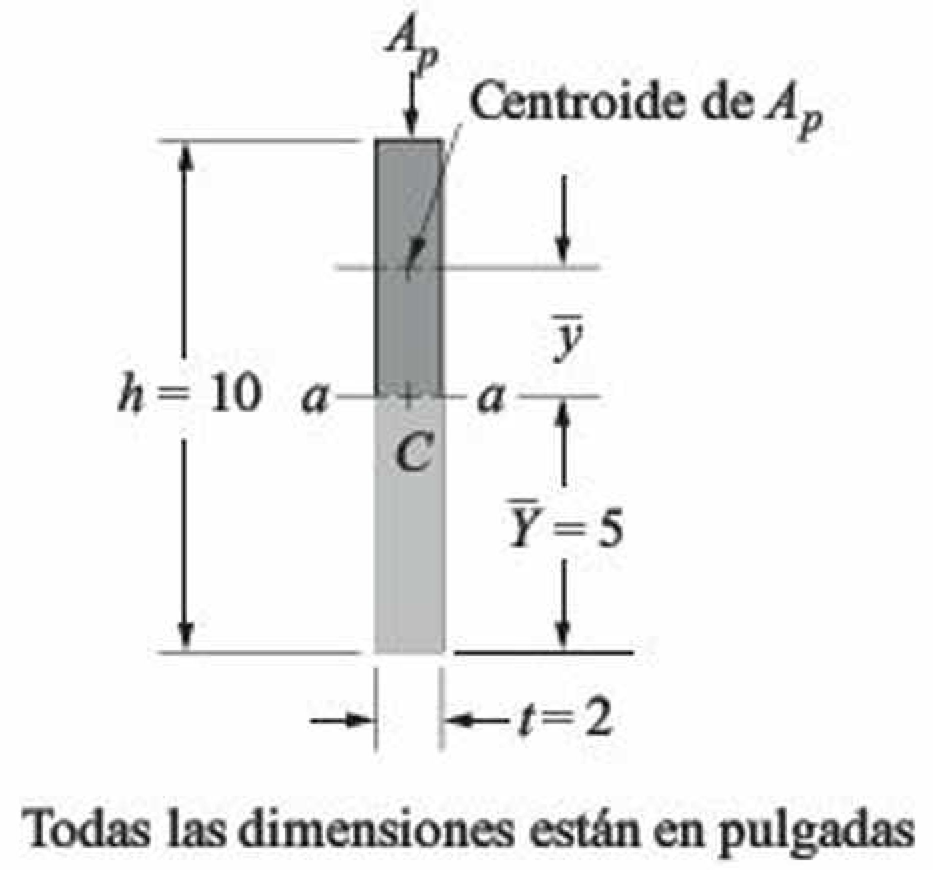


FIGURA 8–6 Ejemplo de A_p y $\overline{y}$ para usarse en el cálculo de Q.

Problema de ejemplo 8–1

Para la sección rectangular mostrada en la figura 8–6, calcule el primer momento del área Q que se utilizaría en la fórmula general de cortante para calcular el esfuerzo cortante vertical en la sección marcada a–a.

Solución

Objetivo Calcular el valor de Q.

Datos El perfil y las dimensiones de la sección transversal mostrada en la figura 8–6.

Análisis Use el método definido en esta sección.

Resultados ***Paso 1.*** El eje centroidal de esta sección se encuentra a la mitad de altura $h/2$, a partir de la base. En este problema, $h/2 = 5.00$ in.

Paso 2. El eje de interés es a-a, que en este ejemplo coincide con el eje centroidal.

Paso 3. El área parcial, A_p, se muestra sombreada en la figura en la parte superior del rectángulo.

Como el área parcial es un rectángulo simple, se utilizan los pasos 4 a 7 para calcular Q

Paso 4. El área parcial es

$$A_p = t(h/2) = (2.0\text{ in})(5.0\text{ in}) = 10\text{ in}^2$$

Paso 5. El centroide del área parcial se localiza a la mitad de su altura, 2.5 in sobre a–a.

Paso 6. Como el eje centroidal coincide con el eje a-a, $\overline{y} = 2.5$ in.

Paso 7. Ahora se puede calcular Q.

$$Q = A_p\overline{y} = (10.0\text{ in}^2)(2.5\text{ in}) = 25.0\text{ in}^3$$

Problema de ejemplo 8–2

Para la sección I de la figura 8–7, calcule el primer momento del área Q que se utilizaría en la fórmula general de cortante para calcular el esfuerzo cortante vertical en la sección marcada a–a.

Solución

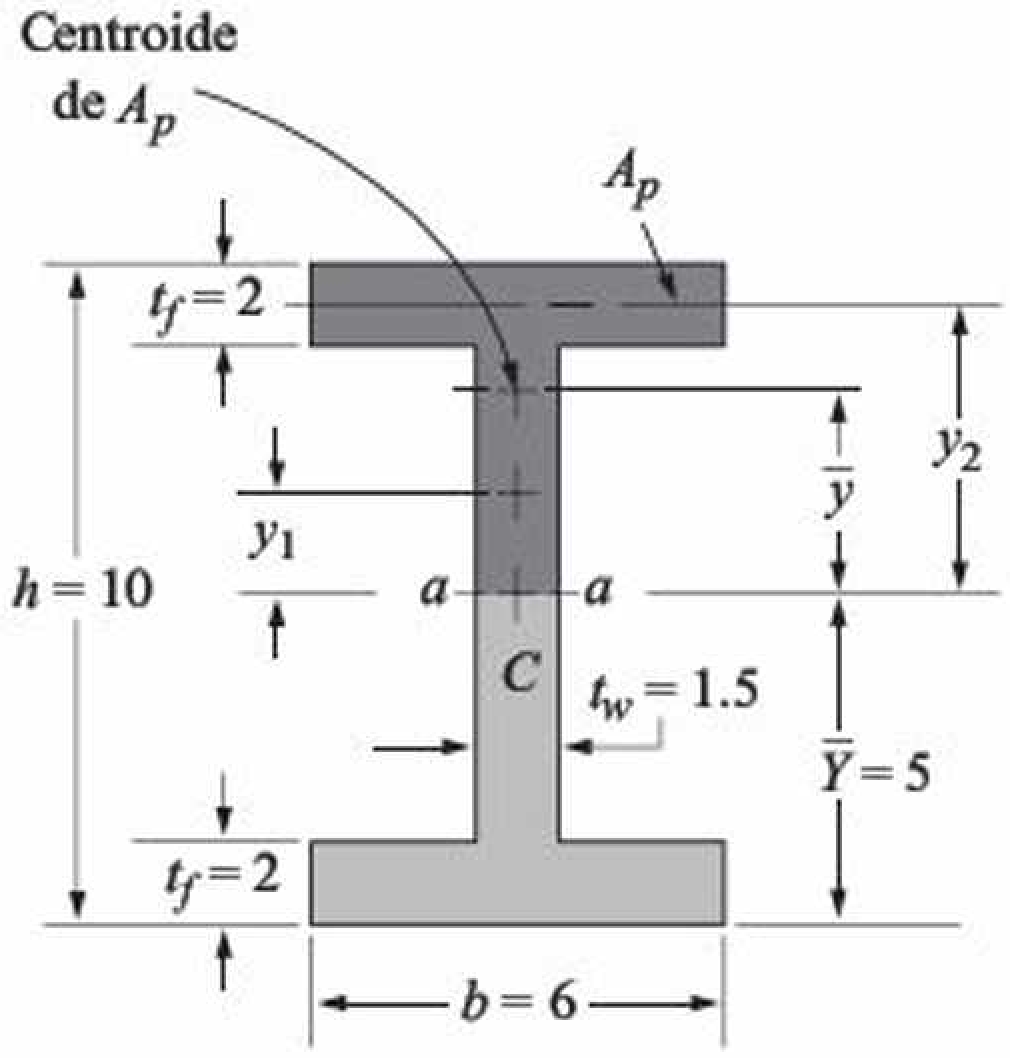
Objetivo Calcular el valor de Q.

Datos El perfil y las dimensiones de la sección transversal mostrada en la figura 8–7.

Análisis Use el método definido en esta sección.

Resultados ***Paso 1.*** El perfil I es simétrico y, por consiguiente, el eje centroidal se encuentra a la mitad de la altura desde su base, 5.0 in.

FIGURA 8–7
Perfil I del problema de ejemplo 8–2.



Todas las dimensiones están en pulgadas

Paso 2. El eje de interés *a–a* coincide con el eje centroidal en este ejemplo.

Paso 3. El área parcial, A_p, es la sombreada en la mitad superior del perfil I.

Como el área parcial tiene forma de "T", se utilizan los pasos 8 a 11 para calcular Q.

Paso 8. El perfil T se divide en dos partes; la mitad superior del alma vertical es la parte 1 y el patín de arriba es la parte 2. Las magnitudes de estas áreas son

$$A_1 = \left(\frac{h}{2} - t_f\right)(t_w) = (5.0 \text{ in} - 2.0 \text{ in})(1.5 \text{ in}) = 4.5 \text{ in}^2$$

$$A_2 = bt_f = (6.0 \text{ in})(2.0 \text{ in}) = 12.0 \text{ in}^2$$

Paso 9. Cada una de las partes es un rectángulo donde el centroide está a media altura, como se muestra en la figura.

Paso 10. Las distancias requeridas son

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - t_f\right) = \frac{1}{2}(5.0 \text{ in} - 2.0 \text{ in}) = 1.5 \text{ in}$$

$$y_2 = \left(\frac{h}{2} - \frac{t_f}{2}\right) = (5.0 \text{ in} - 1.0 \text{ in}) = 4.0 \text{ in}$$

Paso 11. Con la ecuación (8–3) se obtiene

$$Q = A_1 y_1 + A_2 y_2$$

$$Q = (4.5 \text{ in}^2)(1.5 \text{ in}) + (12.0 \text{ in}^2)(4.0 \text{ in}) = 54.75 \text{ in}^3$$

Comentario Observe que no es necesario calcular el área total A_p o localizar el centroide del área parcial en el caso de áreas compuestas. Se requiere sólo la suma de los productos de A_y por todas las partes de A_p.

Problema de ejemplo 8–3

Para el perfil T mostrado en la figura 8–8, calcule el primer momento del área Q que se utilizaría en la fórmula general de cortante para calcular el esfuerzo cortante vertical en la sección marcada *a–a,* en la parte superior del alma, justo debajo de donde se une el patín.

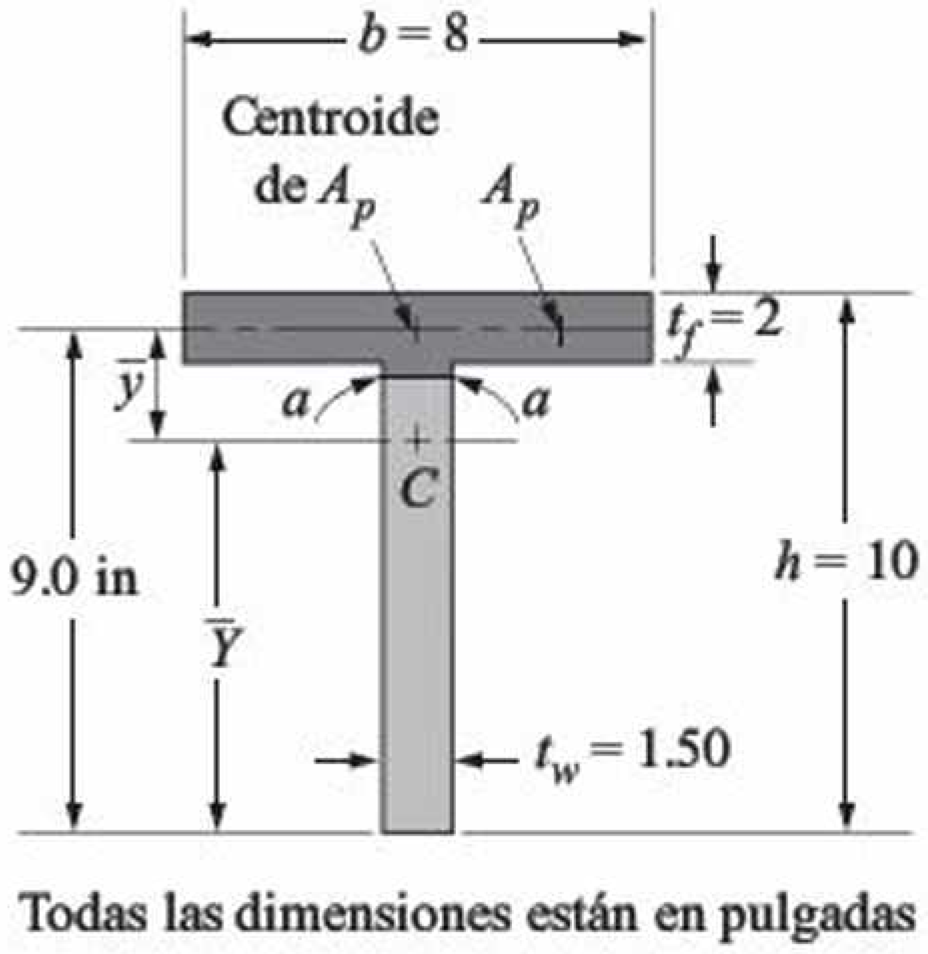


FIGURA 8–8
Perfil T del problema de ejemplo 8–3.

Solución

Objetivo Calcular el valor de Q.

Datos El perfil y las dimensiones de la sección transversal que aparecen en la figura 8–8.

Análisis Use el método definido en esta sección.

Resultados ***Paso 1.*** Localice el centroide de toda la sección transversal.

$$\bar{Y} = \frac{A_w y_w + A_f y_f}{A_w + A_f}$$

donde el subíndice w se refiere al alma vertical y el subíndice f al patín superior. Entonces

$$\bar{Y} = \frac{(12)(4) + (16)(9)}{12 + 16} = 6.86 \text{ in}$$

Paso 2. El eje de interés a–a está en la parte superior del alma, justo debajo del patín.

Paso 3. El área parcial sobre el eje a–a es todo el patín.

Paso 4. $A_p = (8 \text{ in})(2 \text{ in}) = 16 \text{ in}^2$

Paso 5. El centroide de A_p está 1.0 in debajo de la cara superior del patín, la cual está a 9.0 in sobre la base de la T.

Paso 6. $\bar{y} = 9.0 \text{ in} - \bar{Y} = 9.0 \text{ in} - 6.86 \text{ in} = 2.14 \text{ in}$

Paso 7. $Q = A_p\bar{y} = (16 \text{ in}^2)(2.14 \text{ in}) = 34.2 \text{ in}^3$

Comentario Es de hacerse notar que el valor de Q sería el mismo aunque el eje de interés a-a se hubiera considerado en la cara inferior del patín justo arriba del alma. Pero los esfuerzos resultantes serían por completo diferentes. El espesor de la sección, t, sería igual al ancho del patín, mientras que para el eje a-a utilizado en este problema se utiliza el espesor del alma. Esto se demostrará más adelante.

Uso de la fórmula general de cortante. Se presentan ejemplos para ilustrar el uso de la fórmula general de cortante [ecuación (8–1)] para calcular el esfuerzo cortante vertical en una viga. El siguiente procedimiento es representativo del utilizado para resolver problemas de ese tipo.

Instrucciones para calcular esfuerzos cortantes en vigas

El objetivo general es calcular el esfuerzo cortante en cualquier posición especificada en la viga y cualquier eje especificado en la sección transversal con la fórmula general de cortante.

$$\tau = \frac{VQ}{It} \quad \textbf{(8–1)}$$

1. Determine la fuerza cortante vertical V en la sección de interés. Puede que se requiera trazar el diagrama de fuerza cortante completo siguiendo los procedimientos del capítulo 5.
2. Localice el centroide de toda la sección transversal y trace el eje neutro a través del centroide.
3. Calcule el momento de inercia de la sección con respecto al eje neutro.
4. Identifique el eje con respecto al cual se va a calcular el esfuerzo cortante y determine el espesor t en dicho eje. Incluya todas las partes de la sección cortadas por eje de interés cuando se calcule t.
5. Calcule Q, el primer momento, con respecto al eje neutro del área parcial alejada del eje de interés. Use el procedimiento desarrollado en esta sección.
6. Calcule el esfuerzo cortante por medio de la ecuación (8–1).

Problema de ejemplo 8–4

Calcule el esfuerzo cortante en el eje *a–a* de la viga de sección transversal rectangular mostrada en la figura 8–6. La fuerza cortante, V, en la sección de interés, es de 1200 lb.

Solución

Objetivo: Calcular el esfuerzo cortante en el eje *a–a*.

Datos: La sección transversal y las dimensiones dadas en la figura 8–6, $V = 1200$ lb.

Análisis: Use las *Instrucciones para calcular esfuerzos cortantes en vigas.*

Resultados:

Paso 1. $V = 1200$ lb (dato)

Paso 2. En un perfil rectangular, el centroide está a media altura, como se muestra en la figura 8–6 y coincide con el eje *a–a*. $\overline{Y} = 5.00$ in.

Paso 3. $I = bh^3/12 = (2.0)(10.0)^3/12 = 166.7\ \text{in}^4$

Paso 4. Espesor $= t = 2.0$ in en el eje *a–a*.

Paso 5. Normalmente se calcularía $Q = A_p\overline{y}$ con el método mostrado con anterioridad en este capítulo. Pero el valor de Q para la sección de la figura 8–6 se calculó en el problema de ejemplo 8–1. Use $Q = 25.0\ \text{in}^3$.

Paso 6. Con la ecuación (8–1),

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{(1200\ \text{lb})(25.0\ \text{in}^3)}{(166.7\ \text{in}^4)(2.0\ \text{in})} = 90.0\ \text{psi}$$

Problema de ejemplo 8–5

Calcule el esfuerzo cortante en los ejes *a–a* y *b–b* para una viga T como la mostrada en la figura 8–8. El eje *a–a* está en la parte superior del alma vertical, justo debajo del patín. El eje *b–b* está en la cara inferior del patín. La fuerza cortante, V, en la sección de interés es de 1200 lb.

Solución

Objetivo: Calcular el esfuerzo cortante en los ejes *a–a* y *b–b*.

Datos: El perfil y las dimensiones dadas en la figura 8–8, $V = 1200$ lb.

Análisis Use la *Instrucciones para calcular esfuerzos cortantes en vigas.*

Resultados Para el eje *a–a*:

Paso 1. $V = 1200$ lb (dato)

Paso 2. Este perfil T particular se analizó en el problema de ejemplo 8-3. Use $\bar{Y} = 6.86$ in.

Paso 3. Utilizaremos los métodos del capítulo 6 para calcular I. Sea el alma la parte 1 y el patín la parte 2. Para cada una de las partes, $I = bh^3/12$ y $d = \bar{Y} - \bar{y}$.

Parte	I	A	d	Ad^2	$I + Ad^2$
1	64.00	12.0	2.86	98.15	162.15
2	5.33	16.0	2.14	73.27	78.60
					Total $I = 240.75$ in^4

Paso 4. Espesor $= t = 1.5$ in en el eje *a–a* en el alma.

Paso 5. Normalmente se calcularía $Q = A_p\bar{y}$, con el método mostrado con anterioridad en este capítulo. Pero el valor de Q para la sección de la figura 8–8 se calculó en problema de ejemplo 8–3. Use $Q = 34.2$ in^3.

Paso 6. Con la ecuación (8–1),

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{(1200\ \text{lb})(34.2\ \text{in}^3)}{(240.75\ \text{in}^4)(1.5\ \text{in})} = 114\ \text{psi}$$

Para el eje *b–b*: Algunos de los datos serán los mismos que para el eje *a–a*.

Paso 1. $V = 1200$ lb (dato)

Paso 2. De nuevo, use $\bar{Y} = 6.86$ in.

Paso 3. $I = 240.75$ in^4

Paso 4. *Espesor* $= t = 8.0$ en el eje *b-b* del patín.

Paso 5. De nuevo, use $Q = 34.2$ in^3. El valor es el mismo que en el eje *a–a;* por tanto, A_p como $\bar{y}$ son los mismos.

Paso 6. Con la ecuación (8–1),

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{(1200\ \text{lb})(34.2\ \text{in}^3)}{(240.75\ \text{in}^4)(8.0\ \text{in})} = 21.3\ \text{psi}$$

Comentario Observe la notable reducción del valor del esfuerzo cortante cuando se pasa del alma al patín.

8–4 DISTRIBUCIÓN DEL ESFUERZO CORTANTE EN VIGAS

La mayoría de las aplicaciones requieren que se determine el esfuerzo cortante máximo para evaluar la aceptabilidad del esfuerzo con respecto a algún criterio de diseño. En la mayoría de las secciones utilizadas para vigas, el esfuerzo cortante máximo ocurre en el eje neutro y coincide con el eje centroidal, con respecto al cual ocurre la flexión. Se puede utilizar la siguiente regla para decidir cuándo aplicar esta observación.

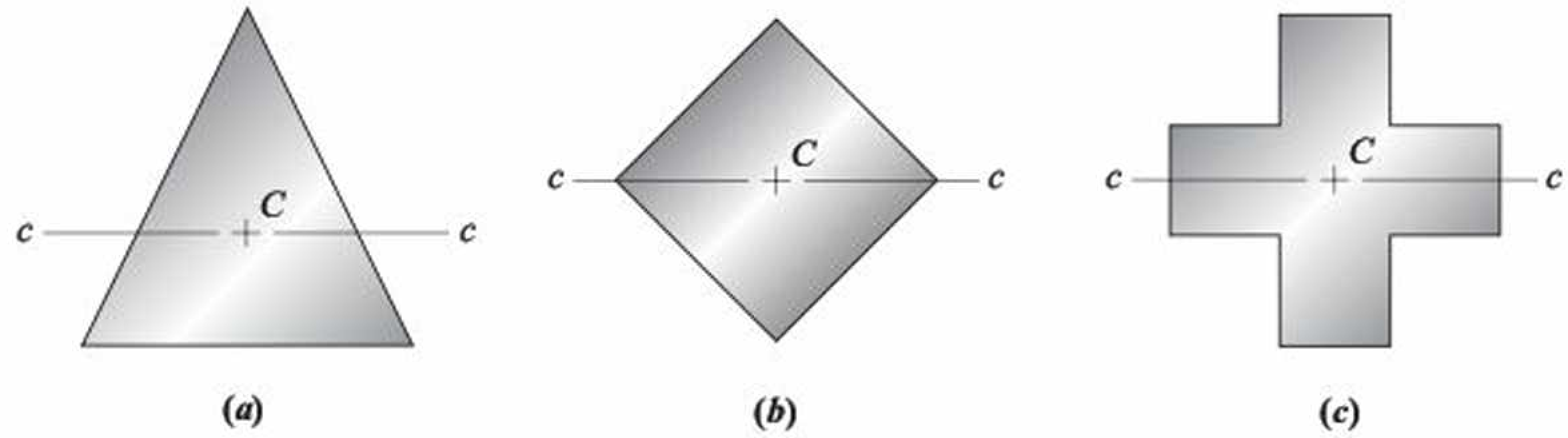


FIGURA 8–9 Secciones transversales de viga en las que el esfuerzo cortante máximo no puede ocurrir en el eje centroidal, c–c.

> Siempre que el espesor en el eje centroidal no sea mayor que en algún otro eje, el esfuerzo cortante máximo en la sección transversal de una viga ocurre en el eje centroidal.

Así pues el cálculo del esfuerzo cortante sólo en el eje centroidal daría el esfuerzo cortante en la sección, lo que hace que los cálculos en otros ejes sean innecesarios.

La lógica detrás de esta regla se puede ver si se examina la ecuación (8–1), la fórmula general de cortante. Para calcular el esfuerzo cortante en cualquier eje, los valores de la fuerza cortante V y el momento de inercia I son los mismos. Como el espesor, t, está en el denominador, el espesor mínimo tendería a producir el esfuerzo cortante máximo, tal como el enunciado de la regla lo implica. Pero el valor del primer momento del área Q también varía en diferentes ejes y se reduce conforme el eje de interés se mueve hacia fuera de la sección. Recuerde que Q es el producto del área parcial A_p por la distancia $\bar{y}$. En el caso de ejes alejados del eje centroidal, el área disminuye más rápido de lo que se incrementa $\bar{y}$ y, por tanto, el valor de Q se reduce. En consecuencia, el valor máximo de Q será el del esfuerzo calculado en el eje centroidal. Se desprende que el esfuerzo cortante máximo siempre ocurrirá en el eje centroidal *a menos que el espesor en algún otro eje sea menor que aquel en el eje centroidal.*

Los perfiles mostrados en la figuras 8–6, 8–7 y 8–8 son ejemplos que acatan la regla del que el esfuerzo cortante máximo ocurre en el eje neutro porque el espesor mínimo de cada uno de ellos ocurre en el eje neutro. La figura 8–9 muestra tres ejemplos donde la regla *no se aplica*. En cada ejemplo, en algunos ejes alejados del eje neutro, el espesor es menor que aquel en el eje neutro. En esos casos, el esfuerzo cortante máximo *puede* ocurrir en algún otro eje. El ejemplo 8–7 ilustra esta observación con el análisis de la sección triangular.

Las secciones circulares sólidas y huecas son ejemplos importantes de donde sí ocurre el esfuerzo cortante en el eje neutro aun cuando el espesor se reduzca en otros ejes. Se puede demostrar que la relación Q/t se reduce de forma continua en el caso de ejes alejados del eje neutro en el diámetro.

Los siguientes ejemplos ilustran la distribución del esfuerzo cortante en vigas de diferentes perfiles. Observe los comentarios al final de cada problema por lo que se refiere a algunas conclusiones generales.

Problema de ejemplo 8–6 Calcule la distribución del esfuerzo cortante con respecto a la posición en la sección transversal de la viga de perfil rectangular mostrada en la figura 8–6. Las dimensiones reales son 2.0 in por 10.0 in. Grafique los resultados. La fuerza cortante, V, en la sección de interés es de 1200 lb.

Solución Objetivo Calcular el esfuerzo cortante en varios ejes y graficar τ contra la posición.

Datos El perfil y las dimensiones que aparecen en la figura 8–6, $V = 1200$ lb.

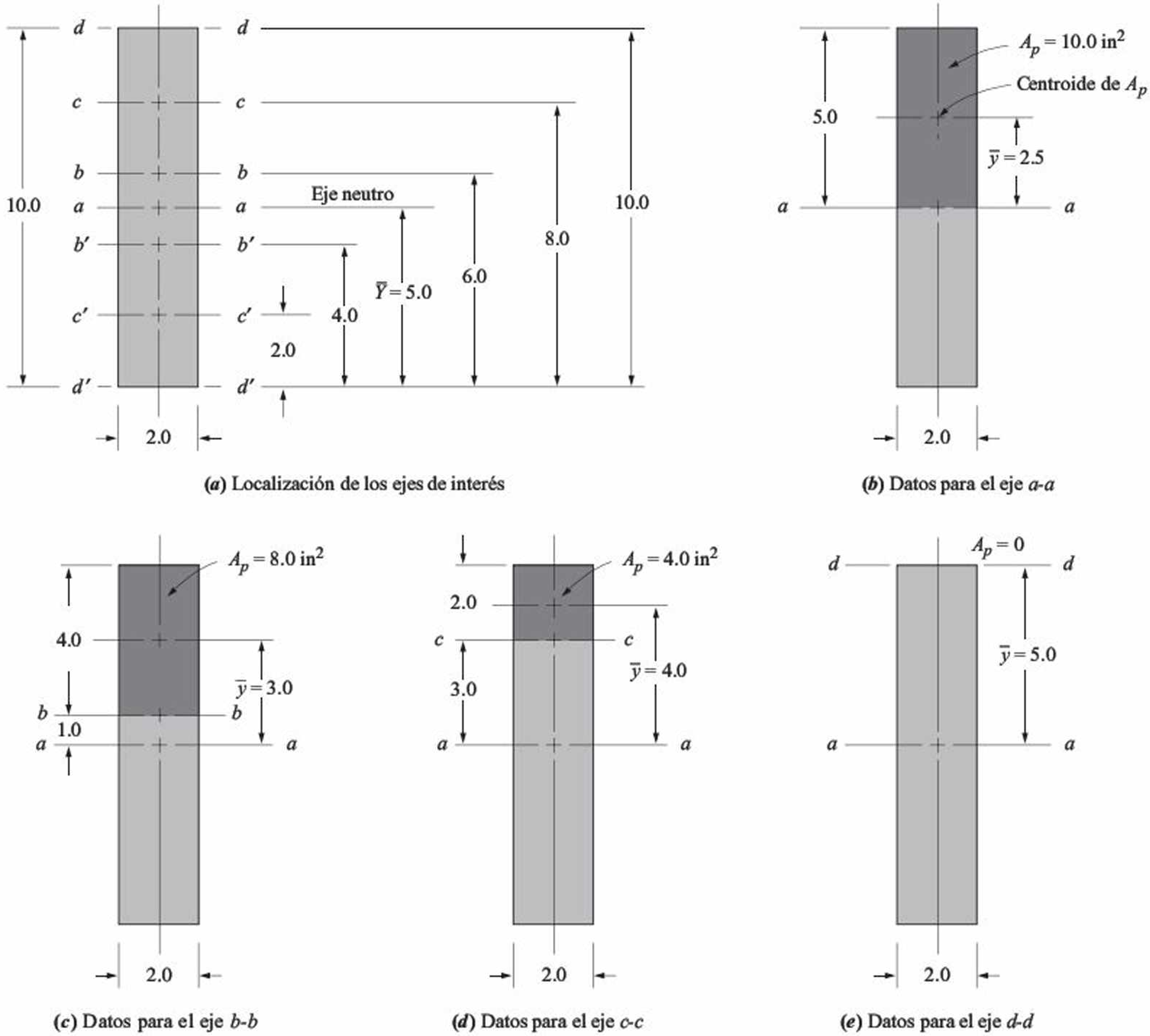


FIGURA 8–10 Datos para calcular Q en el problema de ejemplo 8–6.

Análisis Siga las *Instrucciones para calcular esfuerzos cortantes en vigas.* Como el perfil es simétrico con respecto al eje centroidal, decidimos calcular los esfuerzos cortantes en la parte superior en los ejes a–a, b–b, c–c y d–d, como se muestra en la figura 8–10. Entonces, los valores de los esfuerzos en la parte inferior de las secciones b'–b', c'–c' y d'–d' serán los mismos que en los puntos correspondientes de arriba.

Resultados ***Paso 1.*** $V = 1200$ lb (dato)

Paso 2. En el perfil rectangular, el centroide está a la mitad de la altura, como se muestra en la figura 8–6 y coincide con el eje a–a. $\overline{Y} = 5.00$ in.

Paso 3. $I = bh^3/12 = (2.0)(10.0)^3/12 = 166.7\ in^4$

Paso 4. Espesor $= t = 2.0$ in en todos los ejes.

Paso 5. Calcularemos $Q = A_p y$ para cada uno de los ejes con el método descrito con anterioridad en este capítulo. Recuerde que el valor de Q para esta sección se calculó en el

problema de ejemplo 8–1 como $Q = 25.0\ \text{in}^3$. Un cálculo similar se resume en la tabla que aparece después del paso 6, con los datos de la figura 8–10.

Paso 6. Con la ecuación (8–1), el cálculo del esfuerzo cortante en el eje neutro a–a se muestra a continuación:

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{(1200\ \text{lb})(25.0\ \text{in}^3)}{(166.7\ \text{in}^4)(2.0\ \text{in})} = 90.0\ \text{psi}$$

El cálculo sería el mismo que en los demás ejes con sólo el valor de Q distinto. Vea la siguiente tabla.

Eje	V	I	t	Ap	y	$Q = Apy$	$\tau = VQ/It$
$a-a$	1200	166.7	2.0	10.0	2.5	25.0	90.0 psi
$b-b$	1200	166.7	2.0	8.0	3.0	24.0	86.4 psi
$c-c$	1200	166.7	2.0	4.0	4.0	16.0	57.6 psi
$d-d$	1200	166.7	2.0	0.0	5.0	0.0	0.0 psi

Los resultados del esfuerzo cortante contra la posición se muestran en la figura 8–11 al lado de la sección rectangular.

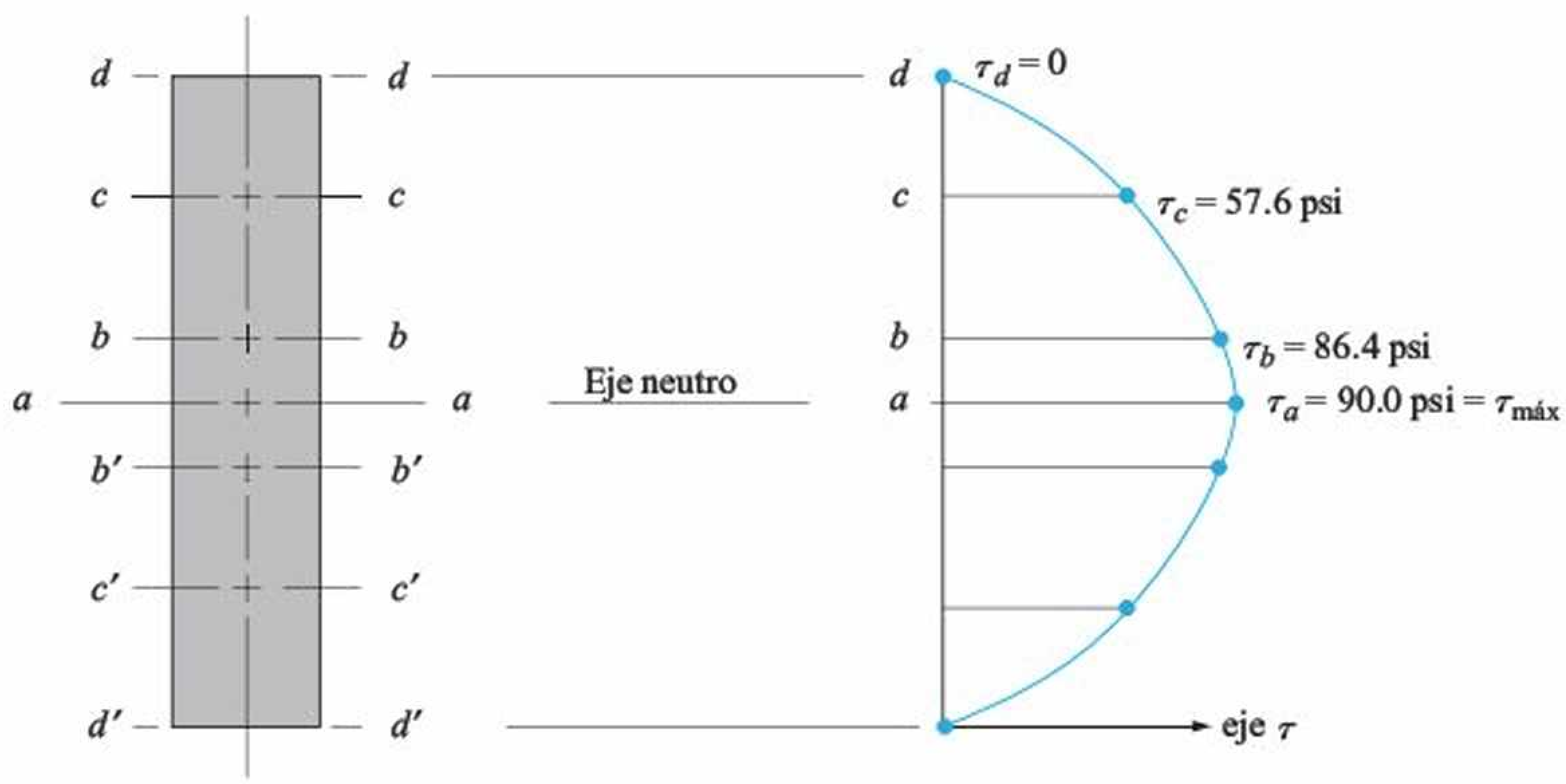


FIGURA 8–11 Distribución del esfuerzo cortante en la sección rectangular del problema de ejemplo 8–6.

Comentario

LECCIÓN 11

Observe que el esfuerzo cortante máximo sí ocurre en el eje neutro como se esperaba. La variación del esfuerzo cortante con la posición es parabólica y termina con un esfuerzo de cero en las caras superior e inferior.

Problema de ejemplo 8–7

Para la sección transversal triangular mostrada en la figura 8–12, calcule el esfuerzo cortante que ocurre en los ejes a a g, a intervalos de 50 mm. Grafique la variación del esfuerzo con la posición en la sección. La fuerza cortante es de 50 kN.

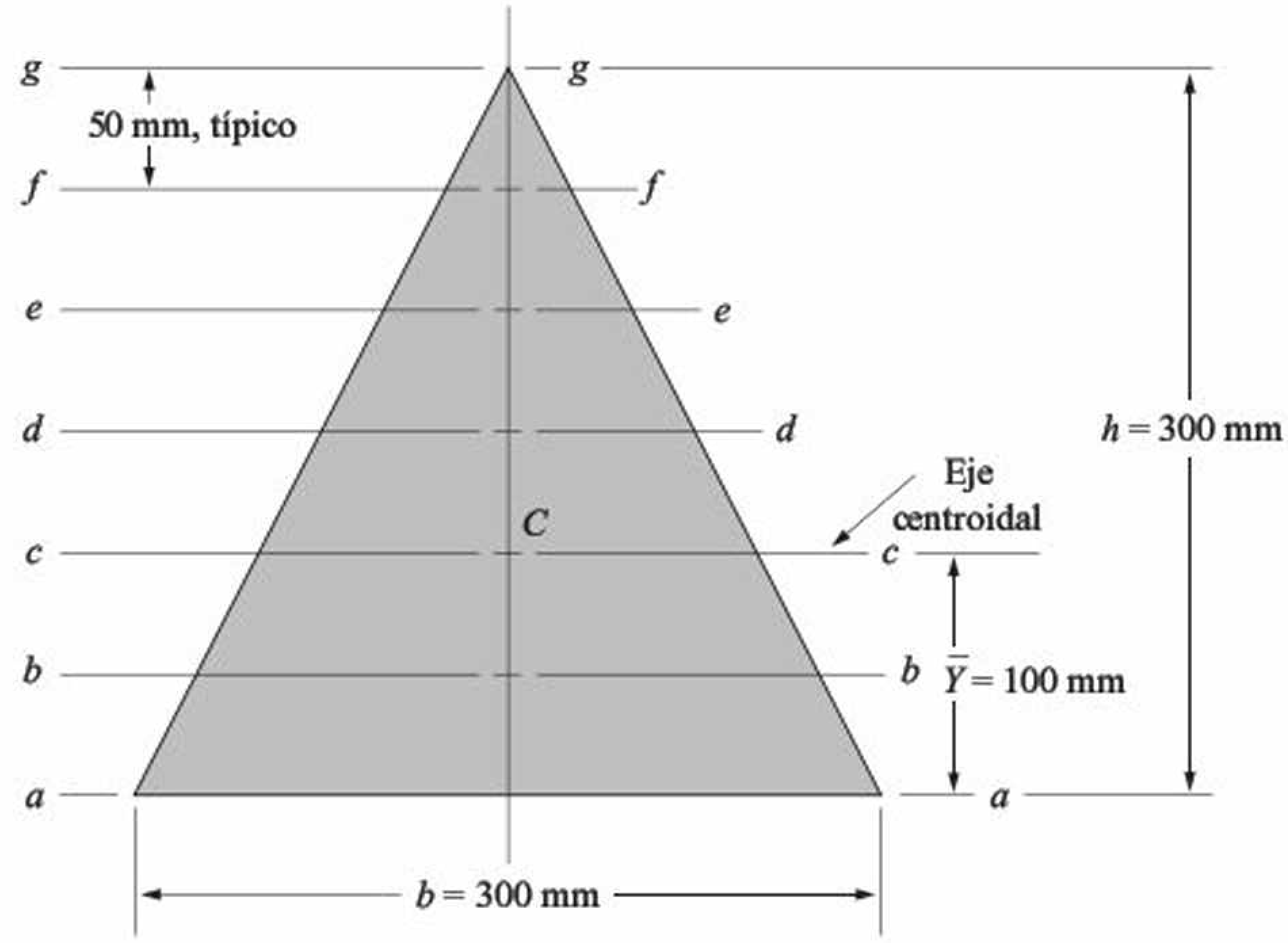


FIGURA 8–12 Sección transversal triangular de una viga en la que el esfuerzo cortante máximo no ocurre en el eje centroidal.

Solución

Objetivo Calcular el esfuerzo cortante en siete ejes y graficar τ contra la posición.

Datos La sección transversal y las dimensiones dadas en la figura 8–12, $V = 50$ kN.

Análisis Use las *Instrucciones para calcular esfuerzos cortantes en vigas.*

Resultados En la fórmula general de cortante, los valores de V e I serán los mismos de todos los cálculos. V es de 50 kN y

$$I = \frac{bh^3}{36} = \frac{(300)(300)^3}{36} = 225 \times 10^6\ \text{mm}^4$$

La tabla 8–1 muestra los cálculos restantes. Obviamente, el valor de Q con respecto a los ejes a–a y g–g es cero porque el área afuera de cada eje es cero. Observe que por el perfil único del triángulo dado, el espesor t en cualquier eje es igual a la altura del triángulo sobre el eje.

La figura 8–13 muestra una gráfica de estos esfuerzos. El esfuerzo cortante máximo ocurre a la mitad de la altura de la sección y el esfuerzo en el centroide (a h/3) es menor. Esto ilustra el enunciado general de que en secciones cuyo espesor mínimo no ocurre en el eje centroidal, el esfuerzo cortante mínimo puede ocurrir en algún otro eje distinto del eje centroidal.

TABLA 8–1

Eje	A_p (mm²)	$\bar{y}$ (mm)	$Q = A_p y$ (mm³)	t (mm)	τ (MPa)
$a-a$	0	100	0	300	0
$b-b$	13 750	75.8	1.042×10^6	250	0.92
$c-c$	20 000	66.7	1.333×10^6	200	1.48
$d-d$	11 250	100.0	1.125×10^6	150	1.67
$e-e$	5 000	133.3	0.667×10^6	100	1.48
$f-f$	1 250	166.7	0.208×10^6	50	0.92
$g-g$	0	200	0	0	0

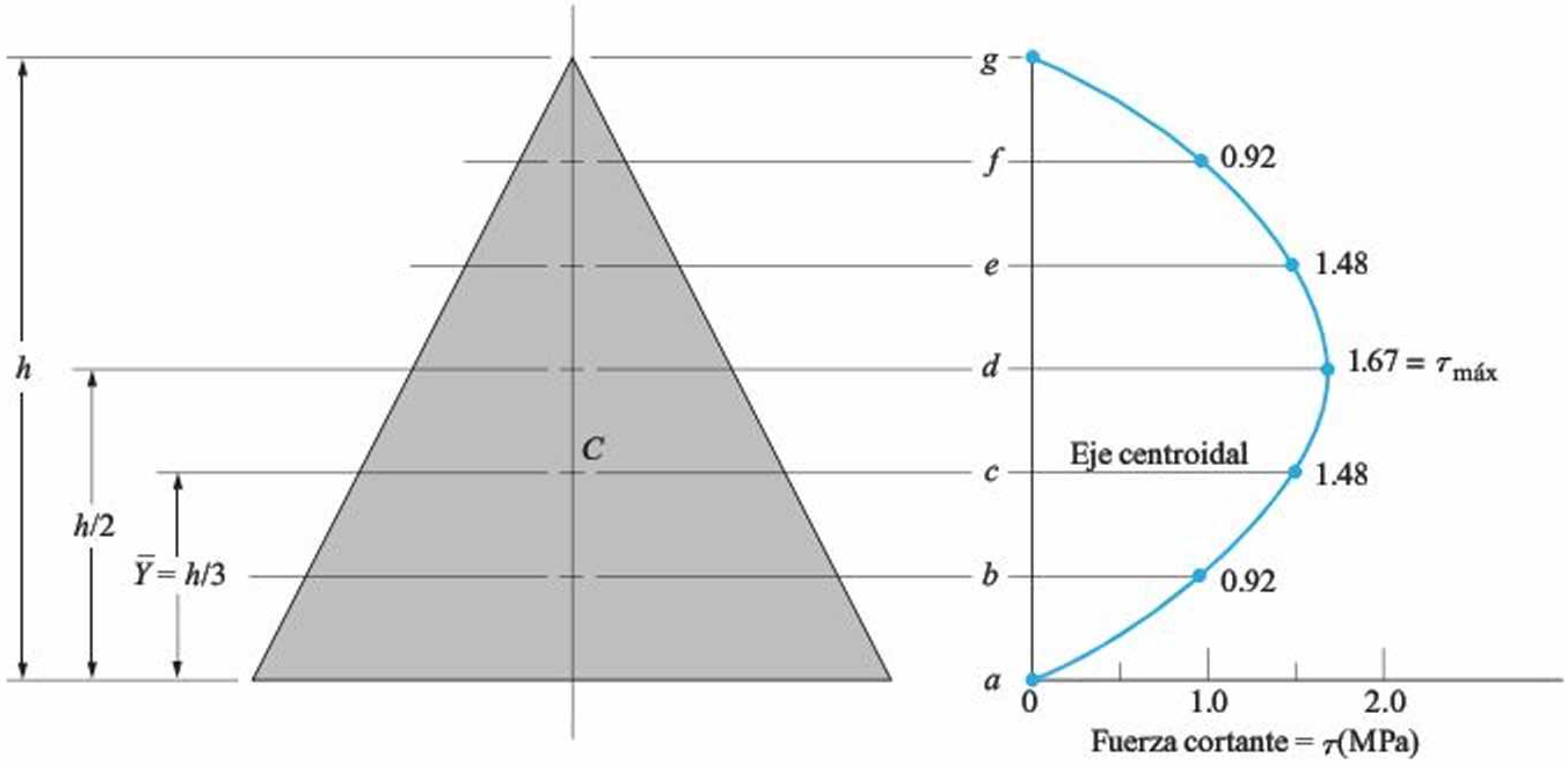


FIGURA 8–13 Distribución del esfuerzo cortante en la sección transversal triangular del problema de ejemplo 8–7.

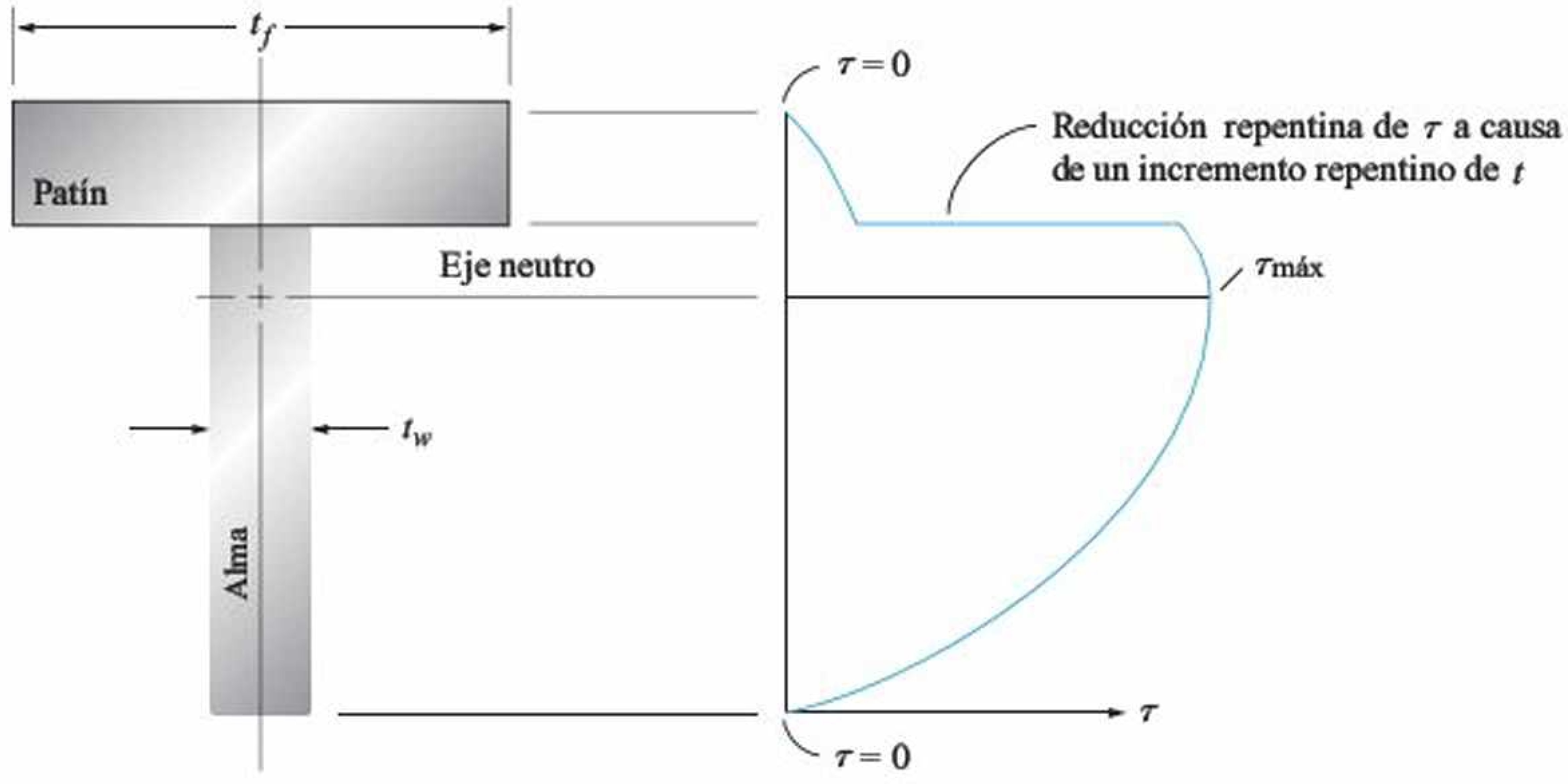
Comentario Se puede hacer un apunte más con respecto a los cálculos mostrados para la sección triangular. Para el eje *b–b*, el área parcial A_p se consideró como el área *debajo de b–b*. La sección resultante es el trapezoide entre *b–b* y la cara inferior de la viga. Para todos los demás ejes, el área parcial A_p se consideró como el área triangular *sobre* el eje. Se podría haber utilizado el área bajo el eje, pero los cálculos habrían sido más difíciles. Cuando se calcula Q no importa si se utiliza el área sobre o bajo el eje de interés para calcular A_p y $\overline{y}$.

Si se revisan los resultados de los problemas de ejemplo resueltos hasta aquí en este capítulo, se concluye lo siguiente.

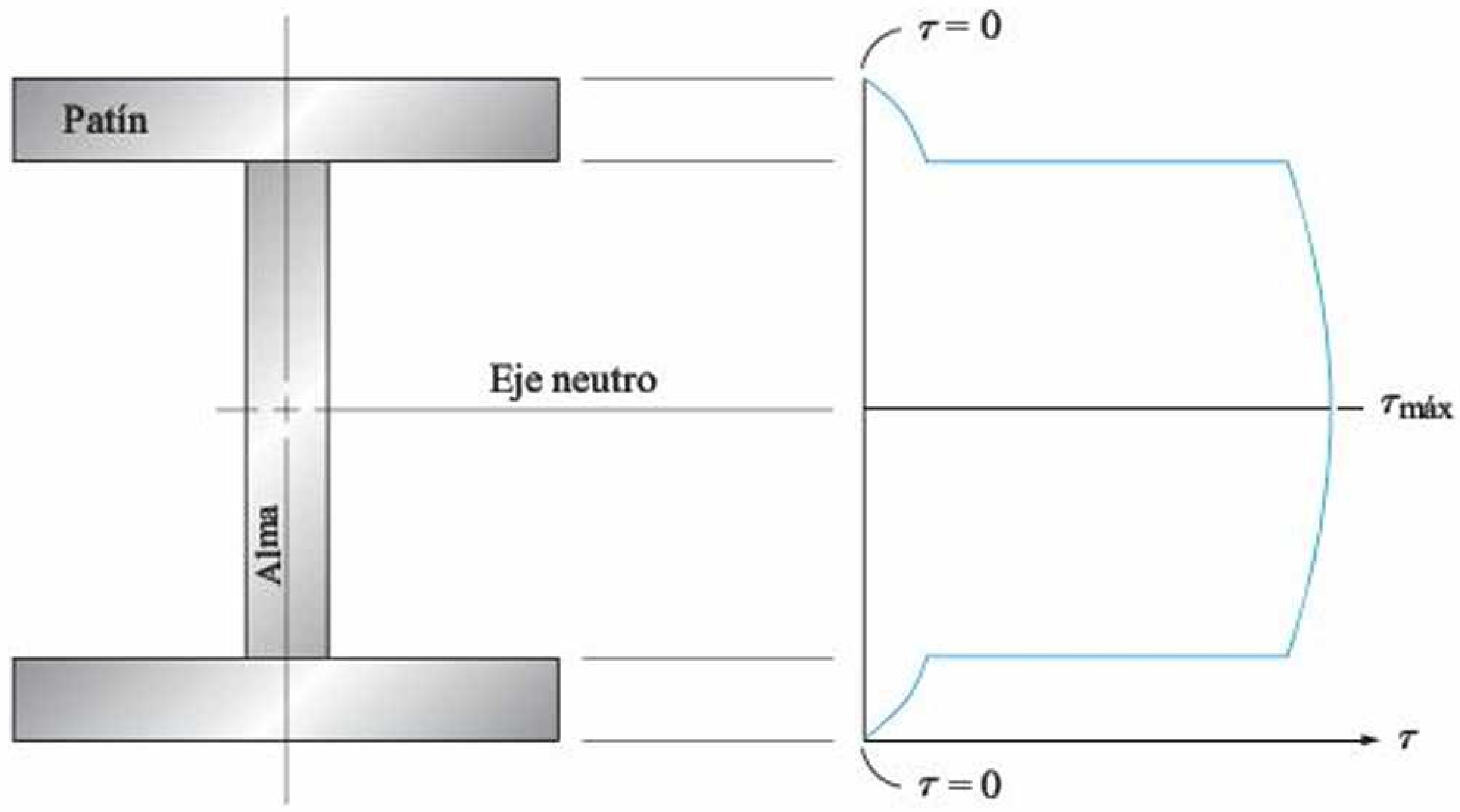
Resumen de las observaciones sobre la distribución del esfuerzo cortante en la sección transversal de una viga

1. El esfuerzo cortante afuera de la sección lejos del eje centroidal es cero.
2. El esfuerzo cortante máximo en la sección transversal ocurre en el eje centroidal siempre que el espesor allí no sea mayor que en algún otro eje.
3. En una parte de la sección transversal donde el espesor es constante, el esfuerzo cortante varía en una forma curva y se reduce conforme la distancia al eje centroidal se incrementa. La curva, en realidad, es parte de una parábola.
4. En un eje donde el espesor cambia de manera repentina como el alma de una T o un perfil I se une al patín, el esfuerzo cortante también cambia repentinamente y es mucho menor en el patín que en el alma más delgada. Vea la figura 8–14.

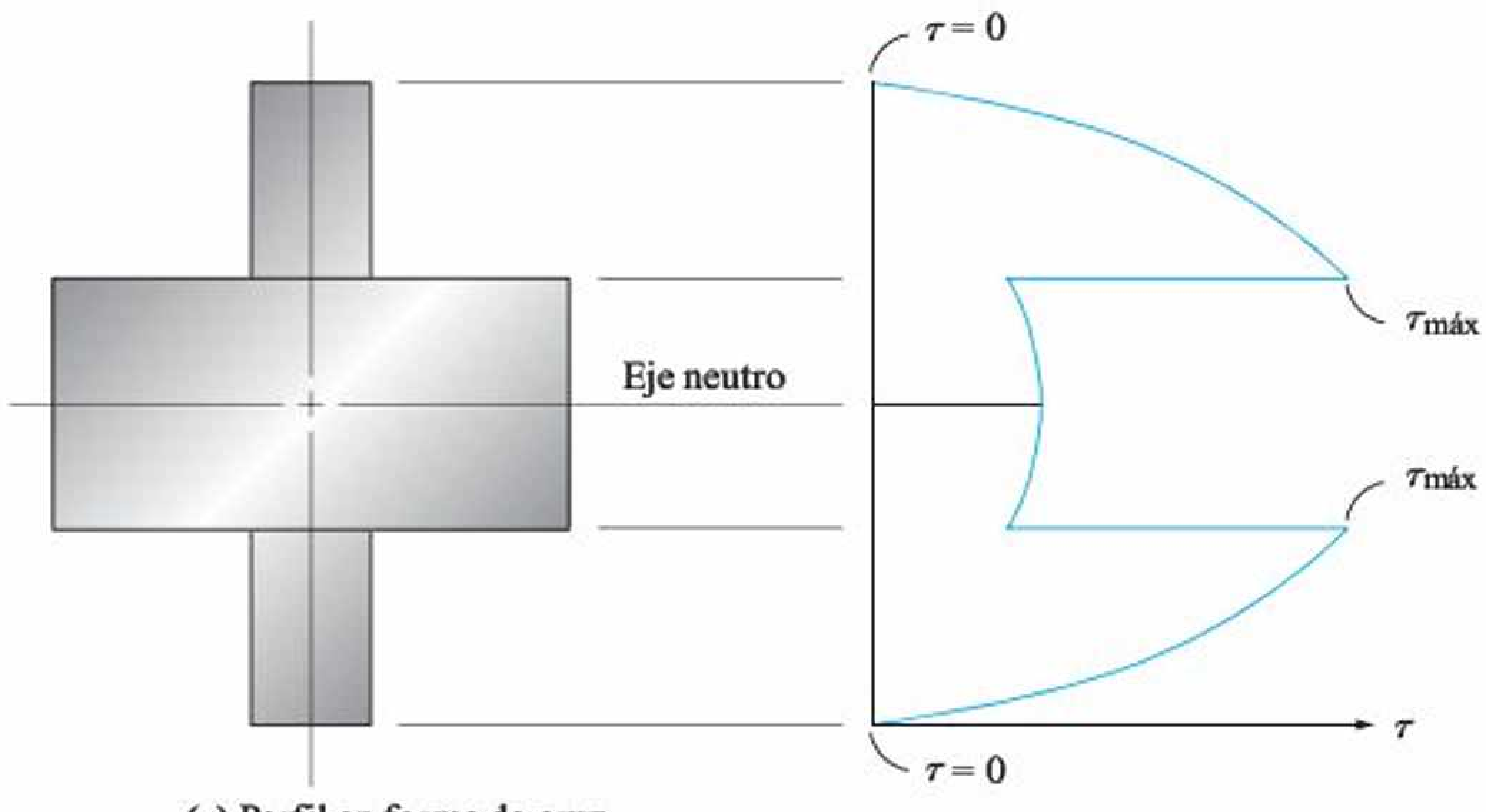
FIGURA 8–14
Distribución del esfuerzo en perfiles con cambios repentinos de espesor.



(*a*) Perfil T



(*b*) Perfil I



(*c*) Perfil en forma de cruz

8–5 DESARROLLO DE LA FÓRMULA GENERAL DE CORTANTE

Esta sección presenta la información básica sobre la fórmula general de cortante. La figura 8–15 muestra una viga sometida a dos cargas transversales y la fuerza cortante correspondiente y los diagramas de momento flexionante para que visualice ciertas relaciones.

El principio de *momento–área* de diagramas de vigas establece que *el cambio del momento flexionante entre dos puntos de una viga es igual al área bajo la curva de la fuerza cortante entre esos dos puntos*. Por ejemplo, considere dos puntos en el segmento A–B de la viga mostrada en la figura 8–15, marcados x_1 y x_2, separados una pequeña distancia dx. El momento en x_1 es M_1 y el momento en x_2 es M_2. Entonces la regla de momento–área establece que

$$M_2 - M_1 = V(dx) = dM$$

Ésta también se puede expresar como

$$V = \frac{dM}{dx} \tag{8–4}$$

Es decir, el cambio diferencial del momento flexionante correspondiente a un cambio diferencial de la posición en la viga es igual a la fuerza cortante que ocurre en dicha posición.

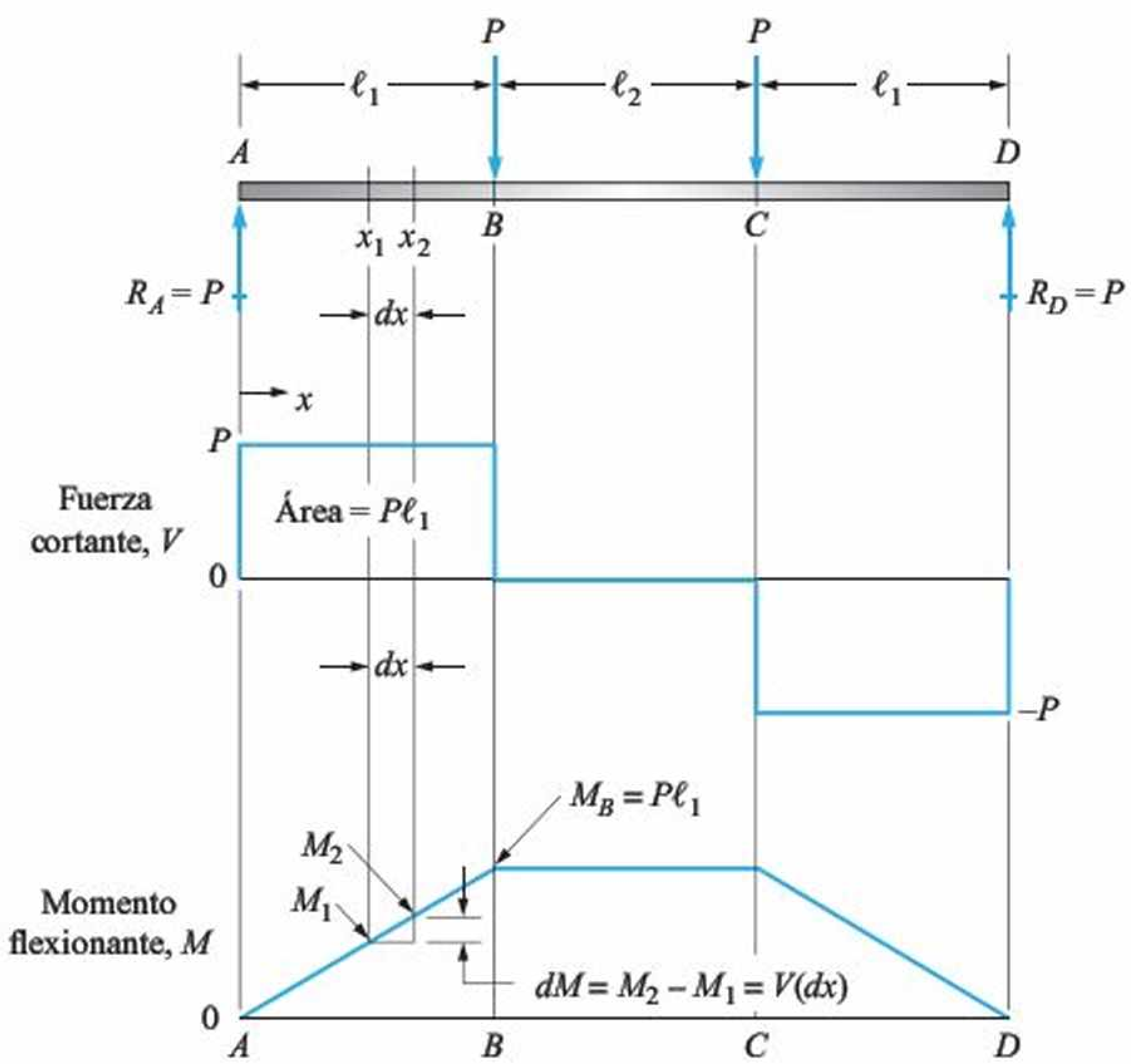
También se puede llegar a la ecuación (8–4) examinando el diagrama de cuerpo libre del pequeño segmento de la viga entre x_1 y x_2, como se muestra en la figura 8–16(a). Como esta sección se cortó de la viga, las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes internos se muestran actuando en las caras cortadas. Como la viga está en equilibrio, este segmento también está en equilibrio. Entonces la suma de momentos con respecto a un punto O en la cara izquierda debe ser cero. Por tanto,

$$\Sigma M_O = 0 = M_1 - M_2 + V(dx) = -dM + V(dx)$$

O, como se demostró con anterioridad,

$$V = \frac{dM}{dx}$$

FIGURA 8–15 Diagramas de viga utilizados para desarrollar la fórmula general de cortante.



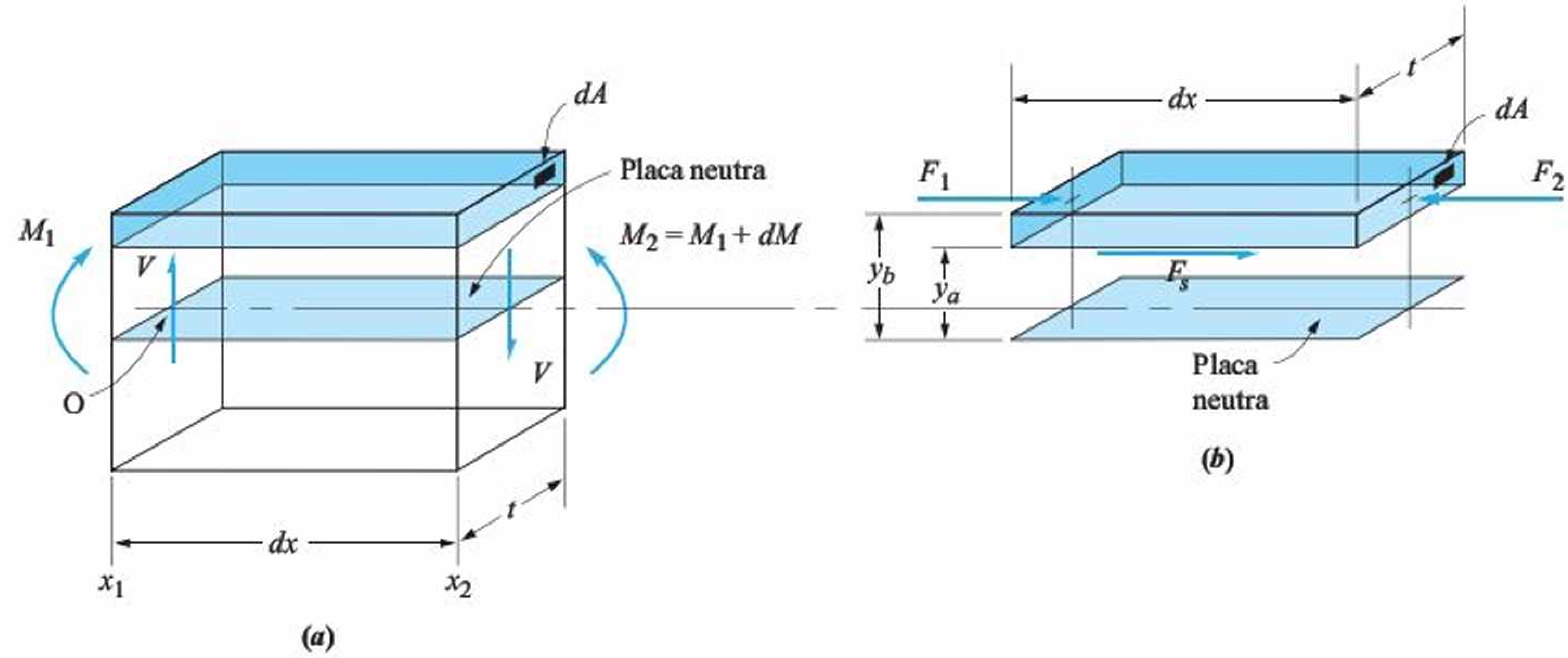


FIGURA 8–16 Fuerzas en una parte de un segmento cortado de una viga. (a) Diagrama de cuerpo libre de un segmento de viga. (b) Parte aislada de un segmento.

Cualquier *parte* del segmento de viga mostrado en la figura 8–16(a) también debe estar en equilibrio. La parte sombreada y aislada en la figura 8–16(b) soporta fuerzas paralelas al eje de la viga. En el lado derecho, F_2 se debe al esfuerzo flexionante que actúa en esa sección del área. En general, los valores de F_1 y F_2 serán diferentes y debe haber una tercera fuerza que actúe en la cara inferior de la parte sombreada del segmento para mantener el equilibrio. Ésta es la fuerza cortante, F_2, que produce el esfuerzo cortante en la viga. La figura 8–16(b) muestra la fuerza F_S, actuando en el área $t(dx)$. Entonces el esfuerzo cortante es

$$\tau = \frac{F_s}{t(dx)} \tag{8–5}$$

Sumando las fuerzas en la dirección horizontal, obtenemos

$$F_s = F_2 - F_1 \tag{8–6}$$

En seguida desarrollaremos las ecuaciones de las fuerzas F_1 y F_2. Cada fuerza es el producto del esfuerzo flexionante por el área en la cual actúa. Pero el esfuerzo flexionante varía con la posición en la sección transversal. De acuerdo con la fórmula de flexión, el esfuerzo flexionante en cualquier posición y con respecto al eje neutro es

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

Entonces la fuerza total que actúa en el área sombreada de la cara izquierda del segmento de viga es

$$F_1 = \int_A \sigma \, dA = \int_{y_a}^{y_b} \frac{M_1 y}{I} dA \tag{8–7}$$

donde dA es una pequeña área dentro del área sombreada. Los valores de M_1 e I son constantes y se pueden sacar del signo de la integral. La ecuación (8–7) se escribe entonces

$$F_1 = \frac{M_1}{I} \int_{y_a}^{y_b} y \, dA \tag{8–8}$$

La última parte de la ecuación (8–8) corresponde a la definición del centroide del área sombreada. Es decir,

$$\int_{y_a}^{y_b} y\,dA = \bar{y}A_p \tag{8–9}$$

donde A_p es el área de la parte sombreada de la cara izquierda del segmento y $\bar{y}$ es la distancia del eje neutro al centroide de A_p. El producto $\bar{y}A_p$ se conoce como el primer momento del área Q en la fórmula general de cortante. Si se sustituyen en la ecuación (8–8) se obtiene

$$F_1 = \frac{M_1}{I}\int_{y_a}^{y_b} y\,dA = \frac{M_1}{I}\,\bar{y}A_p = \frac{M_1 Q}{I} \tag{8–10}$$

Se puede seguir un razonamiento similar para desarrollar la relación de la fuerza F_2 que actúa en la cara derecha del segmento.

$$F_2 = \frac{M_2 Q}{I} \tag{8–11}$$

Ahora se pueden sustituir F_1 y F_2 en la ecuación (8–6) para completar el desarrollo de la fuerza cortante.

$$F_s = F_2 - F_1 = \frac{M_2 Q}{I} - \frac{M_1 Q}{I} = \frac{Q}{I}(M_2 - M_1) \tag{8–12}$$

Con anterioridad definimos $(M_2 - M_1) = dM$. Entonces

$$F_s = \frac{Q(dM)}{I} \tag{8–13}$$

Entonces, en la ecuación (8–5),

$$\tau = \frac{F_s}{t(dx)} = \frac{Q(dM)}{It(dx)}$$

Pero, según la ecuación (8–4), $V = dM/dx$. Entonces

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

Ésta es la forma de la fórmula general de cortante (ecuación 8–1) utilizada en este capítulo.

8–6 FÓRMULAS ESPECIALES DE CORTANTE

Tal como se demostró en varios ejemplos, se puede utilizar la fórmula general de cortante para calcular el esfuerzo cortante en cualquier eje de cualquier sección transversal de la viga. Sin embargo, con frecuencia se desea conocer sólo el *esfuerzo cortante máximo*. Para muchos perfiles comunes utilizados como vigas, es posible desarrollar fórmulas simplificadas especiales que dan el esfuerzo cortante máximo de inmediato. El rectángulo, el círculo, el tubo hueco de pared delgada y los perfiles de alma esbelta se pueden analizar de esta manera. Las fórmulas se desarrollan en esta sección.

En todas estas secciones, el esfuerzo cortante máximo ocurre en el eje neutro. El rectángulo y los perfiles de alma esbelta se ajustan a la regla enunciada en la sección 8–5, porque

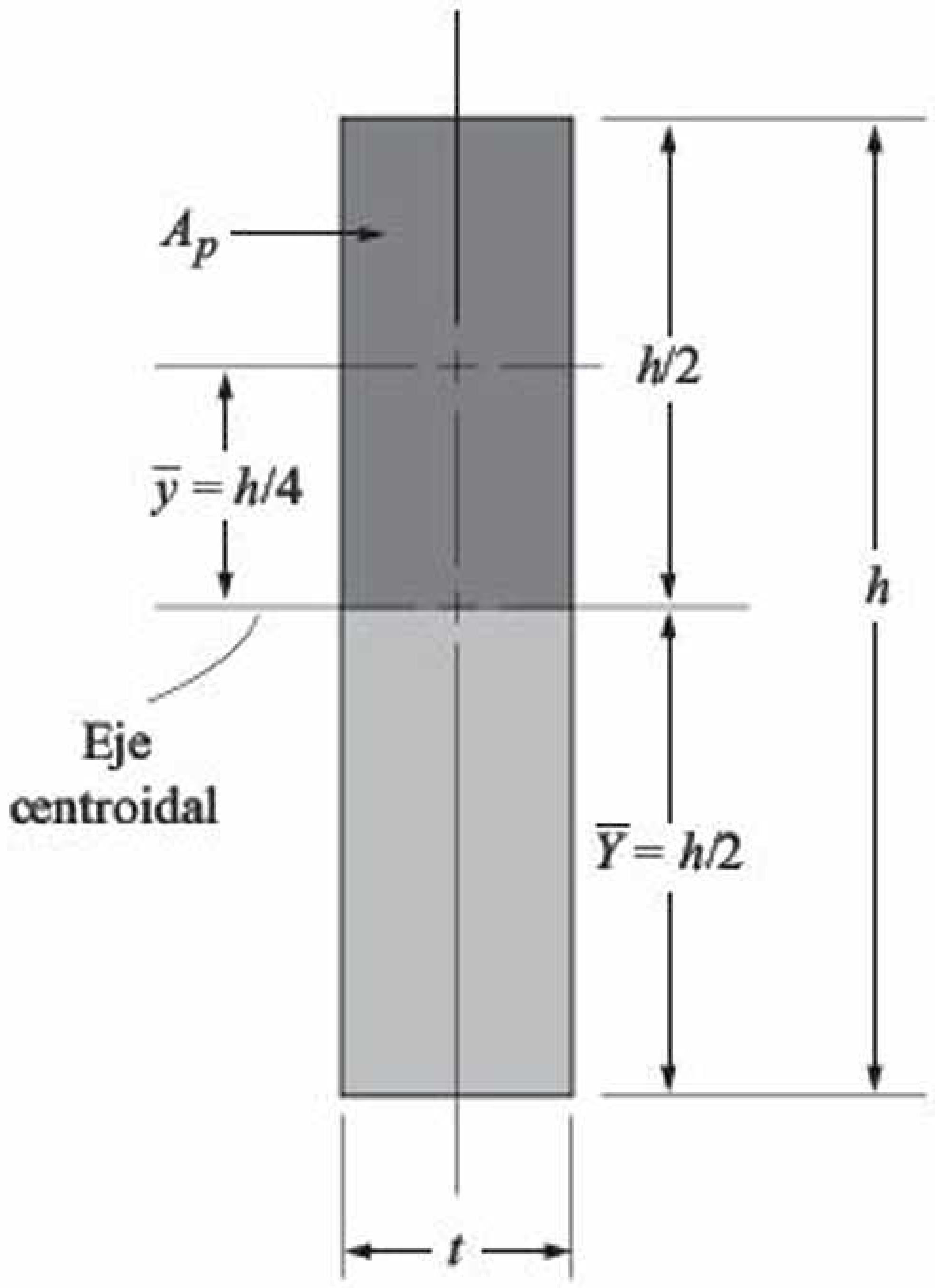


FIGURA 8–17
Perfil rectangular.

el espesor en el eje neutro no es mayor que en otros ejes en la sección. El círculo y el tubo de pared delgada no se ajustan a la regla. Sin embargo, se puede demostrar que la relación de Q/t en la fórmula general de cortante se reduce de forma continua a medida que el eje de interés se aleja del eje neutro, lo que reduce el esfuerzo cortante.

Perfil rectangular. La figura 8–17 muestra una sección transversal típica de espesor t y altura h. Los tres términos geométricos presentes en la fórmula general de cortante se pueden expresar en función de t y h.

$$I = \frac{th^3}{12}$$

$$t = t$$

$$Q = A_p\overline{y} \qquad \text{(para el área sobre el eje centroidal)}$$

$$Q = \frac{th}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{th^2}{8}$$

Si se introducen estos términos en la fórmula general de cortante se obtiene

$$\tau_{máx} = \frac{VQ}{It} = V \cdot \frac{th^2}{8} \cdot \frac{12}{th^3} \cdot \frac{1}{t} = \frac{3}{2}\frac{V}{th}$$

Pero como th es el área total de la sección,

Fórmula especial de cortante para rectángulos

$$\tau_{máx} = \frac{3V}{2A} \tag{8–14}$$

Se puede utilizar la ecuación (8–14) para calcular con exactitud el esfuerzo cortante máximo en el eje centroidal de una viga rectangular.

Observe que $\tau = V/A$ representa el esfuerzo cortante *promedio* en la sección. Por tanto, el esfuerzo cortante máximo en una sección rectangular es 1.5 veces más elevado que el promedio.

Problema de ejemplo 8–8

Calcule el esfuerzo cortante máximo que ocurriría en una sección transversal rectangular de una viga como la de la figura 8–17. La fuerza cortante es de 1000 lb, $t = 2.0$ in y $h = 8.0$ in.

Solución Con la ecuación (8–14) se obtiene

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{3V}{2A} = \frac{3(1000 \text{ lb})}{2(2 \text{ in})(8 \text{ in})} = 93.8 \text{ psi}$$

Perfil circular. La fórmula especial de cortante para el perfil circular se desarrolla de la misma manera que para el perfil rectangular. Las ecuaciones para Q, I y t están escritas en función de la variable de tamaño principal del perfil circular, su diámetro. Entonces, la fórmula general de cortante se simplifica (consulte la figura 8–18).

$$t = D$$

$$I = \frac{\pi D^4}{64}$$

$$Q = A_p\bar{y} \qquad \text{(para el semicírculo sobre el centroide)}$$

$$Q = \frac{\pi D^2}{8}\cdot\frac{2D}{3\pi} = \frac{D^3}{12}$$

Entonces el esfuerzo cortante máximo es

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{VQ}{It} = V \times \frac{D^3}{12} \times \frac{64}{\pi D^4} \times \frac{1}{D} = \frac{64V}{12\pi D^2}$$

Para refinar la ecuación, considere un factor de 4 en el numerador y luego observe que el área total de la sección circular es $A = \pi D^2/4$.

Fórmula especial de cortante para círculos

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{16(4)V}{12\pi D^2} = \frac{16V}{12A}$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{4V}{3A} \tag{8–15}$$

Esto demuestra que el esfuerzo cortante máximo es 1.33 veces más elevado que el promedio en la sección circular.

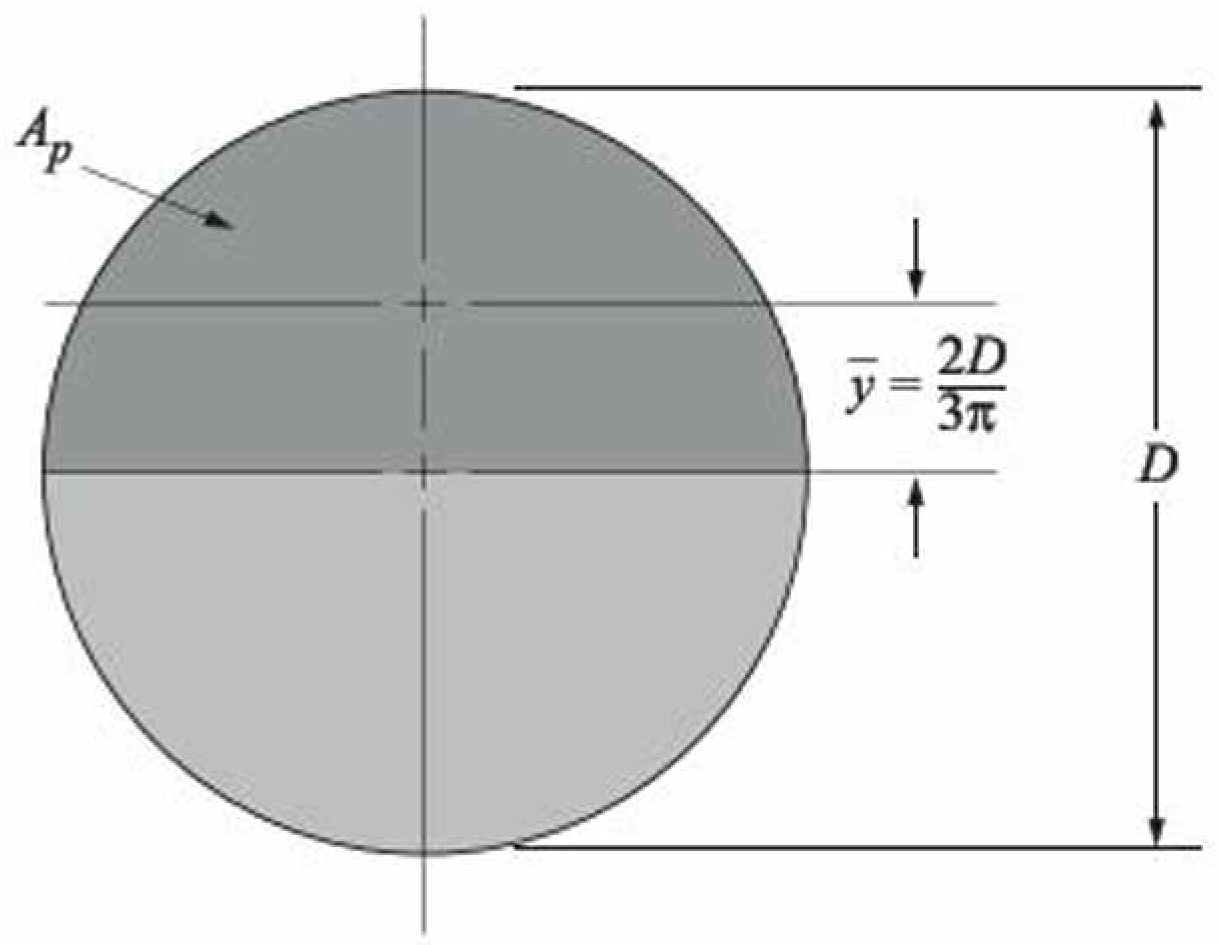


FIGURA 8–18
Perfil circular.

Problema de ejemplo 8–9

Calcule el esfuerzo cortante máximo que ocurriría en una flecha circular, de 50 mm de diámetro, si se somete a una fuerza cortante vertical de 110 kN.

Solución

La ecuación (8–15) da el esfuerzo cortante máximo en el diámetro horizontal de la flecha.

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{4V}{3A}$$

Pero $$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi(50\text{ mm})^2}{4} = 1963\text{ mm}^2$$

Entonces $$\tau_{\text{máx}} = \frac{4(110 \times 10^3\text{ N})}{3(1963\text{ mm}^2)} = 74.7\text{ MPa}$$

Perfil tubular hueco de pared delgada. Si se saca material del centro de una sección transversal circular, el valor local del esfuerzo cortante tiende a incrementarse, sobre todo cerca del diámetro donde ocurre el esfuerzo cortante máximo. Aunque aquí no se presenta el desarrollo completo, se observa que el esfuerzo cortante máximo en un tubo de pared delgada es aproximadamente dos veces el promedio. Es decir,

Fórmula especial de cortante para tubos de pared delgada

$$\tau_{\text{máx}} \approx 2\frac{V}{A} \tag{8–16}$$

donde A es el área de la sección transversal total del tubo.

Problema de ejemplo 8–10

Calcule el esfuerzo cortante máximo aproximado que ocurriría en un tubo de acero cédula 40 de 3 in si se utiliza como viga y se somete a una fuerza cortante de 6200 lb.

Solución

Se deberá utilizar la ecuación (8–16). En el apéndice A–12 se encontró que el área de la sección transversal del tubo de acero cédula 40 de 3 in es de 2.228 in². Entonces una estimación del esfuerzo cortante máximo que ocurre en el tubo cerca del diámetro horizontal, es

$$\tau_{\text{máx}} \approx 2\frac{V}{A} = \frac{2(6200\text{ lb})}{2.228\text{ in}^2} = 5566\text{ psi}$$

Perfiles de alma delgada. Los perfiles estructurales como las vigas W y S tienen almas relativamente delgadas. La distribución del esfuerzo cortante en vigas como ésas es por lo general como la que se muestra en la figura 8–19. El esfuerzo cortante máximo ocurre en el eje centroidal. Se reduce un poco en el resto del alma y luego drásticamente en los patines. Así, la mayor parte de la resistencia a la fuerza cortante vertical es proporcionada por el alma. Además, el esfuerzo cortante promedio en el alma sería un poco menor que el esfuerzo máximo. Por eso, la *fórmula de cortante en almas* se utiliza con frecuencia para obtener una estimación rápida del esfuerzo cortante en perfiles de alma delgada.

Fórmula de cortante en almas para perfiles de alma delgada

$$\tau_{\text{máx}} \approx \frac{V}{A_{\text{alma}}} = \frac{V}{th} \tag{8–17}$$

El espesor del alma es t. El procedimiento más simple sería utilizar h como la altura total de la viga. Esto produciría un esfuerzo cortante aproximadamente 15% menor que el esfuerzo cortante máximo en el eje centroidal de perfiles de viga representativos. Si se utiliza sólo

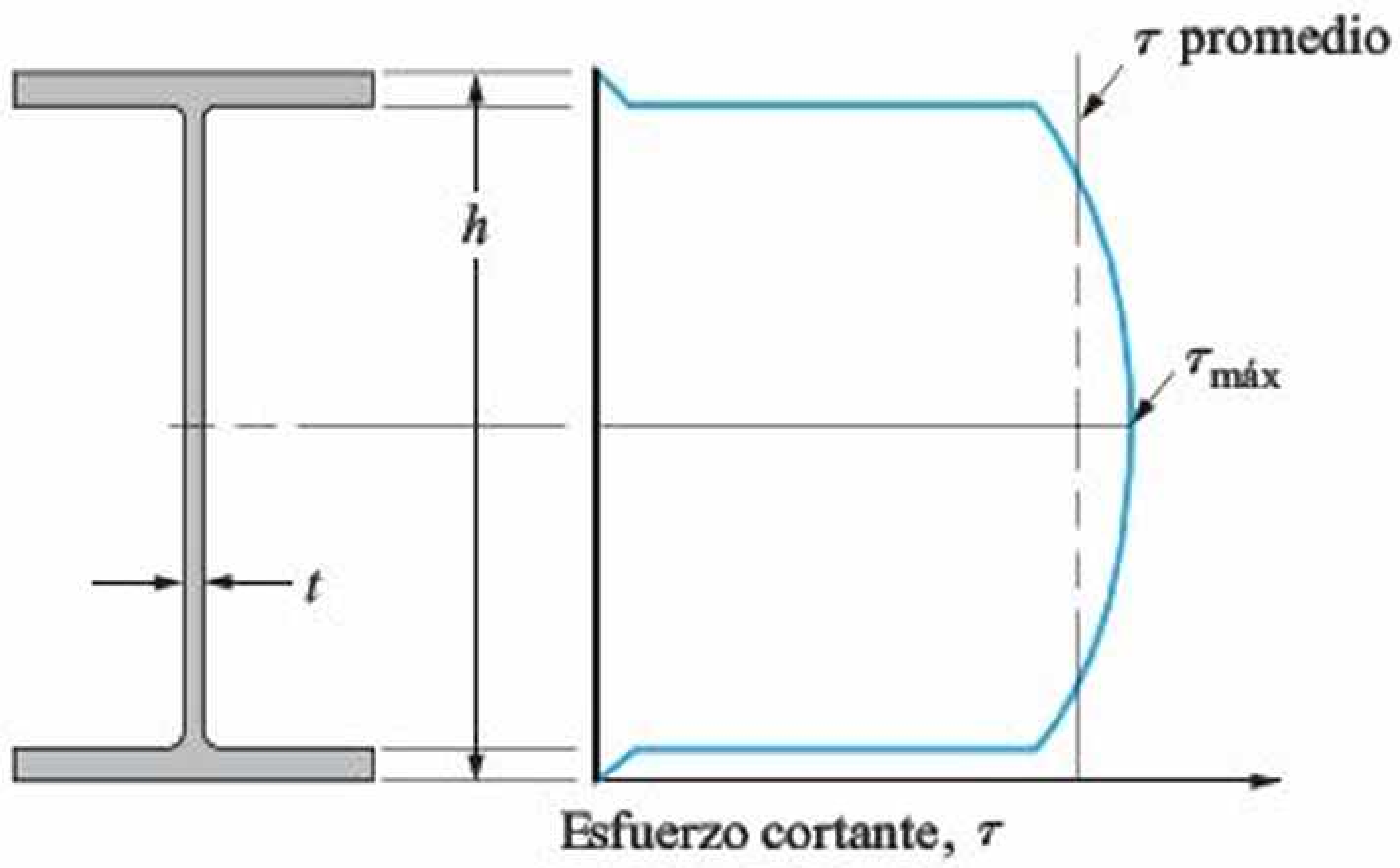


FIGURA 8–19 Distribución del esfuerzo cortante en un perfil de alma esbelta.

la altura entre los patines se tendría una mejor aproximación del esfuerzo cortante máximo, probablemente menos de 10% más bajo que el valor real. En problemas en los que se usa la fórmula de cortante en almas, utilizamos la altura total de la sección transversal a menos que se indique lo contrario.

En resumen, para perfiles de alma delgada, calcule el esfuerzo cortante con la fórmula de cortante en alma con la altura total de la viga como h y el espesor real como t. Entonces, para obtener una estimación más precisa del esfuerzo cortante máximo, incremente el valor en aproximadamente 15%.

Problema de ejemplo 8–11 Un malacate iza (levanta) 425 kg de concreto. Calcule el peso del concreto que equivale a la fuerza ejercida en el malacate por el concreto.

Solución En el apéndice A–7 para vigas W se encontró que el espesor del alma es de 0.220 in y que el peralte (altura) total de la viga es de 12.00 in. Por consiguiente, con la ecuación (8–17), se tiene

$$t_{\text{máx}} \approx \frac{V}{th} = \frac{25\,000\text{ lb}}{(0.220\text{ in})(12.00\text{ in})} = 9470\text{ psi}$$

8–7 ESFUERZO CORTANTE DE DISEÑO

El esfuerzo cortante de diseño depende en gran medida del material del cual se va a hacer la viga y de la forma del miembro sometido al esfuerzo cortante. En este libro se presenta una cantidad limitada de datos, y el lector haría bien en consultar referencias más completas, como las que aparecen al final del capítulo.

Acero. Para esfuerzo cortante en las almas de perfiles de acero laminado, el AISC en general recomienda

$$\tau_d = 0.40\, s_y \tag{8–18}$$

Sin embargo, existen exposiciones más extensas en las referencias 3–5 para casos especiales de vigas cortas; vigas con almas delgadas inusualmente altas y de vigas con rigidizadores aplicados en las direcciones vertical u horizontal. Se recomienda que se consideren con cuidado estos factores. Consulte también las referencias 11 y 13.

Aluminio. La *Aluminum Association* también proporciona datos extensos con respecto a varias condiciones de carga y geometría de vigas. Por ejemplo, la referencia 1 da valores reales

de esfuerzo cortante permisible de las aleaciones de aluminio más conocidas para varias aplicaciones. No es práctico resumir tales datos en este libro.

Como recomendación general utilizaremos el esfuerzo cortante de diseño para metales dúctiles sometidos a cargas estáticas, como se indica en el capítulo 3, la tabla 3–8 y el apéndice A–21. Es decir, se sugiere un factor de diseño de $N = 2$ basado en la resistencia a la cedencia del material sometido a cortante, s_{ys}. Además, una aproximación del valor de s_{ys} es la mitad de la resistencia a la cedencia a tensión, s_y. En resumen,

$$\tau_d = \frac{s_{ys}}{N} = \frac{0.5s_y}{N} = \frac{s_y}{2N} \tag{8–19}$$

Con $N = 2$,

$$\tau_d = \frac{s_y}{4} = 0.25\,s_y$$

Madera. Para vigas de madera, el apéndice A–19 da valores de esfuerzo cortante horizontal permisible. Observe que los valores son bastante bajos, por lo general de menos de 100 psi (0.69 MPa). La falla por cortante con frecuencia es el factor limitante para vigas de madera. Consulte también las referencias 9 y 14.

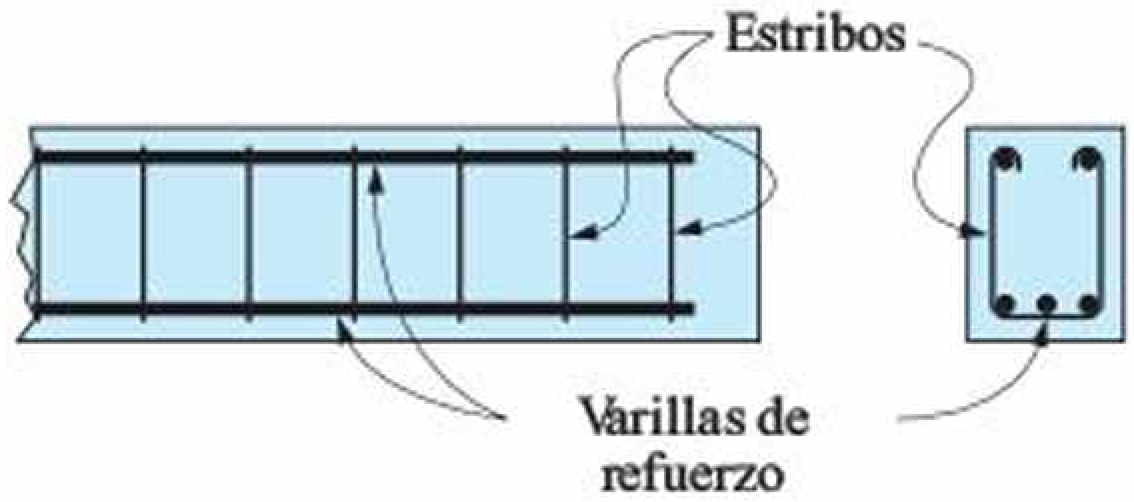
Concreto. La resistencia al cortante del concreto es bastante baja en comparación con la de la mayoría de los metales. El American Concrete Institute (ACI) especifica que la resistencia máxima al cortante es $2\sqrt{f'_c}$ donde f'_c es la resistencia nominal del concreto, la por lo general varía de 2000 psi a 7000 psi. Entonces la resistencia al cortante varía de 89 psi a 167 psi.

Además, siempre que se produce un esfuerzo cortante en concreto, aparece un esfuerzo de tensión correspondiente. Como se explica en el capítulo 10, por ejemplo, cuando existe cortante puro en un elemento, también existe un esfuerzo de tensión de igual magnitud en un plano a 45 grados con respecto a la orientación original del elemento. Con la resistencia a la tensión extremadamente baja del concreto, las fallas por tensión con frecuencia ocurren en zonas de esfuerzo cortante elevado y se propagan a un ángulo de 45 grados. Para contrarrestar este modo de falla, el diseño de vigas de concreto siempre incluye refuerzo de acero contra cortante, por lo general en la forma de estribos colocados perpendiculares a las varillas de refuerzo longitudinales requeridas para resistencia a la flexión. Vea la figura 8–20. En ocasiones también se utilizan mallas de alambre soldadas o varillas de acero dobladas a un ángulo de 30° a 60°. Consulte las referencias 2 y 12 en cuanto a procedimientos de diseño para determinar el tamaño, la colocación y la separación de las varillas.

Mampostería. El diseño de vigas que utilizan mampostería de ladrillo, piedra y bloques de concreto también debe tener en cuenta los esfuerzos cortantes. Asimismo, los muros de carga y muros de cortante sometidos a cargas flexionantes producidas por el viento y por fuerzas transferidas por los pisos, techos o vigas apoyadas se deben diseñar para que resistan el cortante. Las fallas a menudo ocurren en la juntas de mortero a lo largo de una diagonal en el muro, lo que crea un notable patrón en zigzag. Consulte la referencia 10.

Materiales compuestos. El diseño, la prueba y el análisis de estructuras hechas de materiales compuestos se analizan en las referencias 6–8. Los compuestos hechos de estructuras laminadas descritos en el capítulo 2 a menudo fallan por el mecanismo de *cortante interlami-*

FIGURA 8–20



nar, donde los esfuerzos cortantes internos hacen que se separen las capas en el interior de la estructura. La referencia 7 describe un método de prueba para evaluar la tendencia de una viga a fallar de esta manera. En otras formas de materiales compuestos, tales como "pultrusions", compuestos laminados moldeados (SMC, *sheet molding compounds*), aquellos reforzados con fibras largas o cortas, o los que emplean telas tejidas o telas de primera torsión, la falla puede ocurrir cuando las fibras de refuerzo individuales se desprenden de la matriz. Las referencias 6 y 8 exponen métodos de diseñar componentes estructurales para que soporten esfuerzos cortantes.

8–8 FLUJO DE CORTANTE

Las secciones armadas utilizadas como vigas, como las de las figuras 8–21 y 8–22, deben analizarse para determinar el tamaño y separación adecuados de los sujetadores. La exposición en las secciones precedentes demostró que existen fuerzas cortantes horizontales en los planos unidos por clavos, pernos y remaches. De este modo, los sujetadores se ven sometidos a cortante. Por lo general, el tamaño y el material del sujetador permiten especificar una fuerza cortante permisible en cada uno. Luego se debe analizar la viga para determinar una separación adecuada de los sujetadores que garantice que todas las partes de la viga actuarán como una sola.

El término *flujo de cortante* es útil para analizar secciones armadas. Llamado q, el flujo de cortante se calcula multiplicando el esfuerzo cortante que actúa en una sección por el espesor de dicha sección. Es decir,

$$q = \tau t \tag{8–20}$$

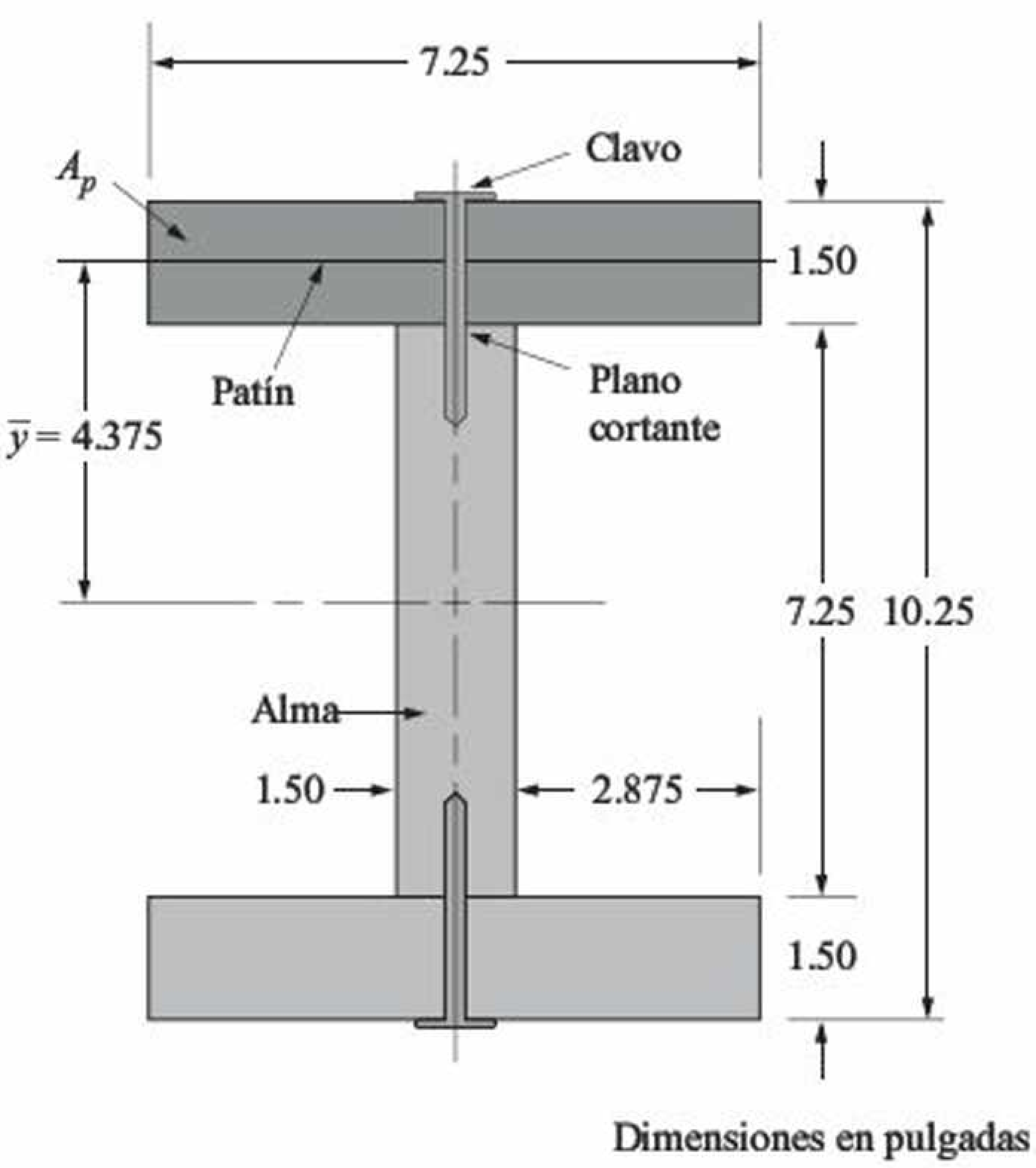


FIGURA 8–21 Perfil de viga del problema de ejemplo 8-12.

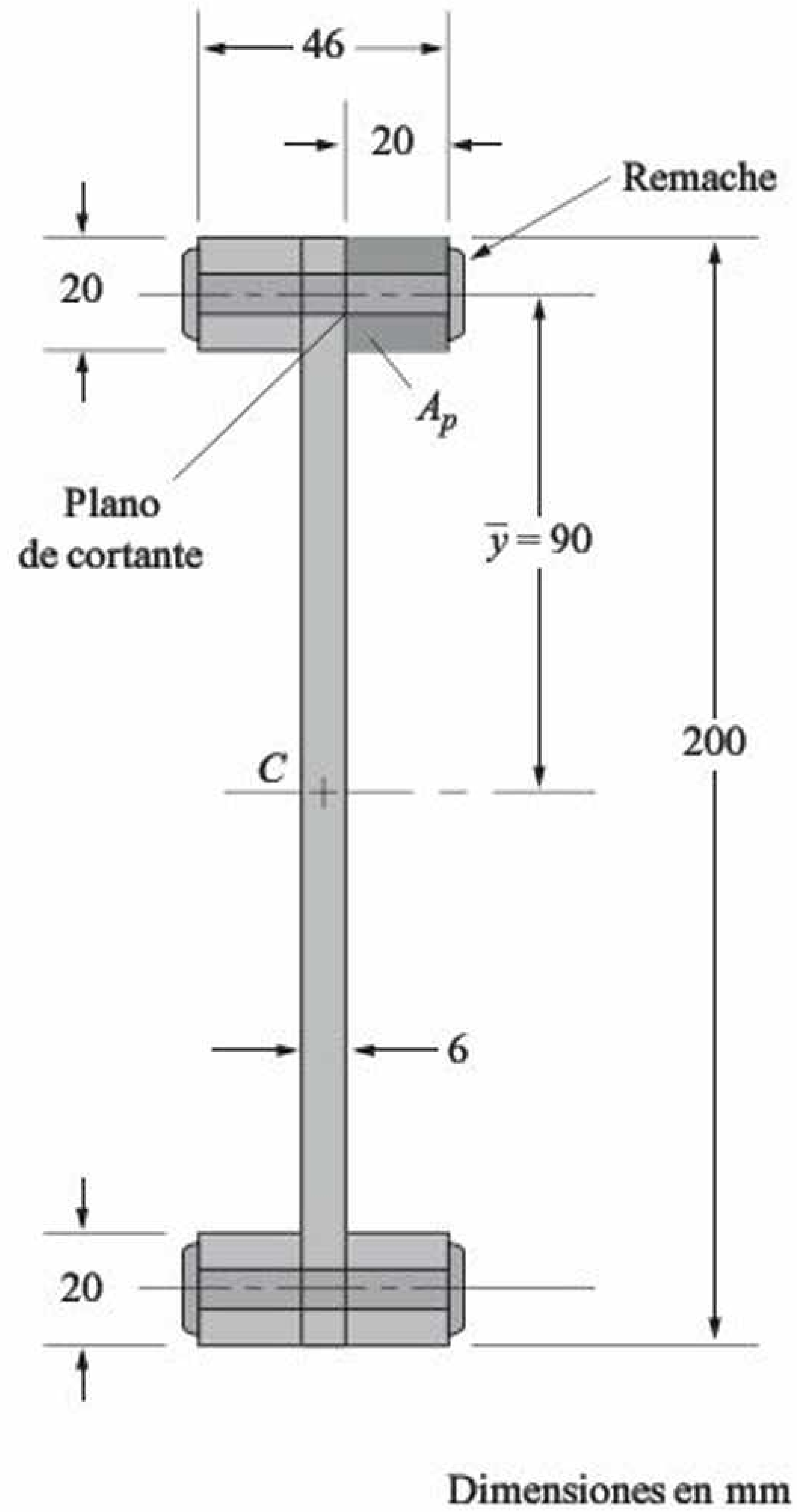


FIGURA 8–22 Perfil de viga armado del problema de ejemplo 8-13.

Pero conforme a la fórmula de cortante,

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

Entonces

$$q = \tau t = \frac{VQ}{I} \tag{8–21}$$

Las unidades de q son *fuerza por unidad de longitud*, tales como N/m, N/mm o lb/in. El flujo de cortante mide qué tanta fuerza debe ser resistida en una sección particular por unidad de longitud. Si se conoce la resistencia a la fuerza cortante de un sujetador, entonces se puede determinar una separación segura para los sujetadores.

Por ejemplo, si un estilo particular de clavo es capaz de resistir con seguridad 150 lb de fuerza cortante, definiremos

$$F_{sd} = 150 \text{ lb}$$

Entonces, si en un lugar particular de una viga fabricada con tablas clavadas una con otra con flujo de cortante calculado como $q = 28.5$ lb/in, la separación máxima, $s_{máx}$ de los clavos es

$$s_{máx} = \frac{F_{sd}}{q} = \frac{150 \text{ lb}}{28.5 \text{ lb/in}} = 5.26 \text{ in} \tag{8–22}$$

Instrucciones para especificar la separación de sujetadores

El objetivo es especificar una separación adecuada de los sujetadores que mantienen unidas las partes de un perfil de viga compuesto, al mismo tiempo que resisten una fuerza cortante vertical aplicada.

Datos requeridos: Fuerza cortante aplicada, V.
Geometría de la sección transversal de la viga.
Fuerza cortante permisible en cada sujetador, F_{sd}.

1. Calcule el momento de inercia, I, de toda la sección transversal con respecto a su eje centroidal.
2. Calcule el valor del primer momento del área, Q, de la parte de la sección transversal afuera de los sujetadores. Use $Q = A_p\overline{y}$ como se define en la sección 8–4.
3. Calcule el flujo de cortante, q, con

$$q = \frac{VQ}{I}$$

   El resultado será la cantidad de fuerza cortante que debe ser resistida por unidad de longitud a lo largo de la viga.
4. Calcule la separación máxima permisible de los sujetadores, $s_{máx}$, con

$$S_{máx} = F_{sd}/q$$

5. Especifique una separación conveniente entre los sujetadores, menor que la máxima permisible.

Problema de ejemplo 8–12

Determine la separación adecuada de los clavos utilizados para afianzar las tablas patín al alma de la viga I armada mostrada en la figura 8–21. Todas las tablas son perfiles de madera estándar de 2×8. Cada uno de los clavos que se van a utilizar es capaz de de resistir con seguridad una fuerza cortante de 250 lb. La carga a la viga se muestra en la figura 8–15 con $P = 500$ lb.

Solución

Objetivo: Especificar una separación adecuada para los clavos.

Datos: La carga mostrada en la figura 8–15, $P = 500$ lb, $F_{sd} = 250$ lb/clavo. El perfil y las dimensiones que aparecen en la figura 8–21.

Análisis: Use las *Instrucciones para especificar la separación de sujetadores*.

Resultados: La fuerza cortante máxima en la viga es de 500 lb y ocurre entre cada apoyo y las cargas aplicadas.

Paso 1. El momento de inercia se calcula restando los dos rectángulos de espacio abierto a ambos lados del alma del rectángulo completo que circunda el perfil I.

$$I = \frac{7.25(10.25)^3}{12} - \frac{2(2.875)(7.25)^3}{12} = 468.0 \text{ in}^4$$

Paso 2. En el lugar donde los clavos unen las tablas, Q se evalúa para el área del patín superior (o inferior).

$$Q = A_p\bar{y} = (1.5 \text{ in})(7.25 \text{ in})(4.375 \text{ in}) = 47.6 \text{ in}^3$$

Paso 3. Entonces el flujo de cortante es

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{(500 \text{ lb})(47.6 \text{ in}^3)}{468 \text{ in}^4} = 50.9 \text{ lb/in}$$

Esto significa que la fuerza de 50.9 lb debe ser resistida a lo largo de cada pulgada de longitud de la viga en el punto entre el patín y el alma.

Paso 4. Como cada clavo es capaz de soportar 250 lb, la separación máxima es

$$S_{\text{máx}} = \frac{F_{sd}}{q} = \frac{250 \text{ lb}}{50.9 \text{ lb/in}} = 4.92 \text{ in}$$

Paso 5. Una separación de $s = 4.5$ sería razonable.

El principio de flujo de cortante también se aplica a secciones como la mostrada en la figura 8–22, donde una sección de viga se fabricó con barras cuadradas remachadas en una placa vertical para formar un perfil I. El flujo de cortante ocurre del alma hacia los patines. Así cuando se evalúa el momento estático Q, se considera que el área parcial, A_p, es el área de uno de los patines.

Problema de ejemplo 8–13

Una viga se fabrica remachando barras de aluminio a una placa vertical, como se muestra en la figura 8–22. Las barras son cuadradas de 20 mm por lado. La placa es de 6 mm de espesor y 200 mm de altura. Los remaches pueden soportar 800 N de fuerza cortante a través de una sección transversal. Determine la separación requerida de los remaches cuando se aplica una fuerza cortante de 5 kN.

Solución Objetivo Especificar una separación adecuada de los remaches.

Datos Fuerza cortante = 5 kN, $F_{sd} = 800$ N/remache.

El perfil y las dimensiones que aparecen en la figura 8–22.

Análisis Use las *Instrucciones para especificar la separación de los sujetadores*.

Resultados ***Paso 1.*** I es el momento de inercia de toda la sección transversal,

$$I = \frac{6(200)^3}{12} + 4\left[\frac{20^4}{12} + (20)(20)(90)^2\right]$$

$$I = 17.0 \times 10^6\,\text{mm}^4$$

Paso 2. Q es el producto de $A_p\bar{y}$ correspondiente al área *afuera* de la sección donde se tiene que calcular el cortante. En este caso, el área parcial A_p es el área cuadrada de 20 mm por lado *al lado* del alma. Para la viga de la figura 8–22,

$$Q = A_p\bar{y} \text{ (para una barra cuadrada)}$$

$$Q = (20)(20)(90)\,\text{mm}^3 = 36\,000\,\text{mm}^3$$

Paso 3. Entonces con $V = 5$ kN,

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{(5 \times 10^3\,\text{N})(36 \times 10^3\,\text{mm}^3)}{17.0 \times 10^6\,\text{mm}^4} = 10.6\,\text{N/mm}$$

Por consiguiente, una fuerza cortante de 10.6 N tiene que ser resistida por cada milímetro de longitud de la viga.

Paso 4. Como cada remache es capaz de soportar 800 N de fuerza cortante, la separación máxima es

$$S_{\text{máx}} = \frac{F_{sd}}{q} = \frac{800\,\text{N}}{10.6\,\text{N/mm}} = 75.5\,\text{mm}$$

Paso 5. Especifique una separación de $s = 75$ mm.

REFERENCIAS

1. Aluminum Association, *Aluminum Design Manual*, Washington, D.C., 2005.
2. American Concrete Institute, *2006 Manual of Concrete Practice*, American Concrete Institute, Farmington Hills, MI, 2006.
3. American Institute of Steel Construction, *Specification for Structural* Buildings, AISC, Chicago, IL, 2005.
4. American Institute of Steel Construction, *Manual of Steel Construction: Load and Resistance Factor Design*, 3ª ed., AISC, Chicago, IL, 2001.
5. American Institute of Steel Construction, *Manual of Steel Construction: Allowable Stress Design*, 9ª ed., AISC, Chicago, IL, 1989.
6. ASM International, *ASM Handbook, Volume 21: Composites*, Materials Park, OH, 2001.
7. ASTM International, *Standard D2344–Standard Test Method for Short–Beam Strength of Polymer Matriz Composite Materials and Their Laminates*, West Comshohocken, PA, ASTM International, 2006.

8. ASTM International, *The Composite Materials Handbook–MIL. 17.* West Comshohocken, PA, ASTM International, 2002.
9. Halperin, D.A. y T.G. Bible, *Principles of Timber Design for Architects and Builders*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1994.
10. The Masonry Society, *Masonry Designer's Guide*, 4ª ed., The Masonry Society, Boulder, CO, 2003.
11. McCormac, J.C. y J. Nelson, *Structural Steel Design–LRFD Method*, 4ª ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2007.
12. Mehta, P.K. y P.J.M. Monteiro, *Concrete*, 3ª ed., McGraw–Hill, Nueva York, 2006.
13. Speigel, L. y G.F. Limbrunner, *Applied Structural Steel Design*, 4ª ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 2001.
14. U.S Department of Agriculture Forest Products Laboratory, *Wood–Handbook–Wood as an Engineering Material*, Forest Products Laboratory, Madison, WI, 1999.

PROBLEMAS

Fórmula general de cortante

En los problemas 8–1 a 8–20, calcule el esfuerzo cortante en el eje neutro horizontal que tiene la sección transversal mostrada en la figura con la fuerza cortante dada. Use la fórmula general de cortante.

8–1.M Use el perfil rectangular de 50 mm de ancho y 200 mm de altura, $V = 7500$ N.

8–2.M Use el perfil rectangular de 38 mm de ancho y 180 mm de altura, $V = 5000$ N.

8–3.E Use el perfil rectangular de 1.5 in de ancho y 7.25 in de altura, $V = 12\,500$ lb.

8–4.E Use el perfil rectangular de 3.5 in de ancho y 11.25 in de altura, $V = 20\,000$ lb.

8–5.M Use el perfil circular de 50 mm de diámetro, $V = 4500$ N.

8–6.M Use el perfil circular de 38 mm de diámetro, $V = 2500$ N.

8–7.E Use el perfil circular de 2.00 in de diámetro, $V = 7500$ lb.

8–8.E Use el perfil circular de 0.63 in de diámetro, $V = 850$ lb.

8–9.E Use el perfil mostrado en la figura P8–9, $V = 1500$ lb.

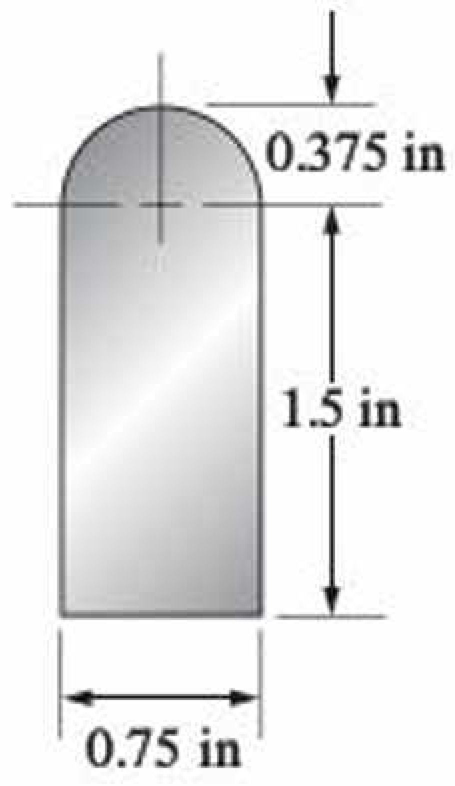


FIGURA P8–9

8–10.E Use el perfil mostrado en la figura P8–10, $V = 850$ lb.

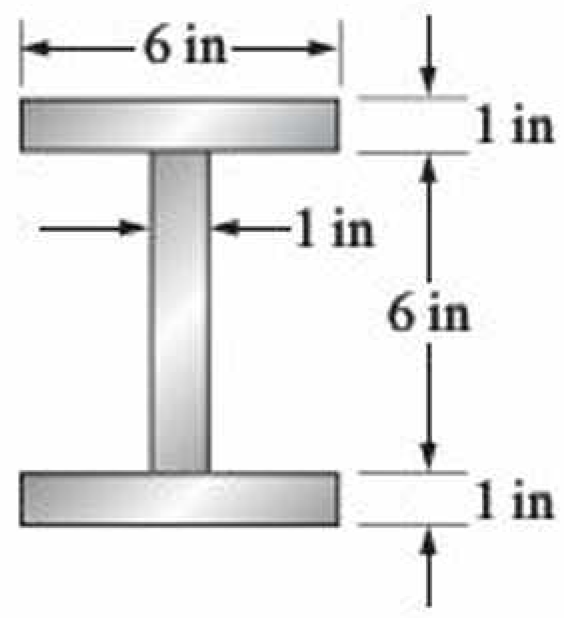


FIGURA P8–10

8–11.E. Use el perfil mostrado en la figura P8–11, $V = 850$ lb.

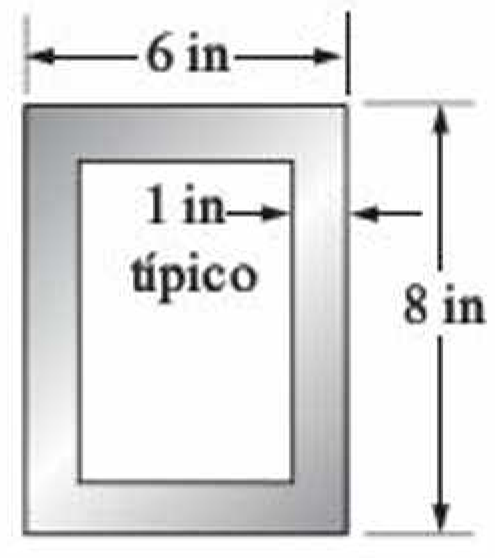


FIGURA P8–11

8–12.M Use el perfil mostrado en la figura P8–12, $V = 112$ kN.

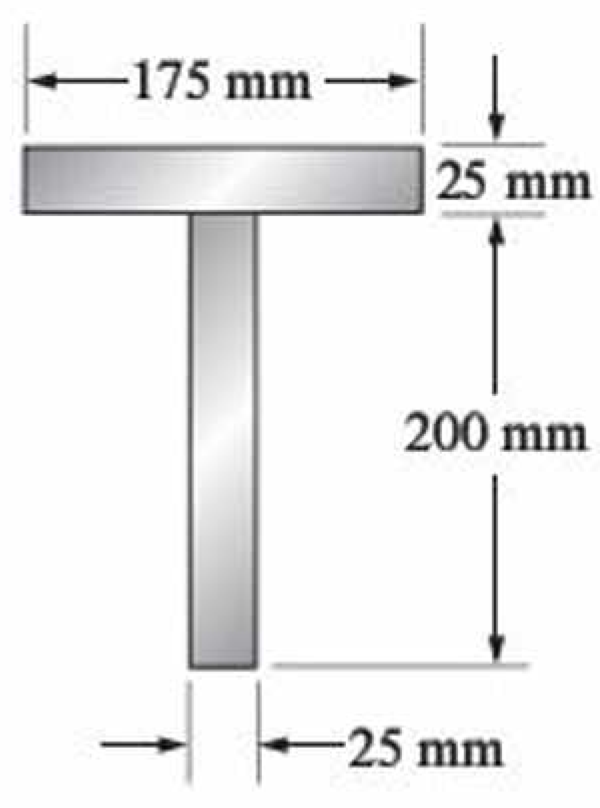


FIGURA P8–12

8–13.M Use el perfil mostrado en la figura P8–13, $V = 71.2$ kN.

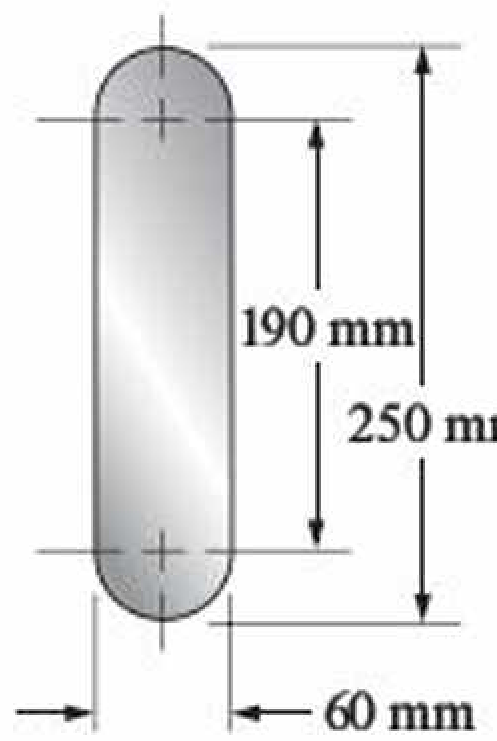


FIGURA P8–13

8–14.M Use el perfil mostrado en la figura P8–14, $V = 1780$ N.

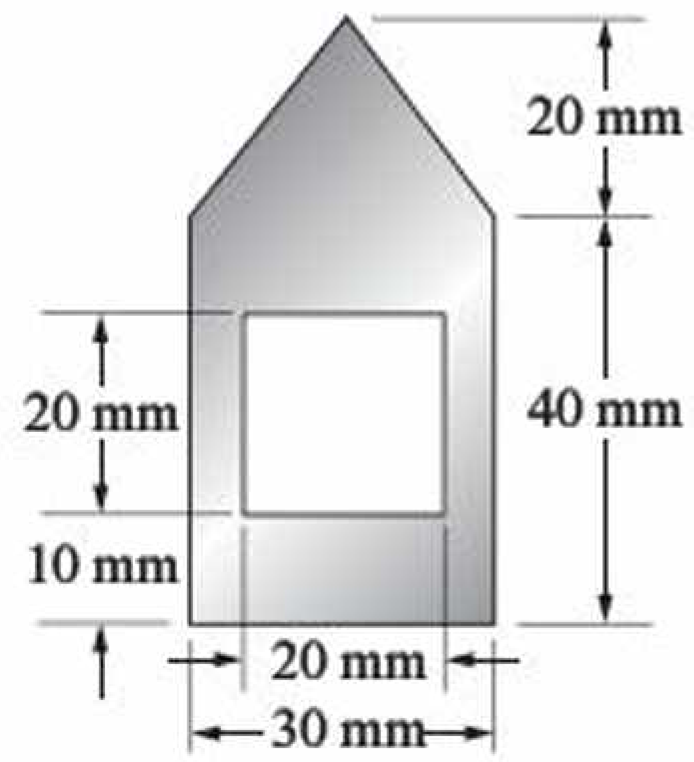


FIGURA P8–14

8–15.M Use el perfil mostrado en la figura P8–15, $V = 675$ N.

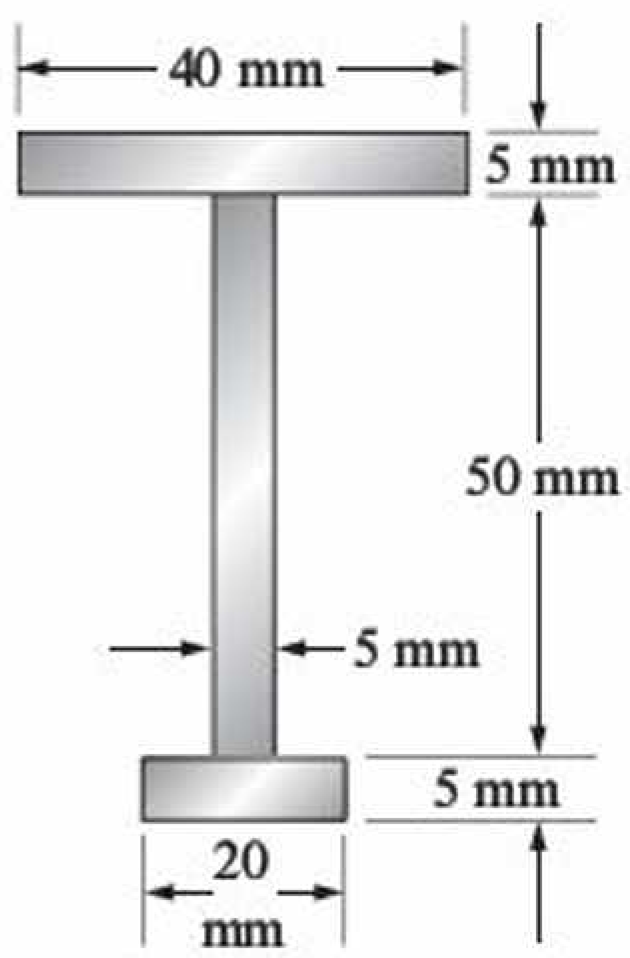


FIGURA P8–15

8–16.M Use el perfil mostrado en la figura P8–16, $V = 2.5$ kN.

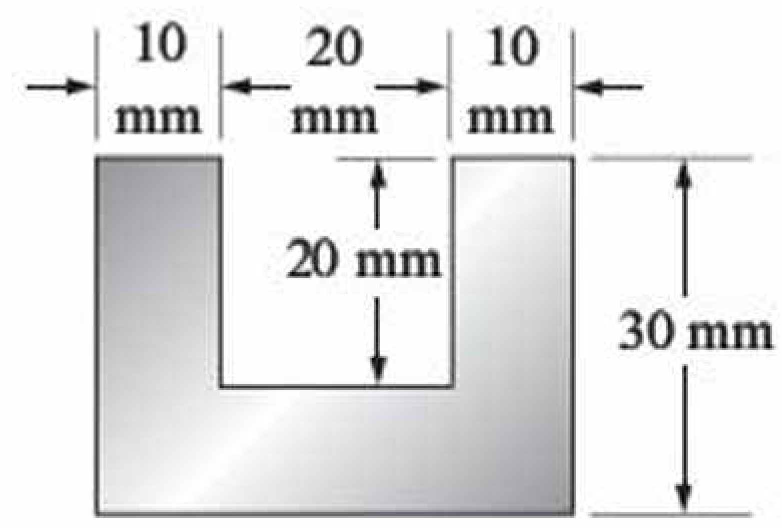


FIGURA P8–16

8–17.M Use el perfil mostrado en la figura P8–17, $V = 10.5$ kN.

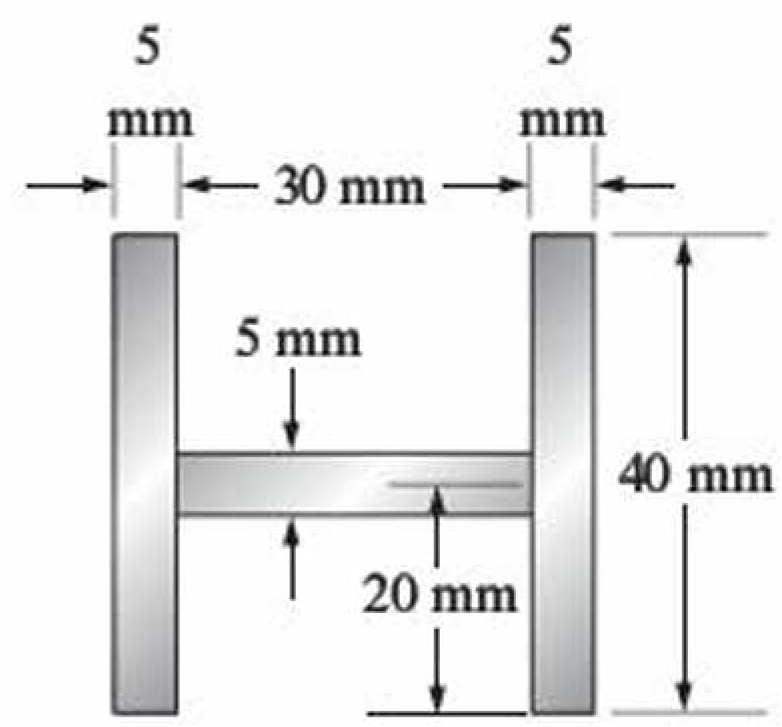


FIGURA P8–17

8–18.E Use el perfil mostrado en la figura P8–18, $V = 1200$ lb.

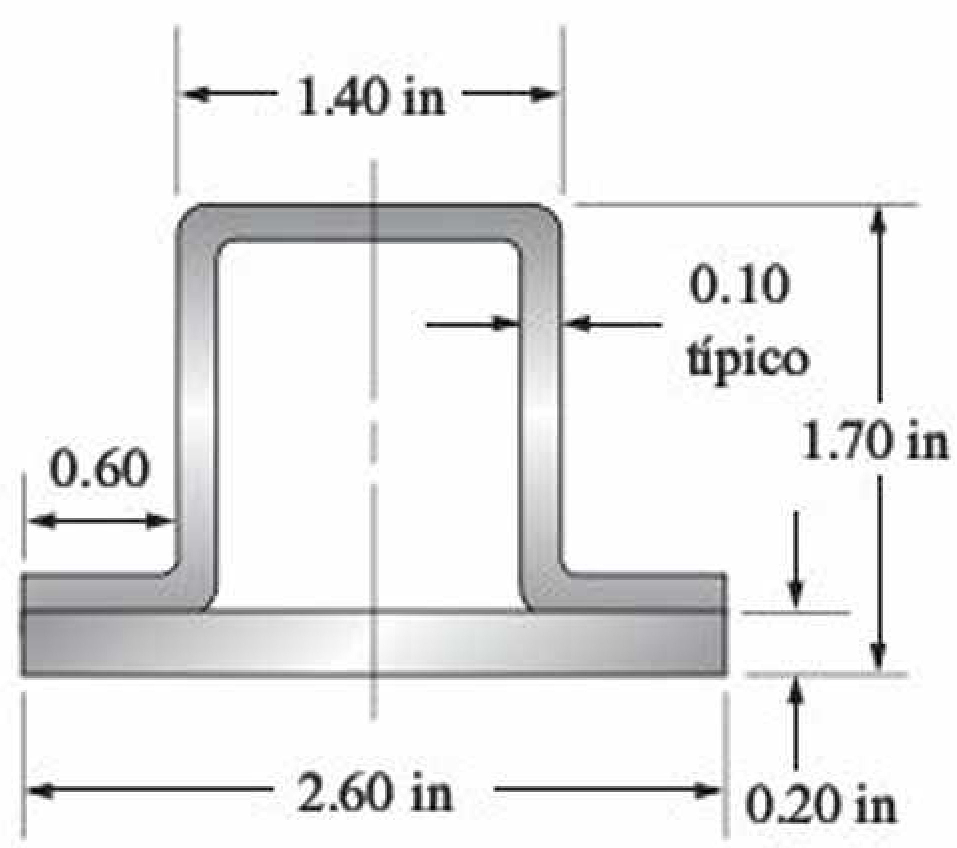


FIGURA P8–18

8–19.E Use el perfil mostrado en la figura P8–19, $V = 775$ lb.

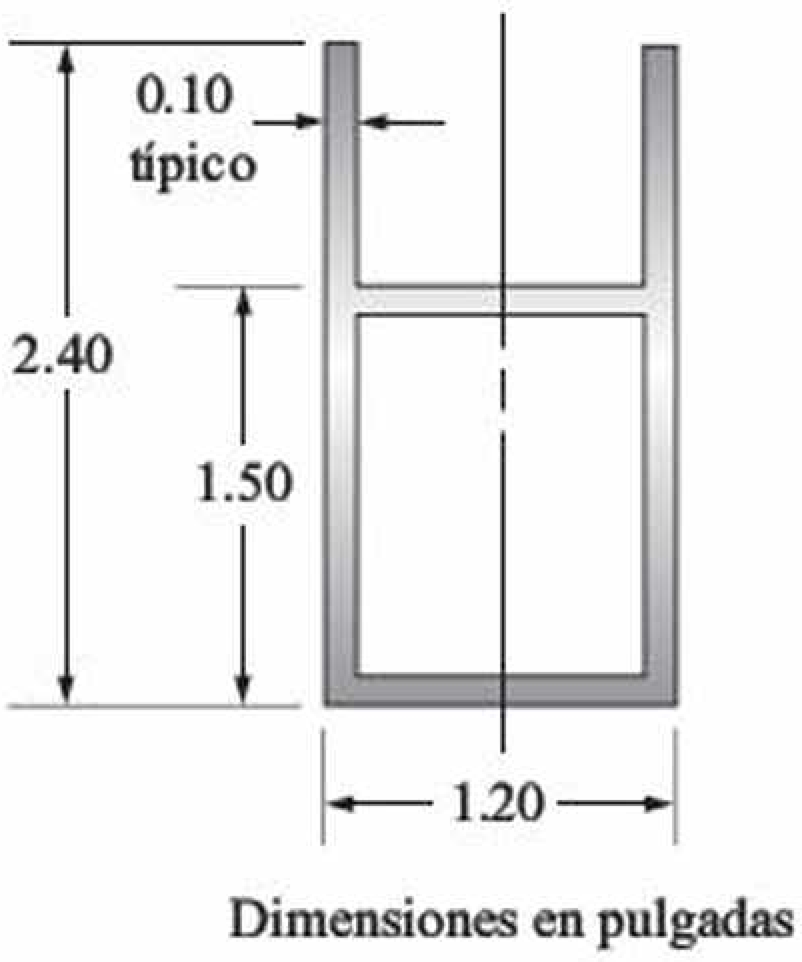


FIGURA P8–19

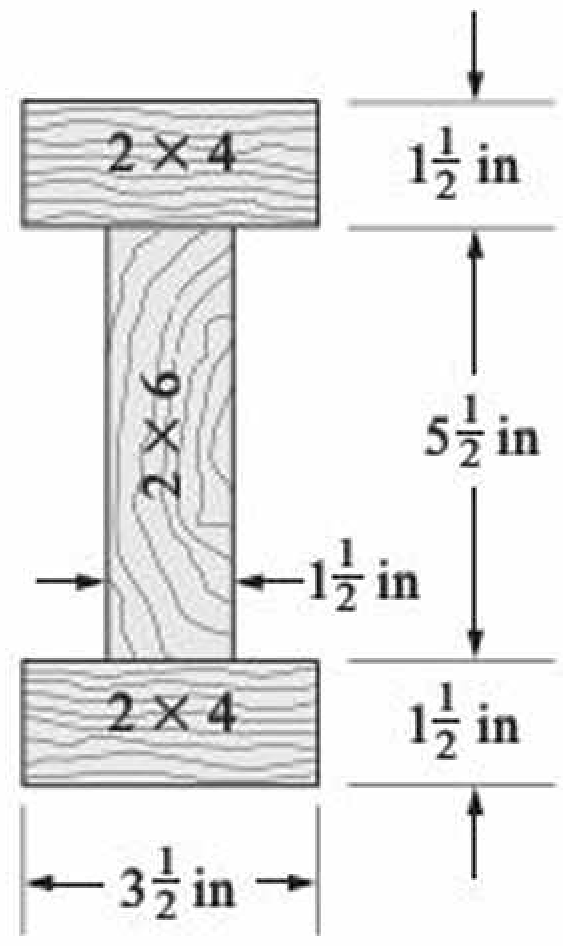


FIGURA P8–27

8–20.E Use el perfil mostrado en la figura P8–20, $V = 2500$ lb.

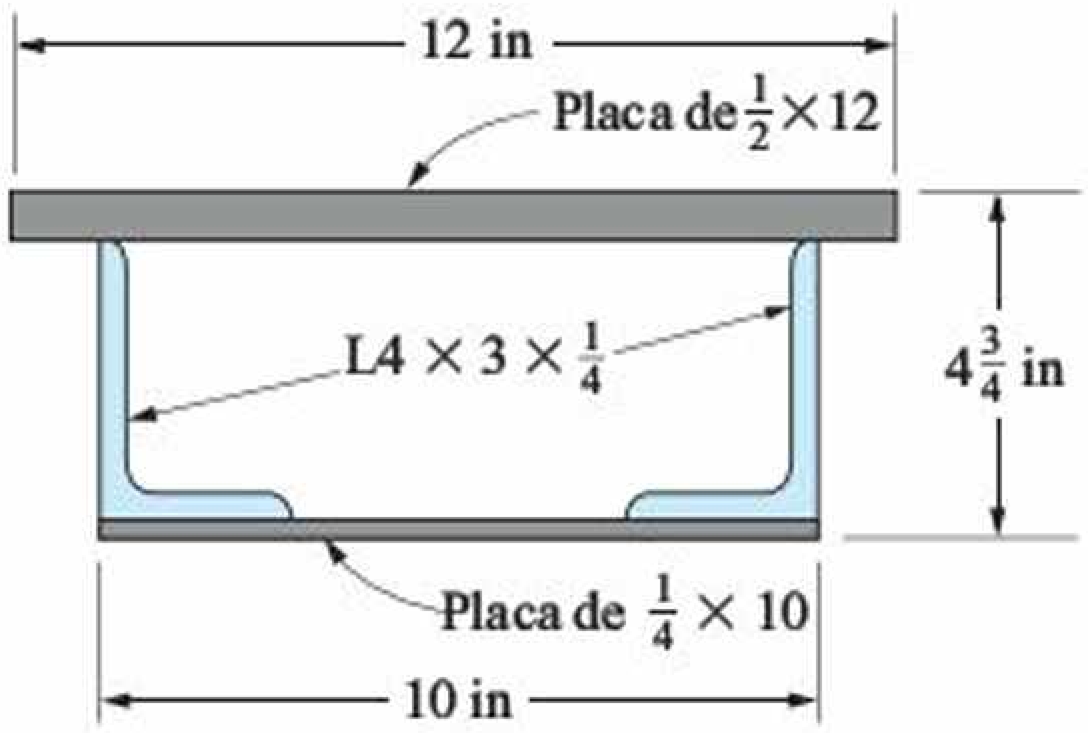


FIGURA P8–20

En los problemas 8–21 a 8–30, suponga que el perfil indicado es la sección transversal de una viga de madera cuyo esfuerzo cortante permisible es de 70 psi, la cual es de pino del sur grado 2 que aparece en el apéndice A–19. Calcule la fuerza cortante máxima permisible para cada perfil. Use la fórmula general de cortante.

8–21.E Use una viga de madera estándar de 2 × 4 con la dimensión larga en posición vertical.

8–22.E Use una viga de madera estándar de 2 × 4 con la dimensión larga en posición horizontal.

8–23.E Use una viga de madera estándar de 2 × 12 con la dimensión larga en posición vertical.

8–24.E Use una viga de madera estándar de 2 × 12 con la dimensión larga en posición horizontal.

8–25.E Use una viga de madera estándar de 10 × 12 con la dimensión larga en posición vertical.

8–26.E Use una viga de madera estándar de 10 × 12 con la dimensión larga en posición horizontal.

8–27.E Use el perfil mostrado en la figura P8–27.

8–28.E Use el perfil mostrado en la figura P8–28.

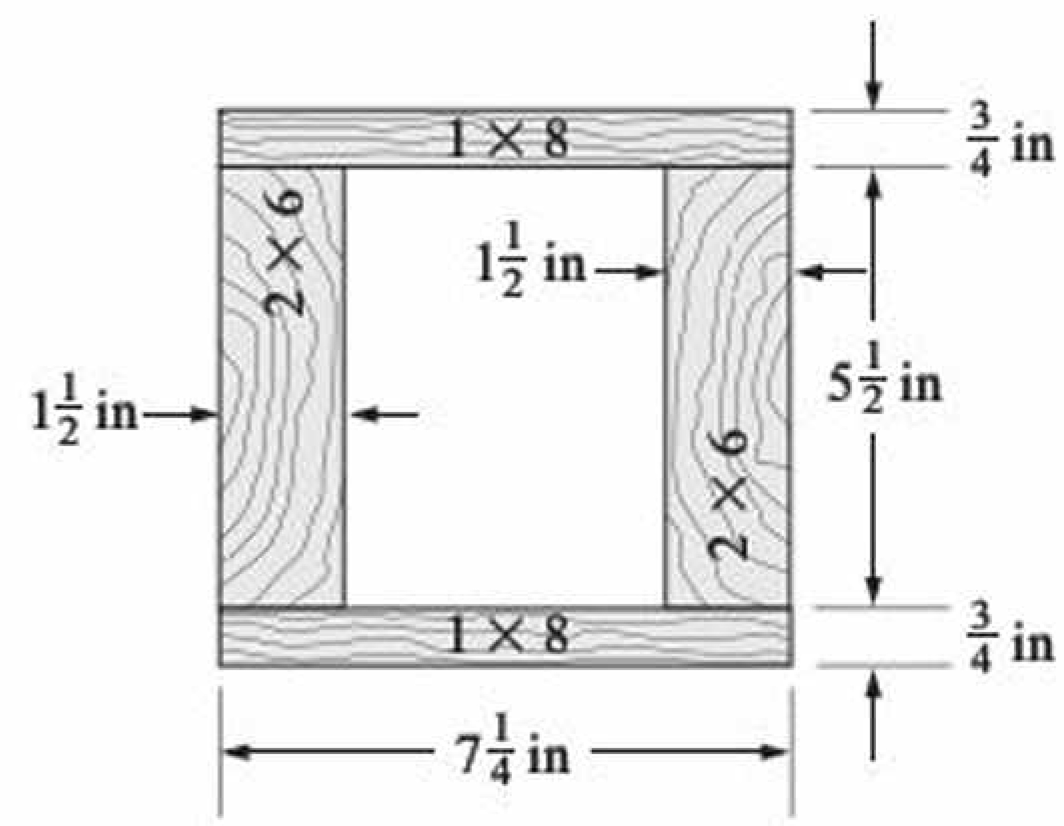


FIGURA P8–28

8–29.E Use el perfil mostrado en la figura P8–29.

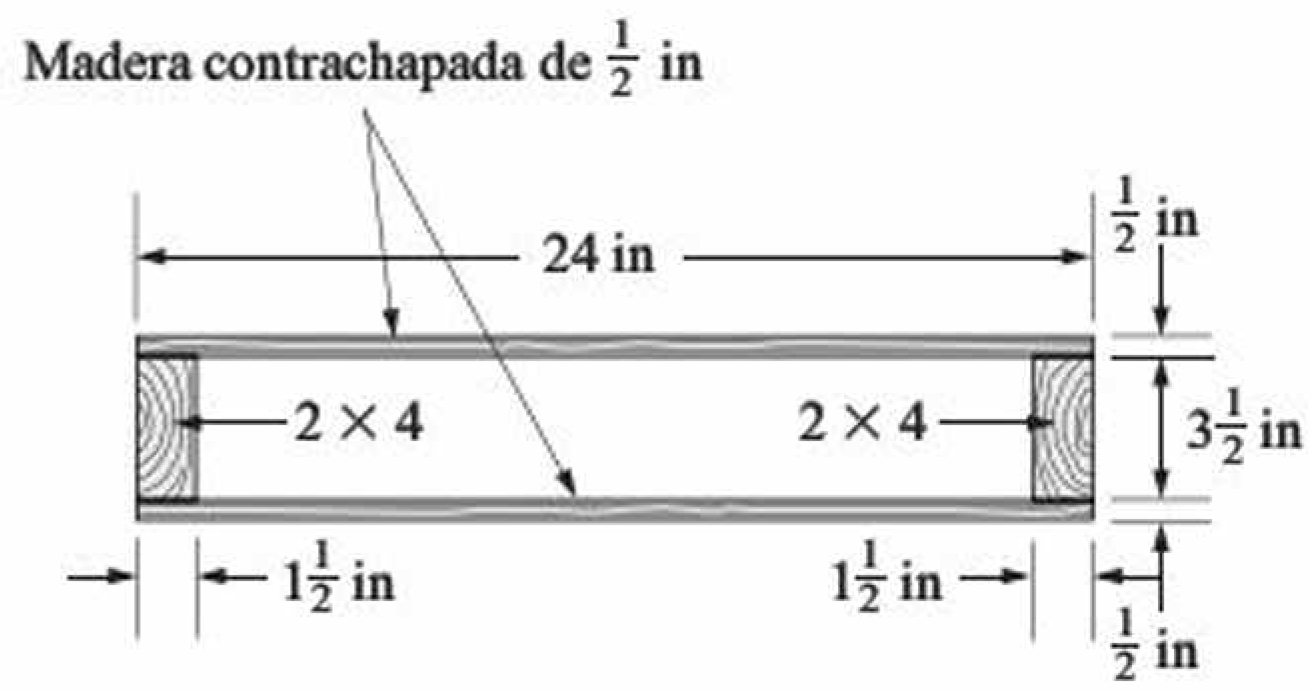


FIGURA P8–29

8–30.E Use el perfil mostrado en la figura P8–30.

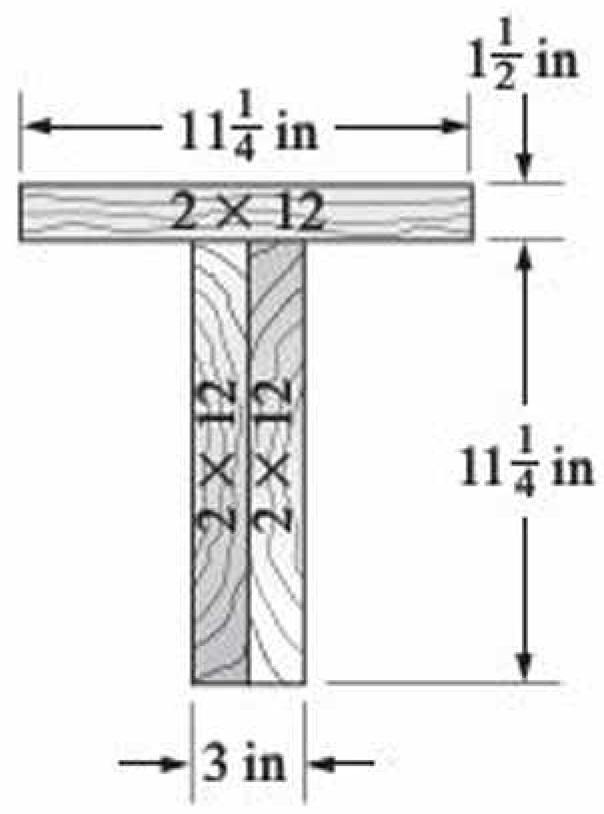


FIGURA P8–30

8–31.E Para la viga I mostrada en la figura P8–31, calcule el esfuerzo cortante en ejes horizontales separados 0.50 in entre sí entre el extremo inferior y el superior. En los extremos del alma donde se unen a los patines, calcule el esfuerzo tanto en el alma como en el patín. Use una fuerza cortante de 500 lb. Luego grafique los resultados.

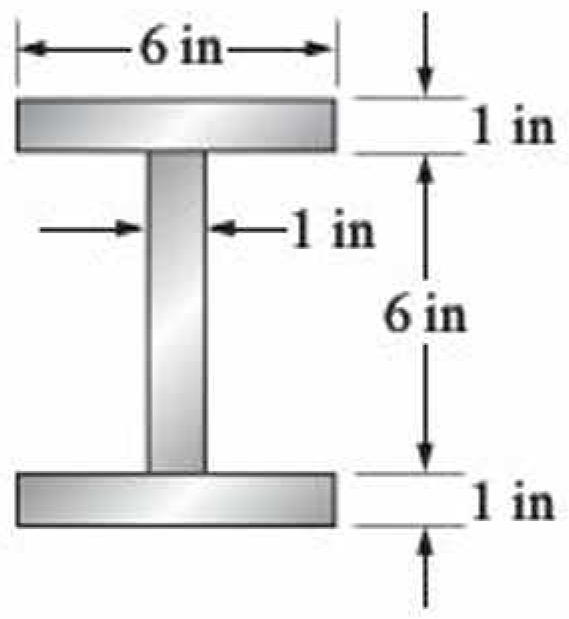


FIGURA P8–31

8–32.E Para una viga que tiene la sección transversal tubular rectangular mostrada en la figura P8–32, calcule el esfuerzo cortante en ejes horizontales separados 0.50 in entre sí entre los extremos superior e inferior. En los extremos de los lados verticales donde se unen a los patines, calcule el esfuerzo tanto en el alma como en el patín. Use una fuerza cortante de 500 lb. Luego grafique los resultados.

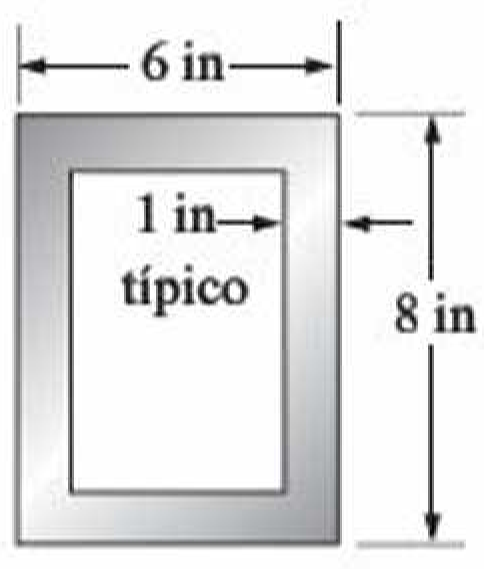


FIGURA P8–32

8–33.E Para una viga de acero W14 × 43 estándar, calcule el esfuerzo cortante en el eje neutro cuando se somete a una fuerza cortante de 33500 lb. Use la fórmula general de cortante. Ignore los filetes en la intersección del alma con los patines.

8–34.E En las mismas condiciones del problema 8–33, calcule el esfuerzo cortante en varios ejes y grafique la variación del esfuerzo con la posición en la viga.

8–35.E Para una viga de acero estándar W14 × 43, calcule el esfuerzo cortante con fórmula de cortante en el alma cuando soporta una fuerza cortante de 33 500 lb. Compare este valor con el valor calculado en el problema 8–33 y márquelo en la gráfica del problema 8–34.

8–36.E Para una viga Aluminum Association estándar de 18 × 6.181, calcule el esfuerzo cortante en el eje neutro cuando se somete a una fuerza cortante de 13500 lb. Use la fórmula general de cortante. Ignore los filetes en la intersección del alma con los patines.

8–37.E En las mismas condiciones del problema 8–36, calcule el esfuerzo cortante en varios ejes y grafique la variación del esfuerzo con la posición en la viga.

8–38.E Para una viga de aluminio de 18 × 6.181, calcule el esfuerzo cortante con la fórmula de cortante en el alma cuando la viga soporta una fuerza cortante de 13 500 lb. Compare este valor con el que se calculó en el problema 8–36 y márquelo en la gráfica del problema 8–37.

Uso de los esfuerzos cortantes de diseño

Nota: En problemas que exigen esfuerzos de diseño, use lo siguiente:

Para acero estructural:

A flexión: $\sigma_d = 0.66s_y$

A cortante: $\tau_d = 0.4s_y$

Para cualquier otro metal:

A flexión: $\sigma_d = \dfrac{s_y}{N}$

A cortante: $\tau_d = 0.5\dfrac{s_y}{N}$

Para madera:

Use los esfuerzos permisibles del apéndice A–19.

8–39.E La carga mostrada en la figura P8–39 tiene que ser soportada por una viga de acero W12 × 16. Calcule el esfuerzo cortante con la fórmula de cortante en el alma. También calcule el esfuerzo cortante máximo. Luego compárelos con los esfuerzos de diseño para acero estructural ASTM A992.

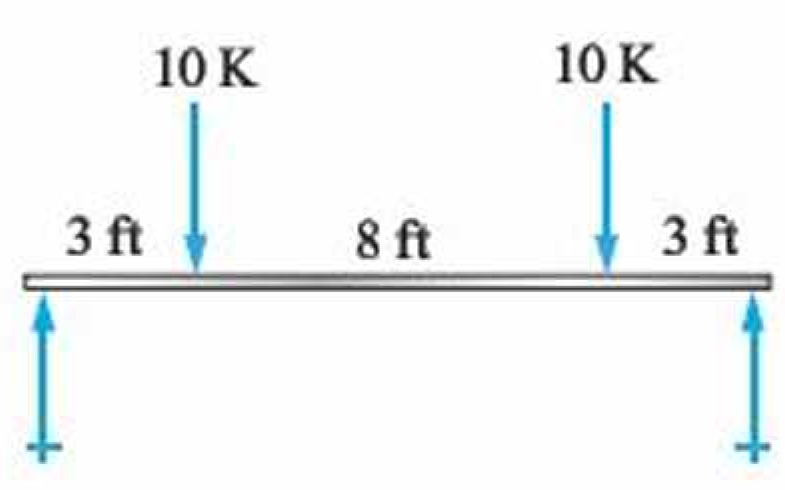


FIGURA P8–39

8–40.E Especifique una viga de patín ancho adecuada de acero estructural ASTM A992 para que soporte la carga mostrada en la figura P8–39 basada en el esfuerzo de diseño a flexión. En seguida, para la viga seleccionada, calcule el esfuerzo cortante con la fórmula de cortante en alma y compárelo con el esfuerzo cortante de diseño.

8–41.E Especifique una viga de patín ancho adecuada de acero estructural ASTM A992 para que soporte la carga mostrada en la figura P8–41 basada en el esfuerzo de diseño a flexión. En seguida, para la viga seleccionada, calcule el esfuerzo cortante con la fórmula de cortante en alma y compárelo con el esfuerzo cortante de diseño.

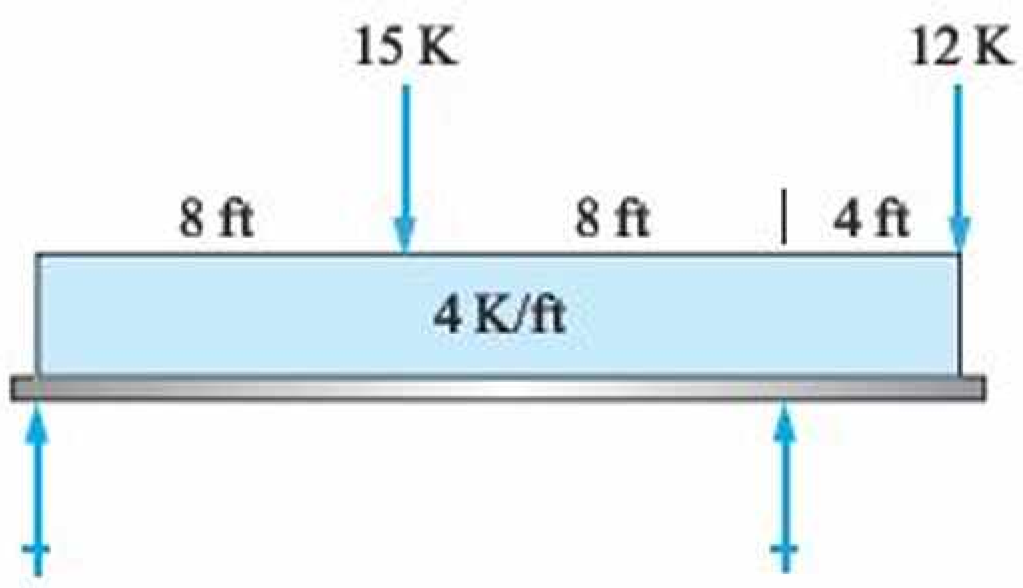


FIGURA P8–41

8–42.C Especifique una viga de patín ancho adecuada de acero estructural ASTM A992 para que soporte la carga mostrada en la figura P8–42 basada en el esfuerzo de diseño a flexión. En seguida, para la viga seleccionada, calcule el esfuerzo cortante con la fórmula de cortante en alma y compárelo con el esfuerzo cortante de diseño.

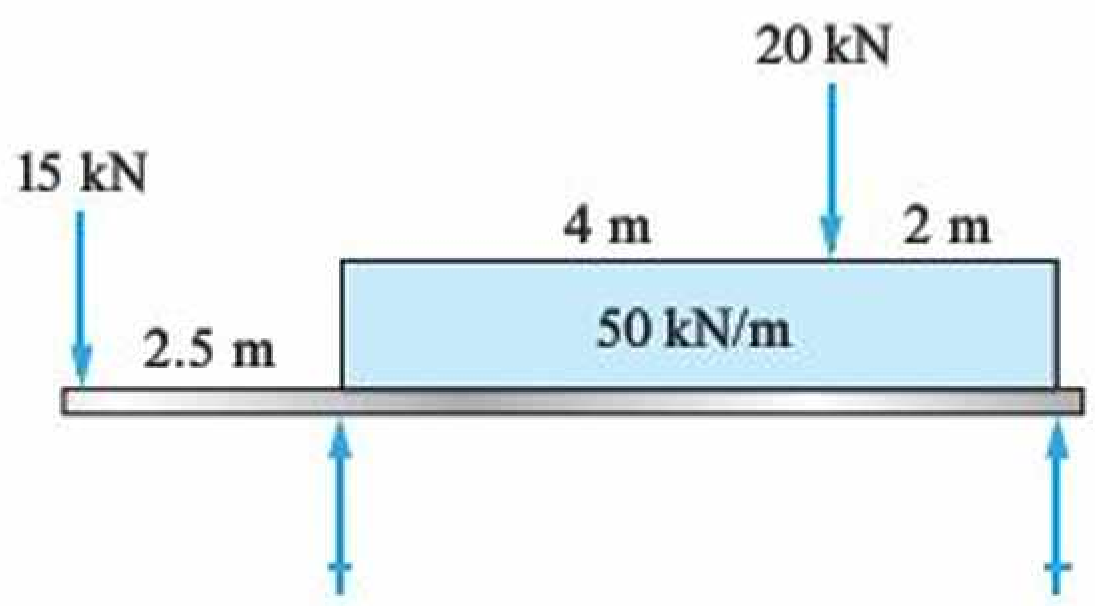


FIGURA P8–42

8–43.E Especifique un tubo de acero estándar adecuado, con el apéndice A–12, que se va a fabricar de acero ASTM A53 grado B para soportar la carga de la figura P8–43, basada en el esfuerzo de diseño a flexión con un factor de diseño de 3. A continuación, para el tubo seleccionado, calcule el esfuerzo cortante con la fórmula de cortante especial para tubos huecos y calcule el factor de diseño resultante con la fórmula de esfuerzo cortante de diseño.

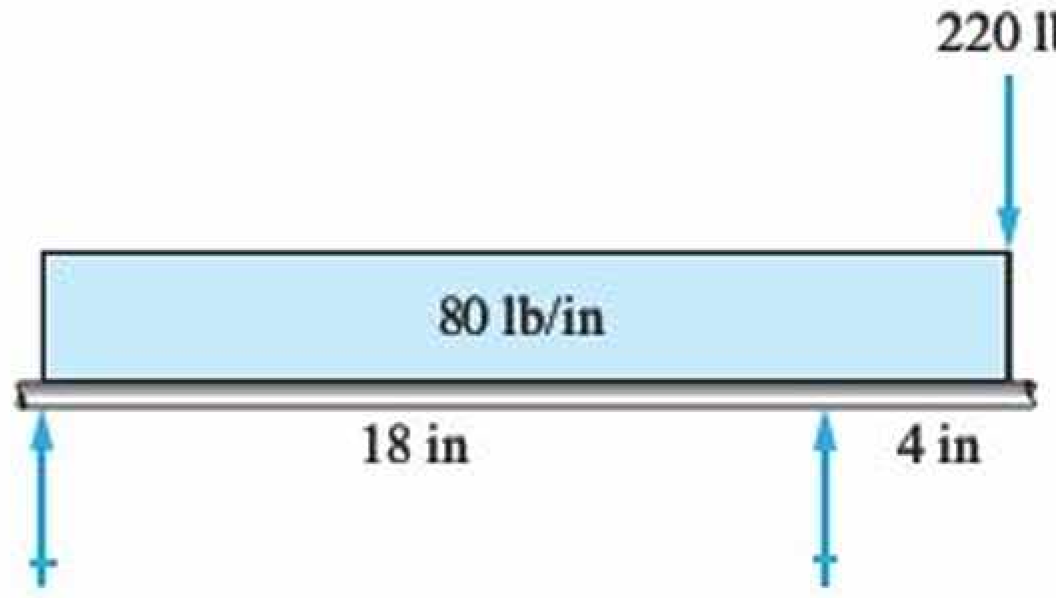


FIGURA P8–43

8–44.E Se va a especificar un canal estándar Aluminum Association (apéndice A–10) para que soporte la carga mostrada en la figura P8–44 para producir un factor de diseño de 4 a flexión. Las alas del canal deben apuntar hacia abajo. El canal es de aluminio 6061–T6. Para el canal seleccionado, calcule el esfuerzo cortante máximo.

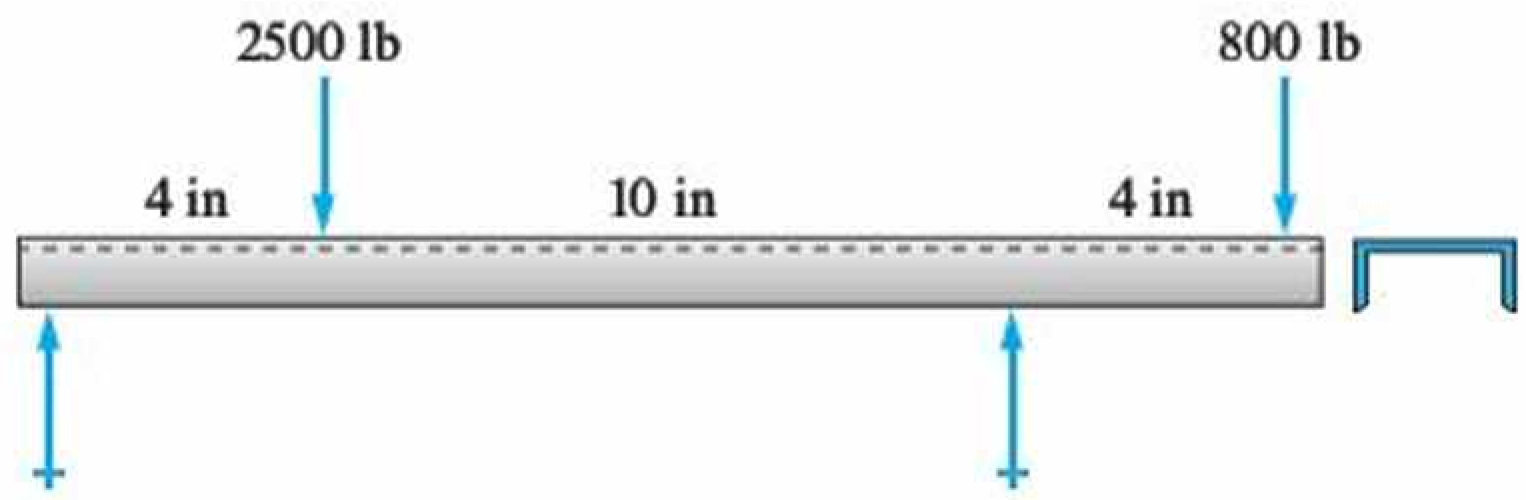


FIGURA P8–44

8–45.E Una vigueta de madera del piso de un edificio tiene que soportar una carga uniformemente distribuida de 200 lb/ft a lo largo de 12 ft. Especifique un perfil viga de madera estándar adecuado para la vigueta de abeto grado 2, para que sea segura tanto a flexión como a cortante (vea los apéndices A–4 y A–19).

8–46.C Un viga de madera para exteriores tiene que soportar la carga mostrada en la figura P8–46. Si se va a fabricar de abeto Douglas grado 3, especifique un viga de madera estándar adecuada para que sea segura tanto a flexión como a cortante (vea los apéndices A–4 a A–19).

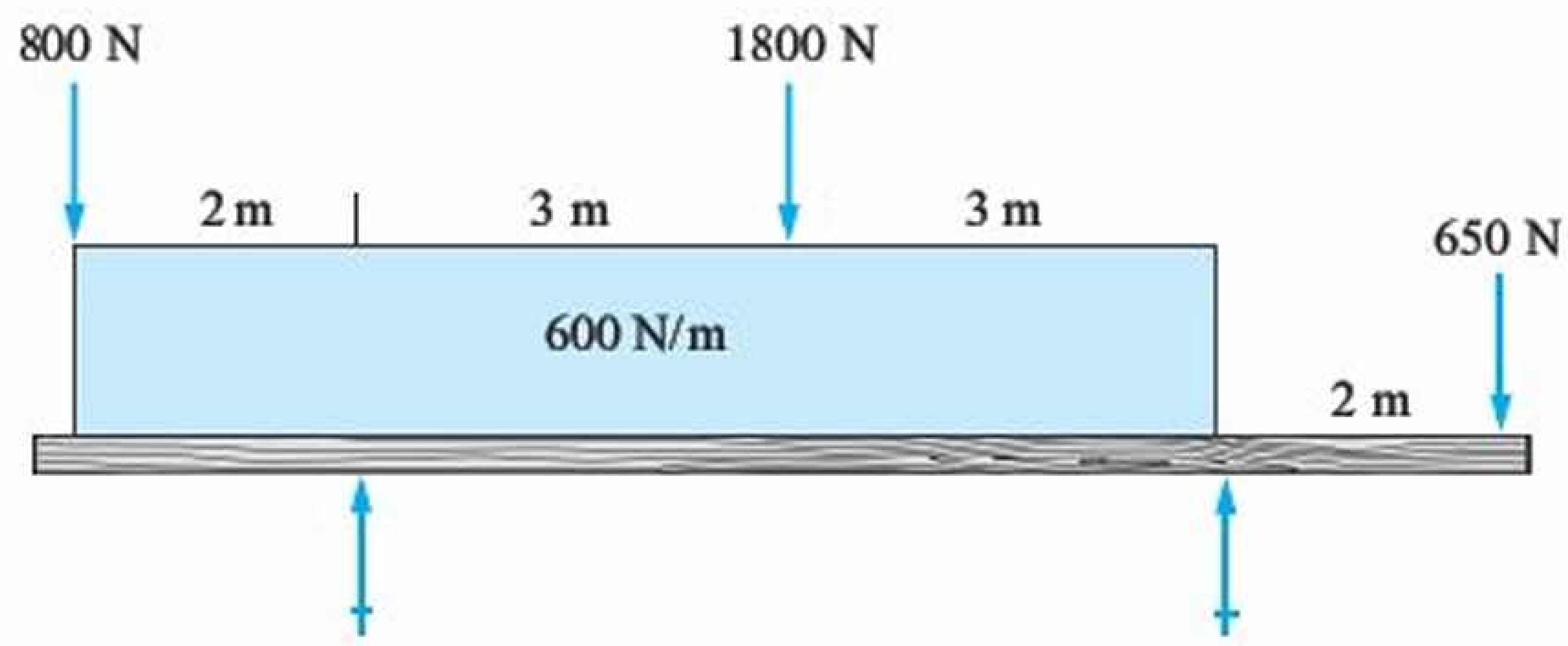


FIGURA P8–46

8–47.E La viga de caja mostrada en la figura P8–47 debe ser de pino del sur grado núm. 1. Debe ser de 14 ft de largo y soportar dos cargas concentradas iguales, cada una a 3 ft de un extremo. La viga está simplemente apoyada en sus extremos. Especifique la carga máxima permisible para que la viga sea segura tanto a flexión como a cortante.

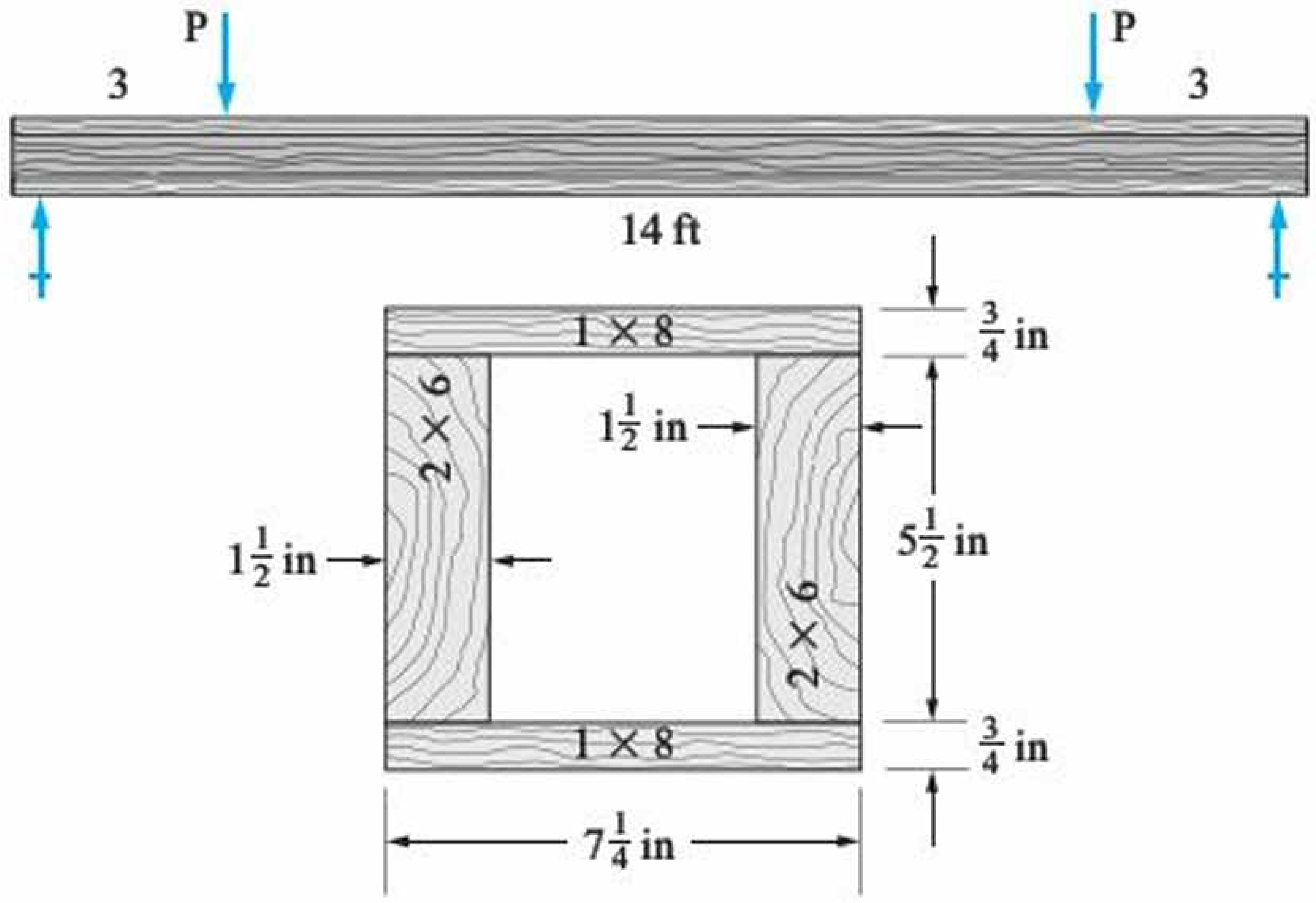


FIGURA P8–47

8–48.C Una viga I de aluminio, I229 × 12.44 soporta la carga mostrada en la figura P8–48. Calcule el esfuerzo cortante en la viga con la fórmula de cortante en alma.

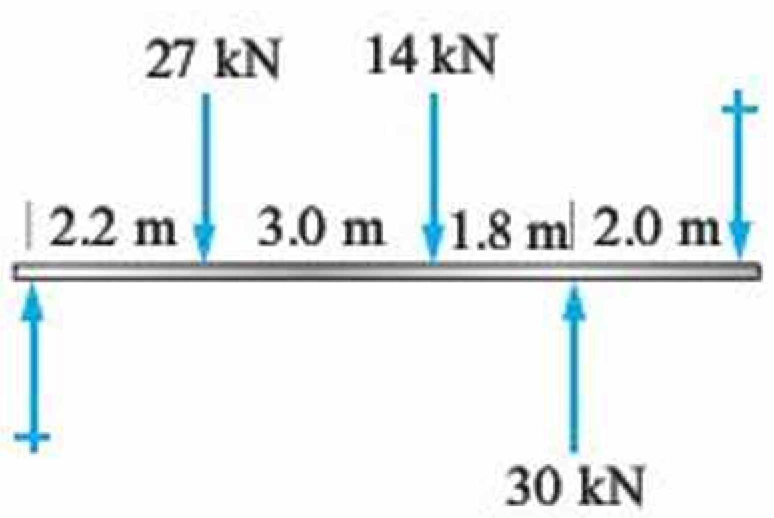


FIGURA P8–48

8–49.C Calcule el esfuerzo flexionante para la viga del problema 8–48.

8–50.E Una vigueta de piso de madera de 2 × 8 en una casa está simplemente apoyada, mide 12 ft de largo, y soporta una carga uniformemente distribuida de 80 lb/ft. Calcule el esfuerzo cortante en la vigueta. ¿Sería segura si fuera de pino del sur núm. 2?

8–51.E Se fabrica una viga con sección rectangular, de 0.50 in de ancho por 4.00 in de altura.

(a) Calcule el esfuerzo cortante en la viga si soporta la carga mostrada en la figura P8–51.

(b) Calcule el esfuerzo producido por flexión.

(c) Especifique un acero adecuado para que la viga produzca un factor de diseño de 3, ya sea a flexión o a cortante.

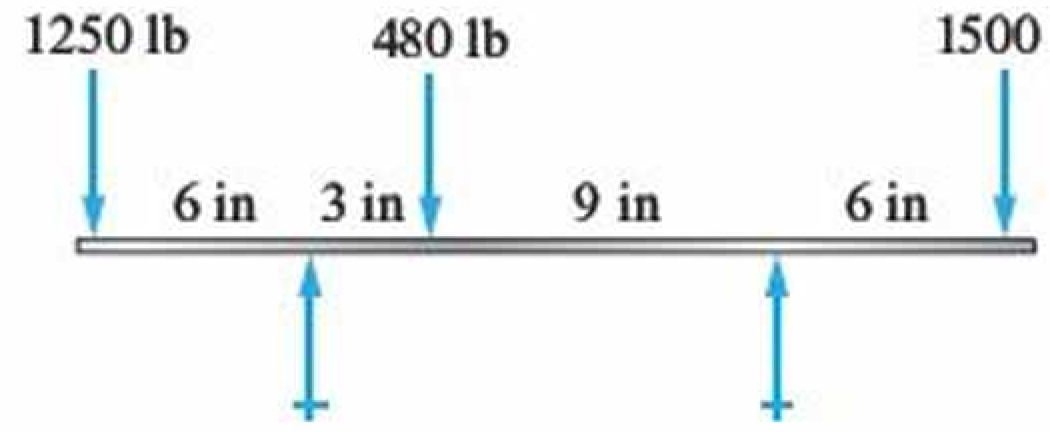


FIGURA P8–51

8–52.M Se fabrica una viga de aluminio con sección transversal rectangular de 16 mm de ancho por 60 mm de altura.

(a) Calcule el esfuerzo cortante en la viga si soporta la carga mostrada en la figura P8–52.

(b) Calcule el esfuerzo producido por flexión.

(c) Especifique un aluminio adecuado para que la viga produzca un factor de diseño de 3 ya sea a flexión o a cortante.

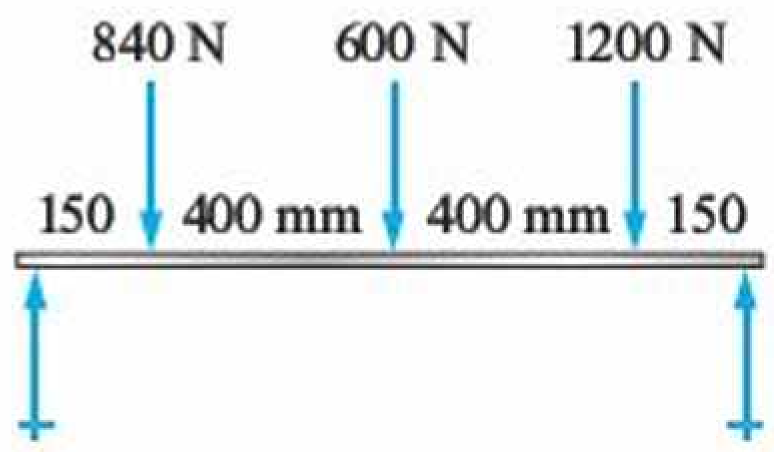


FIGURA P8–52

8–53.M Se planea utilizar una barra rectangular para que soporte la carga mostrada en la figura P8–53. Su espesor tiene que ser de 12 mm y estar hecha de aluminio 6061–T6. Determine la altura requerida del rectángulo para que produzca un factor de diseño de 4 basado en la resistencia a la cedencia. Luego calcule el esfuerzo cortante en la barra y el factor de diseño para cortante.

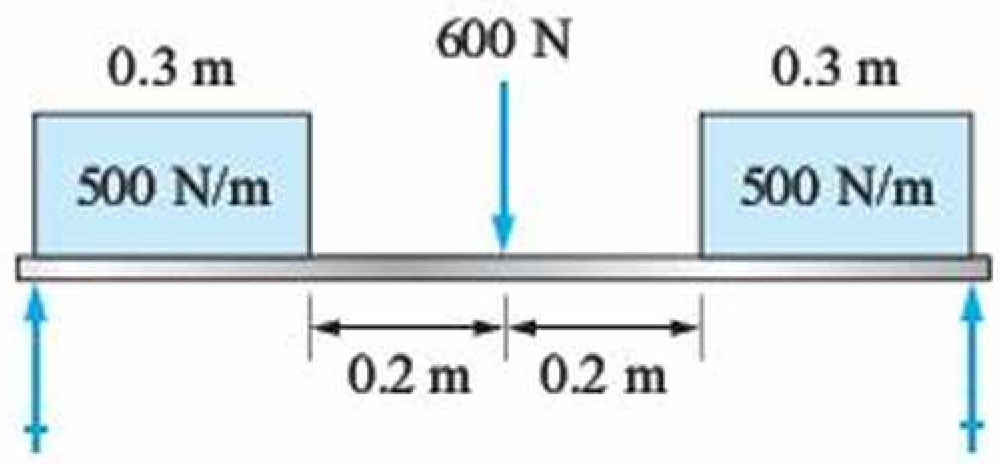


FIGURA P8–53

8–54.M Una flecha circular, de 40 mm de diámetro, soporta la carga mostrada en la figura P8–54.

(a) Calcule el esfuerzo cortante máximo en la flecha.

(b) Calcule el esfuerzo máximo producido por flexión.

(c) Especifique un acero adecuado para que la flecha produzca un factor de diseño de 4, basado en la resistencia a la cedencia ya sea a cortante o a flexión.

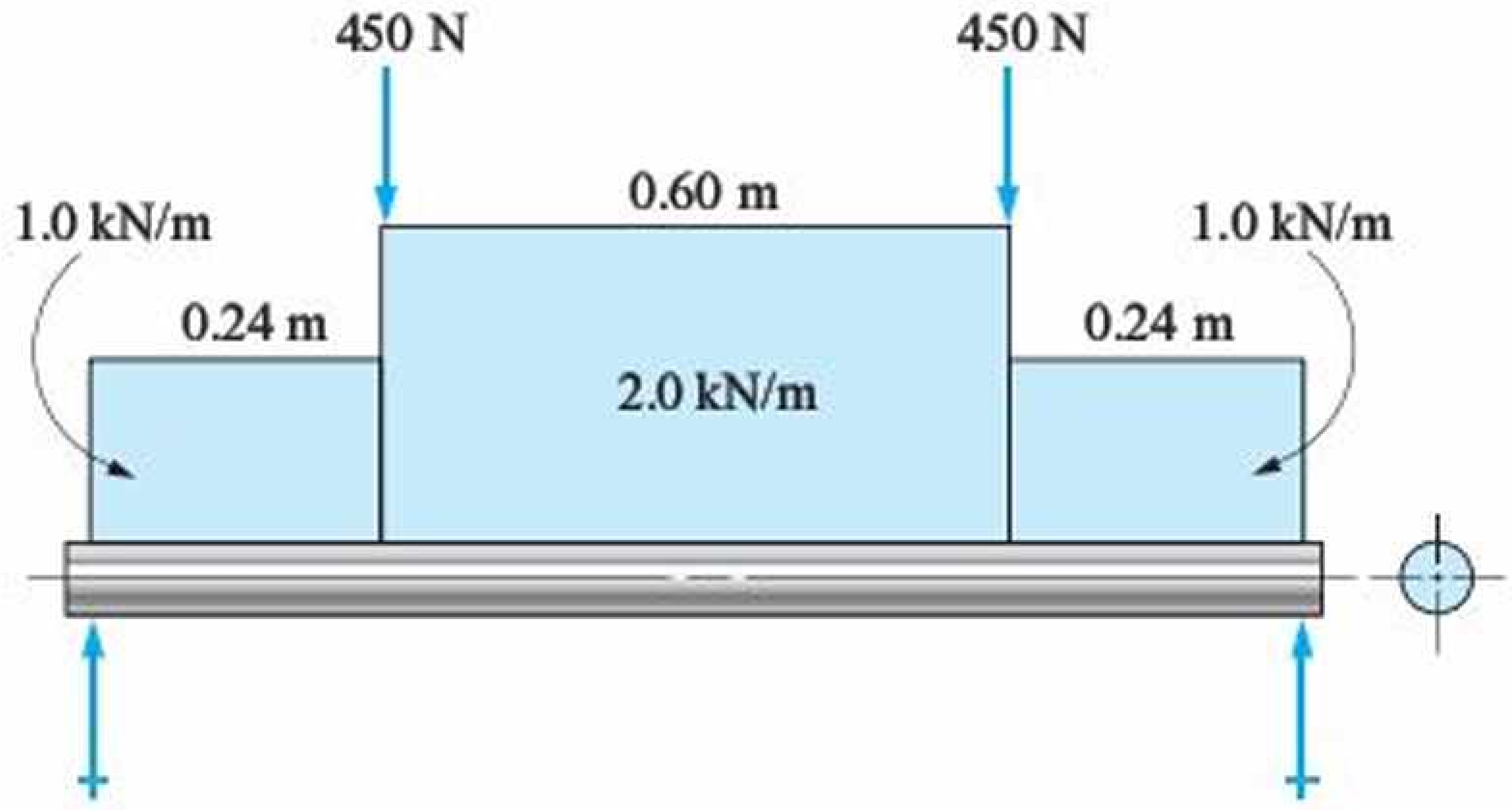


FIGURA P8–54

8–55.M Calcule el diámetro requerido de una barra circular para que soporte la carga mostrada en la figura P8–55, al mismo tiempo que limita el esfuerzo flexionante a 120 MPa. A continuación, calcule el esfuerzo cortante resultante en la barra y compárelo con el esfuerzo flexionante.

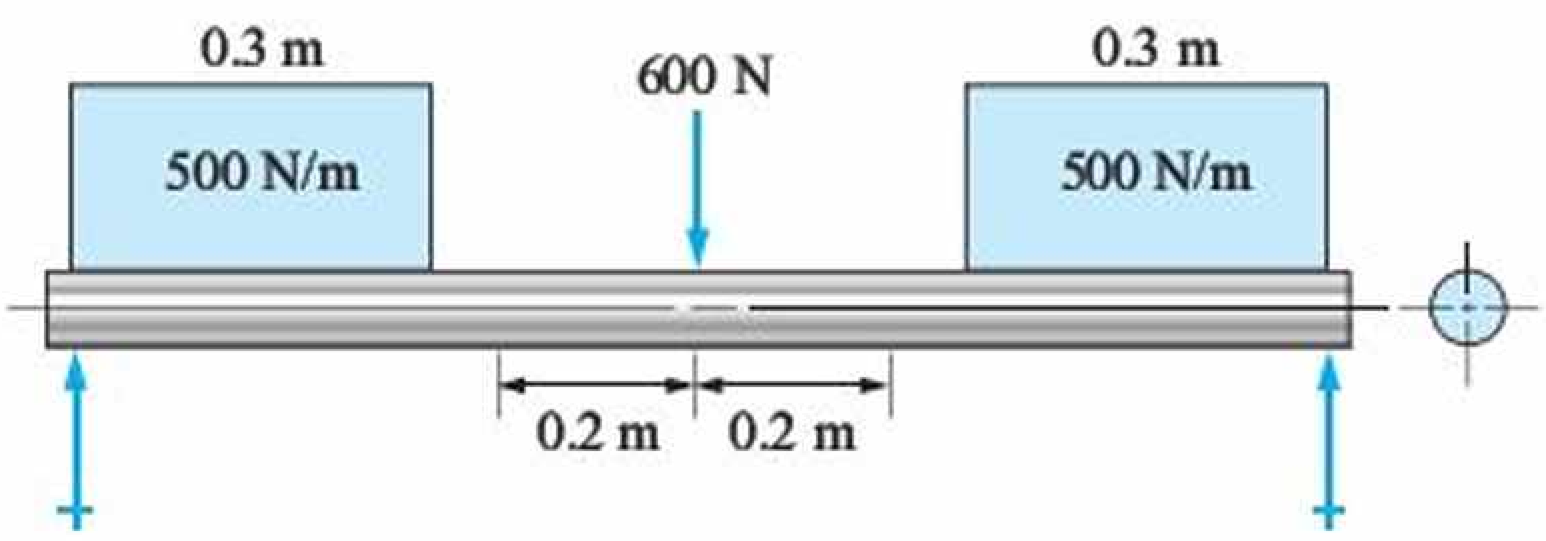


FIGURA P8–55

8–56.E Calcule la fuerza cortante vertical permisible en una clavija de alineación de madera de 1.5 in de diámetro, si el esfuerzo cortante máximo es de 70 psi.

8–57.E Se tiene que seleccionar un tubo de acero estándar del apéndice A–12 para usarlo como barra fija en un gimnasio. Va a estar simplemente apoyada en los extremos de su longitud de 36 in. Se espera que se cuelguen de ellas hombres hasta de 400 lb de peso con una o dos manos en cualquier lugar a lo largo de ella. El tubo tiene que ser de acero AISI 1020 laminado en caliente. Especifique un tubo adecuado para que produzca un factor de diseño de 6 basado en la resistencia a la cedencia ya sea a flexión o a cortante.

8–58.E Un tubo de acero estándar tiene que estar simplemente apoyado en sus extremos y soportar una sola carga concentrada de 2800 lb en su centro. El tubo tiene que ser de acero AISI 1020 laminado en caliente. El factor de diseño mínimo tiene que ser de 4 basado en la resistencia a la cedencia ya sea a flexión o a cortante. Especifique un tamaño del tubo adecuado con el apéndice A–12 si la longitud del tubo es

(a) 1.5 in

(b) 3.0 in

(c) 4.5 in

(d) 6.0 in

Problemas de flujo de cortante

8–59.E El perfil mostrado en la figura P8–59 se tiene que formar pegando la placa plana a la sección acopada. Si la viga hecha con este perfil se somete a una fuerza cortante de 1200 lb, calcule el flujo de cortante en la unión. ¿Cuál debe ser la resistencia al cortante del pegamento en psi?

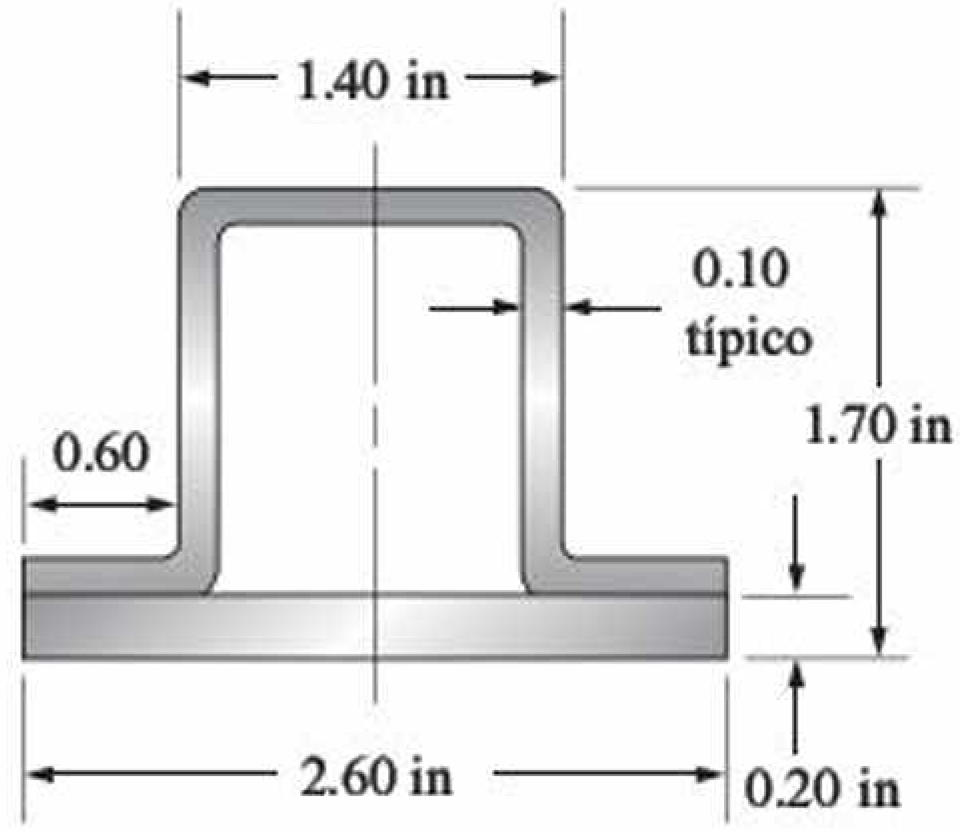


FIGURA P8–59

8–60.E El perfil mostrado en la figura P8–60 se forma aplicando un pegamento para metal entre la viga S y el alma del canal. Calcule el flujo de cortante en la unión y la resistencia al cortante requerido del pegamento para una fuerza cortante de 2500 lb.

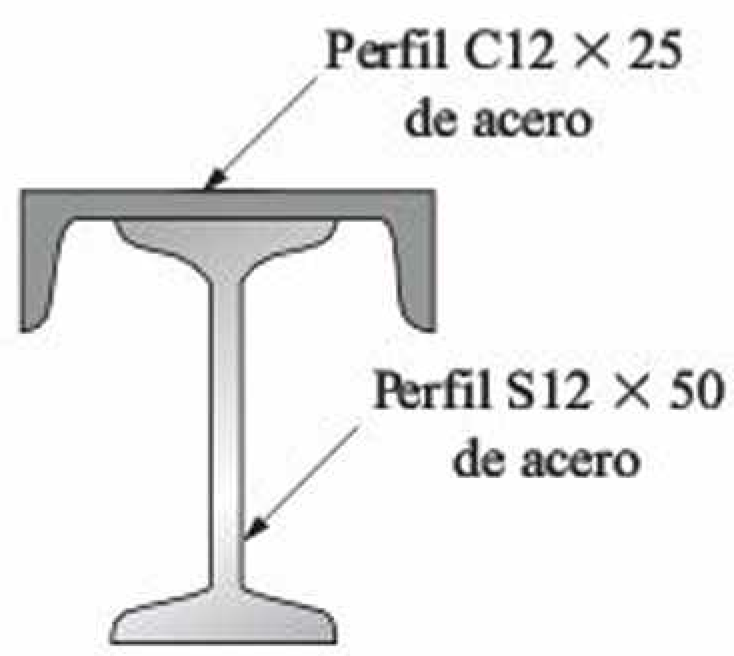


FIGURA P8–60

8–61.E El perfil mostrado en la figura P8–20 se fabrica remachando la placa inferior en los ángulos y luego soldando la placa superior a éstos. Cuando se utiliza como viga, existen cuatro modos potenciales de falla: esfuerzo flexionante, esfuerzo cortante en los ángulos, cortante en las soldaduras y cizallamiento de los remaches. El perfil se va a utilizar como el asiento de una banca que soporta una carga uniformemente distribuida a lo largo del claro de 10.0 ft. Calcule la carga distribuida máxima permisible para los siguientes límites de diseño.

(a) El material de todos los componentes es aluminio 6061–T4 y se requiere un factor de diseño de 4 ya sea a flexión o a cortante.

(b) El flujo cortante permisible en cada soldadura es de 1800 lb/in.

(c) Los remaches se colocan a 4 in uno de otro a lo largo de la viga. Cada remache puede soportar 600 lb de cortante.

8–62.E Un diseño alternativo de la banca descrita en el problema 8–61 es utilizar el perfil T armado de madera mostrado en la figura 8–61. La madera tiene que ser de pino del sur grado núm. 3. Se tiene que hincar un clavo en cada tabla vertical de 2 × 12. Cada clavo puede soportar 160 lb a cortante y los clavos están separados 6.0 in entre sí a lo largo de la viga. Calcule la carga distribuida máxima permisible en la viga.

8–63.E El perfil mostrado en la figura P8–27 pegando sus componentes entre sí y la resistencia al cortante permisible del pegamento es de 800 psi. Los componentes son de abeto Douglas grado núm. 2. Si la viga tiene que estar simplemente apoyada y soportar una sola carga concentrada en su centro, calcule la carga máxima permisible. La longitud es de 10 ft.

8–64.E La sección I mostrada en la figura P8–27 se fabrica con tres tablas de madera clavadas a los patines superior e inferior. Cada clavo es capaz de soportar una fuerza cortante de 180 lb. Si la viga con esta sección soporta una fuerza cortante vertical de 300 lb, ¿qué separación se requeriría entre los clavos?

8–65.E La sección armada mostrada en la figura P8–28 se forma hincando un clavo a través de las tablas superior e inferior de 1½ in de espesor. Si cada clavo es capaz de soportar 150 lb de fuerza cortante, determine la separación de los clavos cuando la viga soporta una fuerza cortante de 600 lb.

8–66.E La plataforma cuya sección transversal se muestra en la figura P8–29 se armó con pegamento. ¿Cuánta fuerza por unidad de longitud de la plataforma debe soportar el pegamento si se somete a una fuerza cortante vertical de 500 lb?

8–67.C La sección armada mostrada en la figura P8–67 se forma insertando dos remaches de 3/8 in a través de las placas superior e inferior hasta los patines de la viga. Cada remache soportará 2650 lb a cortante. Determine la separación requerida de los remaches a lo largo de la viga si se somete a una fuerza cortante de 175 kN.

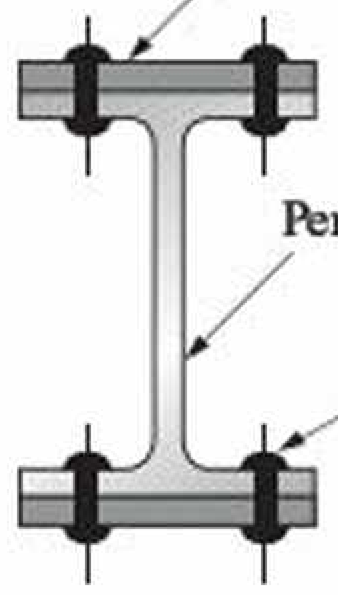


FIGURA P8–67

8–68.E Una viga fabricada que tiene la sección transversal mostrada en la figura P8–60 soporta una fuerza cortante de 50 kN. El canal se remacha a la viga S con dos remaches de ¼ in de diámetro y cada uno puede soportar 1750 lb a cortante. Determine la separación requerida de los remaches.

PROBLEMAS ADICIONALES DE PRÁCTICA Y REPASO

Cortante en el alma

En los problemas 8–69 a 8–73 calcule el esfuerzo cortante en el alma de la viga dada con la fórmula de cortante en el alma. A continuación compare el resultado con el esfuerzo cortante de diseño definido en la sección 8–7 para determinar si el esfuerzo cortante es seguro.

8–69 Un perfil W18 × 55 soporta una fuerza cortante vertical de 36.6 K. El material es acero estructural ASTM A992.

8–70 Un perfil W18 × 40 soporta una fuerza cortante vertical de 36.6 K. El material es acero estructural ASTM A992.

8–71 Un perfil W14 × 26 soporta una fuerza cortante vertical de 10 000 lb. El material es acero estructural ASTM A992.

8–72 Un perfil 61 × 4.692 de aluminio soporta una fuerza cortante vertical de 10 000 lb. El material es aluminio 6061–T6.

8–73 Un perfil W10 × 12 soporta una fuerza cortante vertical de 6750 lb. El material es acero estructural ASTM A992.

Fórmula general de cortante y fórmulas especiales de cortante

En los problemas 8–74 a 8–79 calcule la fuerza cortante máxima con la fórmula general de cortante o una de las fórmulas especiales de cortante. A continuación compare el resultado con el esfuerzo cortante de diseño definido en la sección 8–7 para determinar si el esfuerzo cortante es seguro.

8–74 Un tubo de acero rectangular estándar, HSS6 × 2 × 1/4 soporta una fuerza cortante vertical estática de 6750 lb. El material es acero estructural ASTM A500 grado B.

8–75 Se instala una viga de 2 × 8 de pino del sur grado núm. 2 como voladizo y soporta una fuerza cortante vertical de 480 lb.

8–76 El perfil mostrado en la figura P8–29 es de abeto Douglas grado 2 y soporta una fuerza cortante vertical de 750 lb.

8–77 Un tubo de acero rectangular estándar, HSS8 × 2 × 1/4 soporta una fuerza cortante vertical estática de 12 000 lb. El material es acero estructural ASTM A500 grado B.

8–78 El perfil mostrado en la figura P8–78 soporta una fuerza cortante vertical de 1800 lb. Los materiales son acero estructural A992 para la viga W y A500 grado B para la sección HSS.

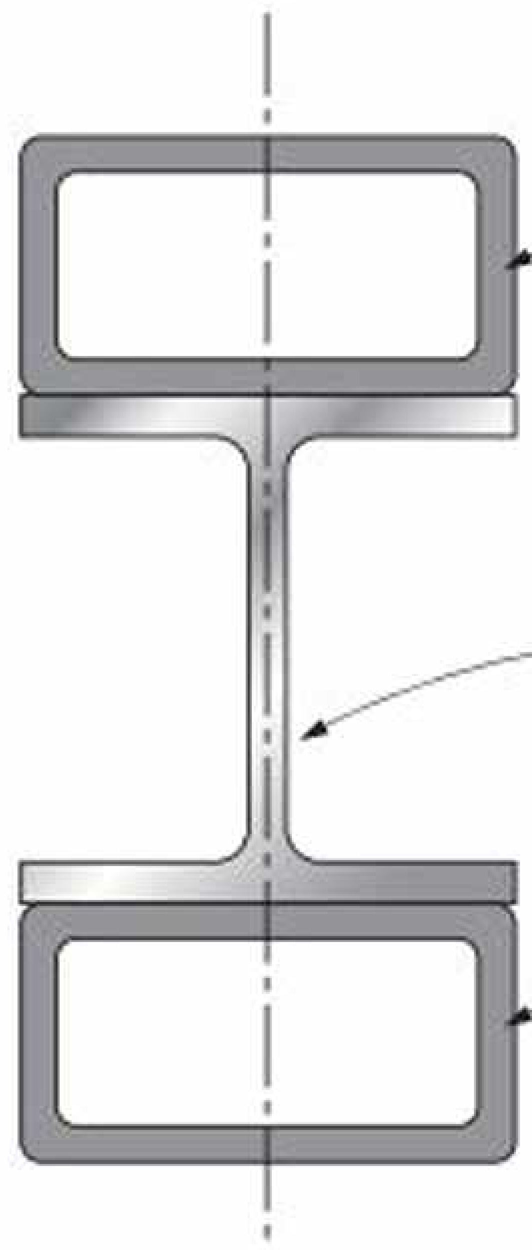


FIGURA P8–78

8–79 Un canal de aluminio C10 × 6.136 estándar se instala con las alas hacia abajo y soporta una fuerza cortante vertical de 430 lb. El material es aluminio 6061–T6.

Flujo de cortante

8–80 Con los datos del problema 8–78, calcule el flujo de cortante en la cara de contacto entre el perfil W y el tubo.

8–81 El perfil mostrado en la figura P8–29 tiene que soportar una fuerza cortante vertical de 500 lb. Se tiene que clavar la madera contrachapada a los miembros de 2 × 4 con clavos que sean capaces de soportar una fuerza cortante de 135 lb cada uno. Especifique una separación adecuada para los clavos.

9

Flexiones de vigas

La imagen completa y actividad

9–1 Objetivos de este capítulo

9–2 La necesidad de considerar flexiones de vigas

9–3 Principios generales y definiciones de términos

9–4 Flexiones de vigas con el método de la fórmula

9–5 Comparación de los tipos de apoyo de vigas

9–6 Superposición mediante fórmulas de flexión

9–7 Método de integración sucesiva

9–8 Método del área-momento

La imagen completa

Flexiones de vigas

Mapa de análisis

- El desempeño apropiado de las partes de una máquina; la rigidez estructural de edificios, vehículos, juguetes y productos de consumo y la tendencia de un componente a vibrar dependen de la limitación de deformaciones o flexiones de vigas a valores aceptables. En este capítulo explorará métodos de analizar flexiones de vigas.
- Este tema se apoya en las habilidades que desarrolló en capítulos previos.
- Descubrió en los capítulos 7 y 8 cómo determinar los esfuerzos normales en vigas producidos por momentos flexionantes y los esfuerzos cortantes producidos por fuerzas cortantes que aparecen en vigas.
- También aprendió a diseñar vigas suficientemente resistentes para garantizar que no fallaran por fractura o cedencia de su material.
- Otros modos potenciales de falla es la deformación excesiva o deflexión de la viga. Ahora explorará las formas en que las vigas se flechan cuando se someten a carga y aprenderá varias formas de calcular las flexiones pronosticadas.
- Se considerarán dos clases de vigas:
  - *Vigas estáticamente determinadas* (figura 9-1). Aquellas para las cuales las fuerzas de reacción y los momentos flexionantes desconocidos pueden hallarse por medio de las ecuaciones clásicas de equilibrio estático.
    - $\Sigma F = 0$ en cualquier dirección
    - $\Sigma M = 0$ con respecto a cualquier punto
  - *Vigas estáticamente indeterminadas* (figura 9-2). Aquellas para las cuales existen demasiadas incógnitas que no pueden resolverse mediante métodos convencionales de estática. Aquí se presentan otras técnicas de análisis para que estos tipos de vigas puedan ser analizados.
- También explorará el efecto de diferentes tipos de condiciones de apoyo y carga en la rigidez de vigas, de modo que pueda hacer discernimientos sólidos sobre qué tipos emplear en sus diseños.

Actividad — Vigas estáticamente determinadas

Adquiera de nuevo los mismos materiales que utilizó en las actividades de los capítulos 5, 6, 7 y 8, cuando exploró el comportamiento general de vigas, las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes que se desarrollan en ellas, sus secciones transversales, esfuerzos flexionantes y esfuerzos cortantes. Utilizó ejemplos de vigas flexibles simples, varios tipos de apoyos y algunos elementos para cargar las vigas.

Tomando la figura 9–1 como guía, coloque varios tipos de carga de vigas y condiciones de apoyo para lo descrito a continuación.

1. Apoye la viga en sus extremos, coloque dos cargas concentradas cerca del centro, y observe la forma resultante de la viga. Se flexionará hacia abajo y forma una figura curva hacia arriba. Ésta es la demostración clásica de flexión positiva [figura (9-1(a)].
2. Retire una carga y mueva la otra a lo largo de la viga. Observe cómo cambia la figura de la viga flexionada [figura 9–1(b)].
3. Mueva uno de los apoyos hacia dentro del extremo de la viga para crear un extremo volado; luego coloque una carga cerca del extremo del volado. Tendrá que invertir la dirección del apoyo en el extremo opuesto de la viga, de lo contrario girará hacia

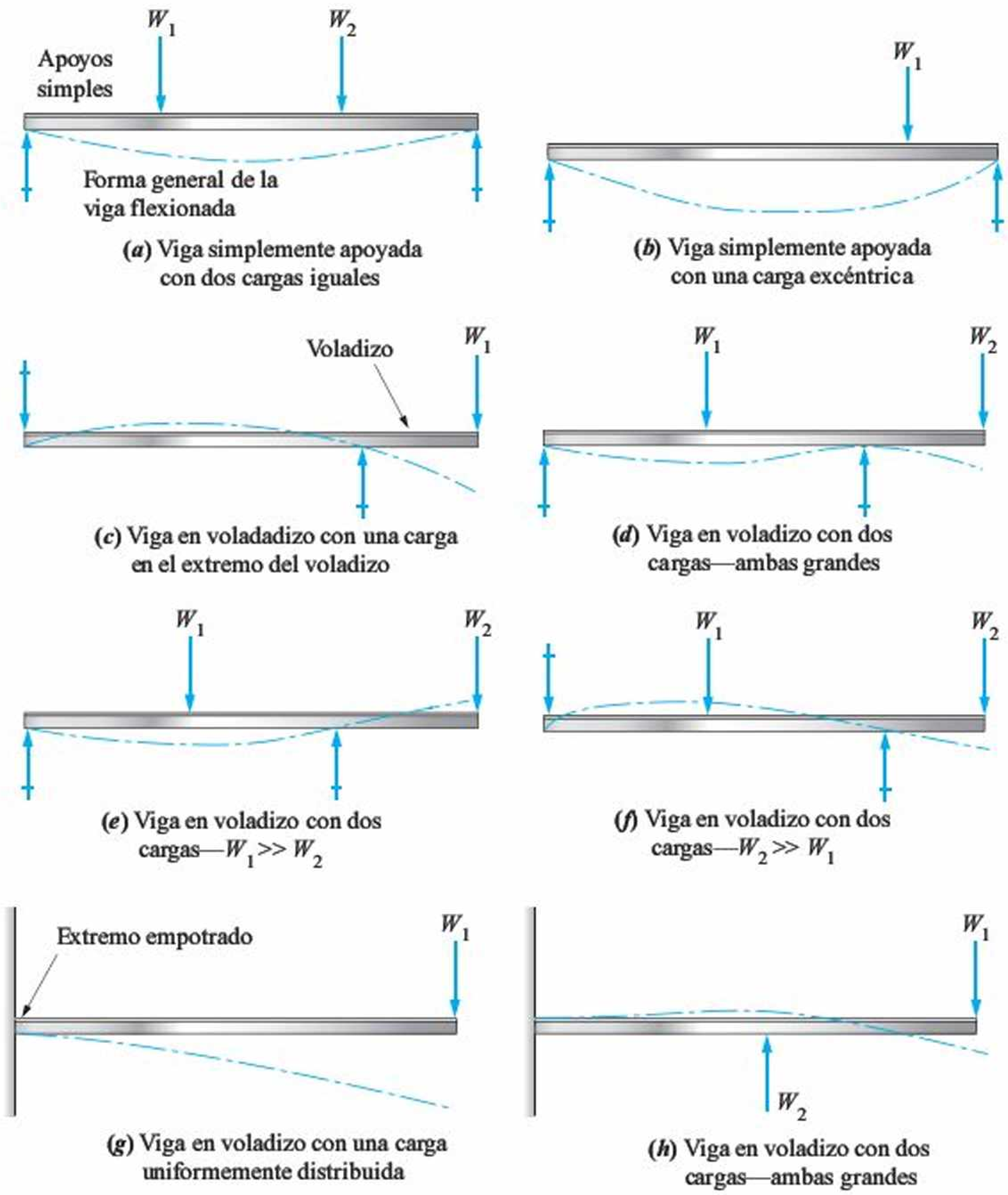
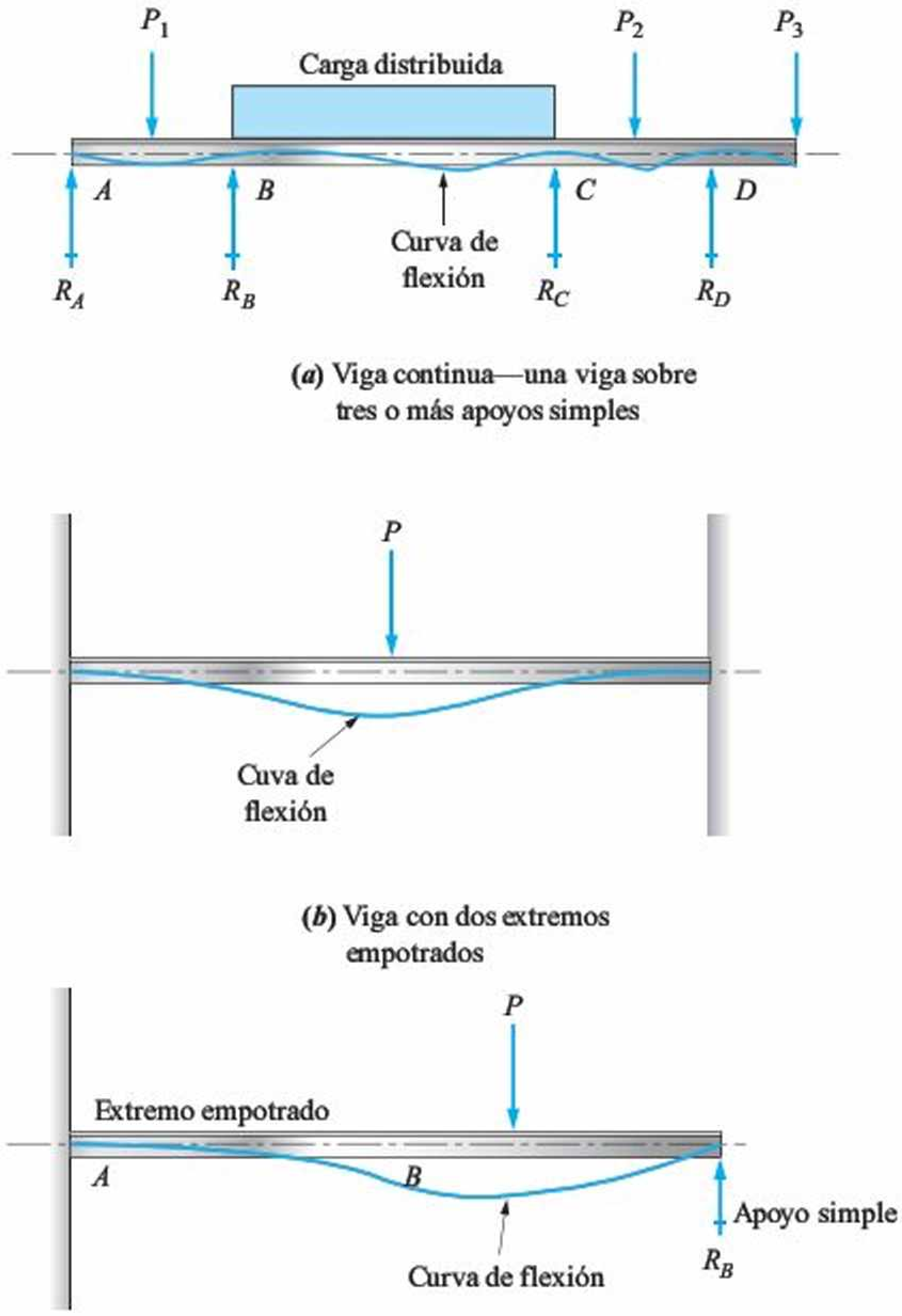


FIGURA 9–1 Variedad de condiciones de carga y apoyo de una viga.

arriba separándose del apoyo. A continuación observará que la viga se flexiona en una forma convexa o cóncava hacia abajo. Éste es un ejemplo de flexión negativa [figura 9–1(c)].

4. A continuación use la viga en voladizo y coloque cargas tanto en el extremo del saliente como entre los apoyos. Varíe las magnitudes y colocaciones de las dos cargas y observe cómo se flexiona la viga [figura 9–1(d), 9–1(e), 9–1(f)].
5. Ahora configure la viga como voladizo sujetándola firmemente a una mesa. Quizás pueda utilizar su libro presionando con firmeza para que un extremo se mantenga fijo. Coloque cargas en varias posiciones en el voladizo y en diferentes direcciones; observe su forma. También observe la flexibilidad relativa del voladizo según la forma de la viga, su longitud y colocación de la carga. Notará que un voladizo es poco más flexible que una viga similar de la misma longitud apoyada en dos puntos [figuras 9–1(g) y 9–1(h)].

FIGURA 9–2
Ejemplos de vigas estáticamente indeterminadas.



(*a*) Viga continua—una viga sobre tres o más apoyos simples

(*b*) Viga con dos extremos empotrados

(*c*) Viga en voladizo apoyada

Actividad Vigas estáticamente indeterminadas

Establecer demostraciones de los tres tipos de vigas estáticamente indeterminadas descritas aquí, usando los mismos materiales de la actividad para vigas estáticamente determinadas, pero agregando apoyos adicionales. Use la figura 9–2 como guía.

1. Una *viga continua* es cualquier viga con más de dos apoyos. El nombre se deriva de la observación de que la viga es continua sobre varios apoyos. La figura 9–2(a) muestra un ejemplo. Use sus materiales de construcción de vigas para montar primero una viga simplemente apoyada con apoyos en cada extremo bastante separados entre sí. Aplique una o varias cargas con la mano. Observe la flexibilidad de la viga. Ahora coloque un tercer apoyo debajo a la mitad de la viga y aplique cargas de nuevo. ¿Siente la rigidez incrementada de la viga? Si se agrega un cuarto soporte se incrementará aún más.

   ¿Dónde ha visto vigas continuas? Existen numerosos ejemplos en estructuras de edificios y puentes de carretera. Búsquelas cuando maneje por la ciudad o una autopista. Los puentes por lo general están apoyados en pilas en cada uno de sus extremos y con frecuencia emplean apoyos intermedios, tal como en el camellón de una carretera dividida.

Otro ejemplo se encuentra en el sótano de casas de estilo campirano en Estados Unidos de América. Con frecuencia se utilizan vigas a lo largo del sótano para soportar las viguetas del piso de arriba. La viga descansa sobre los muros del sótano y por lo general dispone de apoyo en uno o más lugares del cuarto por medio de columnas de acero. Estas columnas adicionales convierten a la viga en una viga continua.

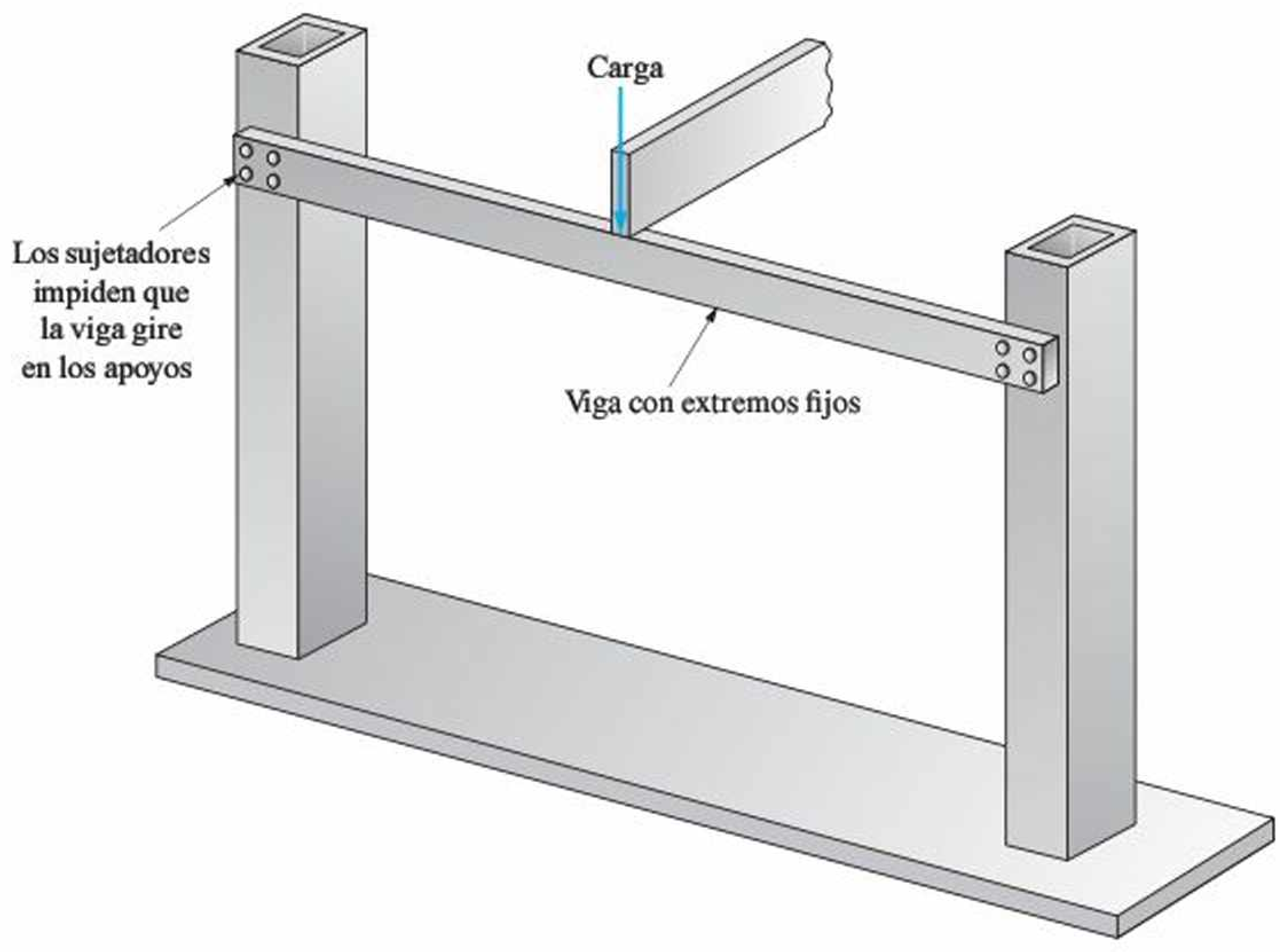
2. Una *viga de apoyos fijos* es una que está firmemente restringida en ambos extremos para que no gire y pueda soportar las cargas que actúan en ella. Vea la figura 9–2(b). Observe que la forma de la viga flexionada se inicia con una pendiente horizontal en cada apoyo por la firmeza del apoyo rígido en ese lugar. Esta clase de viga con frecuencia se utiliza en el diseño de marcos de máquina y estructuras de edificios, porque da por resultado ensambles muy rígidos. La creación del apoyo fijo requiere cuidado. La figura 9–3 muestra una forma de fabricar este tipo de viga por medio de cuatro pernos para sujetar firmemente la viga en una estructura rígida, resistente. También podría soldar las vigas en las columnas de apoyo. Sin el debido cuidado, se podría presentar una condición intermedia entre aquella de los apoyos fijos y la de los apoyos simples, y la viga no funcionaría como se esperaba.

   Use sus materiales de construcción de vigas para simular una viga con un apoyo fijo. Luego cárguela y observe su rigidez relativa comparada con la de otros diseños.

3. Una *viga en voladizo apoyada* es una viga con un extremo fijo y el segundo simplemente apoyado, como se muestra en la figura 9–2(c). Con anterioridad observamos que una viga en voladizo es una de las vigas más flexibles. El segundo apoyo añade una cantidad significativa de rigidez adicional. La figura 9–4 muestra una forma de construir una viga en voladizo apoyada.

   Construya una con sus materiales. Compare su rigidez con una viga en voladizo simple.

FIGURA 9–3 Viga en voladizo apoyada.



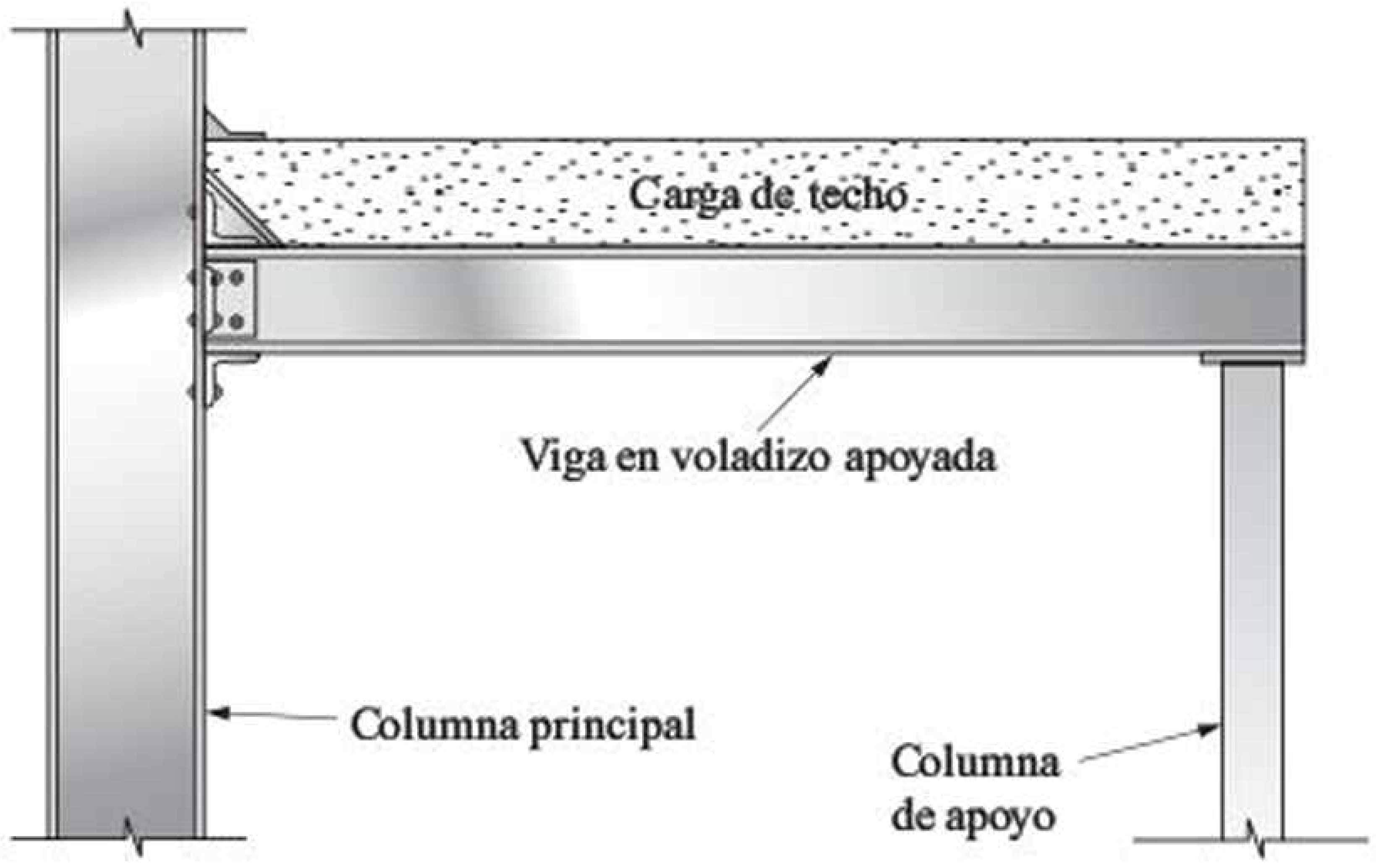


FIGURA 9–4 Dos varillas que soportan una pesada pieza fundida.

Los análisis requeridos para vigas estáticamente indeterminadas son un poco más difíciles que para vigas estáticamente determinadas. Este capítulo incluye varias herramientas de análisis y diseño de vigas como ésas. También se incluyen algunas comparaciones entre los diversos tipos para que decida sobre los diseños apropiados a ser utilizados.

Métodos de análisis de flexiones de vigas. En este capítulo presentamos los principios en los que se basa el cálculo de la flexiones de vigas, junto con cuatro métodos conocidos de análisis de flexión: el *método de la fórmula*, el *método de superposición*, el *método de integración sucesiva* y el *método del área–momento*.

Cada uno ofrece ventajas y desventajas, y la selección de qué método utilizar depende de la naturaleza del problema.

- El método de la fórmula es el más simple, aunque depende de la disponibilidad de una fórmula adecuada que se adapte a la aplicación.
- El método de superposición, una extensión modesta del método de la fórmula, expande dramáticamente el número de problemas prácticos que puede ser manejado sin que se incremente la complejidad de su trabajo.
- El método del área–momento es bastante rápido y simple, aunque en general se utiliza para calcular flexiones de sólo uno o unos cuantos puntos en la viga. Su uso requiere un alto nivel de entendimiento del principio de momentos y de las técnicas de preparar diagramas de momento flexionante.
- El método de integración sucesiva posiblemente es el más general, y se utiliza para resolver prácticamente cualquier combinación de carga y condiciones de apoyo de vigas estáticamente determinadas. No obstante, su uso requiere la capacidad de escribir las ecuaciones de los momentos de fuerza cortante y momento flexionante, y derivar ecuaciones de la pendiente y flexiones de la viga mediante cálculo integral. El método de integración sucesiva produce ecuaciones de la pendiente y flexión de toda la viga y permite la determinación directa del punto de máxima flexión. Se desarrollaron y publicaron fórmulas mediante integración sucesiva o el método del área del momento.

Hay varios programas de análisis de vigas asistidos por computadora disponibles que reducen el tiempo y el cálculo requeridos para determinar la flexión de vigas. Aunque ahorran trabajo al diseñador, se recomienda que entienda los principios en los cuales están basados antes de utilizarlos. Vea la lista de sitios de Internet.

9–1 OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

Al término de este capítulo, usted podrá:

1. Entender la necesidad de considerar las flexiones de vigas.
2. Entender el desarrollo de las relaciones entre el patrón de carga y el tipo de apoyo en una viga y la flexión de ésta.
3. Mostrar con una gráfica las relaciones entre la carga, la fuerza cortante, el momento flexionante, la pendiente y las curvas de flexión de vigas.
4. Definir los términos *estáticamente determinada* y *estáticamente indeterminada* tal como se aplican a vigas.
5. Reconocer vigas estáticamente indeterminadas a partir de las descripciones dadas de las condiciones de carga y apoyos.
6. Definir *viga continua*.
7. Definir *viga en voladizo apoyada*.
8. Definir *viga de extremo fijo*.
9. Utilizar fórmulas estándar para calcular la flexión de vigas en puntos seleccionados.
10. Usar el principio de superposición junto con fórmulas estándar para resolver problemas muy complejos.
11. Comparar la resistencia y rigidez relativas de vigas que tienen diferentes sistemas de apoyo sometidas a cargas dadas.
12. Desarrollar fórmulas para la flexión de vigas en ciertos casos con el método de integración sucesiva.
13. Aplicar el método de integración sucesiva a vigas sometidas a una amplia variedad de condiciones de carga y apoyo.
14. Usar el método del área de momento para determinar la pendiente y flexión de una viga.
15. Escribir programas de computadora que ayuden a utilizar los diferentes métodos de análisis descritos en este capítulo.

La organización del capítulo permite una cobertura selectiva. En general, toda la información necesaria para utilizar cada uno de los métodos se incluye en la parte correspondiente del capítulo. Una excepción es que requiere entender el método de la fórmula antes de usar el de superposición.

9–2 LA NECESIDAD DE CONSIDERAR FLEXIONES DE VIGAS

El husillo de un torno o un taladro de banco y el árbol de una fresadora disponen de herramientas de corte para maquinar metales. La flexión del husillo o árbol tendría un efecto adverso en la precisión de la máquina. El tipo de carga y apoyo de estos elementos de máquina indican que son vigas y el método de calcular su flexión se analizará más adelante en este capítulo.

El equipo de medición de precisión también debe diseñarse para que sea rígido. La flexión provocada por la aplicación de fuerzas de medición reduce la precisión de la medición deseada.

Las flechas transmisoras de potencia que portan engranes deben ser suficientemente rígidas para garantizar que los dientes de los engranes se traben adecuadamente. La flexión excesiva de las flechas tendería a separar los engranes acoplados, lo que haría que el punto de contacto entre los dientes no fuera el óptimo. El resultado sería generación de ruido, capacidad de transmisión de potencia reducida y mayor desgaste. En el caso de engranes rectos, se recomienda que el movimiento entre los dos engranes no sea de más de 0.005 in (0.13 mm). Este límite es la *suma* del movimiento de las dos flechas que portan los engranes acoplados en el lugar donde van montados.

Los pisos de edificios deben ser suficientemente rígidos para soportar las cargas esperadas. Los ocupantes del edificio no deben notar las flexiones del piso. Las máquinas y otros equipos requieren un piso estable para funcionar adecuadamente. Las vigas que soportan cielos rasos enyesados no deben flexionarse en exceso para que no se agriete el yeso. La flexión a menudo se limita a 1/360 veces el claro de la viga que soporta un cielo raso.

Los chasis de vehículos, máquinas formadoras de metal, aparatos automáticos y equipo de proceso también deben ser suficientemente rígidos para garantizar la operación satisfactoria del equipo soportado por el chasis. La cabeza de un torno, la corona de una prensa punzonadora, la estructura de un mecanismo de ensamble automático y el chasis de un camión son ejemplos de ello.

La vibración es provocada por las oscilaciones forzadas de partes de una estructura o máquina. La tendencia a vibrar a una cierta frecuencia y la severidad de las vibraciones son funciones de la flexibilidad de las partes. Desde luego, *flexibilidad* es un término que describe cuánto se flexiona un parte sometida a carga. Los problemas de vibración pueden resolverse *incrementado* o *disminuyendo* la rigidez de la parte, según las circunstancias. En uno u otro caso, es importante entender cómo se calculan las flexiones de vigas.

Límites de flexión recomendados. Es responsabilidad del diseñador especificar la flexión máxima permisible de una viga de máquina, chasis o estructura. El conocimiento de la aplicación debe servir de guía. Sin esta guía, en las referencias 2 y 3 se sugieren los siguientes límites:

Parte general de una máquina: $y_{máx} = 0.0005$ a 0.003 in/in o mm/mm de longitud de viga.
Precisión moderada: $y_{máx} = 0.000\,01$ a 0.0005 in/in o mm/mm de longitud de viga.
Alta precisión: $y_{máx} = 0.000\,001$ a $0.000\,01$ in/in o mm/mm de longitud de viga.

Los valores numéricos dados aquí también podrían expresarse como la relación de la flexión máxima a la longitud de la viga. Por ejemplo,

$$y_{máx}/L = 0.0005 \text{ a } 0.003 \text{ para la parte general de una máquina.}$$
$$y_{máx}/L = 0.000\,01 \text{ a } 0.0005 \text{ para precisión moderada.}$$
$$y_{máx}/L = 0.000\,001 \text{ a } 0.000\,01 \text{ para alta precisión.}$$

Entonces, si se multiplica el número por la longitud de la viga se obtiene la flexión máxima recomendada.

Por ejemplo, considere una viga de 18 in (450 mm) de largo, de una transportadora de uso general. El límite inferior del intervalo de flexión recomendado es

$$y_{máx} = \frac{0.0005 \text{ in}}{\text{in de longitud}} \times 18 \text{ in} = 0.009 \text{ in}$$

El mismo cálculo se aplica a mediciones en mm.

$$y_{máx} = \frac{0.0005 \text{ mm}}{\text{mm de longitud}} \times 450 \text{ mm} = 0.225 \text{ mm}$$

Si no afecta adversamente la operación del sistema que contiene la transportadora, la flexión podría ser tan alta como

$$y_{máx} = \frac{0.003 \text{ in}}{\text{in de longitud}} \times 18 \text{ in} = 0.054 \text{ in [un poco menos de } \tfrac{1}{16} \text{ in]}$$

Con los valores métricos se obtiene

$$y_{\text{máx}} = \frac{0.003 \text{ mm}}{\text{mm de longitud}} \times 450 \text{ mm} = 1.35 \text{ mm}$$

Ahora, si la transportadora forma parte de una estación de transferencia de alta velocidad de una máquina ensambladora automática, es probable que estas flexiones sean excesivas porque la partes en la transportadora deben ser colocadas con precisión en cada estación. Si se pasa a los valores de "precisión moderada", los límites estarían en el intervalo de

$$y_{\text{máx}} = \frac{0.000\ 01 \text{ in}}{\text{in de longitud}} \times 18 \text{ in} = 0.000\ 18 \text{ in a } y_{\text{máx}} = \frac{0.0005}{\text{in de longitud}} \times 18 \text{ in} = 0.009 \text{ in}$$

Los límites correspondientes con mediciones métricas son 0.0045 mm a 0.225 mm. Estos límites son fáciles de alcanzar y deben aplicarse a cualquier pieza de maquinaria de precisión.

¿Qué pasaría si la viga fuera una parte de un sistema de guía inercial de precisión de una nave espacial? En este caso se aplicarían los valores de "alta precisión". El intervalo de flexión sería.

$$y_{\text{máx}} = \frac{0.000\ 001 \text{ in}}{\text{in de longitud}} \times 18 \text{ in} = 0.000\ 018 \text{ in a } y_{\text{máx}} = \frac{0.000\ 01}{\text{in de longitud}} \times 18 \text{ in} = 0.000\ 18 \text{ in}$$

Los límites correspondientes con mediciones métricas son 0.000 45 mm a 0.0045 mm. Éstas son, en realidad, magnitudes de precisión para flexiones de vigas.

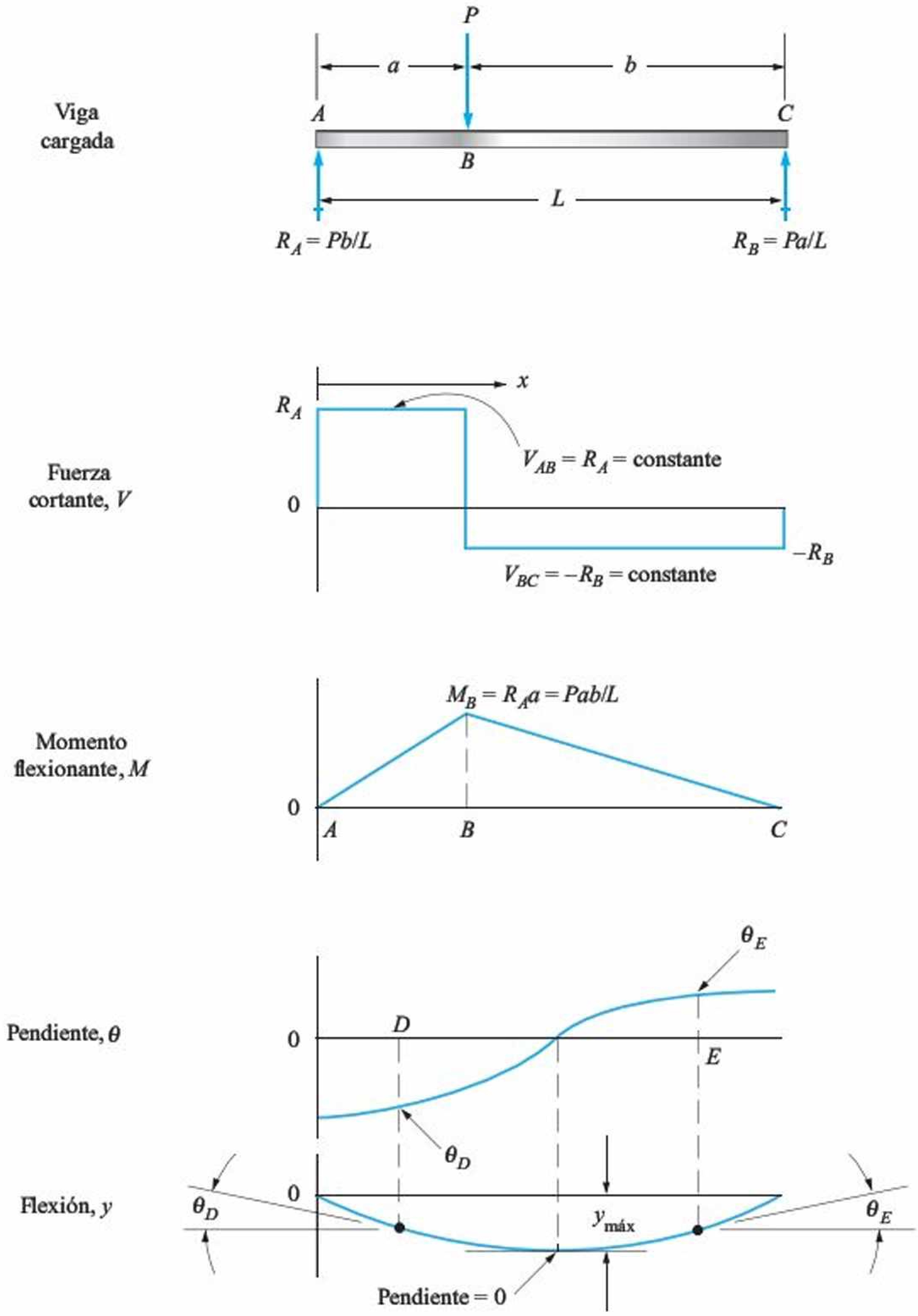
9–3 PRINCIPIOS GENERALES Y DEFINICIONES DE TÉRMINOS

Para describir de manera gráfica la condición de una viga que soporta un patrón de carga se utilizan cinco diagramas, como muestra la figura 9–5. Los primeros tres diagramas ya se utilizaron con anterioridad. El *diagrama de carga* es el diagrama de cuerpo libre donde se muestran todas las cargas externas y las reacciones en los apoyos. A partir de éste se desarrolló el *diagrama de fuerza cortante*, el cual permite calcular los esfuerzos cortantes en cualquier sección de una viga. El *diagrama de momento flexionante* es una gráfica de la variación del momento flexionante con la posición en la viga, incluidos los resultados utilizados para calcular el esfuerzo producido por flexión. El eje horizontal de estas gráficas es la posición en la viga, llamada x. Se acostumbra medir x con respecto al extremo izquierdo de la viga, aunque se puede utilizar cualquier punto de referencia.

Diagrama de flexión. Los últimos dos diagramas tienen que ver con la deformación de la viga por la influencia de las cargas. Conviene comenzar el análisis con el último diagrama, el *diagrama de flexión*, porque éste muestra la forma de la viga flexionada. En realidad, es la gráfica de la posición del eje neutro de la viga con respecto a su posición inicial. Se considera que la posición inicial es la línea recta entre los dos puntos de apoyo de la viga sin carga. La cantidad de flexión se llamará y, con los valores positivos medidos hacia arriba. Las vigas típicas que soportan cargas dirigidas hacia abajo, como la de la figura 9–5, experimentan flexiones dirigidas hacia abajo (negativas).

Diagrama de la pendiente. Una línea trazada tangencialmente en un punto de interés define la pendiente de la curva de flexión en dicho punto. La pendiente se indica como el ángulo θ, medido en radianes, con respecto a la horizontal, como la figura 9–5 muestra. La representación gráfica de la pendiente como una función de la posición en la viga es la *curva de la pendiente*, trazada bajo la curva del momento flexionante y sobre la curva de flexión. Observe en la viga dada que la pendiente de la porción izquierda de la curva de la flexión es negativa y que la de la porción derecha es positiva. El punto donde la línea tangente es horizontal

FIGURA 9–5 Cinco diagramas de viga.



tal es el punto de pendiente cero y define la ubicación de la flexión máxima. Esta observación se utilizará en el análisis del método del área–momento y del método de integración sucesiva, más adelante en este capítulo.

Radio de curvatura. La figura 9–6 muestra el radio de curvatura, R, en un punto particular. En vigas prácticas, la curvatura es mínima y el valor de R es muy grande. La forma de la curva de flexión se exagera con la finalidad de visualizar los principios y las variables que intervienen en el análisis. Recuerde que según la geometría analítica, el radio de curvatura en un punto es perpendicular a la línea trazada tangente a la curva en dicho punto.

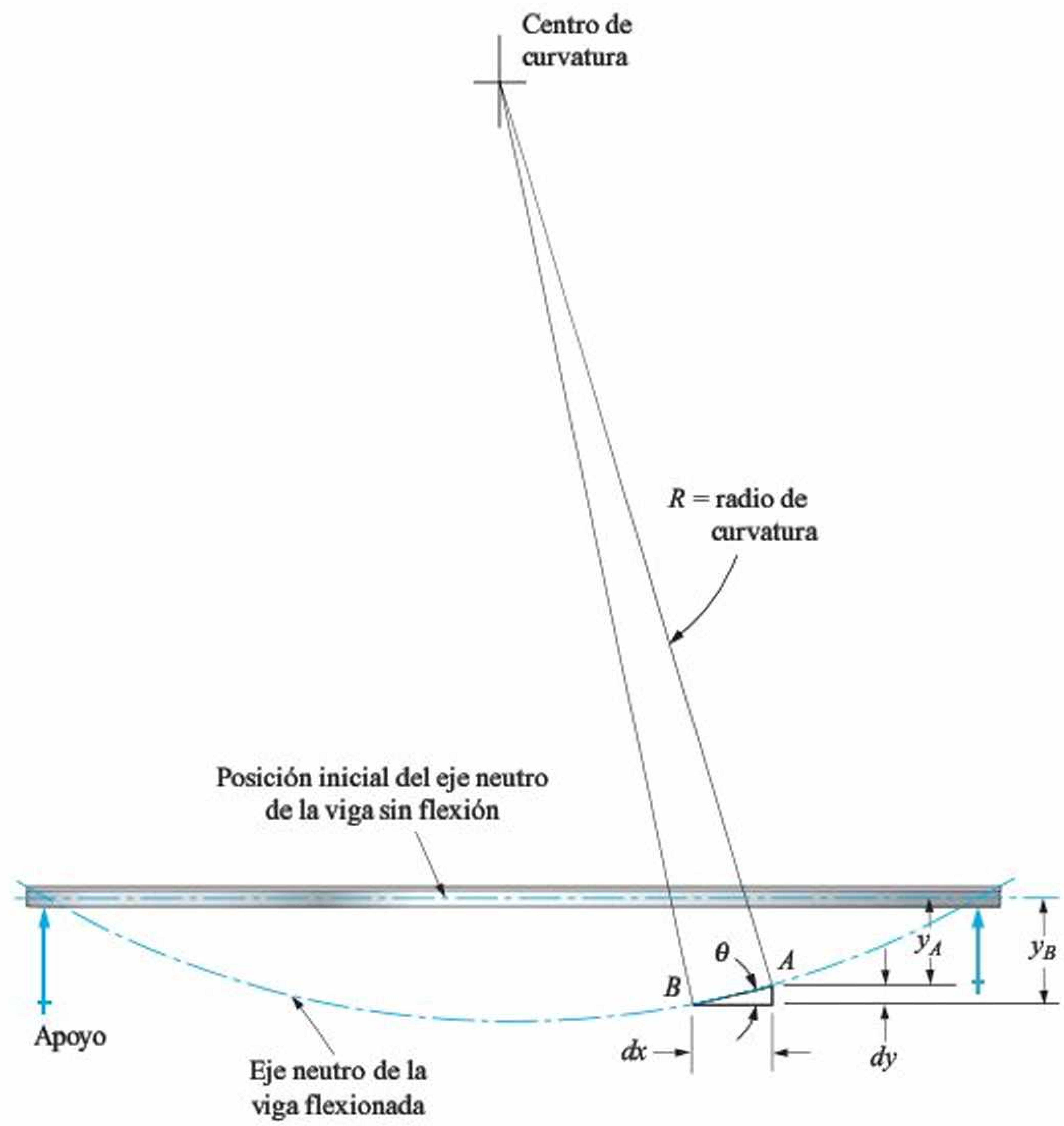


FIGURA 9–6
Ilustración del radio de curvatura y pendiente de la curva de flexión de una viga.

La relación entre pendiente y flexión también se ilustra en la figura 9–6. A lo largo de una distancia infinitesimal dx, la flexión cambia en una pequeña cantidad dy. Una pequeña parte de la curva de la flexión completa el triángulo rectángulo por lo que

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} \tag{9–1}$$

El valor absoluto de θ es muy pequeño porque la curvatura de la viga es mínima. Entonces, podemos sacar provecho de la observación de que para ángulos pequeños, $\tan\theta = \theta$. Entonces

$$\theta = \frac{dy}{dx} \tag{9–2}$$

Por consiguiente, se puede concluir que:

La pendiente en un punto de la curva de la flexión es igual a la razón de cambio de la flexión con respecto al cambio de posición de una viga.

Rigidez de una viga. Más adelante se demostrará que la cantidad de flexión de una viga es inversamente proporcional a su *rigidez*, indicada por el producto EI, donde

E = módulo de elasticidad del material de la viga
I = momento de inercia de la sección transversal de la viga con respecto al eje neutro

Puede serle útil si piensa en estos términos como sigue. El módulo de elasticidad, E, es la *rigidez del material*. El momento de inercia, I, es la *rigidez del perfil* de la viga. Como se señaló en el capítulo 6, I se define como el segundo momento del área de la sección transversal. Para reducir al mínimo la flexión de una viga deberá elegir un material con el módulo de elasticidad práctico más alto. Y deberá diseñar el perfil de modo que tenga el momento de inercia práctico máximo. En general, el perfil que es eficiente para reducir al mínimo los esfuerzos flexionantes, como se vio en el capítulo 7, también es bueno para reducir al mínimo las flexiones de la viga.

9–4 FLEXIONES DE VIGAS CON EL MÉTODO DE LA FÓRMULA

Para muchas configuraciones prácticas de cargas y apoyos de viga se han derivado fórmulas que permiten calcular la flexión en cualquier punto de una viga. El método de integración sucesiva o el método del área de momento, descritos más adelante, se puede utilizar para desarrollar las ecuaciones. Los apéndices A–23 y A–25 describen muchos ejemplos de fórmulas de flexiones de vigas.

Las fórmulas de flexión son válidas sólo en los casos en que la sección transversal de la viga es uniforme a todo lo largo de ella. La aplicación de las fórmulas se demostrará con ejemplos.

Vigas simplemente apoyadas. El apéndice A–23 incluye diez condiciones diferentes de carga en vigas simplemente apoyadas, es decir, vigas que cuentan con dos y sólo dos apoyos simples. Algunas son vigas saledizas. Con anterioridad demostramos que las vigas como ésas pueden ser analizadas en cuanto a los valores de las reacciones mediante ecuaciones estándar de equilibrio. Entonces, los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante se desarrollan con los métodos del capítulo, con los cuales se completa el análisis de esfuerzo de la viga, como se vio en los capítulos 7 y 8. Para valorar la aceptabilidad de un diseño de viga se tendrá que efectuar tanto el análisis del esfuerzo como el análisis de flexión. Las condiciones de carga que aparecen en el apéndice A–23 incluyen una sola carga concentrada, dos cargas concentradas, varias cargas distribuidas y un caso con un momento concentrado. El momento concentrado se podría desarrollar como en los ejemplos de la sección 5–10. La línea tenue delgada que aparece en los diagramas es el contorno de la forma de la viga flexionada, un tanto exagerada. Ésta sirve para visualizar dónde pueden aparecer los puntos críticos de flexión.

Observe los rótulos de las cargas y dimensiones en los diagramas de flexión de vigas. Es esencial que la viga real que se va a analizar concuerde con la forma general de un caso dado y que identifique con precisión las variables utilizadas en las fórmulas que aparecen a la derecha de los diagramas. En la mayoría de los casos, se dan fórmulas para la flexión máxima esperada, flexiones en los extremos de voladizos y flexiones en puntos de aplicación de cargas concentradas. Algunos casos incluyen fórmulas para flexión en cualquier punto seleccionado.

Observe especialmente la forma general de las fórmulas de flexión. Si bien algunas son más complejas que otras, se observan las siguientes características. La comprensión de estas observaciones sirve para tomar buenas decisiones cuando se diseñan vigas.

1. La variable y denota las deflexiones, las cuales son el cambio de posición del eje neutro de la viga desde su condición sin carga hasta su condición cargada final, medido perpendicular al eje neutro original.
2. Las flexiones hacia arriba son positivas, hacia abajo son negativas.
3. Cuando se utiliza la variable x, denota la posición horizontal en la viga, medida a partir de uno de los apoyos. En algunos casos, se indica una segunda variables de posición v, medida a partir del otro apoyo.
4. Las flexiones son proporcionales a la carga aplicada a la viga.
5. Las flexiones son inversamente proporcionales a la *rigidez* de la viga, definida como el producto de E, la rigidez del material del cual está hecha la viga, e I, el momento de inercia de la sección transversal de la viga, también llamada *rigidez de forma*.

6. Las flexiones son proporcionales al *cubo* de alguna dimensión de longitud crítica, por lo general el claro entre los apoyos o la longitud de un salidizo.

Vigas en voladizo. El apéndice A–24 incluye cuatro casos de vigas en voladizo que soportan cargas concentradas, cargas distribuidas o un momento concentrado. La flexión máxima obviamente ocurre en el apoyo libre de la viga. El extremo fijo restringe la viga contra la rotación en el apoyo, de modo que la pendiente de la curva de flexión es cero en dicho lugar.

Problema de ejemplo 9–1

Determine la deflexión máxima de una viga simplemente soportada que sostiene el cilindro hidráulico de una máquina utilizada para insertar bujes a presión en una pieza fundida, como se muestra en la figura 9–7. La fuerza ejercida durante la operación de inserción a presión es de 15 kN. La viga es rectangular, de 25 mm de espesor y 100 mm de altura y es de acero.

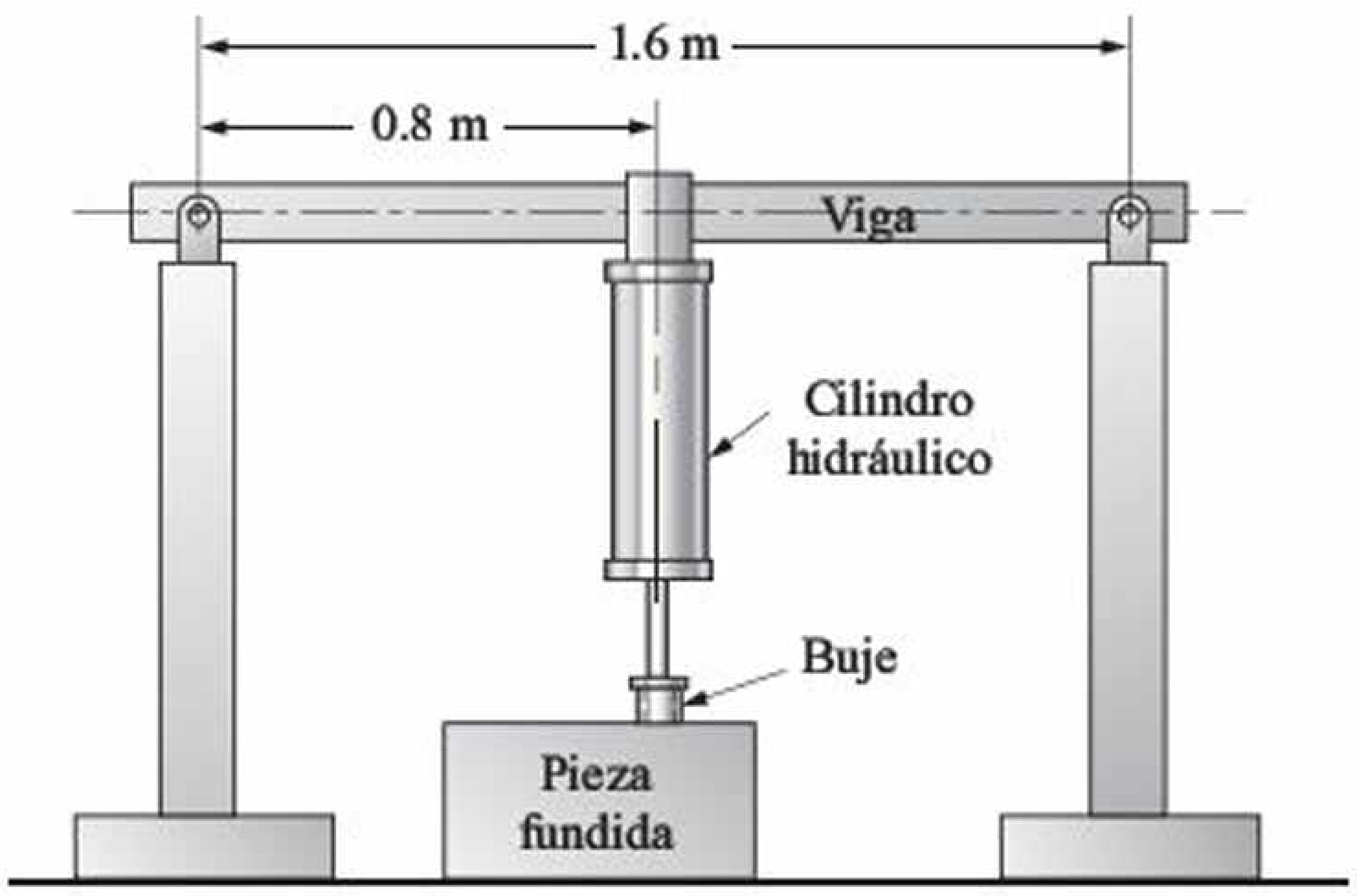


FIGURA 9–7 Viga del problema de ejemplo 9–1.

Solución

Objetivo Calcular la flexión máxima de la viga dada.

Datos El sistema que aparece en la figura 9–7. Carga $= P = 15$ kN. Espacio entre vigas $= L = 1.60$ m. Sección transversal de la viga: 25 mm de ancho por 100 mm de altura. Viga de acero.

Análisis La viga dada se puede considerar como una viga simplemente apoyada con una fuerza concentrada aplicada dirigida hacia arriba en su centro. Este problema corresponde al caso *a* del apéndice A–23.

Resultados Con la fórmula del apéndice A–23–a, calculamos la flexión máxima como sigue

$$y = \frac{-PL^3}{48EI}$$

Pero P es negativa porque actúa hacia arriba. En el apéndice A–14, para acero, $E = 207$ GPa $= 207 \times 10^9$ N/m^2. Para la viga rectangular,

$$I = \frac{(25)(100)^3}{12} = 2.083 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Entonces

$$y = \frac{-PL^3}{48EI} = \frac{-(-15 \times 10^3\ \text{N})(1.6\ \text{m})^3}{48(207 \times 10^9\ \text{N/m}^2)(2.083 \times 10^6\ \text{mm}^4)} \times \frac{(10^3\ \text{mm})^5}{\text{m}^5}$$

$$y = 2.97\ \text{mm}$$

Comentario Ésta es una flexión relativa elevada que podría afectar adversamente la precisión de la operación de inserción del buje. Convendría evaluar la relación de la flexión al claro de esta viga y compararla con las recomendaciones dadas en la sección 9–2.

$$y_{máx}/L = 2.97\ \text{mm}/1600\ \text{mm} = 0.001\,86$$

Este valor se encuentra dentro del intervalo de flexiones aceptables para la parte general de una máquina. Sin embargo, para colocar el buje con precisión en la pieza fundida, se requiere una mayor precisión. Se deberá considerar un perfil de viga más rígido (uno con un momento de inercia, I, más elevado). Por otra parte, se podría modificar el sistema de apoyo para acortar el claro entre los apoyos, una solución deseable porque la flexión es proporcional al cubo de la longitud. Si se supone que la operación general del sistema permite rediseñar el claro para que sea de la mitad del claro dado (0.80 m), la flexión sería de sólo 0.37 mm, 1/8 de la del diseño dado. Si se verifica la relación de flexión al claro de nuevo se obtiene

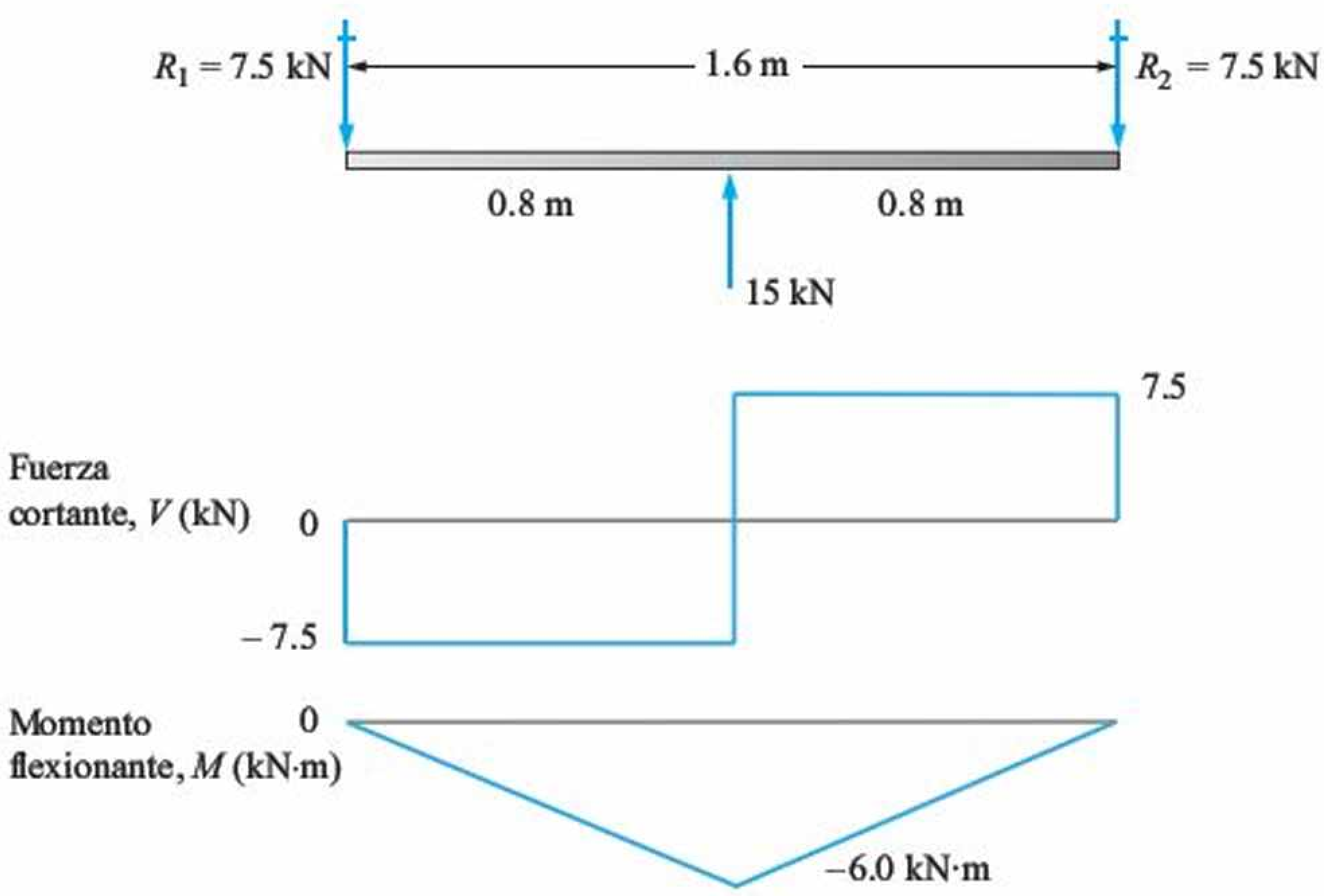
$$y_{máx}/L = 0.37\ \text{mm}/800\ \text{mm} = 0.000\,46$$

Este valor sitúa al diseño dentro del intervalo de precisión moderada más deseable.

También se deberá calcular el esfuerzo en la viga para valorar la seguridad del diseño. La figura 9–8 muestra la carga, los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante del diseño de viga original a partir de cual encontramos que el momento flexionante máximo en la viga es $M = 6.00$ kN·m. Se puede utilizar la fórmula de la flexión para calcular el esfuerzo.

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{(6.00\ \text{kN·m})(50\ \text{mm})}{2.083 \times 10^6\ \text{mm}^4} \cdot \frac{10^3\ \text{N}}{\text{kN}} \cdot \frac{10^3\ \text{mm}}{\text{m}} = 144\ \text{MPa}$$

FIGURA 9–8
Diagramas de la viga del problema de ejemplo 9–1.



Éste es un nivel de esfuerzo relativamente elevado. Para continuar el análisis, observe que la viga se vería sometida a un esfuerzo flexionante repetido. Por consiguiente, el esfuerzo de diseño recomendado es

$$\sigma_d = s_u/8$$

Con $\sigma_d = \sigma$, se puede determinar la resistencia máxima requerida.

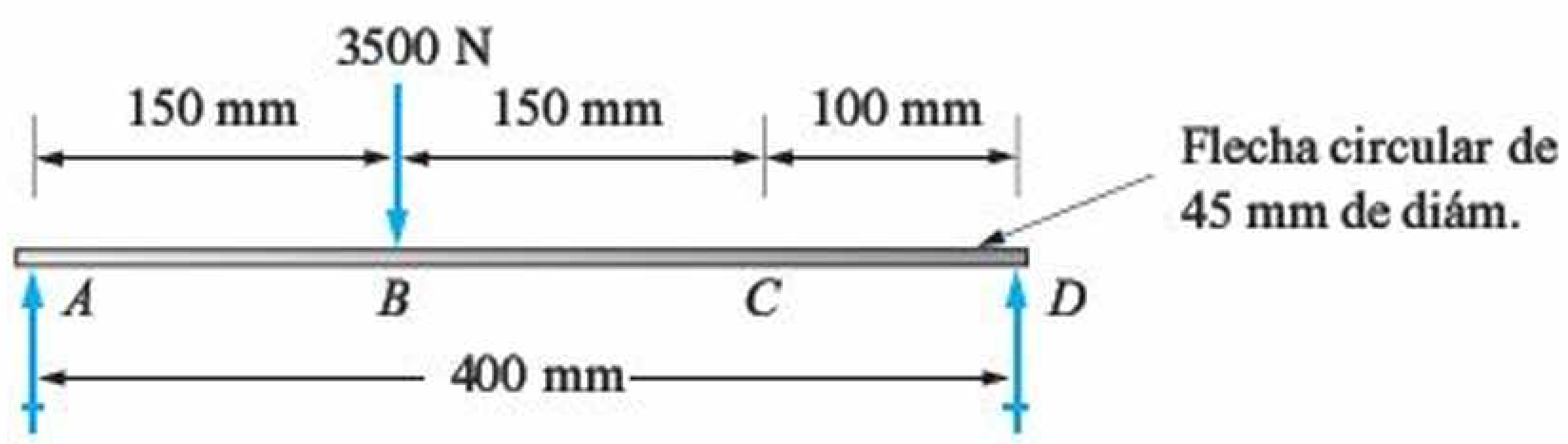
$$s_u = 8\sigma = (8)(144\ \text{MPa}) = 1152\ \text{MPa}$$

Si consulta el apéndice A–14 en busca de las propiedades de acero seleccionados, podría especificar acero AISI 4140 OQT 900 cuya resistencia máxima es de 1281 MPa. Éste es un acero térmicamente tratado bastante caro. Un rediseño del tiempo de viga analizado para limitar la flexión reduciría el esfuerzo y permitiría utilizar un acero más barato.

Problema de ejemplo 9–2

Una flecha circular, de 45 mm de diámetro, soporta una carga de 3500 N, como se muestra en la figura 9–9. Si la flecha es de acero, calcule la flexión en el punto de aplicación de la carga y en el punto *C*, a 100 mm del extremo derecho de la flecha. También calcule la flexión máxima.

FIGURA 9–9 Flecha del problema de ejemplo 9–2.



Solución

Objetivo — Calcular la flexión en los puntos *B* y *C*, y en el punto donde ocurre la flexión máxima.

Datos — La viga de la figura 9–9. Carga = P = 3500 N
La viga es una flecha circular; D = 45 mm. Viga de acero.

Análisis — El apéndice A–23–b es aplicable porque la viga está simplemente apoyada y soporta una carga concentrada única en un punto alejado del punto medio de la viga.

Resultados — **En el punto *B*.** Se aplica la fórmula siguiente.

$$y_B = \frac{-Pa^2b^2}{3EIL}$$

Observe que la dimensión a es el segmento más largo entre la carga y un apoyo; b es el más corto. Exprese todos los datos en N y mm para que haya consistencia en las unidades.

Datos:

$$L = 400\ \text{mm}; \quad a = 250\ \text{mm}; \quad b = 150\ \text{mm}$$

$$I = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi(45\ \text{mm})^4}{64} = 0.201 \times 10^6\ \text{mm}^4$$

$$E = \frac{207 \times 10^9\ \text{N}}{\text{m}^2} \times \frac{1\ \text{m}^2}{(10^3\ \text{mm})^2} = 207 \times 10^3\ \text{N/mm}^2$$

Ahora y_B estará en mm.

$$y_B = \frac{-Pa^2b^2}{3EIL} = \frac{-(3500)(250)^2(150)^2}{3(207 \times 10^3)(0.201 \times 10^6)(400)} = -0.0985\ \text{mm}$$

En el punto *C*: Observe que C se encuentra en el segmento más largo. Los datos anteriores son aplicables. Además, $x = 100$ mm del apoyo derecho al punto C.

$$y_c = \frac{-Pbx}{6EIL}(L^2 - b^2 - x^2)$$

$$y_c = \frac{-(3500)(150)(100)}{6(207 \times 10^3)(0.201 \times 10^6)(400)}(400^2 - 150^2 - 100^2)$$

$$y_c = -0.0670 \text{ mm}$$

Flexión máxima: El apéndice A–23–b indica que la flexión máxima ocurre en el segmento más largo de la viga a una distancia x_1 del apoyo, donde,

$$x_1 = \sqrt{a(L + b)/3} = \sqrt{(250)(400 + 150)/3} = 214 \text{ mm}$$

Entonces la flexión en dicho punto es

$$y_{máx} = \frac{-Pab(L + b)\sqrt{3a(L + b)}}{27(EIL)}$$

$$y_{máx} = \frac{-(3500)(250)(150)(400 + 150)\sqrt{3(250)(400 + 150)}}{(27)(207 \times 10^3)(0.201 \times 10^6)(400)}$$

$$y_{máx} = -0.103 \text{ mm}$$

Comentario Los resultados se muestran en la figura–9–10.

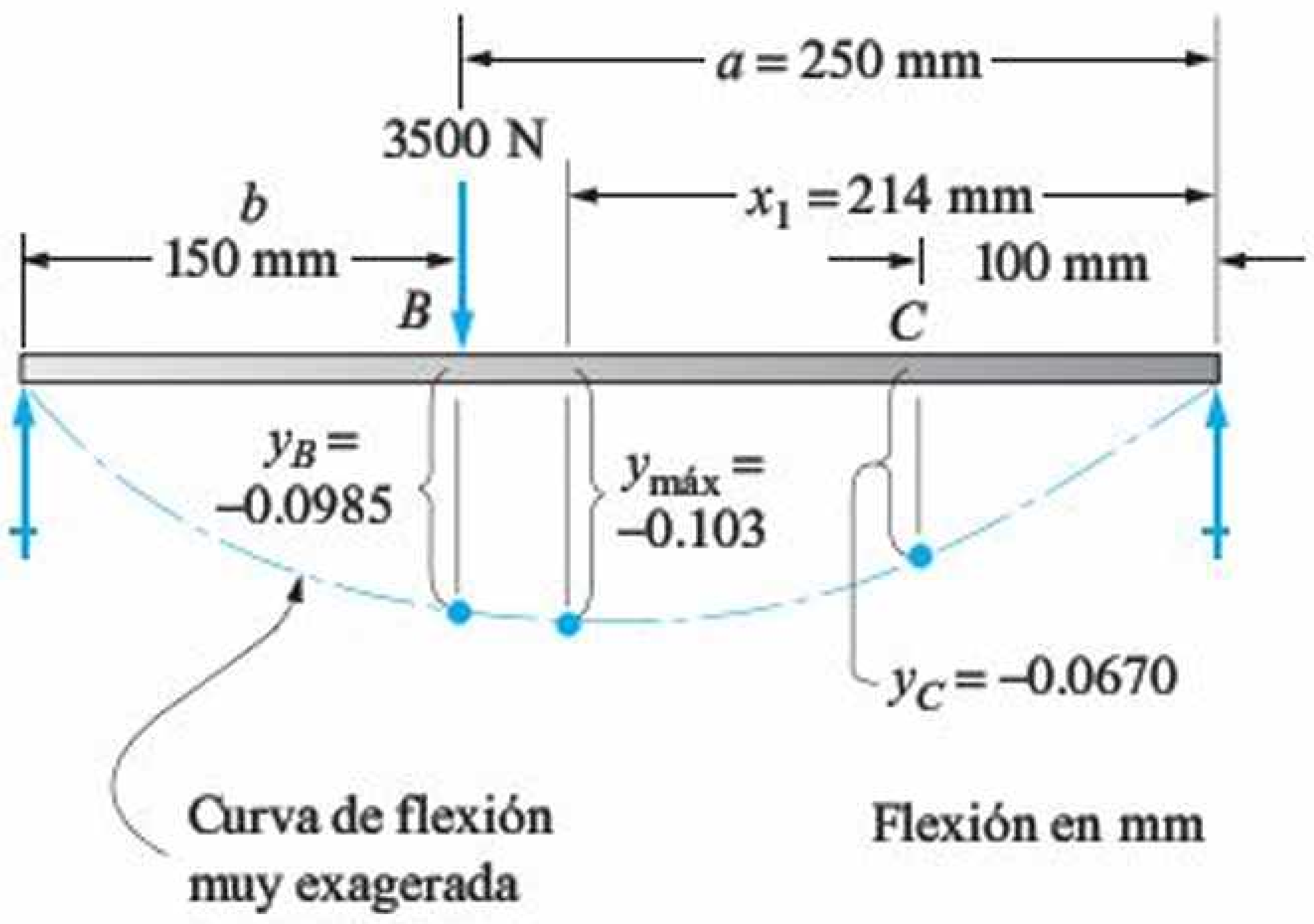


FIGURA 9–10 Curva de deflexión de la viga del problema de ejemplo 9–2.

Fórmulas para vigas estáticamente indeterminadas. El apéndice A–25 incluye varios ejemplos de vigas estáticamente indeterminadas y fórmulas para calcular las reacciones en apoyos y la flexión en un punto cualquiera de las vigas. Estas fórmulas se aplican directamente, como se demostró para vigas estáticamente determinadas. También incluye diagramas de fuerza cortante y momento flexionante y las fórmulas necesarias para calcular los valores en puntos críticos.

Las características generales de las vigas estáticamente indeterminadas son bastante diferentes de los diseños estáticamente determinados estudiados en capítulos anteriores. Esto es particularmente cierto por lo que se refiere a la forma de calcular los momentos y fuerzas de reacción en los apoyos, la distribución del momento flexionante con respecto a la posición en la viga, la magnitud de la flexión en varios puntos de la viga y la forma general de la curva de flexión.

Las fórmulas para calcular las reacciones, la fuerza cortante y los momentos flexionantes dados en el apéndice A–25 se derivaron siguiendo los principios expuestos en el capítulo 5 con la debida consideración de la naturaleza estáticamente determinada de las condiciones de carga y apoyo. En particular, se utilizó el *teorema de los tres momentos* de la sección 5–12 para las vigas continuas. Las técnicas de superposición mostradas más adelante en este capítulo se utilizaron para desarrollar las ecuaciones de flexión.

Cuando repase las fórmulas incluidas en el apéndice A–25, observe las siguientes características generales.

Características generales de vigas estáticamente indeterminadas

Vigas en voladizo apoyadas (Casos *a* a *d* en el apéndice A–25)

1. El extremo fijo constituye un apoyo rígido que se opone a cualquier tendencia de la viga a girar. Por lo tanto, en general allí existe un momento flexionante significativo.
2. Se considera que el segundo apoyo es un apoyo simple. Si el apoyo simple está en el extremo libre de la viga, como en los casos *a*, *b* y *c*, el momento flexionante es cero allí.
3. Si la viga en voladizo apoyada tiene un extremo saliente, como en el caso *d*, el momento flexionante máximo ocurre en el apoyo simple. Por lo general, la forma de la curva del momento flexionante es la opuesta a la correspondiente a los casos sin salidizo.
4. Existe un punto de momento flexionante cero en una viga en voladizo apoyada, por lo general cerca del extremo fijo.

Vigas con extremos fijos (Casos *e*, *f* y *g* en el apéndice A–25)

1. Los momentos flexionantes en los extremos fijos no son cero y pueden ser el máximo en la viga.
2. Cuando las cargas actúan dirigidas hacia abajo en una viga de extremo fijo, los momentos flexionantes en los extremos son *negativos*, lo que indica que la curva de flexión cerca de los extremos es *cóncava hacia abajo*.
3. Cuando las cargas actúan dirigidas hacia abajo, los momentos flexionantes cerca del punto medio de vigas de extremo fijo son *positivos*, lo que indica que la curva de flexión en ese lugar es *cóncava hacia arriba*.
4. En general existen dos puntos de momento flexionante cero en vigas de extremo fijo.
5. La pendiente de la curva de flexión en una viga de extremo fijo es cero en los extremos fijos por la restricción creada allí contra la rotación.
6. Los medios de sujetar una viga de extremo fijo en sus apoyos deben ser capaces de resistir los momentos flexionantes y las fuerzas cortantes en dichos puntos. Se deberá consultar el capítulo 13 sobre conexiones en cuanto a las técnicas de diseño y análisis de las conexiones que deben resistir los momentos.

Vigas continuas (Casos *h*, *i* y *j* en el apéndice A–25)

1. Los puntos de momento flexionante máximo positivo en general ocurren cerca del punto medio de los claros entre los apoyos.
2. Los puntos de momento flexionante negativo máximo en general ocurren en los apoyos interiores y éstos a menudo son los momentos flexionantes máximos.
3. Sobre todo en el caso de vigas continuas largas, con frecuencia es económicamente deseable diseñar las dimensiones y perfil de la sección transversal para que refuerce las secciones donde ocurren los momentos flexionantes máximos para responder a los valores locales elevados. Un ejemplo sería diseñar el perfil de la viga principal para que soporte el momento flexionante máximo positivo entre los apoyos y luego añadir placas de refuerzo a las caras superior e inferior de viga cerca de los apoyos, para incrementar el momento de inercia y el módulo de sección en las regiones de momento flexionante elevado. Otro método sería incrementar el peralte de la viga cerca de los apoyos. Los pasos elevados en carreteras y los puentes sobre ríos con frecuencia se diseñan con estas características.
4. En los casos en que las vigas continuas largas deban ser formadas en secciones que luego se sujetan entre sí en el sitio, es posible que se desee colocar la conexión cerca de un punto de momento flexionante cero para simplificar el diseño de la conexión.

9–5 COMPARACIÓN DE LOS TIPOS DE APOYO DE VIGAS

En los siguientes ejemplos demostramos cómo se utilizan las diversas fórmulas de los apéndices A–23, A–24 y A–25 y también generamos datos para comparar el desempeño de cuatro tipos diferentes de apoyo en vigas para lograr el mismo objetivo; es decir, soportar una carga dada a una distancia dada de uno o dos apoyos. La comparación se basa en la magnitud del esfuerzo flexionante y la flexión en las cuatro vigas hechas del mismo material, forma y tamaño. La viga que funcione mejor, entonces, es aquella con el esfuerzo más bajo y la flexión mínima.

Los parámetros de la comparación son los siguientes:

1. Los cuatro tipos de apoyo que se calcularán son:
   a. La viga en voladizo
   b. La viga simplemente apoyada
   c. La viga en voladizo apoyada
   d. La viga de extremo fijo
2. Cada viga tiene que soportar una carga concentrada estática única de 1200 lb.
3. La carga se tiene que aplicar a una distancia de 30 in de cualquier apoyo.
4. Cada viga será de acero estructural ASTM A36 para el cual se utilizarán las siguientes propiedades: $s_y = 36\,000$ psi; $E = 30 \times 10^6$ psi.
5. El esfuerzo flexionante máximo permisible se basará en el estándar AISC,

$$\sigma_d = 0.66 s_y = 0.66(36\,000 \text{ psi}) = 23\,760 \text{ psi}$$

6. La flexión máxima permisible se basará en un límite de $L/360$, donde L es la longitud de la viga.

Se puede demostrar que, de los cuatro tipos de viga y sistemas de apoyo considerados, la viga en voladizo tiene el desempeño más deficiente en cuanto a esfuerzo y flexión. Por consiguiente, iniciaremos el proceso de comparación especificando el perfil y tamaño de la sección transversal que garantice que la viga en voladizo satisface los requerimientos estipulados en los puntos 5 y 6. Entonces, se utilizará el mismo tamaño y forma para los otros tres diseños. Los cinco ejemplos siguientes generan los resultados para la comparación deseada.

Problema de ejemplo 9–3: Diseño y análisis de la viga en voladizo.
Problema de ejemplo 9–4: Análisis de la viga simplemente apoyada.
Problema de ejemplo 9–5: Análisis de la viga en voladizo apoyada.
Problema de ejemplo 9–6: Análisis de la viga de extremo fijo.
Problema de ejemplo 9–7: Comparación de los cuatro diseños de viga.

Problema de ejemplo 9–3

Para la viga en voladizo mostrada en la figura 9–11, especifique el perfil acanalado de acero estándar más ligero que limite el esfuerzo flexionante a 23760 psi y la flexión máxima a $L/360$. El canal se colocará con las alas hacia abajo para que el costado plano sirva para aplicar la carga. Para el perfil de viga seleccionado, calcule los valores máximos del esfuerzo y flexión.

Solución

Objetivo Diseñar la viga en voladizo y calcular el esfuerzo y flexión resultantes.

Datos Las dimensiones y carga de la viga mostrada en la figura 9–11. El perfil de la viga tiene que ser un canal de acero estándar con las alas hacia abajo.

$$\sigma_d = 23\,760 \text{ psi}; \quad y_{\text{máx}} = L/360 \quad \text{con } L = L_c = 30 \text{ in}$$

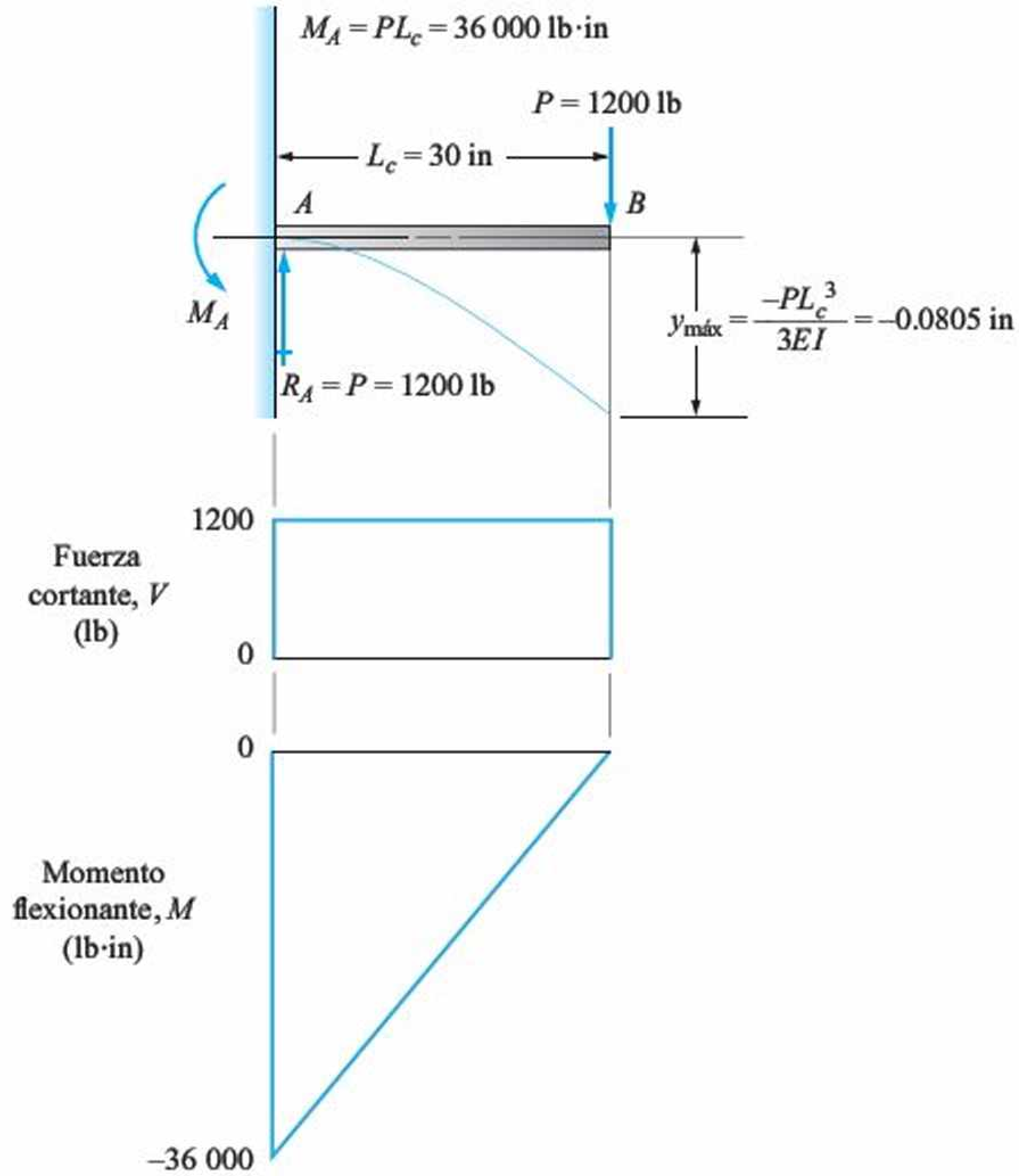


FIGURA 9–11
Viga en voladizo.

Análisis La figura 9–11 contiene la carga, los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante donde se ve que $M_{máx} = 36\,000$ lb·in. Entonces,

$$\sigma = \sigma_d = M/S$$

Análisis del esfuerzo: Para que el esfuerzo sea seguro, el módulo de sección requerido es

$$S = M/\sigma_d = (36\,000\,\text{lb}\cdot\text{in})/(23\,760\,\text{lb/in}^2) = 1.515\,\text{in}^3$$

Según el apéndice A–6, considerando las propiedades con respecto al eje Y-Y, seleccionamos el canal C12 × 25 como la sección adecuada más ligera. Sus propiedades son

$$S = 1.88\,\text{in}^3; \qquad I = 4.47\,\text{in}^4; \qquad w = 25\,\text{lb/ft}$$

Flexión: La deflexión máxima permisible es

$$y_{máx} = -L/360 = -(30\,\text{in})/360 = -0.0833\,\text{in}$$

Según el apéndice A–24, la fórmula de la deflexión máxima es

$$y_{máx} = -PL^3/3EI \qquad \text{en el extremo de la viga en voladizo}$$

Entonces el momento de inercia requerido es

$$I = -PL^3/3Ey_{máx}$$
$$I = \frac{(1200\ \text{lb})(30\ \text{in})^3}{3(30 \times 10^6)(-0.0833\ \text{in})} = 4.32\ \text{in}^4$$

El perfil previamente seleccionado es satisfactorio para flexión.

Esfuerzo flexionante real:

$$\sigma = M/S = (36000\ \text{lb}\cdot\text{in})/(1.88\ \text{in}^3) = 19150\ \text{psi}$$

Flexión real:

$$y_{máx} = \frac{-PL^3}{3EI} = \frac{-(1200\ \text{lb})(30\ \text{in})^3}{3(30 \times 10^6\ \text{lb/in}^2)(4.47\ \text{in}^4)} = -0.0805\ \text{in}$$

Resultados *Resumen de los resultados*:
Perfil de la viga: canal C12 × 25 de acero estándar

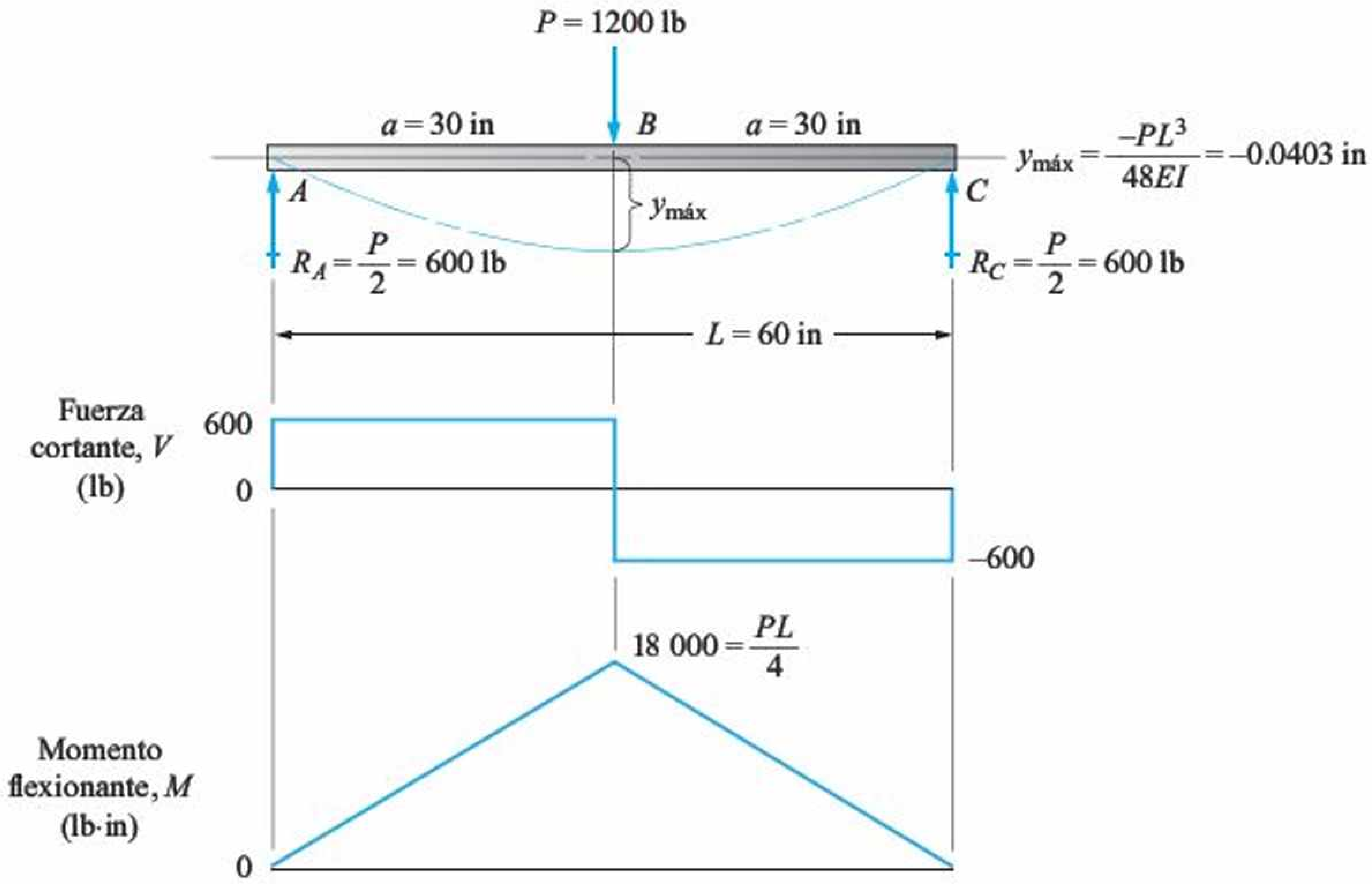
$$\sigma = 19\ 150\ \text{psi}$$
$$y_{máx} = -0.0805\ \text{in}$$

Comentario Estos resultados se compararán con los diseños de los ejemplos siguientes.

Problema de ejemplo 9–4

La viga simplemente apoyada mostrada en la figura 9–12 tiene que hacerse de un canal C12 × 25 de acero estándar, con las alas hacia abajo. Calcule los valores máximos del esfuerzo y la flexión y compárelos con los resultados del problema de ejemplo 9–3 de la viga en voladizo.

FIGURA 9–12 Viga simplemente apoyada.



Solución

Objetivo: Calcular el esfuerzo y la flexión máximos. Comparar con los resultados de la viga en voladizo.

Datos: Las dimensiones de la viga y carga mostradas en la figura 9–12. El perfil de la viga es un canal C12 × 25 de acero estándar, con alas hacia abajo.
Propiedades de la viga: $S = 1.88\ \text{in}^3$; $I = 4.47\ \text{in}^4$

Análisis: En la figura 9–12 se ve que $M_{máx} = 18\,000$ lb·in. Entonces,
Esfuerzo flexionante real:

$$\sigma = M/S = (18\,000\ \text{lb}\cdot\text{in})/(1.88\ \text{in}^3) = 9575\ \text{psi}$$

Flexión real:

$$y_{máx} = \frac{-PL^3}{48EI} = \frac{-(1200\ \text{lb})(60\ \text{in})^3}{48(30 \times 10^6\ \text{lb/in}^2)(4.47\ \text{in}^4)} = -0.0403\ \text{in}$$

Resultados: *Comparación de los resultados con los de la viga en voladizo*: Si se utiliza el subíndice *1* para la viga en voladizo y *2* para la viga en voladizo apoyada se tiene,

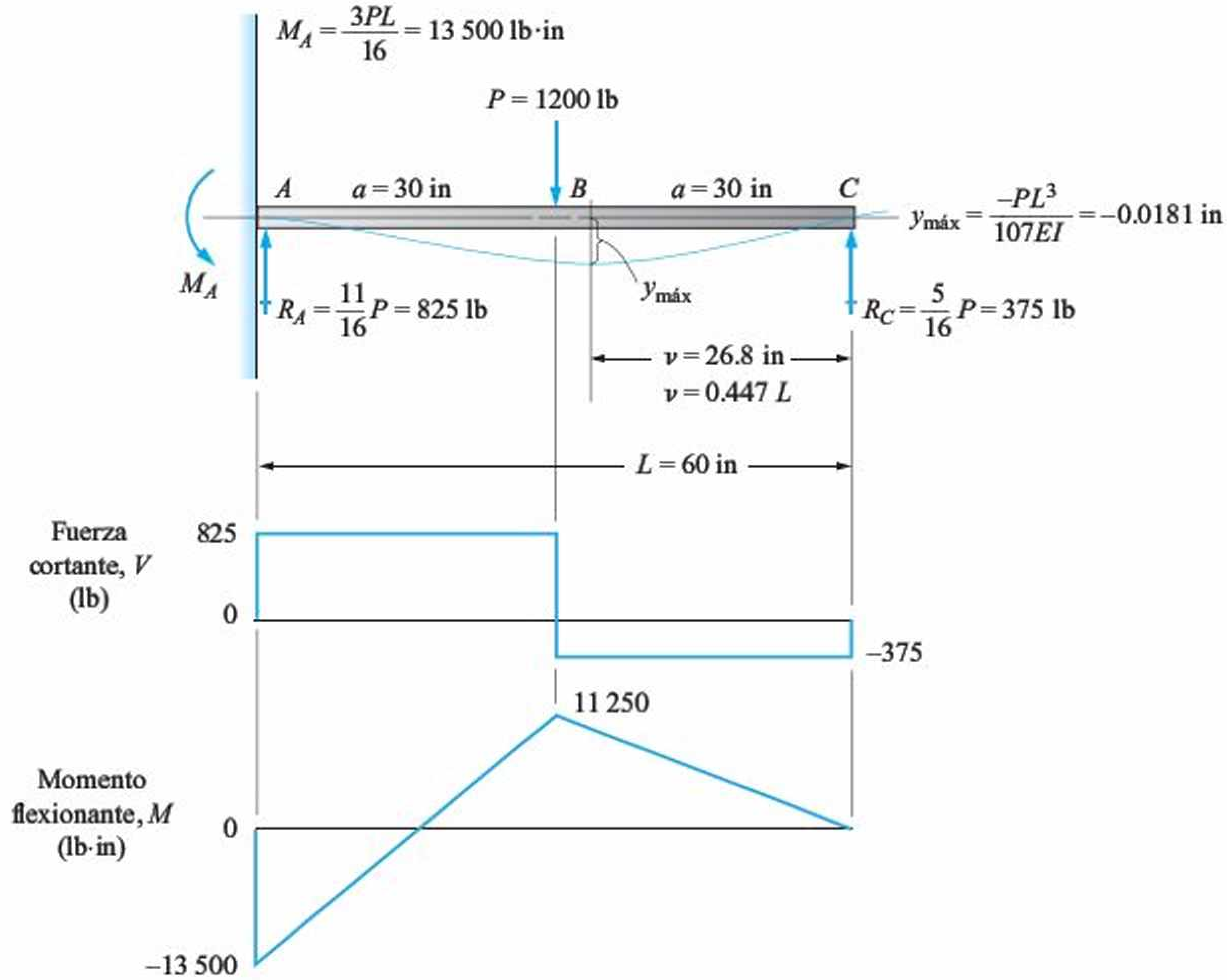
$$\sigma_2/\sigma_1 = (9575\ \text{psi})/(19\,150\ \text{psi}) = 0.50$$
$$y_2/y_1 = (-0.0403\ \text{in})/(-0.0805\ \text{in}) = 0.50$$

Comentario: Estos resultados se compararán con los demás diseños del problema de ejemplo 9–7.

Problema de ejemplo 9–5

La viga con extremos fijos o empotrada mostrada en la figura 9–14 tiene que hacerse con un canal C12 × 25 de acero estándar, con alas hacia abajo. Calcule los valores máximos esperados del esfuerzo y flexión y compárelos con los resultados del problema de ejemplo 9–3 de la viga en voladizo.

FIGURA 9–13
Viga en voladizo apoyada.



Solución

Objetivo: Calcular el esfuerzo y la flexión máximos. Comparar con los resultados de la viga en voladizo.

Datos: Las dimensiones y carga de la viga mostrada en la figura 9–12. El perfil de la viga es un canal C12 × 25 de acero estándar con las patas hacia abajo.
Propiedades de la viga: $S = 1.88\ \text{in}^3$; $I = 4.47\ \text{in}^4$.

Análisis: En la figura 9–12 se ve que $M_{máx} = 13\ 500$ lb·in. Entonces,
Esfuerzo flexionante real:

$$\sigma = M/S = (13\,500\ \text{lb}\cdot\text{in})/(1.88\ \text{in}^3) = 7180\ \text{psi}$$

Deflexión real: Según el apéndice A–25(a).

$$y_{máx} = \frac{-PL^3}{107EI} = \frac{-(1200\ \text{lb})(60\ \text{in})^3}{107(30 \times 10^6\ \text{lb/in}^2)(4.47\ \text{in}^4)} = -0.0181\ \text{in}$$

Resultados: *Comparación de los resultados con los de la viga en voladizo*. Si se utiliza el subíndice *1* para la viga en voladizo y *3* para la viga empotrada,

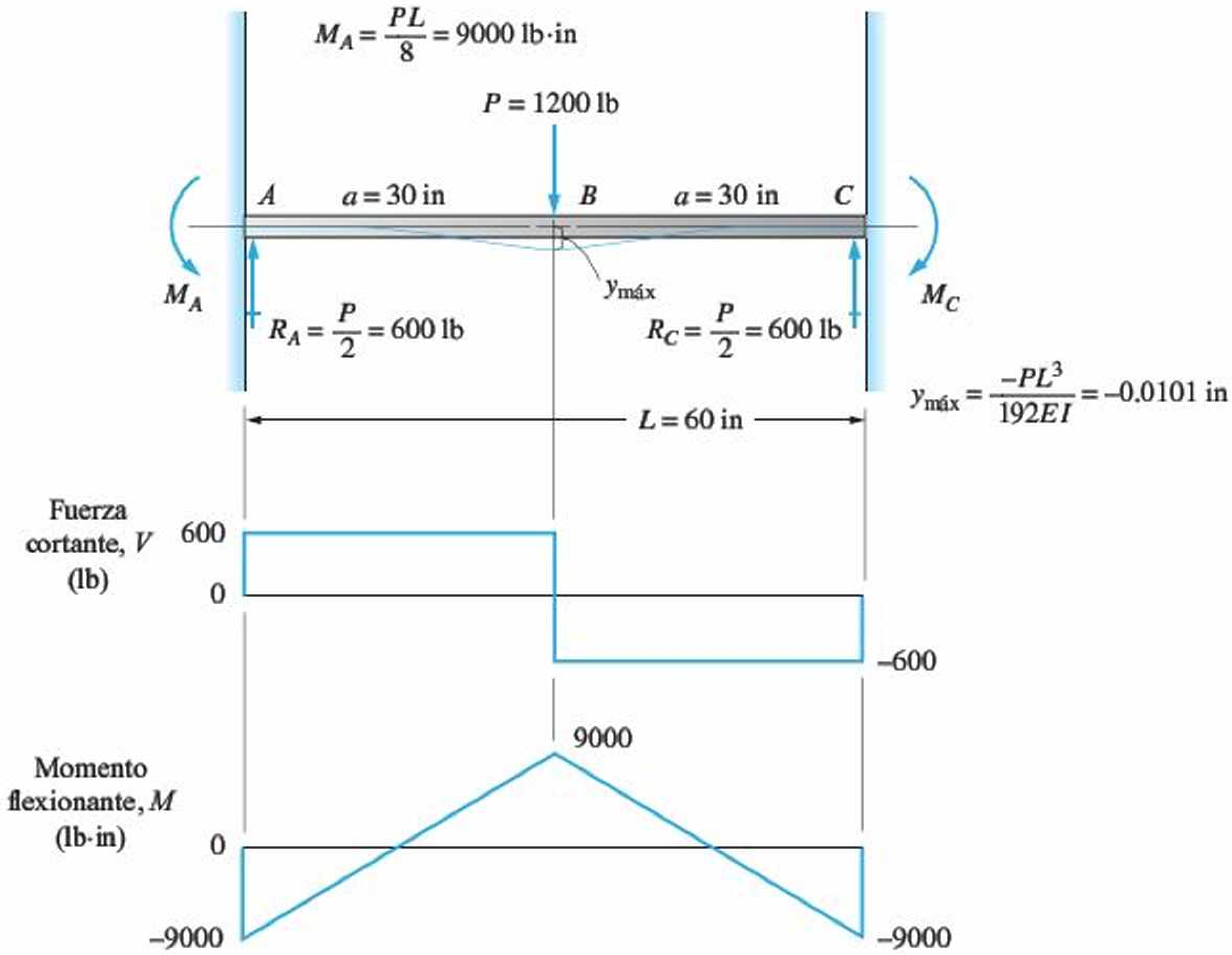
$$\sigma_3/\sigma_1 = (7180\ \text{psi})/(19\ 150\ \text{psi}) = 0.375$$
$$y_3/y_1 = (-0.0181\ \text{in})/(-0.0805\ \text{in}) = 0.225$$

Comentario: Estos resultados se compararán con los diseños del problema de ejemplo 9–7.

Problema de ejemplo 9–6

La viga de extremo fijo mostrada en la figura 9–14 se deberá hacer con canal C12 × 25 de acero estándar, con alas hacia abajo. Calcule los valores máximos del esfuerzo y la flexión y compárelos con los resultados del problema de ejemplo 9–3 de la viga en voladizo.

FIGURA 9–14
Viga empotrada.



Solución Objetivo Calcular el esfuerzo y la flexión máximos. Comparar con los resultados de la viga en voladizo.

Datos Las dimensiones y carga de la viga mostrada en la figura 9–14. El perfil de la viga es un canal C12 $\times$ 25 de acero estándar con las patas hacia abajo.
Propiedades de la viga: $S = 1.88$ in³; $I = 4.47$ in⁴.

Análisis En la figura 9–14 se ve que $M_{máx} = 9000$ lb·in. Entonces,
Esfuerzo flexionante real:

$$\sigma = M/S = (9000\,\text{lb·in})/(1.88\,\text{in}^3) = 4787\,\text{psi}$$

Flexión real: Según el apéndice A–25(e).

$$y_{\max} = \frac{-PL^3}{192EI} = \frac{-(1200\,\text{lb})(60\,\text{in})^3}{192(30 \times 10^6\,\text{lb/in}^2)(4.47\,\text{in}^4)} = -0.0101\,\text{in}$$

Resultados *Comparación de los resultados con los de la viga en voladizo*. Si se utiliza el subíndice *1* para la viga en voladizo y *4* para la viga empotrada,

$$\sigma_4/\sigma_1 = (4787\,\text{psi})/(19\,150\,\text{psi}) = 0.250$$
$$y_4/y_1 = (-0.0101\,\text{in})/(-0.0805\,\text{in}) = 0.125$$

Comentario Estos resultados se compararán con los diseños del problema de ejemplo 9–7.

Problema de ejemplo 9–7 Compare el comportamiento de la cuatro vigas mostradas en la figuras 9–11 a 9–14 con respecto a fuerzas cortantes, momentos flexionantes y la flexión máxima. Use los resultados de los problemas ejemplo 9–3 a 9–6.

Solución Objetivo Comparar el desempeño de las cuatro vigas.

Datos Los diseños de viga mostrados en las figuras 9–11 a 9–14. Los resultados de los problemas ejemplo 9–3 a 9–6.

Análisis La figura 9–15 muestra la comparación.

Resultados En el lado izquierdo de la figura 9–15 se muestran las curvas de la flexión, la fuerza cortante y el momento flexionante como una función de la posición en las cuatro vigas diseñadas superpuestas entre sí. En cada caso, es obvio que la viga en voladizo produce el valor más elevado por un margen significativo. Del lado derecho aparecen gráficas de barras del desempeño relativo donde a los valores de flexión, fuerza cortante y momento flexionante de la viga en voladizo se les asigna un valor de 1.0.

Comentario Los resultados mostrados en la figura 9–15 indican que conviene contar con dos apoyos en lugar de uno si ello es práctico. También es muy conveniente contar con dos apoyos fijos o empotrados en la viga, ya que de ese modo se produce sólo $\frac{1}{8}$ de la flexión, $\frac{1}{2}$ de la fuerza cortante y $\frac{1}{4}$ del momento flexionante en comparación con la viga en voladizo con una carga, distancias de la carga al apoyo, perfil de la viga y tamaño dados. Por supuesto, es práctico contar con el segundo apoyo o los extremos fijos o empotrados.

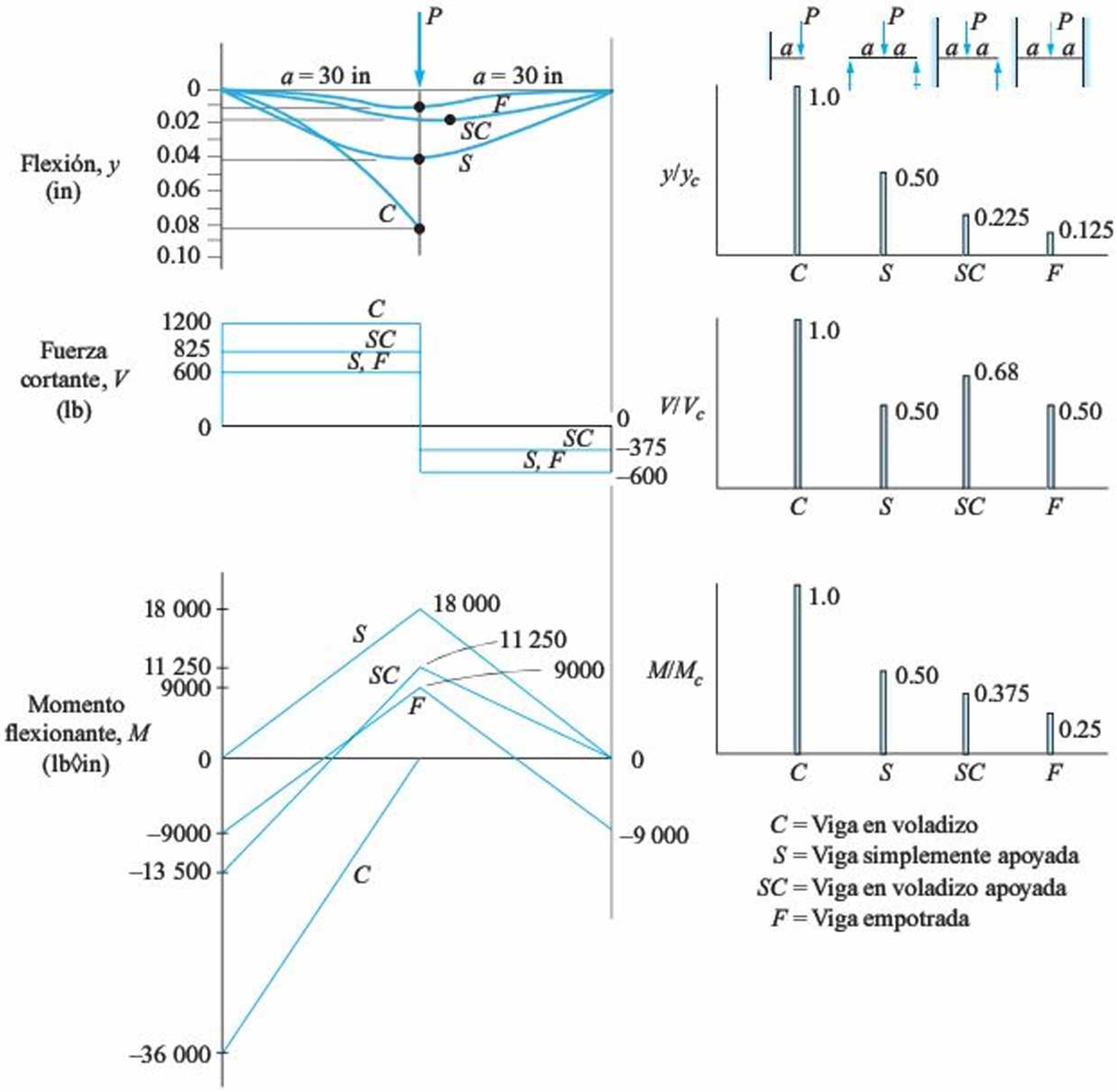


FIGURA 9–15 Comparación del desempeño de los cuatro diseños de viga mostrados en las figuras 9–11 a 9–14.

9–6 SUPERPOSICIÓN MEDIANTE FÓRMULAS DE FLEXIÓN

Las fórmulas utilizadas en la sección precedente están disponibles para un gran número de casos de condiciones de carga y apoyo. Obviamente, estos casos permitirían solucionar muchos problemas prácticos de flexión de vigas. Se puede manejar un número aún mayor de situaciones con el *principio de superposición*.

Si un patrón particular de carga y apoyos se puede separar en componentes, de modo que cada componente sea como uno de los casos para el cual hay una fórmula disponible, entonces la flexión total en un punto de la viga es igual a la suma de las flexiones producidas por cada componente. La flexión provocada por una carga componente se *superpone* a las flexiones provocadas por las demás cargas, de ahí el nombre de *superposición*.

En la figura 9–16 se muestra un ejemplo donde se puede aplicar la superposición. En la figura se muestra una viga de techo sometida una carga uniformemente distribuida de 800 lb/ft

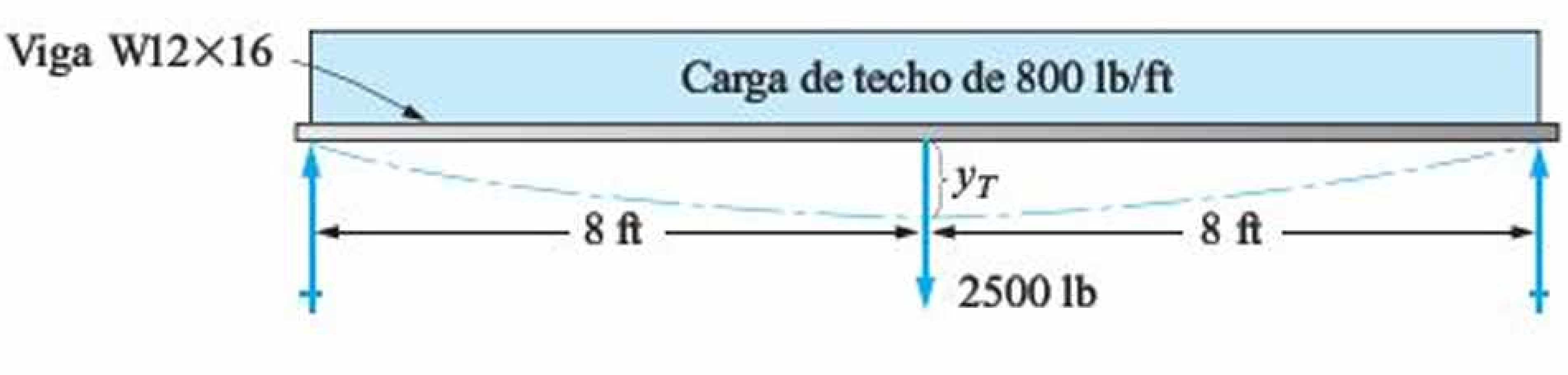


FIGURA 9–16 Viga de techo.

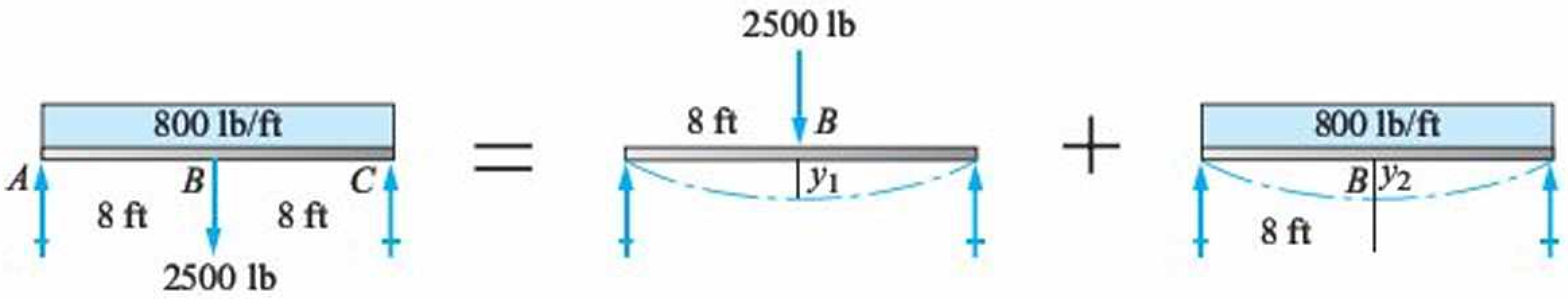


FIGURA 9–17 Ilustración del principio de superposición.

y también a una parte de un equipo de proceso que produce una carga concentrada a la mitad. La figura 9–17 muestra cómo se consideran las cargas por separado. Cada carga componente produce una flexión máxima a la mitad, en el punto B. Por consiguiente, la flexión total máxima también ocurrirá en ese lugar. Hagamos que el subíndice *1* se refiera al caso de la carga concentrada y el subíndice *2* al caso de la carga distribuida. Entonces

$$y_1 = \frac{-PL^3}{48EI} \text{ (Apédice A–23, caso a)}$$

$$y_2 = \frac{-5}{384}\frac{WL^3}{EI} \text{ (Apéndice A–23, caso d)}$$

La flexión total será

$$y_T = y_1 + y_2$$

Los términos L, E e I serán los mismos en ambos casos. Tenga cuidado de mantener las unidades consistentes.

$$L = 16 \text{ ft} \times 12 \text{ in/ft} = 192 \text{ in}$$
$$E = 30 \times 10^6 \text{ psi para acero}$$
$$I = 103 \text{ in}^4 \text{ para una viga W12} \times 16$$

Para calcular y_1, sea $P = 2500$ lb.

$$y_1 = \frac{-2500(192)^3}{48(30 \times 10^6)(103)} \text{in} = -0.119 \text{ in}$$

Para calcular y_2, W es la resultante de la carga distribuida.

$$W = (800 \text{ lb/ft})(16 \text{ ft}) = 12\,800 \text{ lb}$$

Entonces

$$y_2 = \frac{-5(12\,800)(192)^3}{384(30 \times 10^6)(103)} \text{in} = -0.382 \text{ in}$$

y

$$y_T = y_1 + y_2 = -0.119 \text{ in} - 0.382 \text{ in} = -0.501 \text{ in}$$

Como ésta es la flexión total, podríamos comprobar para ver si cumple con las recomendaciones de que la flexión máxima debe ser menor que 1/360 veces el claro de la viga. El claro es L.

$$\frac{L}{360} = \frac{192 \text{ in}}{360} = 0.533 \text{ in}$$

La flexión calculada fue de 0.501 in, la cual es satisfactoria.

El principio de superposición es válido para cualquier lugar de la viga, sólo en los puntos de aplicación de las cargas. El ejemplo siguiente ilustra lo anterior.

Problema de ejemplo 9–8

La figura 9–18 muestra una flecha con dos engranes simplemente apoyada en sus extremos por cojinetes. Los engranes acoplados de arriba ejercen fuerzas dirigidas hacia abajo, las cuales tienden a separar los engranes. En este análisis no se consideran otras fuerzas que actúan en dirección horizontal. Determine la flexión total en los engranes *B* y *C* si la flecha es de acero y su diámetro es de 45 mm.

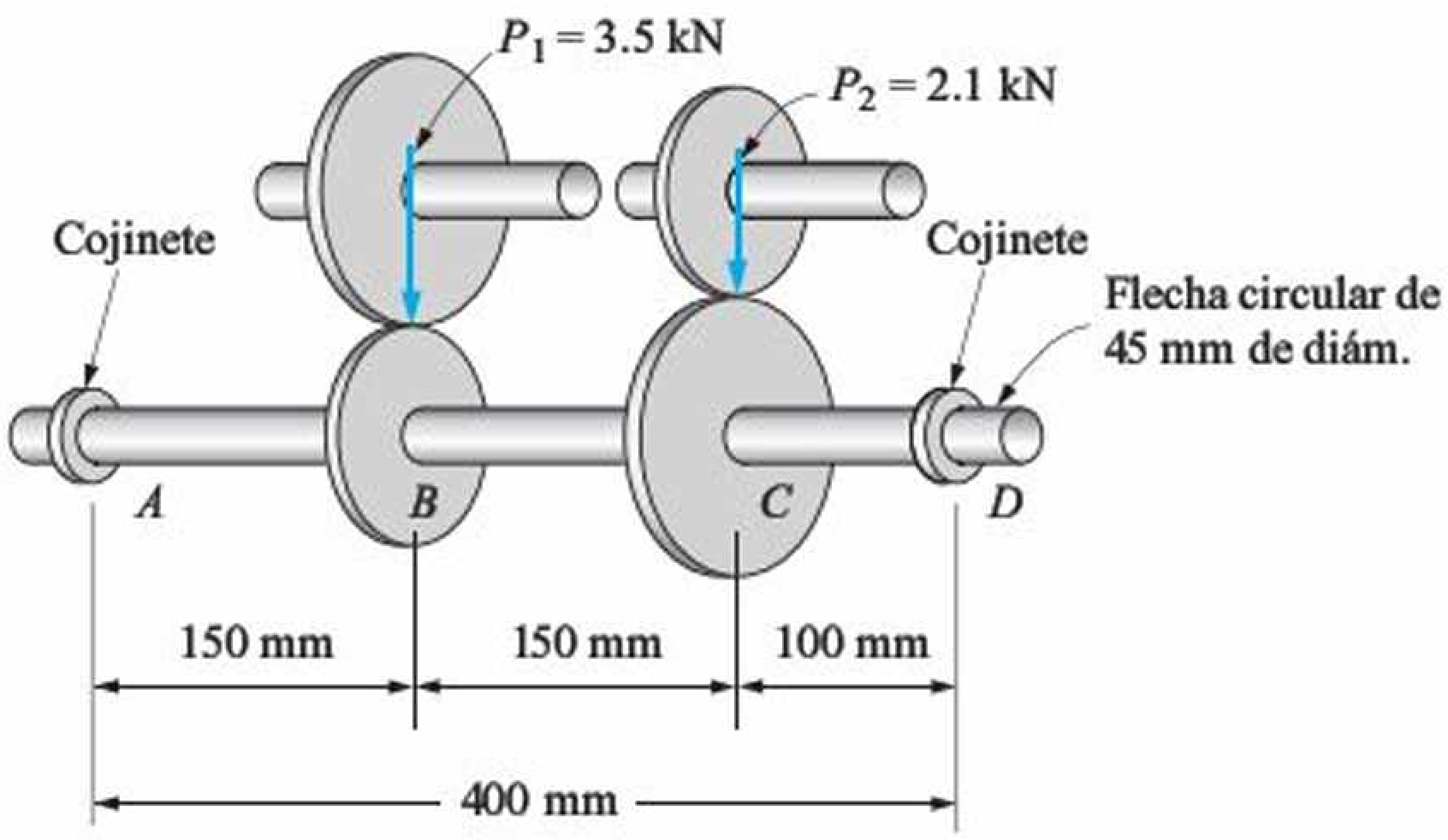


FIGURA 9–18 Flecha del problema de ejemplo 9–8.

Solución

Objetivo Calcular la flexión en los puntos *B* y *C*.

Datos La flecha *ABCD* mostrada en la figura 9–18. La flecha es de acero, $D = 45$ mm. La carga en $B = P_1 = 3.5\text{ kN} = 3500\text{ N}$. La carga en $C = P_2 = 2.1\text{ kN} = 2100\text{ N}$.

Análisis Las dos cargas colocadas asimétricamente constituyen una situación para la cual ninguno de los casos dados de fórmulas de flexión de vigas es válido. Sin embargo, se puede solucionar utilizando dos veces las fórmulas del apéndice A–23. Considerando cada carga por separado, se pueden calcular las deflexiones en *B* y *C* provocadas por cada una. La flexión total, por consiguiente, sería la suma de flexiones componentes. La figura 9–19 muestra la lógica, basados en la cual podemos decir

$$y_B = y_{B1} + y_{B2}$$
$$y_C = y_{C1} + y_{C2}$$

donde
y_B = flexión total en *B*
y_C = flexión total en *C*
y_{B1} = flexión en *B* producida por la carga de 3.5 kN
y_{C1} = flexión en *C* producida por la carga de 3.5 kN
y_{B2} = flexión en *B* producida por la carga de 2.1 kN
y_{C2} = flexión en *C* producida por la carga de 2.1 kN

Para todos los cálculos, se requieren los valores de *E*, *I* y *L*. Éstos son los mismos del problema 9–2.

$$E = 207 \times 10^3\text{ N/mm}^2$$
$$I = 0.201 \times 10^6\text{ mm}^4$$
$$L = 400\text{ mm}$$

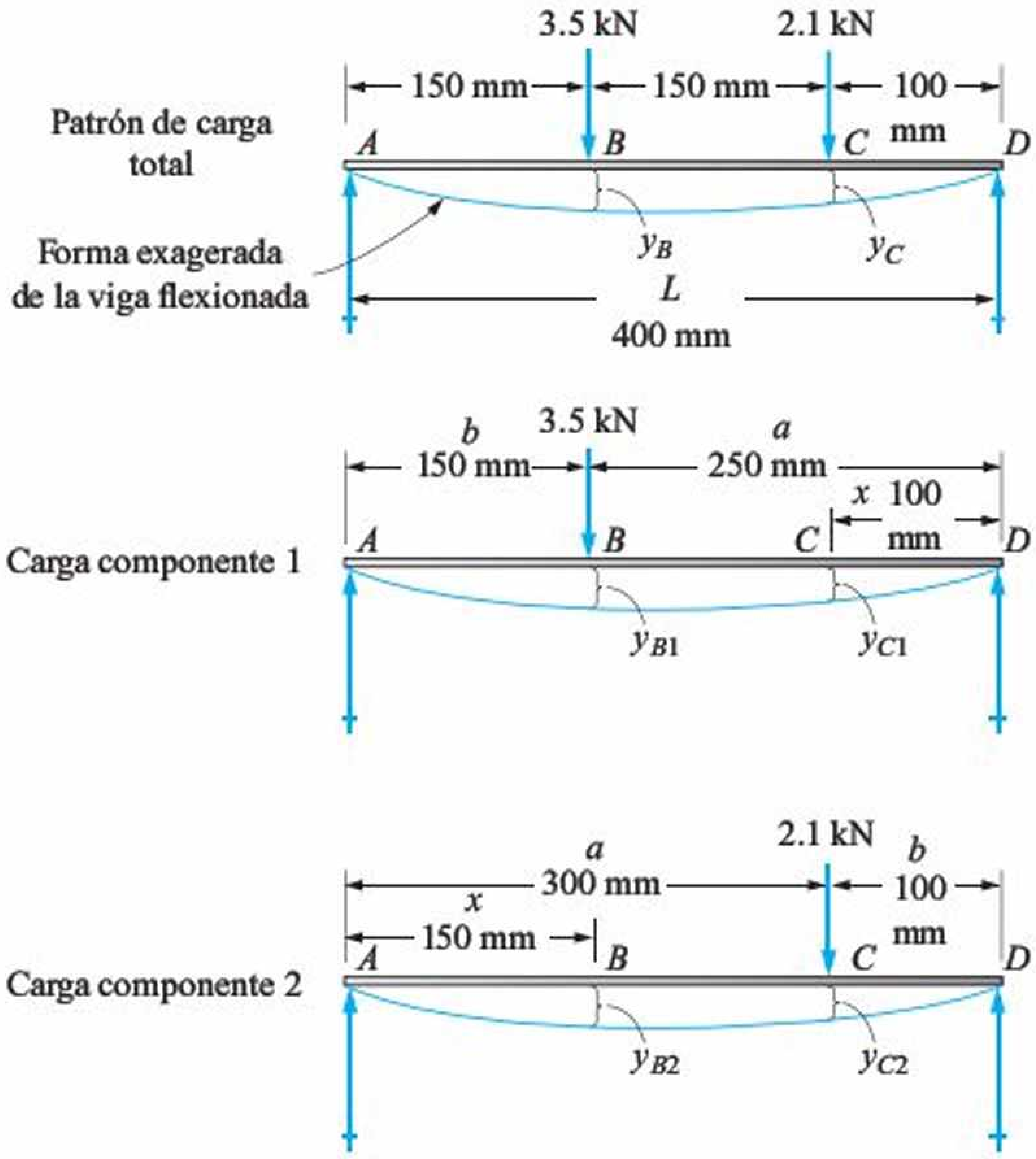


FIGURA 9–19 Lógica del procedimiento de superposición para determinar la flexión de la flecha de la figura 9–18.

El producto EIL aparece en todas las fórmulas.

$$EIL = (207 \times 10^3)(0.201 \times 10^6)(400) = 16.64 \times 10^{12}$$

A continuación se calcularán la flexión en componentes individuales. Observe que los valores de las variables a, b y x son diferentes para cada carga componente. Vea los datos marcados en la figura 9–19.

Resultados

Para el componente 1: y_{B1} ocurre en el punto de aplicación de la carga, y_{C1} ocurre en el segmento más largo.

$$y_{B1} = \frac{-P_1 a^2 b^2}{3EIL} = \frac{-(3.5 \times 10^3)(250)^2(150)^2}{3(16.64 \times 10^{12})} = -0.0985\ \text{mm}$$

$$y_{C1} = \frac{-P_1 bx}{6EIL}(L^2 - b^2 - x^2)$$

$$y_{C1} = \frac{-(3.5 \times 10^3)(150)(100)}{6(16.64 \times 10^{12})}(400^2 - 150^2 - 100^2) = -0.0670\ \text{mm}$$

Para el componente 2, la carga será de 2.1 kN en el punto C. Entonces y_{B2} ocurre en el segmento más largo y y_{C2} en el punto de aplicación de la carga.

$$y_{B2} = \frac{-P_2 bx}{6EIL}(L^2 - b^2 - x^2)$$

$$y_{B2} = \frac{-(2.1 \times 10^3)(100)(150)}{6(16.64 \times 10^{12})}(400^2 - 100^2 - 150^2) = -0.0402\ \text{mm}$$

$$y_{C2} = \frac{-P_2 a^2 b^2}{3EIL} = \frac{-(2.1 \times 10^3)(300)^2(100)^2}{3(16.64 \times 10^{12})} = -0.0378\ \text{mm}$$

Ahora, por superposición,

$$y_B = y_{B1} + y_{B2} = -0.0985 \text{ mm} - 0.0402 \text{ mm} = -0.1387 \text{ mm}$$
$$y_C = y_{C1} + y_{C2} = -0.0670 \text{ mm} - 0.0378 \text{ mm} = -0.1048 \text{ mm}$$

Comentario En la sección 9–2 se observó que un límite recomendado para el movimiento de un engrane con respecto a su engrane acoplado es de 0.13 mm. Por lo tanto, esta flecha es demasiado flexible, puesto que la flexión en B es de más de 0.13 mm, incluso sin considerar la flexión de la flecha acoplada.

Superposición aplicada a vigas estáticamente indeterminadas. La superposición se puede aplicar para habilitar momentos y reacciones redundantes en vigas estáticamente indeterminadas que se determinarán como se demuestra a continuación.

Considere primero la viga en voladizo apoyada de la figura 9–20. Debido a la restricción en A y al apoyo simple en B, las reacciones desconocidas incluyen:

1. La fuerza vertical R_B
2. La fuerza vertical R_A
3. El momento restrictivo M_A

Las condiciones supuestas para esta viga son que los apoyos en A y B son absolutamente rígidos y están al mismo nivel, y que la conexión en A no permite ninguna rotación de la viga en dicho punto. A la inversa, el apoyo en B sí permite rotación y no puede resistir momentos.

Si se quita el apoyo en B, la viga se flexionaría hacia abajo, como se muestra en la figura 9–21(a) en una cantidad y_{B1} a causa de la carga P. Si se quita la carga y se aplica la fuerza de reacción R_B hacia arriba en B, la viga se flexionaría hacia arriba en una cantidad y_{B2}, como se

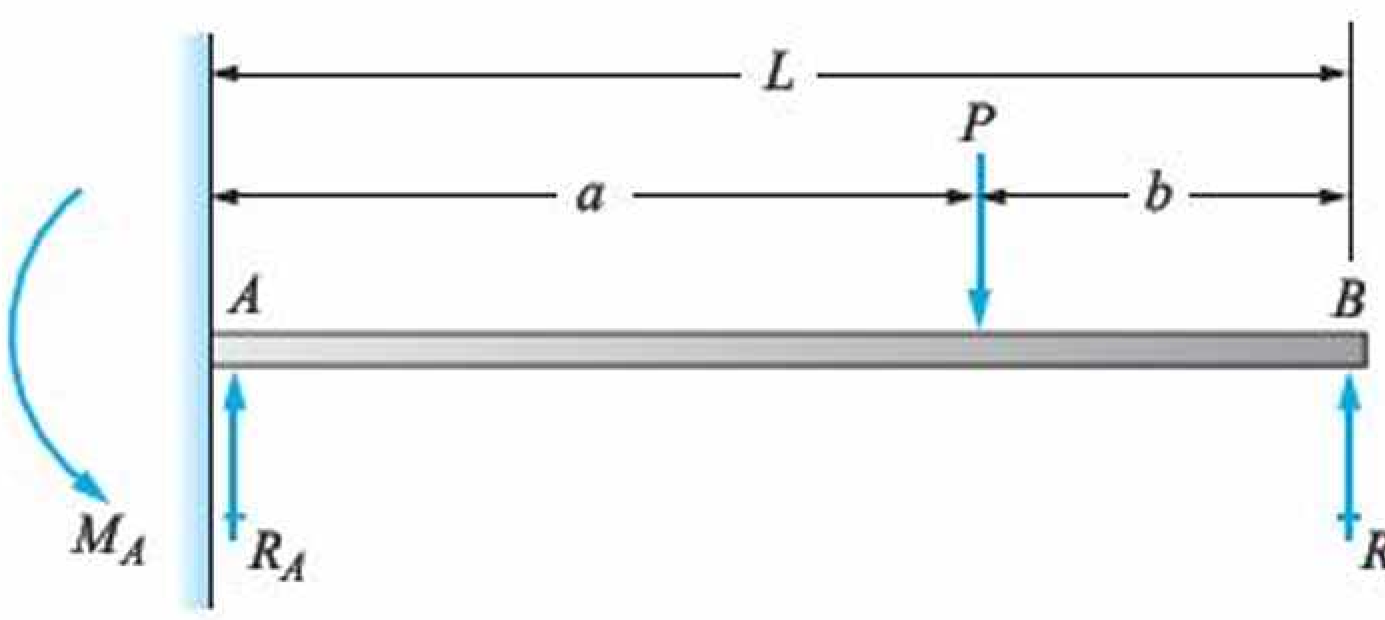


FIGURA 9–20 Viga en voladizo apoyada.

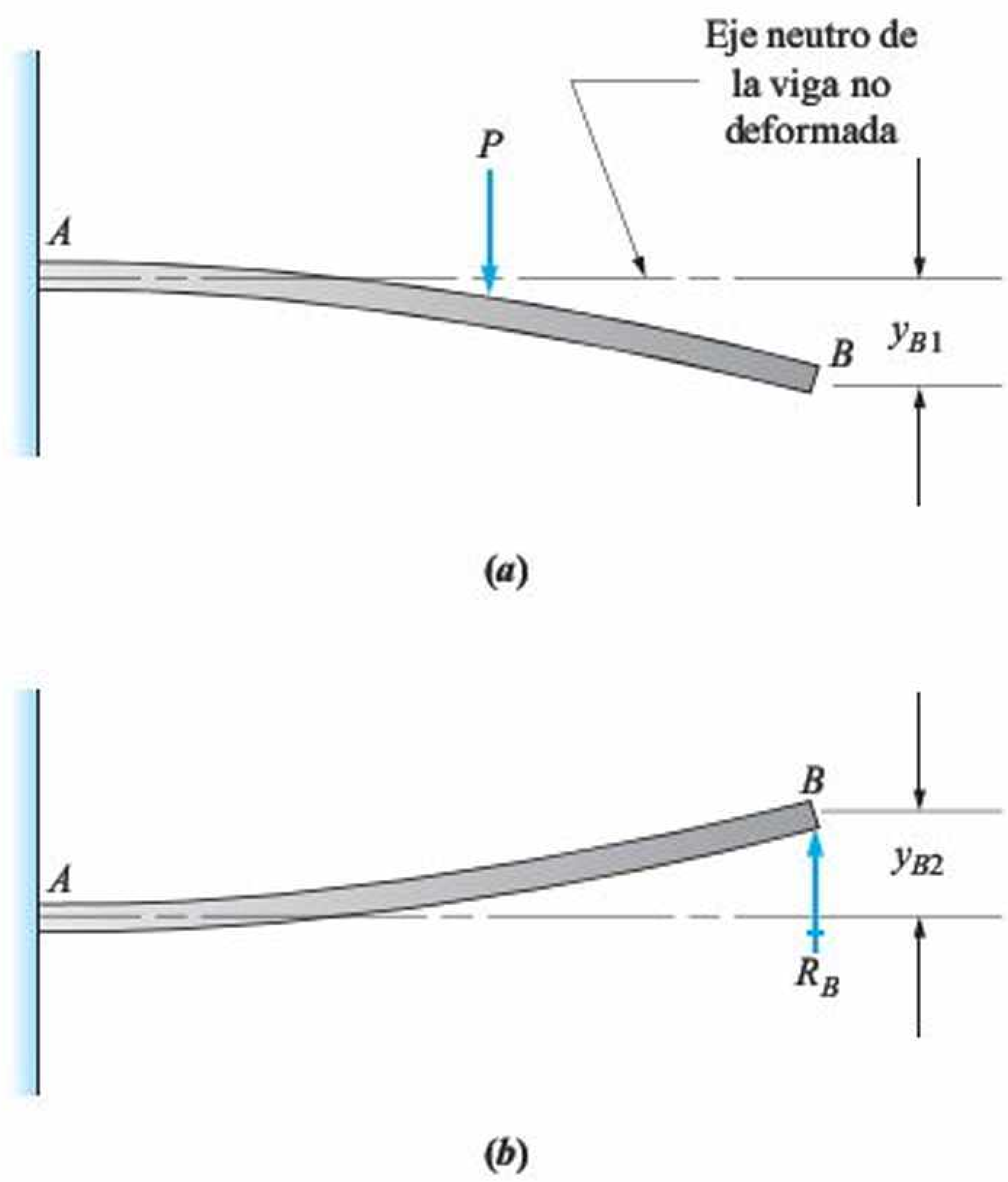


FIGURA 9–21 Superposición aplicada a la viga en voladizo apoyada.

muestra en la figura 9–21(b). En realidad, por supuesto, se aplican ambas fuerzas y la flexión en B es cero. El principio de superposición permitiría concluir entonces que

$$y_{B1} + y_{B2} = 0$$

Esta ecuación, junto con las ecuaciones normales de equilibrio estático, permite evaluar las tres incógnitas, como se demuestra en el ejemplo siguiente. Debe reconocerse que los principios de equilibrio estático continúan siendo válidos para vigas estáticamente indeterminadas. Sin embargo, no son suficientes para obtener una solución directa.

Problema de ejemplo 9–9

Determine las reacciones en los apoyos A y B de la viga en voladizo apoyada mostrada en la figura 9–20 si la carga P es de 2600 N y se coloca a 1.20 m hacia fuera de A. La longitud total de la viga es de 1.80 m. En seguida trace los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante completos y diseñe la viga especificando su configuración, un material y sus dimensiones requeridas. Use un factor de diseño de 8 basado en la resistencia máxima puesto que la carga será repetida.

Solución

Objetivo Determinar las reacciones en los apoyos, trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante y diseñar la viga.

Datos La carga que actúa en la viga de la figura 9–20. $P = 2600$ N (repetida). $L = 1.80$ m. $a = 1.20$ mm. Use un factor de diseño N = 8 basado en S_u.

Análisis Use el método de superposición.

Resultados *Reacción en B*, R_B

Primero determinamos la reacción en B mediante superposición. Previamente observamos,

$$y_{B1} + y_{B2} = 0$$

La ecuación para y_{B1} se halla a partir de las fórmulas de la flexión de vigas dadas en el apéndice A–24. Como se sugiere en la figura 9–21(a), se requiere la flexión en el extremo de una viga en voladizo que soporta una carga intermedia. Entonces

$$y_{B1} = \frac{-Pa^2}{6EI}(3L - a)$$

donde $P = 2600$ N
$a = 1.20$ m
$L = 1.80$ m

Los valores de E e I siguen siendo desconocidos, pero podemos expresar la flexión en función de EI.

$$y_{B1} = \frac{(-2600\,\text{N})(1.20\,\text{m})^2}{6EI}[3(1.80\,\text{m}) - 1.20\,\text{m}]$$

$$y_{B1} = \frac{-2621\,\text{N}\cdot\text{m}^3}{EI}$$

Ahora, al examinar la figura 9–21(b), vemos que necesitamos la flexión en el extremo del voladizo producida por la carga concentrada que actúa allí. Entonces

$$y_{B2} = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{R_B(1.8\,\text{m})^3}{3EI} = \frac{R_B(1.944\,\text{m}^3)}{EI}$$

La suma de y_{B1} y y_{B2} es cero,

$$\frac{-2621\,\text{N}\cdot\text{m}^3}{EI} + \frac{R_B(1.944\,\text{m}^3)}{EI} = 0$$

El termino EI se elimina, lo que permite determinar R_B.

$$R_B = \frac{2621\,\text{N}\cdot\text{m}^3}{1.944\,\text{m}^3} = 1348\,\text{N}$$

Los valores de R_A y M_A se calculan ahora con las ecuaciones de equilibrio estático.

Reacción en A, R_A

$$\sum F = 0 \qquad \text{(en la dirección vertical)}$$

$$R_A + R_B - P = 0$$

$$R_A = P - R_B = 2600\,\text{N} - 1348\,\text{N} = 1252\,\text{N}$$

Momento flexionante en A, M_A

Si se suman los momentos con respecto a A se obtiene

$$0 = M_A - 2600\,\text{N}\,(1.2\,\text{m}) + 1348\,\text{N}\,(1.8\,\text{m})$$

$$M_A = 693\,\text{N}\cdot\text{m}$$

El signo positivo del resultado indica que el sentido supuesto del momento de reacción en la figura 9–20 es correcto. Sin embargo, es un momento negativo porque hace que la viga se flexione cóncava hacia abajo cerca del apoyo A.

Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante

Ahora se pueden trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante, como se muestra en la figura 9–22, por medio de técnicas convencionales. El momento flexionante máximo ocurre en el punto de aplicación de la carga donde $M = 809$ N·m.

Diseño de la viga

Ahora se puede diseñar la viga. Supongamos que la instalación real es similar a la ilustrada en la figura 9–23, con el extremo izquierdo de la viga soldado y con su extremo derecho apoyado en otra viga. Una barra rectangular funcionaría bien en esta configuración; se supondrá una relación de $h = 3t$. Un acero al carbón tal como acero AISI 1040 laminado en caliente produce una resistencia máxima de 621 MPa. Su porcentaje de alargamiento, 25%, sugiere una buena ductilidad, la cual ayudará a resistir las cargas repetidas. El diseño se basará en el esfuerzo flexionante.

$$\sigma = \frac{M}{S}$$

Pero sea

$$\sigma = \sigma_d = \frac{S_u}{N} = \frac{621\,\text{MPa}}{8} = 77.6\,\text{MPa}$$

Entonces

$$S = \frac{M}{\sigma_d} = \frac{809\,\text{N}\cdot\text{m}}{77.6\,\text{N/mm}^2} \times \frac{10^3\,\text{mm}}{\text{m}} = 10\,425\,\text{mm}^3$$

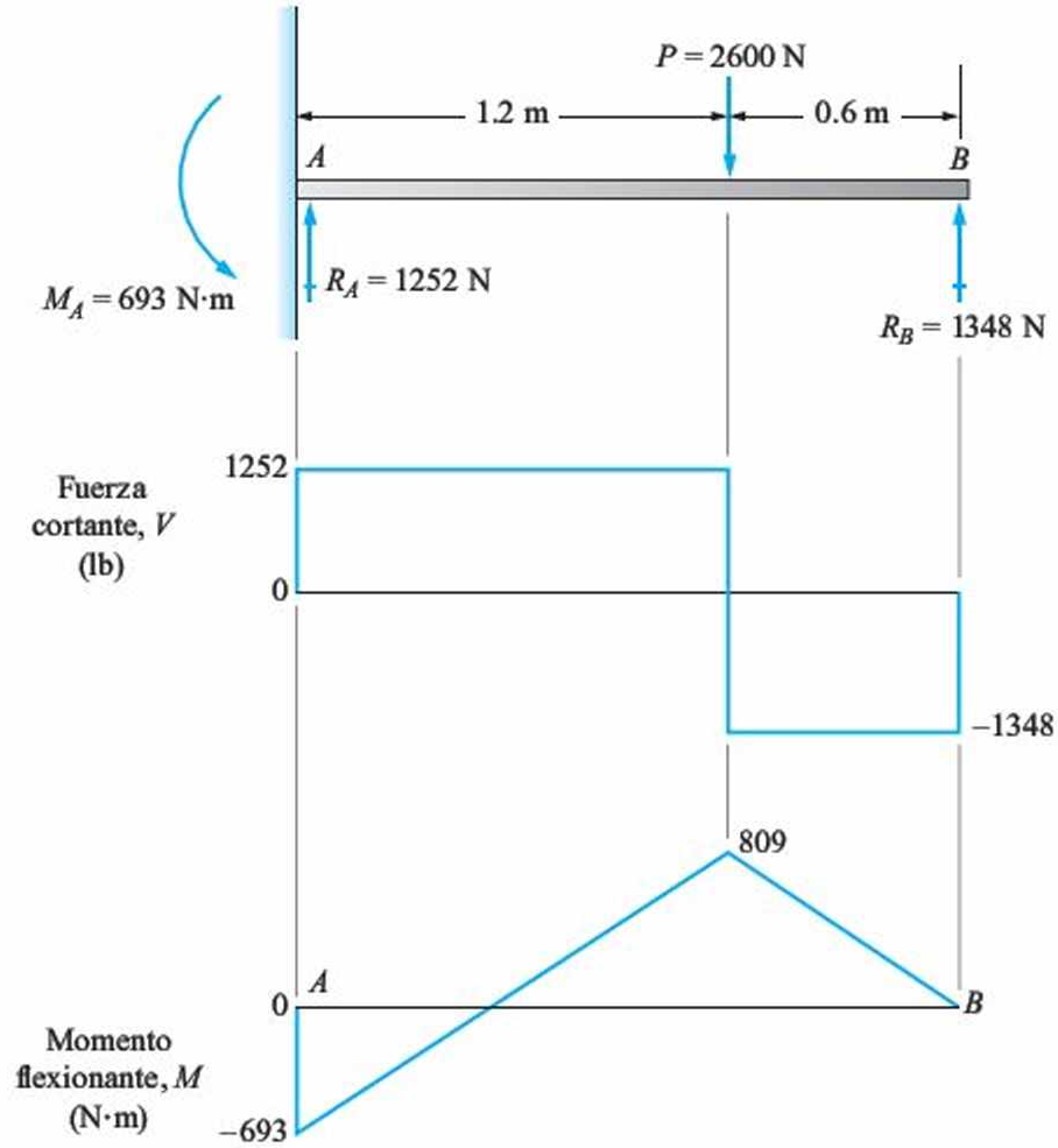


FIGURA 9–22 Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de la viga en voladizo apoyada del problema de ejemplo 9–9.

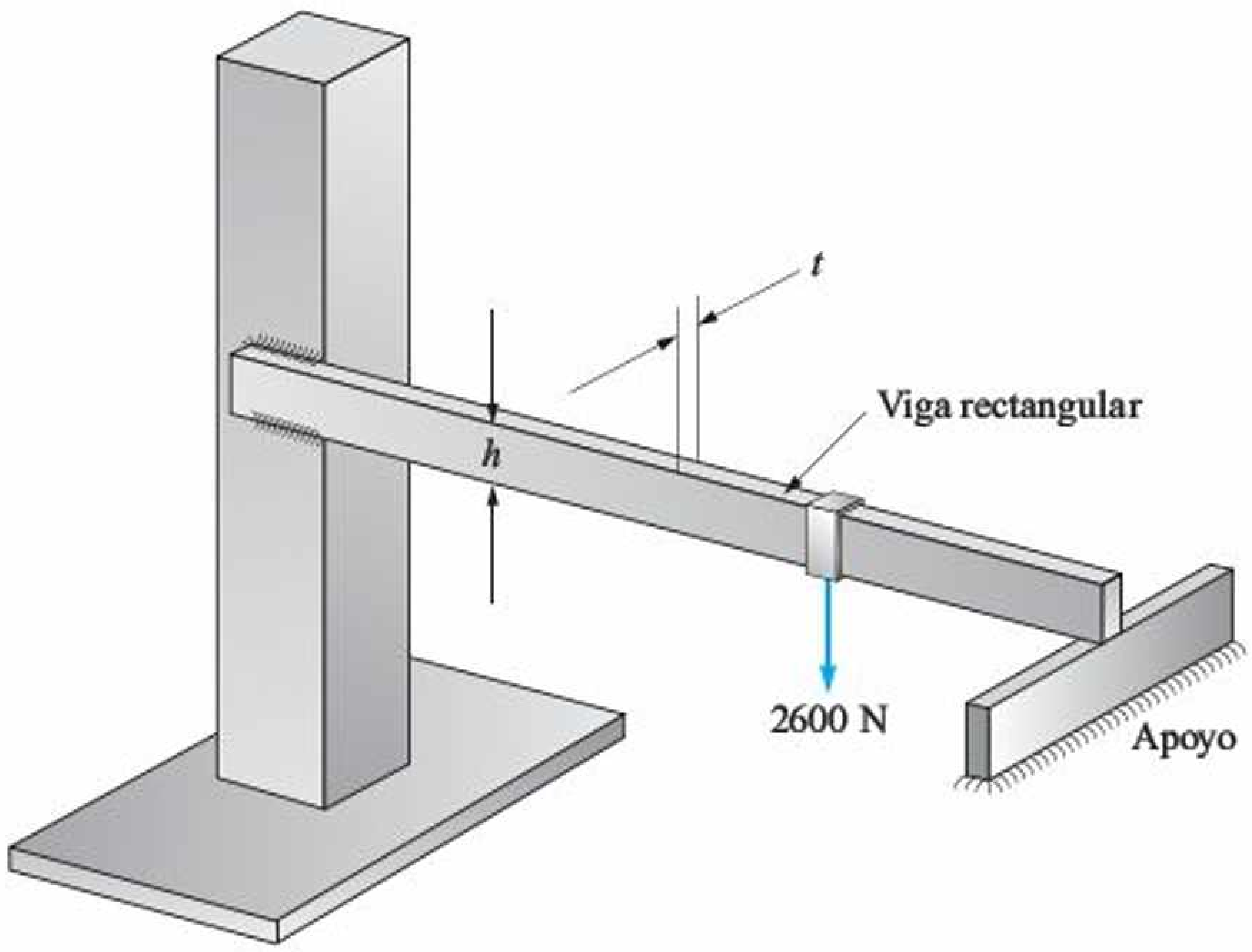


FIGURA 9–23 Implementación física de una viga en voladizo apoyada.

Para una barra rectangular,

$$S = \frac{th^2}{6} = \frac{t(3t)^2}{6} = \frac{9t^3}{6} = 1.5t^3$$

Entonces

$$1.5\,t^3 = 10\,425\ \text{mm}^3$$
$$t = 19.1\ \text{mm}$$

Utilicemos el tamaño preferido de 20 mm para t. Entonces

$$h = 3t = 3(20 \text{ mm}) = 60 \text{ mm}$$

Comentario El diseño final se resume como una barra rectangular de acero AISI 1040, laminado en caliente, de 20 mm de espesor y 60 mm de altura, con su extremo izquierdo soldado a un apoyo rígido y con su extremo derecho apoyado en un apoyo simple. El esfuerzo máximo en la barra sería de menos de 77.6 MPa, con un factor de diseño de por lo menos 8 basado en la resistencia máxima.

Se puede aplicar el método de superposición al análisis de cualquier viga en voladizo apoyada para la cual se puede determinar la ecuación de la flexión producida por la carga aplicada. Se pueden utilizar las fórmulas de flexión de vigas como las del apéndice, el método del área–momento o el método de integración sucesiva desarrollado más adelante.

Las vigas continuas también se pueden analizar por medio de superposición. Considere la viga con tres apoyos mostrada en la figura 9–24. Las tres reacciones en los apoyos desconocidas hacen que la viga sea estáticamente indeterminada. La reacción "extra" R_C se puede determinar por medio de la técnica sugerida en la figura 9–25. Si se quita el apoyo C la flexión y_{C1} sería hacia abajo a causa de las dos cargas de 800 lb. Se puede utilizar el caso c del apéndice A–23 para determinar y_{C1}. Entonces si se quitan las cargas y se reemplaza la reacción R_C, el resultado sería la flexión y_{C2} hacia arriba. Se pueden utilizar las fórmulas del caso a en el apéndice A–23.

En este caso de nuevo, por supuesto, la flexión en C es cero debido al apoyo que no permite cadencia. Por consiguiente,

$$y_{C1} + y_{C2} = 0$$

FIGURA 9–24
Viga continua.

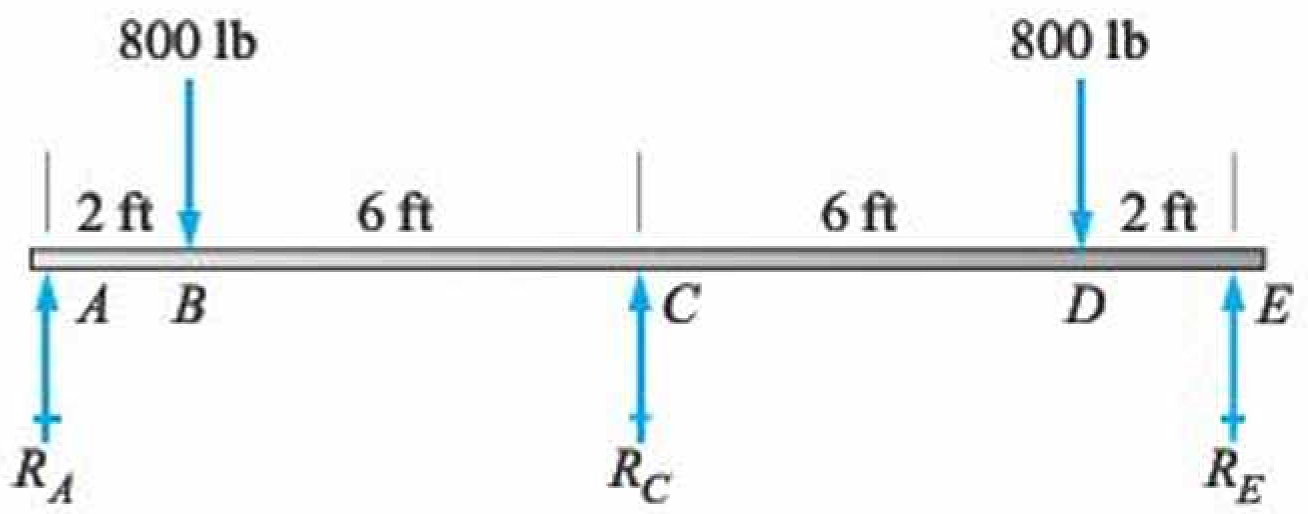
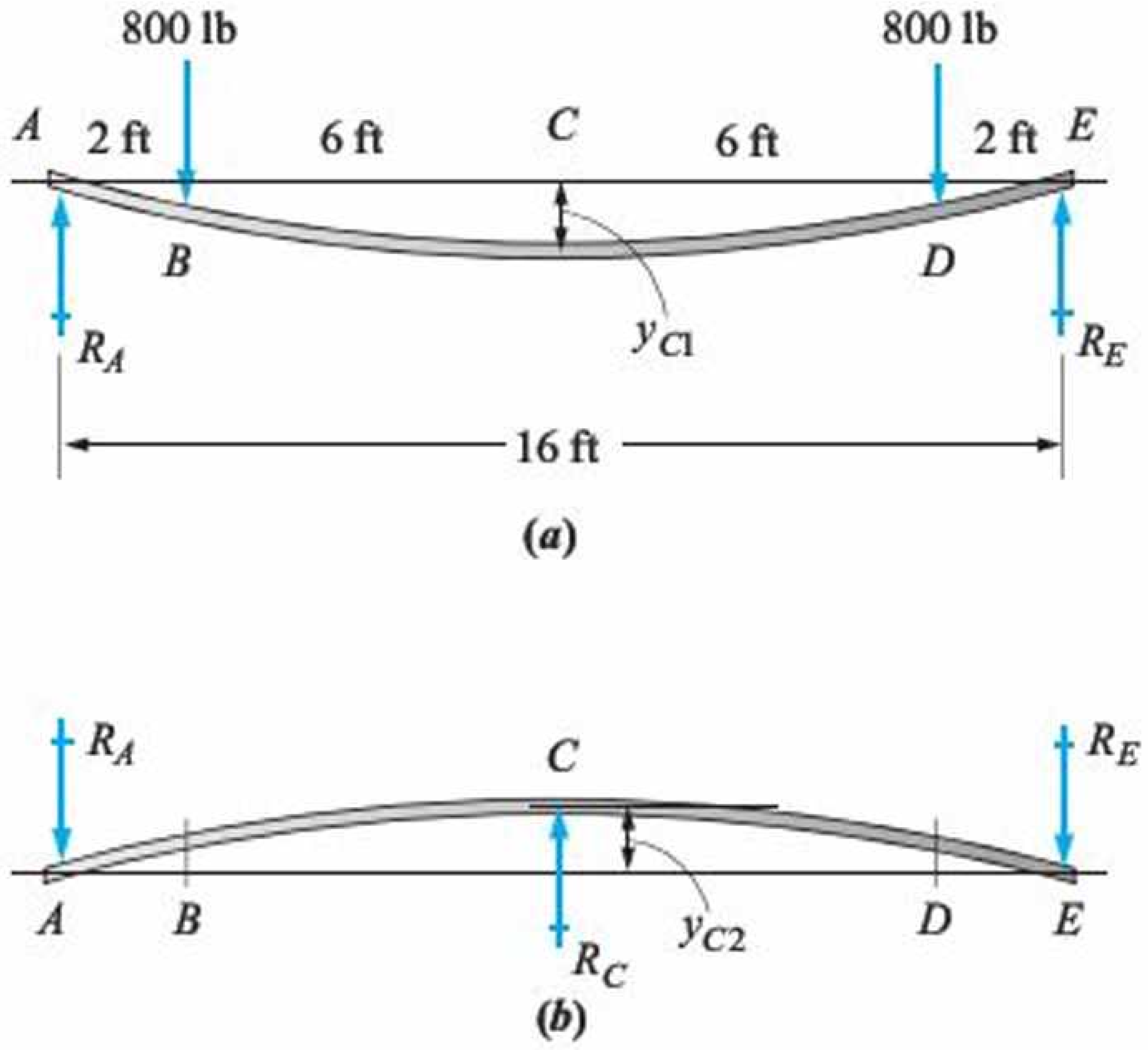


FIGURA 9–25
Superposición aplicada a una viga aplicada.



Con esta relación, se puede calcular el valor de R_C. Las reacciones restantes R_A y R_E se calculan entonces a la manera convencional, lo que permite trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.

9–7 MÉTODO DE INTEGRACIÓN SUCESIVA

En esta sección mostramos las relaciones matemáticas entre las curvas de momento, pendiente y flexión con las cuales se pueden derivar las ecuaciones para una viga dada sometida a una condición dada de carga y sustentación.

La figura 9–26 muestra un pequeño segmento de una viga en su forma recta inicial y en su forma flexionada. Los lados del segmento permanecen rectos conforme la viga se flexiona, pero giran con respecto a un punto del eje neutro. Esto comprime la cara superior del segmento y tensiona la cara inferior, un hecho utilizado en el desarrollo de la fórmula de la flexión en el capítulo 7.

Los lados girados del segmento se intersecan en el centro de curvatura y forman el pequeño ángulo $d\theta$. Observe también el radio de curvatura, R, medido del centro de curvatura el eje neutro. Por la geometría mostrada en la figura,

$$\Delta s = R(d\theta) \quad \textbf{(9–3)}$$

y

$$\delta = c(d\theta) \quad \textbf{(9–4)}$$

donde Δs es la longitud del segmento en el eje neutro

δ es el alargamiento de la línea de base del segmento que ocurre a medida que la viga se flexiona.

c tiene el mismo significado que en la fórmula de flexión, la distancia del eje neutro a la fibra más externa de la sección.

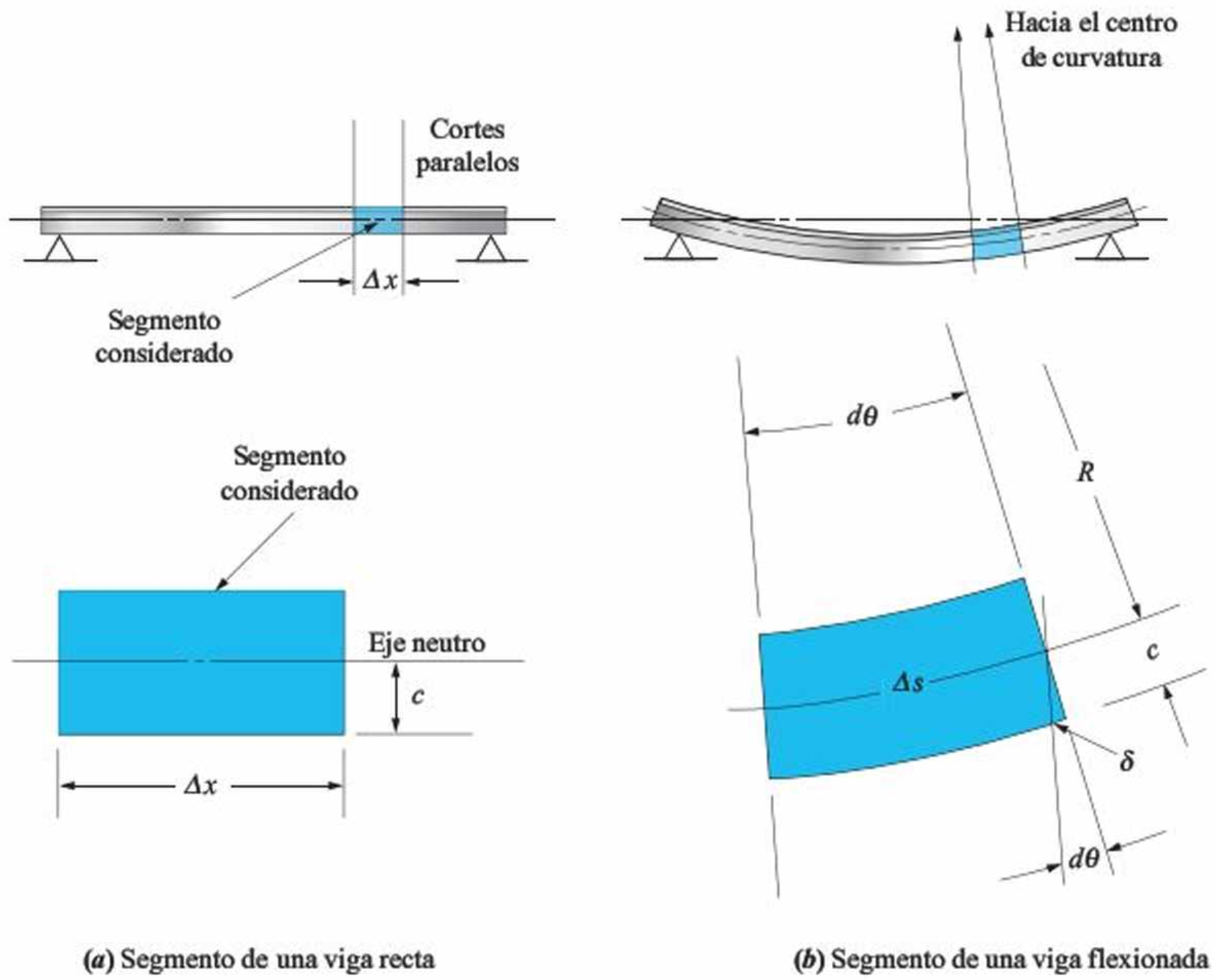


FIGURA 9–26 Relación entre el radio R y la flexión δ.

Recuerde que la definición del eje neutro establece que en él no ocurre deformación. Por eso la longitud Δs en el segmento de viga flexionada es igual a la longitud Δx en el segmento no flexionado y la ecuación (9–3) se escribe como sigue

$$\Delta x = R(d\theta) \tag{9–5}$$

Ahora las ecuaciones (9–4) y (9–5) se pueden resolver para $d\theta$.

$$d\theta = \frac{\delta}{c}$$

$$d\theta = \frac{\Delta x}{R}$$

Si estos valores de $d\theta$ se igualan entre sí se obtiene

$$\frac{\delta}{c} = \frac{\Delta x}{R}$$

Otra forma de esta ecuación es

$$\frac{c}{R} = \frac{\delta}{\Delta x}$$

El lado derecho de esta ecuación se ajusta a la definición de deformación unitaria, ϵ. Entonces

$$\epsilon = \frac{c}{R} \tag{9–6}$$

Con anterioridad se demostró que

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E}$$

donde σ, el esfuerzo producido por flexión, se calcula con la fórmula de la flexión,

$$\sigma = \frac{Mc}{I}$$

Entonces

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{Mc}{EI}$$

Si esta ecuación se combina con la ecuación (9–6) se obtiene

$$\frac{c}{R} = \frac{Mc}{EI}$$

Si ambos lados se dividen entre c se obtiene

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI} \tag{9–7}$$

La ecuación (9–7) es útil en el desarrollo del método del área–momento para determinar flexiones de vigas. Vea la sección 9–8.

En la geometría analítica, el recíproco del radio de curvatura, $1/R$, se define como la *curvatura*, denotada por κ, la letra griega minúscula kappa. Entonces

$$\kappa = \frac{M}{EI} \tag{9–8}$$

La ecuación (9–8) indica que la curvatura aumenta a medida que se incrementa el momento flexionante, lo cual es lógico. Asimismo, la curvatura disminuye a medida que se incrementa la rigidez, EI, de la viga.

Otro principio de geometría analítica establece que si la ecuación de una curva se expresa como $y = f(x)$, es decir, y es una función de x, entonces la curvatura es

$$\kappa = \frac{d^2y}{dx^2} \tag{9–9}$$

Si se combinan las ecuaciones (9–8) y (9–9) se obtiene

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} \tag{9–10}$$

o

$$M = EI\frac{d^2y}{dx^2} \tag{9–11}$$

Las ecuaciones (9–10) y (9–11) son útiles en el desarrollo del método de integración sucesiva para determinar flexiones de vigas, el cual se describe a continuación. Recuerde que esta relación se aplica a vigas inicialmente rectas y en las que el radio de curvatura después de cargarlas es muy pequeño.

Método de integración sucesiva – Procedimiento general. Esta sección presenta un procedimiento general que permite determinar la flexión en cualquier punto de una viga. Las ventajas de este procedimiento son las siguientes:

1. El resultado es un conjunto de ecuaciones de flexión en todas las partes de la viga. La flexión en cualquier punto se determina entonces sustituyendo las propiedades de rigidez de la viga E e I, y la posición en la viga.
2. Es fácil obtener los datos con los que se puede trazar la curva de la flexión.
3. Las ecuaciones de la *pendiente* en cualquier punto de la viga se generan del mismo modo que las de las flexiones. Esto es importante en algunas aplicaciones de maquinaria tales como flechas apoyadas en cojinetes y flechas con engranes. Una pendiente excesiva de la flecha reduciría el desempeño y la vida de los cojinetes o engranes.
4. Las relaciones fundamentales entre las cargas, el tipo de apoyo, las propiedades de rigidez de la viga, la pendiente y las flexiones se recalcan en el proceso de solución. El diseñador que entiende estas relaciones puede hacer diseños más eficientes.

5. El método requiere la aplicación de sólo concepto matemáticos muy simples.
6. Los puntos de flexión máxima se determinan directamente con las ecuaciones resultantes.

El fundamento del método de integración sucesiva se desarrolló en las secciones 9–3 y 9–7. Los cinco diagramas de la viga se prepararán, como se muestra en la figura 9–5, para relacionar las cargas, las fuerzas cortantes, los momentos flexionantes, las pendientes y las flexiones a todo lo largo de la viga.

Los diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante se trazan siguiendo los principios del capítulo 5. Luego se derivan las ecuaciones para el momento flexionante en todos los segmentos del diagrama de momento flexionante.

La ecuación (9–11) se utiliza entonces para desarrollar las ecuaciones para la pendiente y flexión a partir de las ecuaciones de momento integrando dos veces con respecto a la posición, x, en la viga, como sigue.

$$M = EI\frac{d^2y}{dx^2} \tag{9–11}$$

Ahora, si se integra una vez con respecto a x se tiene

$$\int M\,dx = EI\int\frac{d^2y}{dx^2}dx = EI\frac{dy}{dx} \tag{9–12}$$

Con anterioridad, en la sección 9–3, ecuación (9–2), demostramos que $dy/dx = \theta$, la pendiente de la curva de flexión. Por consiguiente,

$$\int M\,dx = EI\theta = \theta EI \tag{9–13}$$

La ecuación (9–12) se integra de nuevo y da

$$\int EI\theta\,dx = EI\int\frac{dy}{dx}dx = EIy = yEI \tag{9–14}$$

Una vez que se determinaron los valores finales de $EI\theta$ y EIy, se dividen entre la rigidez de la viga, EI, para obtener los valores de la pendiente, θ, y flexión, y.

Se tienen que completar los pasos indicados por las ecuaciones (9–12) a (9–14) por cada segmento de la viga donde el diagrama de momento es continuo. Además, como nuestro objetivo es obtener ecuaciones discretas para la pendiente y flexión en el caso de vigas y patrones de carga particulares, tendremos que evaluar una constante de integración por cada integración realizada.

El desarrollo de las ecuaciones para el momento flexionante contra la posición a menudo se logra integrando las ecuaciones para la fuerza cortante contra x, como se muestra en el capítulo 5. Esto se desprende de la regla de que el cambio del momento flexionante entre dos puntos de una viga es igual al área bajo la curva de la fuerza cortante entre los mismos dos puntos.

El método paso a paso utilizado para determinar la flexión de vigas siguiendo el procedimiento general es el siguiente.

Pasos del método de integración sucesiva para determinar flexiones de vigas

1. Determine las reacciones en los apoyos de la viga.
2. Trace los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante siguiendo el procedimiento presentado en el capítulo 5, e identifique las magnitudes en puntos críticos.
3. Divida la viga en segmentos en los que el diagrama de fuerza cortante sea continuo, designando los puntos donde ocurren cambios repentinos con las letras A, B, C, D, etcétera.
4. Escriba ecuaciones para la curva de fuerza cortante en cada segmento. En la mayoría de los casos serán ecuaciones de líneas rectas, es decir, ecuaciones que implican x a la primera potencia. En ocasiones, como en el caso de vigas que soportan cargas concentradas, la ecuación será simplemente de la forma

$$V = \text{constante}$$

5. Para cada segmento, realice el proceso,

$$M = \int V\,dx + C$$

   Para evaluar la constante de integración que vincula la ecuación de momento con los valores particulares ya conocidos del diagrama de momento, inserte condiciones limitantes conocidas y resuelva para C.
6. Para cada segmento, realice el proceso

$$\theta EI = \int M\,dx + C$$

   La constante de integración que aquí se genera no se puede evaluar directamente de inmediato. Así que cada constante deberá ser identificada por separado mediante un subíndice tal como C_1, C_2, C_3, etc. De este modo cuando se evalúan (en el paso 9) se pueden insertar en sus lugares apropiados.
7. Para cada segmento, realice el proceso,

$$yEI = \int \theta EI\,dx + C$$

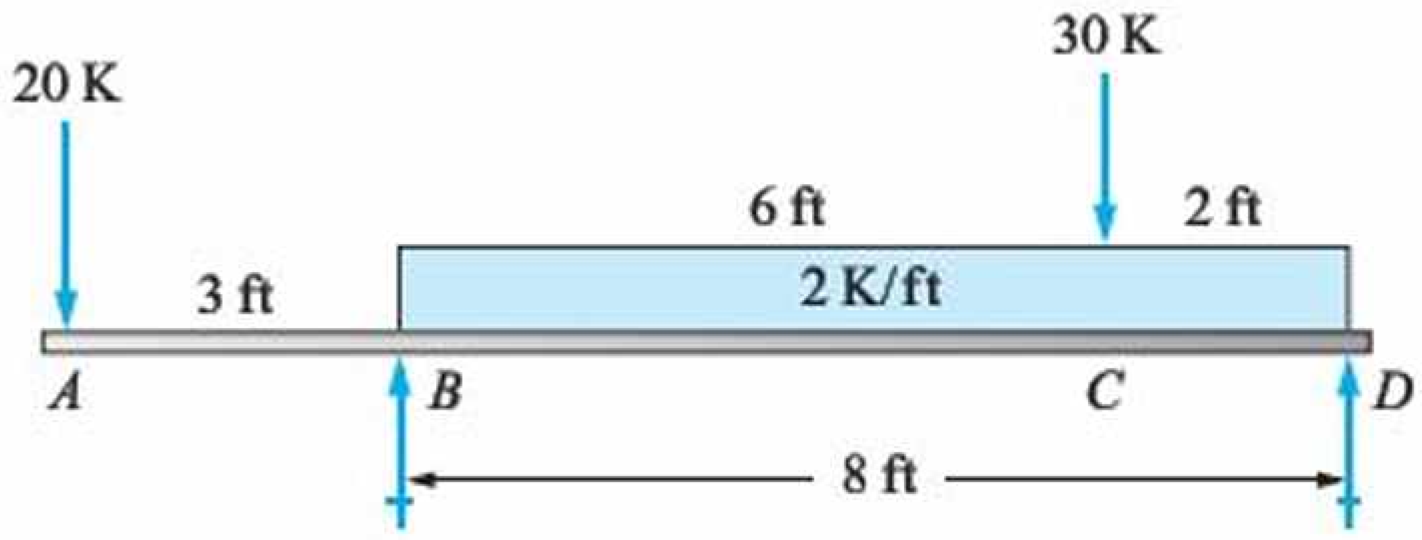
   De nueva cuenta, las constantes se identificarán con subíndices.
8. Establezca *condiciones limitantes* para los diagramas de pendiente y flexión. El número de condiciones limitantes identificadas deberá corresponder al número de constantes desconocidas de los pasos 6 y 7. Las condiciones limitantes expresan matemáticamente los valores especiales de la pendiente y flexión en ciertos puntos y el hecho de que tanto la curva de la pendiente como la curva de la flexión son continuas. Algunas condiciones limitantes típicas son:
   a. La flexión de la viga en cada apoyo es cero.
   b. La flexión de la viga en el extremo de un segmento es igual a la flexión de la viga al principio del siguiente segmento. Esto se deriva del hecho que la curva de la flexión es continua; es decir, no experimenta cambios abruptos.
   c. La pendiente de la viga en el extremo de un segmento es igual a la pendiente al principio del siguiente segmento. La pendiente no experimenta cambios repentinos.
   d. En el caso especial de una viga en voladizo, la pendiente de la viga en el apoyo también es cero.
9. Combine todas las condiciones limitantes para evaluar las constantes de integración. Esto en general implica la solución de un conjunto de ecuaciones simultáneas donde el número de ecuaciones es igual al número de constantes de integración desconocidas. Los programas de computadora para solucionar ecuaciones o calculadoras graficadoras son muy útiles en este paso.
10. Sustituya nuevamente las constantes de integración en las ecuaciones de la pendiente y la flexión, para completarlas. El valor de la pendiente o flexión en cualquier punto se evalúa entonces, simplemente, sustituyendo en la ecuación el valor apropiado de la posición en la viga. También es posible determinar los puntos de máxima flexión en cualquier segmento.

El problema de ejemplo 9–10 ilustra este método.

Problema de ejemplo 9–10

La figura 9–27 muestra una viga que forma parte de una estructura especial de una máquina. La carga de 20 K (20 000 lb) en A y la carga de 30 K (30000 lb) en C representan los lugares donde el equipo pesado está apoyado. Entre los apoyos B y D, la carga uniformemente distribuida de 2 K/ft (2000 lb/ft) se debe a materiales a granel almacenados en un depósito soportado por la viga. Todas las cargas son estáticas. Para mantener la precisión de los productos producidos por la máquina, la flexión máxima permisible de la viga es de 0.05 in. Especifique una viga de acero de patín ancho aceptable, y también verifique el esfuerzo en la viga.

FIGURA 9–27 Viga del problema de ejemplo 9–10.



Solución

Objetivo Especificar un perfil de acero de patín ancho para limitar la flexión a 0.05 in. Compruebe el esfuerzo de la viga seleccionada para garantizar su seguridad.

Datos Las cargas que actúan en la viga de la figura 9–27.

Análisis Se analizará la viga para determinar dónde ocurrirá la flexión máxima. Luego se determinará el momento de inercia requerido para limitar la flexión a 0.05 in. Se seleccionará entonces una viga de patín ancho que tenga el momento de inercia requerido. Se seguirá el procedimiento de diez pasos previamente descritos. La solución se presenta en un formato programado. Usted deberá tratar de resolver el problema antes de consultar la solución proporcionada.

Resultados Los ***pasos 1 y 2*** requieren que se tracen los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. Hágalo ahora, antes de que compruebe el siguiente resultado. La figura 9–28 muestra los resultados. Ahora prosiga con el paso 3.

Paso 3. Se requieren tres segmentos: AB, BC y CD. Éstos son los segmentos a lo largo de los cuales el diagrama de fuerza cortante es continuo. Ahora prosiga con el paso 4 para obtener las ecuaciones de la curva de fuerza cortante.

Paso 4. Los resultados son:

$$V_{AB} = -20 \quad \textbf{(a)}$$

$$V_{BC} = -2x + 29 \quad \textbf{(b)}$$

$$V_{CD} = -2x - 1 \quad \textbf{(c)}$$

En los segmentos BC y CD, la curva de fuerza cortante es una línea recta con una pendiente de –2 kip/ft, igual que la carga. Se puede utilizar cualquier método de escribir la ecuación de una línea recta para derivar estas ecuaciones.

Ahora realice el paso 5 del procedimiento.

Paso 5. Deberá tener lo siguiente para derivar las ecuaciones de momentos. En primer lugar,

$$M_{AB} = \int V_{AB}\,dx + C = \int -20\,dx + C = -20x + C$$

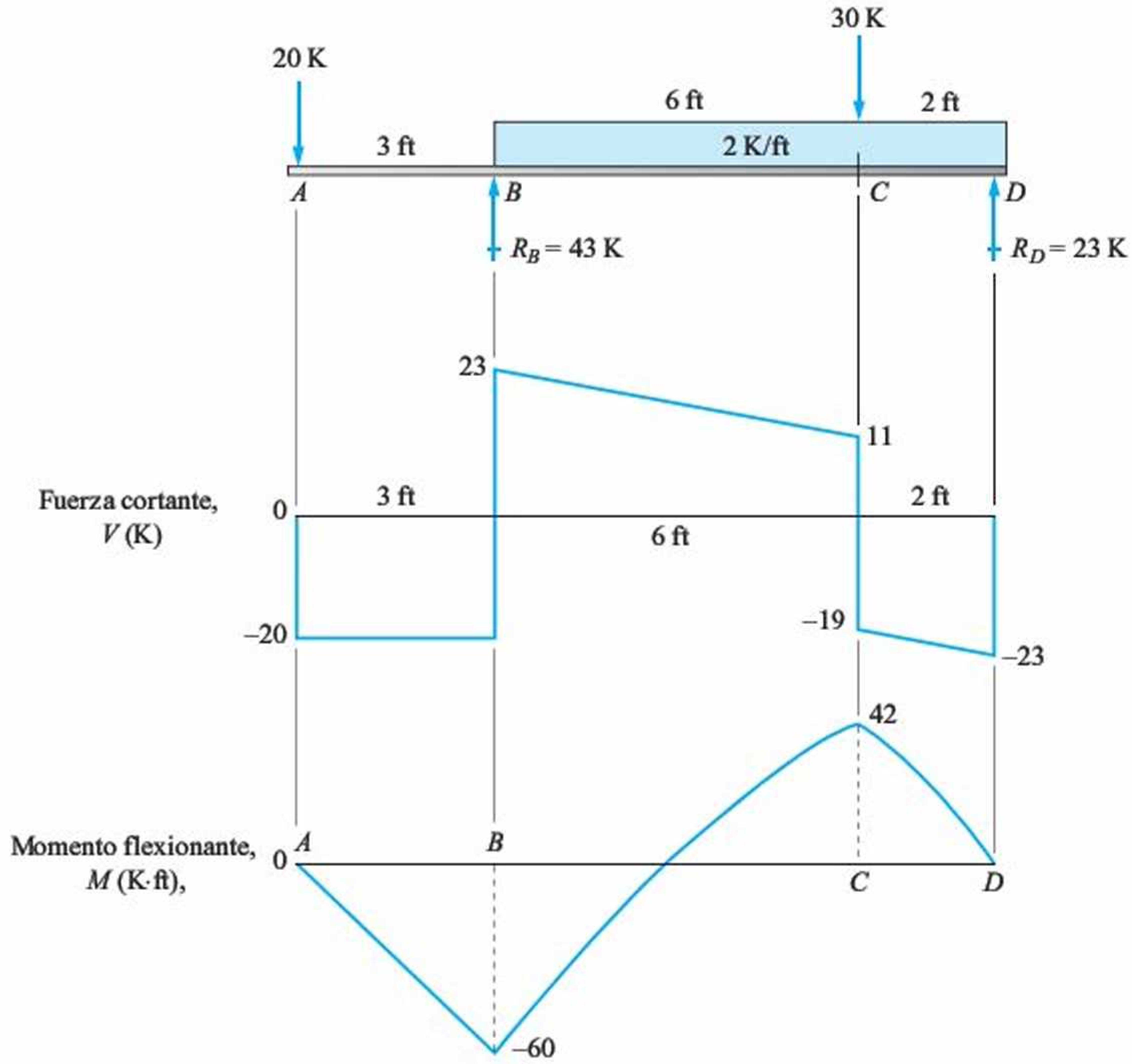


FIGURA 9–28 Diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante del problema de ejemplo 9–10.

En $x = 0$, $M_{AB} = 0$. Por consiguiente, $C = 0$ y

$$M_{AB} = -20x \tag{d}$$

A continuación

$$M_{BC} = \int V_{BC}\,dx + C = \int (-2x + 29)\,dx + C = -x^2 + 29x + C$$

En $x = 3$, $M_{BC} = -60$. Por consiguiente, $C = -138$ y

$$M_{BC} = -x^2 + 29x - 138 \tag{e}$$

Por último,

$$M_{CD} = \int V_{CD}\,dx + C = \int (-2x - 1)\,dx + C = -x^2 - x + C$$

En $x = 9$, $M_{CD} = 42$. Por consiguiente, $C = 132$ y

$$M_{CD} = -x^2 - x + 132 \tag{f}$$

Ahora prosiga con el paso 6 para obtener las ecuaciones para θEI.

Paso 6. Integrando las ecuaciones de los momentos,

$$\theta_{AB}EI = \int M_{AB}\,dx + C = \int (-20x)\,dx + C$$

$$\theta_{AB}EI = -10x^2 + C_1 \tag{g}$$

$$\theta_{BC}EI = \int M_{BC}\,dx + C = \int (-x^2 + 29x - 138)\,dx + C$$

$$\theta_{BC}EI = -x^3/3 + 14.5x^2 - 138x + C_2 \tag{h}$$

$$\theta_{CD}EI = \int M_{CD}\,dx + C = \int (-x^2 - x + 132)\,dx + C$$

$$\theta_{CD}EI = -x^3/3 - x^2/2 + 132x + C_3 \tag{i}$$

Ahora en el paso 7, integre las ecuaciones (g), (h) e (i) para obtener las ecuaciones de yEI.

Paso 7. Deberá tener

$$y_{AB}EI = \int \theta_{AB}EI\,dx + C$$

$$y_{AB}EI = -10x^3/3 + C_1x + C_4 \tag{j}$$

$$y_{BC}EI = \int \theta_{BC}EI\,dx + C$$

$$y_{BC}EI = -x^4/12 + 14.5x^3/3 - 69x^2 + C_2x + C_5 \tag{k}$$

$$y_{CD}EI = \int \theta_{CD}EI\,dx + C$$

$$y_{CD}EI = -x^4/12 - x^3/6 + 66x^2 + C_3x + C_6 \tag{l}$$

El paso 8 requiere que se identifiquen las condiciones limitantes. Se requieren seis, puesto que hay seis constantes de integración desconocidas en las ecuaciones (g) a (l). Escríbalas ahora.

Paso 8. Considerando los puntos de flexión cero y la continuidad de la pendiente y las curvas de flexión, podemos decir

1. En $x = 3$, $y_{AB}\,EI = 0$
2. En $x = 3$, $y_{BC}\,EI = 0$
3. En $x = 11$, $y_{CD}\,EI = 0$

(flexión cero en los apoyos)

4. En $x = 9$, $y_{BC}\,EI = y_{CD}\,EI$ (curva de flexión continua en C)
5. En $x = 3$, $\theta_{AB}\,EI = \theta_{BC}\,EI$
6. En $x = 9$, $\theta_{BC}\,EI = \theta_{CD}\,EI$

(curva de pendiente continua en B y C)

Ahora podemos sustituir estos valores de x en las ecuaciones apropiadas y resolverlas para C_1 a C_6. Primero haga las sustituciones y reduzca las ecuaciones resultantes a la forma que implica las constantes.

Para las seis condiciones previamente mencionadas, resultan las siguientes ecuaciones.

1. $3C_1 + C_4 = 90$
2. $3C_2 + C_5 = 497.25$

$$
\begin{aligned}
&3.\ 11C_3 + C_6 &&= -6544.08\overline{33} = -78\,529/12\\
&4.\ 9C_2 - 9C_3 + C_5 - C_6 &&= 7290\\
&5.\ C_1 - C_2 &&= -202.5\\
&6.\ C_2 - C_3 &&= 1215
\end{aligned}
$$

El valor de la cantidad del lado derecho de la ecuación 3 está expresado con una precisión excesivamente alta. Ésta a menudo no es necesaria pero se empleó en este ejemplo para eliminar la acumulación de errores de redondeo arrastrados en la solución. Existen muchos pasos para llegar a la solución final, y las imprecisiones en esta etapa pueden hacer que varíen significativamente los resultados, lo que podría ser frustrante para usted conforme prosiga con la solución. Observe que la escritura de la constante en la ecuación 3 como $-6544.08\overline{33}$ indica que los 3 se repiten hasta el infinito. Así pues, ésta es una representación inherentemente imprecisa del número. Si se introduce el número como la fracción exacta (–78.529/12) en un solucionador de ecuaciones se eliminaría el error. El uso de un solucionador de ecuaciones basado en la computadora tal como MATHCAD, TK Solver, MATLAB o MAPLE facilita los laboriosos cálculos implicados al final del procedimiento. Muchas calculadoras de alto nivel con capacidad de generar gráficas también contienen solucionadores de ecuaciones simultáneas.

Ahora resuelva las seis ecuaciones simultáneamente para los valores de C_1 a C_6.

Paso 9. Los resultados son:

$$
\begin{aligned}
&C_1 = 132.\overline{333} = 397/3 &&C_2 = 334.8\overline{33} = 4018/12\\
&C_3 = -880.1\overline{66} = -5281/6 &&C_4 = -307 \text{ (exacto)}\\
&C_5 = -507.25 \text{ (exacto)} &&C_6 = 3137.75 \text{ (exacto)}
\end{aligned}
$$

Paso 10. Ahora ya es posible escribir las ecuaciones finales para θ y y sustituyendo las constantes en las ecuaciones (g) a (h). Los resultados se dan a continuación.

$$
\begin{aligned}
\theta_{AB}EI &= -10x^2 + 132.\overline{333}\\
\theta_{BC}EI &= -x^3/3 + 14.5x^2 - 138x + 334.8\overline{33}\\
\theta_{CD}EI &= -x^3/3 - x^2/2 + 132x - 880.1\overline{66}\\
y_{AB}EI &= -10x^3/3 + 132.\overline{333}x - 307\\
y_{BC}EI &= -x^4/12 + 14.5x^3/3 - 69x^2 + 334.8\overline{33}x - 507.25\\
y_{CD}EI &= -x^4/12 - x^3/6 + 66x^2 - 880.1\overline{66}x + 3137.75
\end{aligned}
$$

Con las ecuaciones completas, ahora podemos determinar el punto de flexión máxima, que es el objetivo primordial del análisis. Basada en carga, la forma probable de la viga flexionada sería como la de la figura 9–29. Por consiguiente, la deflexión máxima podría ocurrir en el punto A al final del voladizo, en un punto a la derecha de B (hacia arriba), o en un punto cerca de la carga C (hacia abajo). Es probable que existan dos puntos de pendiente cero en los puntos E y F, como se muestra en la figura 9–29. Tendríamos que saber dónde la ecuación de la pendiente $\theta_{BC}EI$ es igual a cero para determinar donde ocurren las flexiones máximas.

Observe que la ecuación es de tercer grado. El uso de una calculadora graficadora y un solucionador de ecuaciones facilita la localización de los puntos donde $\theta_{BC}EI = 0$. La figura 9–30 muestra la gráfica ampliada del segmento BC de la viga donde se ve que los puntos cero ocurren en $x = 3.836$ y en $x = 8.366$ ft.

Ahora podemos determinar los valores de yEI en los puntos A, E y F para indagar cuál es el mayor.

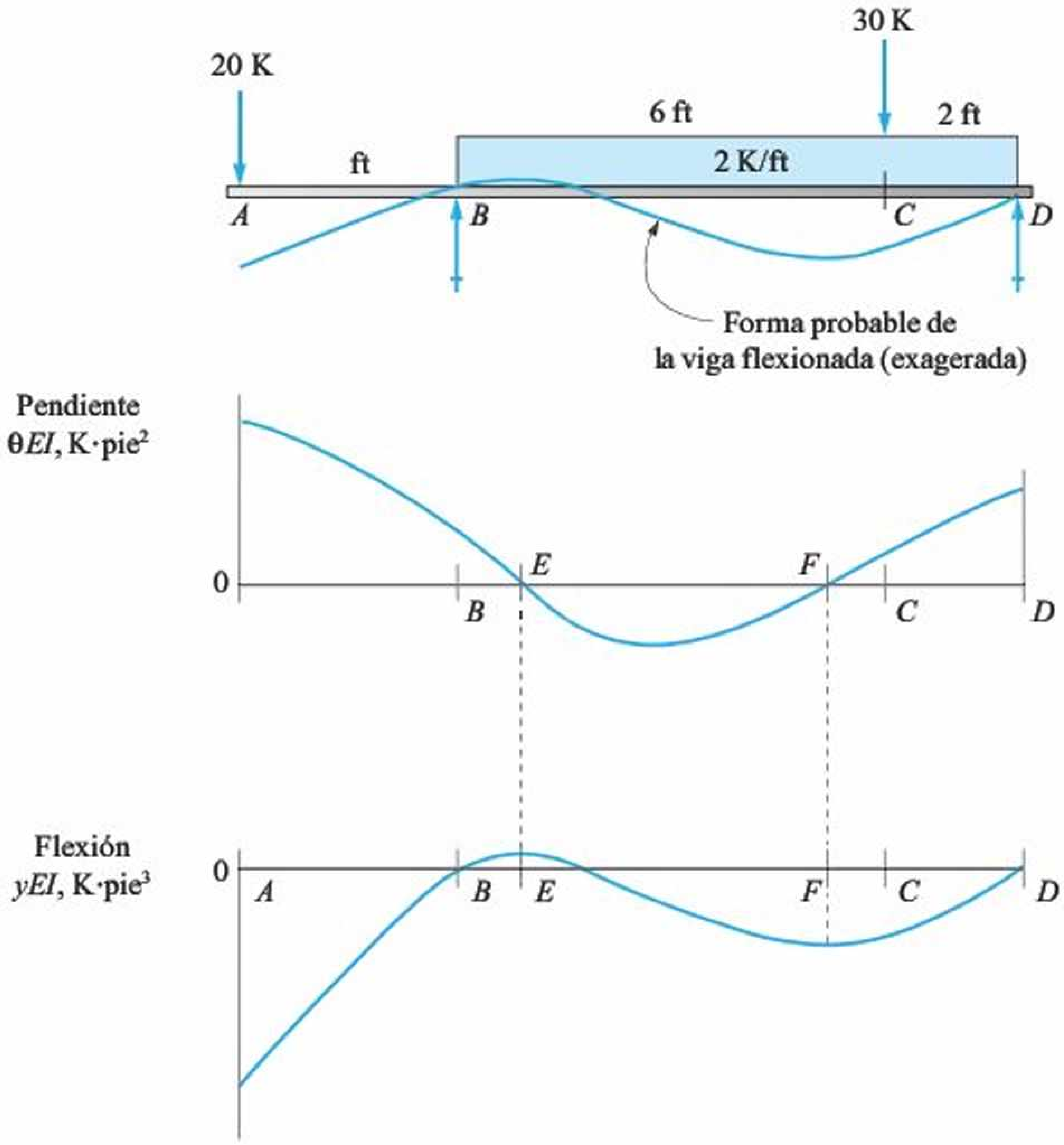


FIGURA 9–29
Curvas de la pendiente y flexión del problema de ejemplo 9–10.

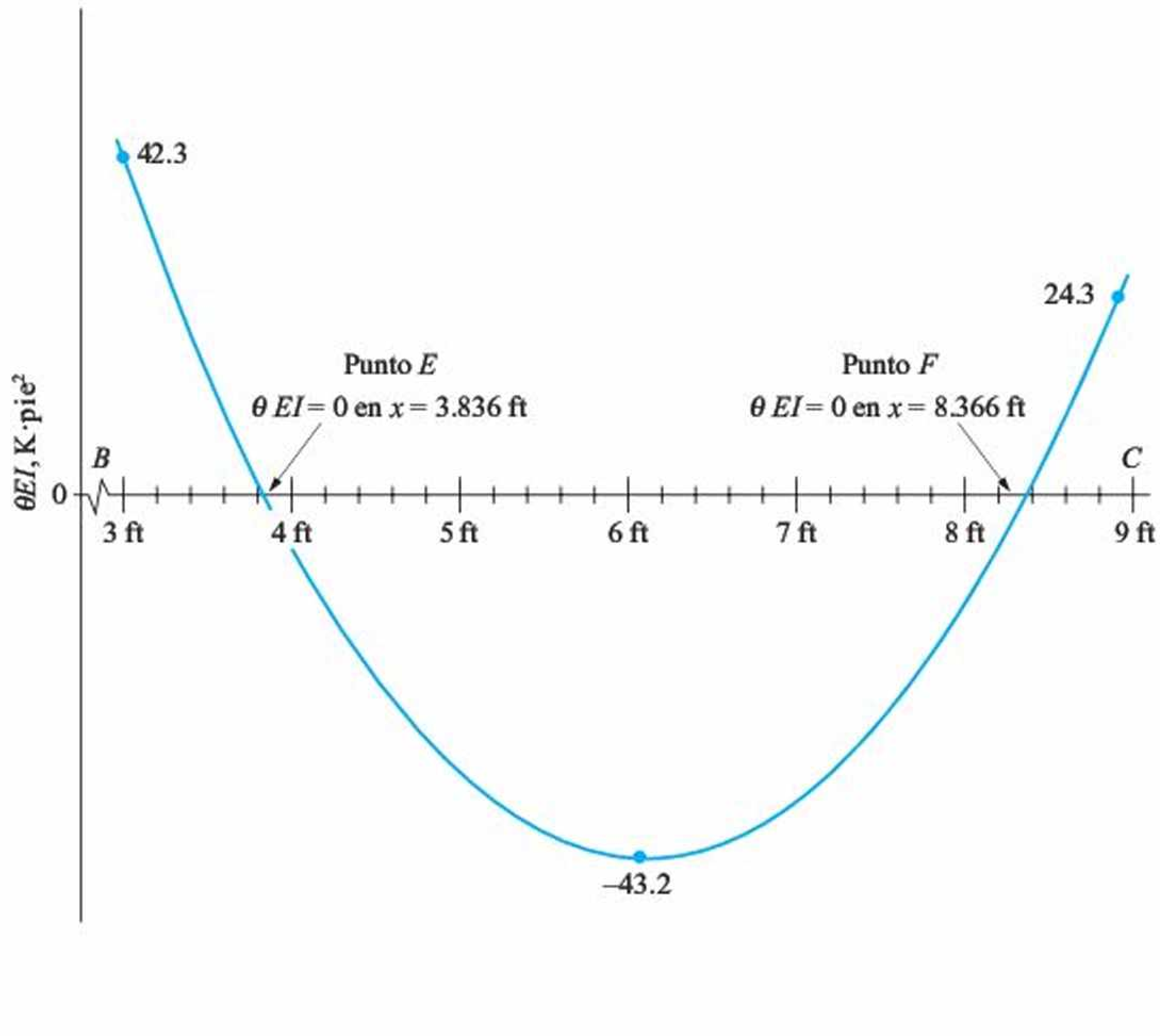


FIGURA 9–30
Gráfica que muestra los puntos de pendiente cero.

Punto A. En $x = 0$, en el segmento AB.

$$y_{AB}EI = -10x^3/3 + 132.\overline{333}x - 307$$
$$y_A EI = -10(0.00)^3/3 + 132.\overline{333}(0.00) - 307$$
$$y_A EI = -307 \text{ K}\cdot\text{ft}^3$$

Punto E. En $x = 3.836$ ft en el segmento BC,

$$y_{BC}EI = -x^4/12 + 14.5x^3/3 - 69x^2 + 334.8\overline{33}x - 507.25$$
$$y_E EI = -(3.836)^4/12 + 14.5(3.836)^3/3 - 69(3.836)^2 + 334.8\overline{33}(3.836) - 507.25$$
$$y_E EI = +16.62 \text{ K}\cdot\text{ft}^3$$

Punto F. En $x = 8.366$ ft en el segmento BC,

$$y_{BC}EI = -x^4/12 + 14.5x^3/3 - 69x^2 + 334.8\overline{33}x - 507.25$$
$$y_F EI = -(8.366)^4/12 + 14.5(8.366)^3/3 - 69(8.366)^2 + 334.8\overline{33}(8.366) - 507.25$$
$$y_F EI = -113.5 \text{ K}\cdot\text{ft}^3$$

El valor máximo ocurre en el punto A, de modo que es el punto crítico. Debemos seleccionar una viga que limite la flexión en A a 0.05 in o menos.

$$y_A EI = -307 \text{ K}\cdot\text{ft}^3$$

Sea $y_A = -0.05$ in. Entonces el I requerido es

$$I = \frac{-307 \text{ K}\cdot\text{ft}^3}{Ey_A} \times \frac{1000 \text{ lb}}{\text{K}} \times \frac{(12 \text{ in})^3}{\text{ft}^3}$$
$$I = \frac{(-307)(1000)(1728) \text{ lb}\cdot\text{in}^3}{(30 \times 10^6 \text{ lb in}^2)(-0.05 \text{ in})} = 354 \text{ in}^4$$

Consulte la tabla de vigas de patín ancho y seleccione una viga adecuada.

Una viga W18 × 40 es la mejor opción del apéndice A–7 puesto que es la más ligera con un valor de I suficientemente grande. Para esta viga, $I = 612 \text{ in}^4$ y el módulo de sección es $S = 68.4 \text{ in}^3$. El valor real será un poco menor que el valor límite de 0.050 in porque el momento real de inercia es mucho mayor que el valor requerido. Como la flexión es directamente proporcional al momento de inercia, podemos calcular la flexión real con

$$y_{\text{máx}} = (0.050 \text{ in})(354 \text{ in}^4)/(612 \text{ in}^4) = 0.029 \text{ in}$$

Ahora calcule el esfuerzo flexionante máximo y el esfuerzo cortante en el alma de la viga y compruebe para ver si es segura.

En la figura 9–28, vemos que el momento flexionante máximo es de 60 K·ft. Entonces

$$\sigma = \frac{M}{S} = \frac{60 \text{ K}\cdot\text{ft}}{68.4 \text{ in}^3} \times \frac{1000 \text{ lb}}{\text{K}} \times \frac{12 \text{ in}}{\text{ft}} = 10\,526 \text{ psi}$$

Podemos especificar que la viga sea de acero estructural ASTM A992 con una resistencia a la cedencia de 50 000 psi. De acuerdo con las especificaciones AISC para cargas estáticas, el esfuerzo permisible es

$$\sigma_d = 0.66\, s_y = (0.66)(50\,000 \text{ psi}) = 33\,000 \text{ psi}$$

Este esfuerzo es mucho mayor que el esfuerzo máximo calculado en la viga. Por consiguiente, la viga es segura para flexión.

También podemos determinar el esfuerzo cortante en el alma. La fuerza cortante máxima es de 23 K o 23 000 lb en cualquiera de los puntos B o D. Utilizamos la fórmula de cortante en el alma, $\tau = V/th$. En el apéndice A–7 encontramos $t = 0.315$ in y $h = 17.90$ in. Entonces

$$\tau = V/th = (23\,000 \text{ lb})/(0.315 \text{ in})(17.90 \text{ in}) = 4079 \text{ psi}$$

El esfuerzo cortante permisible en el alma es

$$\tau_d = 0.40\, s_y = (0.40)(50\,000 \text{ psi}) = 20\,000 \text{ psi}$$

Por consiguiente, la viga es segura para cortante en el alma. También tendremos que verificar las especificaciones AISC para determinar si se requiere arriostramiento lateral.

Comentario Diseñamos una viga para que soporte la carga mostrada en la figura 9–27 que es segura a flexión y cortante y que se flexiona no más de 0.050 in. La viga es un perfil W18 × 40 de acero estructural ASTM A992 laminado. La flexión máxima ocurre en el punto A en el extremo izquierdo del voladizo y su valor es de 0.029 in. También derivamos ecuaciones completas para el esfuerzo cortante, el momento flexionante, la pendiente y la flexión en todos los puntos de la viga.

9–8 MÉTODO DEL ÁREA–MOMENTO

El procedimiento semigráfico para determinar flexiones de vigas, llamado *método del área–momento* es útil en problemas que incluyen patrones de carga complejos o cuando la sección transversal de una viga varía a lo largo de ella. Es difícil manejar tales casos con los demás métodos presentados en este capítulo.

Las flechas de transmisiones mecánicas son ejemplos en los que la sección transversal varía a lo largo de la viga. La figura 9–31 muestra una flecha diseñada para que lleve montados dos engranes donde los cambios de diámetro forman hombros contra los cuales se asientan los engranes y cojinetes, y que permiten su localización axial. Observe, también, que el momento flexionante se reduce hacia los extremos de la flecha, lo que permite que las secciones de menor tamaño sean seguras con respecto a esfuerzo flexionante.

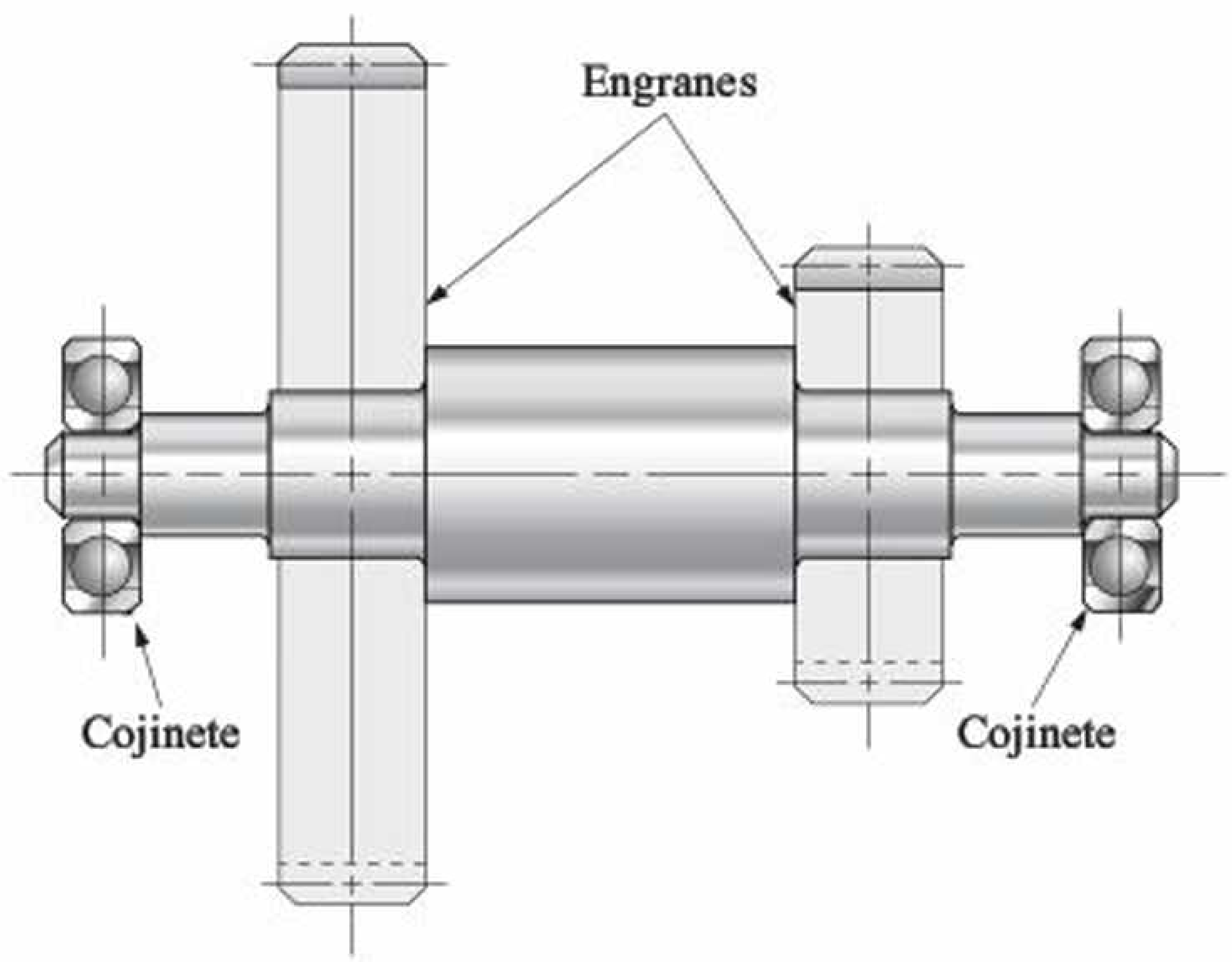


FIGURA 9–31 Flecha con secciones transversales variables.

En aplicaciones estructurales de vigas, en ocasiones se utilizan secciones transversales variables para abaratar los miembros. Se utilizan secciones grandes con momentos de inercia más elevados, en tanto que se utilizan secciones de menor tamaño en lugares donde el momento flexionante es bajo. La figura 9–32 muestra un ejemplo.

El método del área–momento utiliza la cantidad M/EI, el momento flexionante dividido entre la rigidez de la viga, para determinar la flexión de la viga en puntos seleccionados. En tal caso conviene preparar dicho diagrama como parte del procedimiento de análisis de una viga. Si la sección transversal no cambia a lo largo de la viga, el diagrama M/EI se parece al conocido diagrama de momento flexionante excepto que sus valores se dividieron entre la cantidad EI. Sin embargo, si el momento de inercia de la sección transversal varía a lo largo de la viga, la forma del diagrama M/EI será diferente. Éste se muestra en la figura 9–33.

Recuerde la ecuación (9–10) de la sección 9–7,

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} \tag{9–10}$$

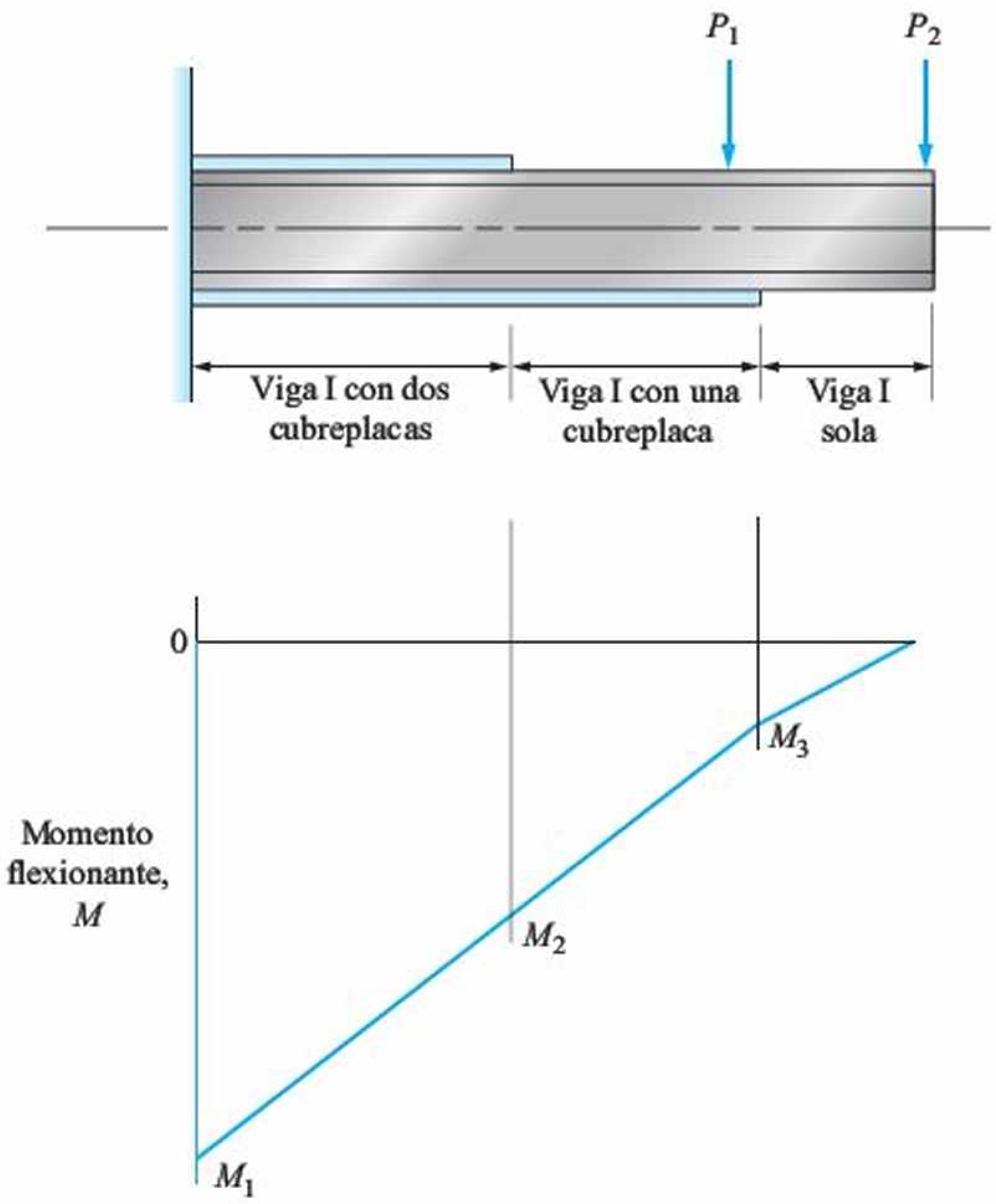


FIGURA 9–32 Viga en voladizo con secciones transversales variables.

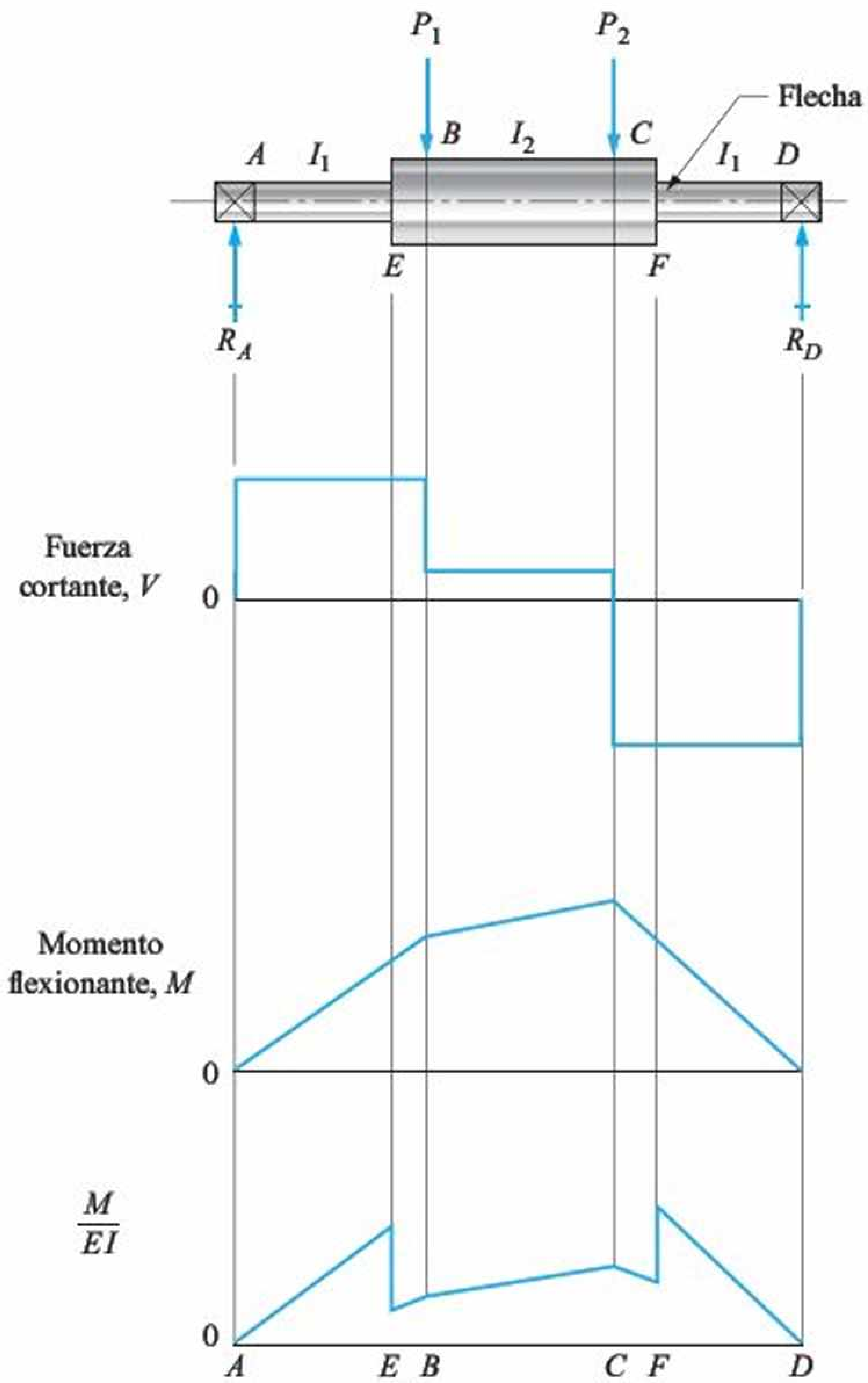


FIGURA 9–33 Ilustraciones de diagramas M/EI de una viga con secciones transversales variables.

Esta fórmula establece la relación entre la flexión de la viga, y, como una función de la posición, x, el momento flexionante, M y la rigidez de la viga, EI. El lado derecho de la ecuación se reescribe como

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Pero observe que dy/dx es la pendiente de la curva de flexión, θ; es decir, $dy/dx = \theta$. Entonces

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\theta}{dx}$$

La ecuación (9–10) se escribe entonces como

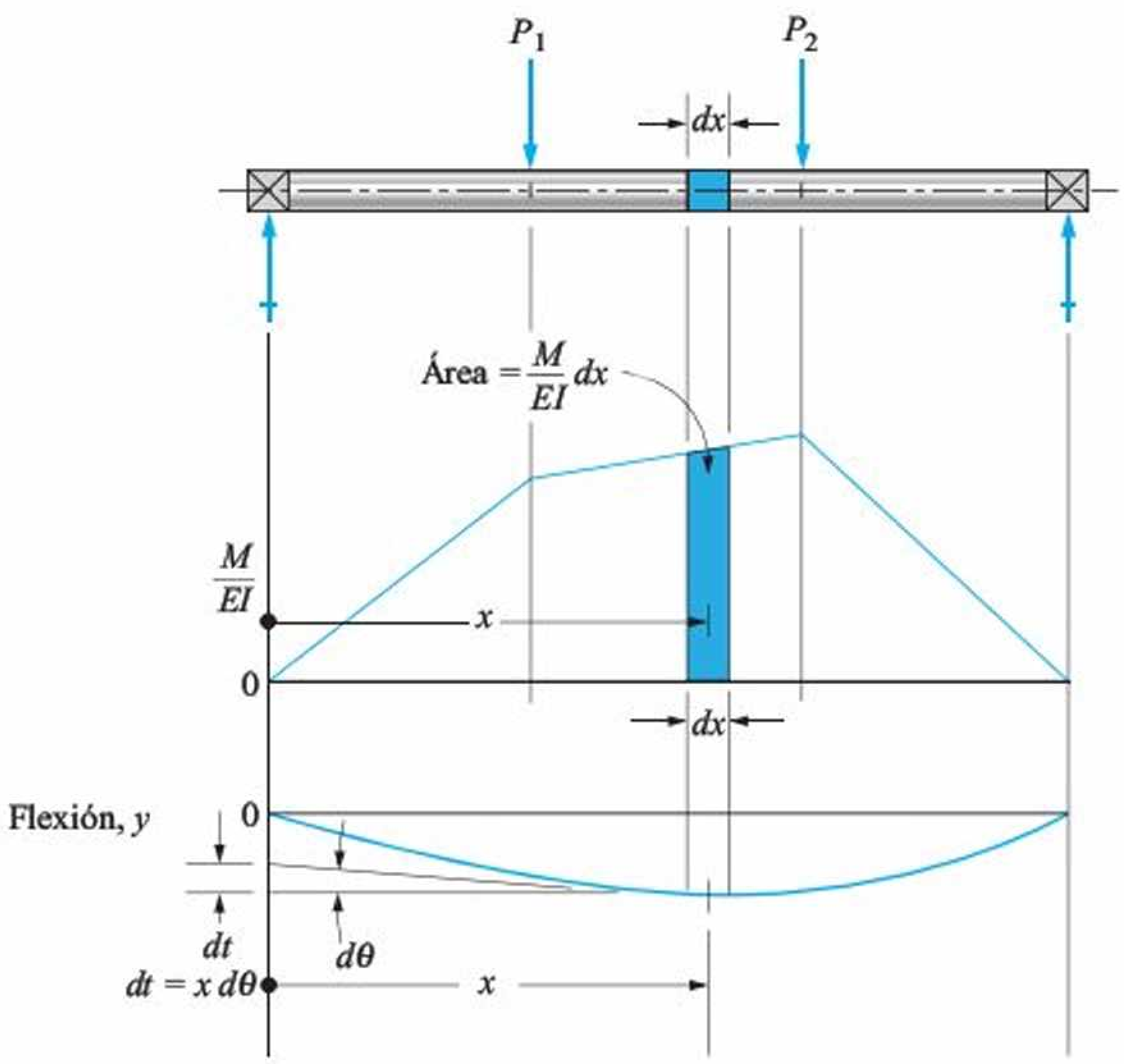
$$\frac{M}{EI} = \frac{d\theta}{dx}$$

Resolviendo para $d\theta$ se obtiene

$$d\theta = \frac{M}{EI}dx \quad \textbf{(9–15)}$$

La interpretación de la ecuación (9–15) se ve en la figura 9–34 donde el lado derecho, $(M/EI)dx$, es el área bajo el diagrama M/EI a lo largo de una pequeña longitud dx. Entonces $d\theta$ es el cambio del ángulo de la pendiente a lo largo de la misma distancia dx. Si se trazan líneas tangentes a la curva de flexión de la viga en dos puntos que marcan el inicio y el final del segmento dx, el ángulo entre ellas es $d\theta$.

FIGURA 9–34
Principios del método del área-momento para determinar la flexión de vigas.



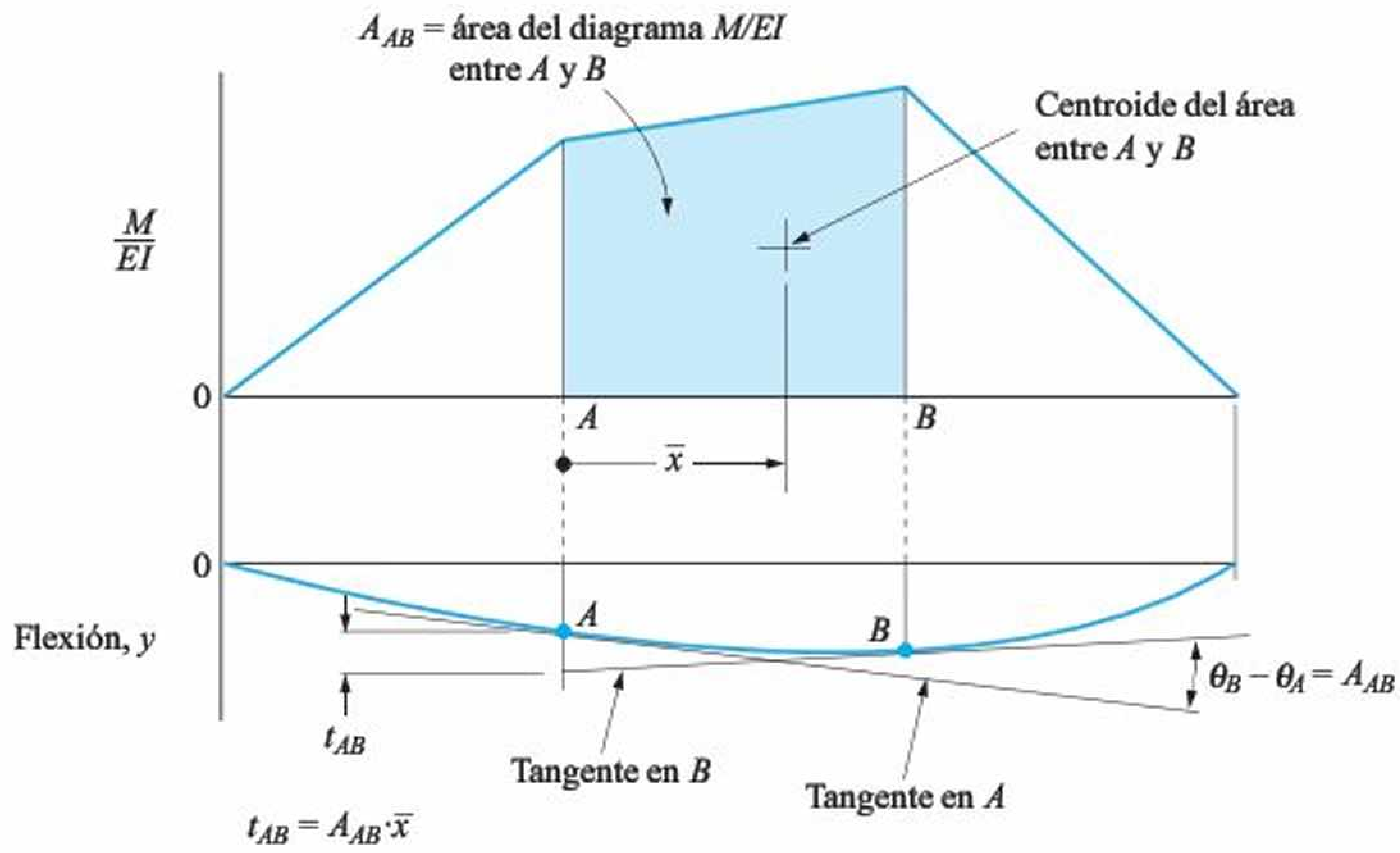


FIGURA 9–35
Ilustraciones de los dos teoremas del método del área-momento para determinar flexiones de vigas.

El cambio del ángulo $d\theta$ cambia la posición vertical de un punto a una cierta distancia x del pequeño elemento dx, como se muestra en la figura 9–34. Si dt denota el cambio de posición vertical, podemos calcularlo con

$$dt = x\,d\theta = \frac{M}{EI}x\,dx \tag{9–16}$$

Para determinar el efecto del cambio del ángulo a lo largo de un segmento más grande de la viga, las ecuaciones (9–15) y (9–16) deben integrarse a lo largo del segmento. Por ejemplo, a lo largo del segmento A–B mostrado en la figura con la ecuación (9–15),

$$\int_A^B d\theta = \theta_B - \theta_A = \int_A^B \frac{M}{EI}dx \tag{9–17}$$

La última parte de esta ecuación es el área bajo la curva M/EI entre A y B. Ésta es igual al cambio del ángulo de las tangentes en A y B, $\theta_B - \theta_A$.

Con la ecuación (9–16),

$$\int_A^B dt = t_{AB} = \int_A^B \frac{M}{EI}x\,dx \tag{9–18}$$

Aquí el término t_{AB} representa la desviación tangencial del punto A con respecto a la tangente al punto B, como se muestra en la figura 9–35. Además, el lado derecho de la ecuación (9–18) es el *momento del área del diagrama M/EI entre los puntos A y B*. En la práctica, el momento del área se calcula multiplicando el área bajo la curva M/EI por la distancia al centroide del área, también mostrada en la figura 9–35.

Las ecuaciones (9–17) y (9–18) constituyen el fundamento de los *dos teoremas del método del área–momento para determinar flexiones de vigas*. Ellos son:

Teorema 1

> El cambio del ángulo, en radianes, entre tangentes trazadas en dos puntos A y B en la curva de flexión de una viga, es igual al área bajo el diagrama M/EI entre A y B.

Teorema 2

> La desviación vertical del punto *A* en la curva de flexión de una viga, con respecto a la tangente que pasa por otro punto *B* de la curva, es igual al momento del área bajo la curva *M/EI* con respecto al punto *A*.

Aplicaciones del método del área de momento. En esta sección mostramos varios ejemplos del uso del método del área–momento para determinar la flexión de vigas. Se desarrollan procedimientos para cada clase de viga según el tipo de carga y apoyos. Se consideran las siguientes:

1. Vigas en voladizo con una amplia variedad de cargas
2. Vigas simétricamente cargadas simplemente apoyadas
3. Vigas con secciones transversales variables
4. Vigas simplemente apoyadas asimétricamente cargadas

Vigas en voladizo. La definición de una viga en voladizo incluye el requerimiento de que esté firmemente sujeta a una estructura de apoyo de modo que la viga no gire en el apoyo. Por consiguiente, la tangente a la curva de flexión en el apoyo siempre está alineada con la posición original del eje neutro de la viga cuando no está cargada. Si la viga es horizontal, como en general se la ilustra, la tangente también es horizontal.

El siguiente procedimiento, para determinar la flexión de cualquier punto de la viga en voladizo, utiliza los teoremas desarrollados en la sección 9–10 junto con la observación de que la tangente a la curva de flexión en el apoyo es horizontal.

Procedimiento para determinar la flexión de una viga en voladizo—Método del área-momento

1. Trace los diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante.
2. Divida los valores del momento flexionante entre la rigidez de la viga, *EI*, y trace el diagrama *M/EI*. La unidad de la cantidad *M/EI* es $(\text{longitud})^{-1}$; por ejemplo, m^{-1}, ft^{-1} o in^{-1}.
3. Calcule el área del diagrama *M/EI* y localice su centroide. Si la forma del diagrama no es simple, divídala en partes y determine el área y el centroide de cada parte. Si se desea la flexión en el extremo de la viga en voladizo, se utiliza el área de todo el diagrama *M/EI*. Si se desea la flexión de alguno otro punto, se utiliza sólo el área entre el apoyo y el punto de interés.
4. Use el teorema 2 para calcular la desviación vertical del punto de interés de la tangente al eje neutro de la viga en el apoyo. Como la tangente coincide con la posición original del eje neutro, la desviación así determinada es la desviación real de la viga en el punto de interés. Si todas las cargas actúan en la misma dirección, la flexión máxima ocurre en el extremo de la viga en voladizo.

Problema de ejemplo 9–11 Use el método del área–momento para determinar la flexión en el extremo de la viga en voladizo de acero mostrada en la figura 9–36.

Solución

Objetivo: Calcular la flexión en el extremo de la viga en voladizo.

Datos: La viga y la carta mostradas en la figura 9–36.

Análisis: Use el *Procedimiento para determinar la flexión de una viga en voladizo–Método del área–momento*.

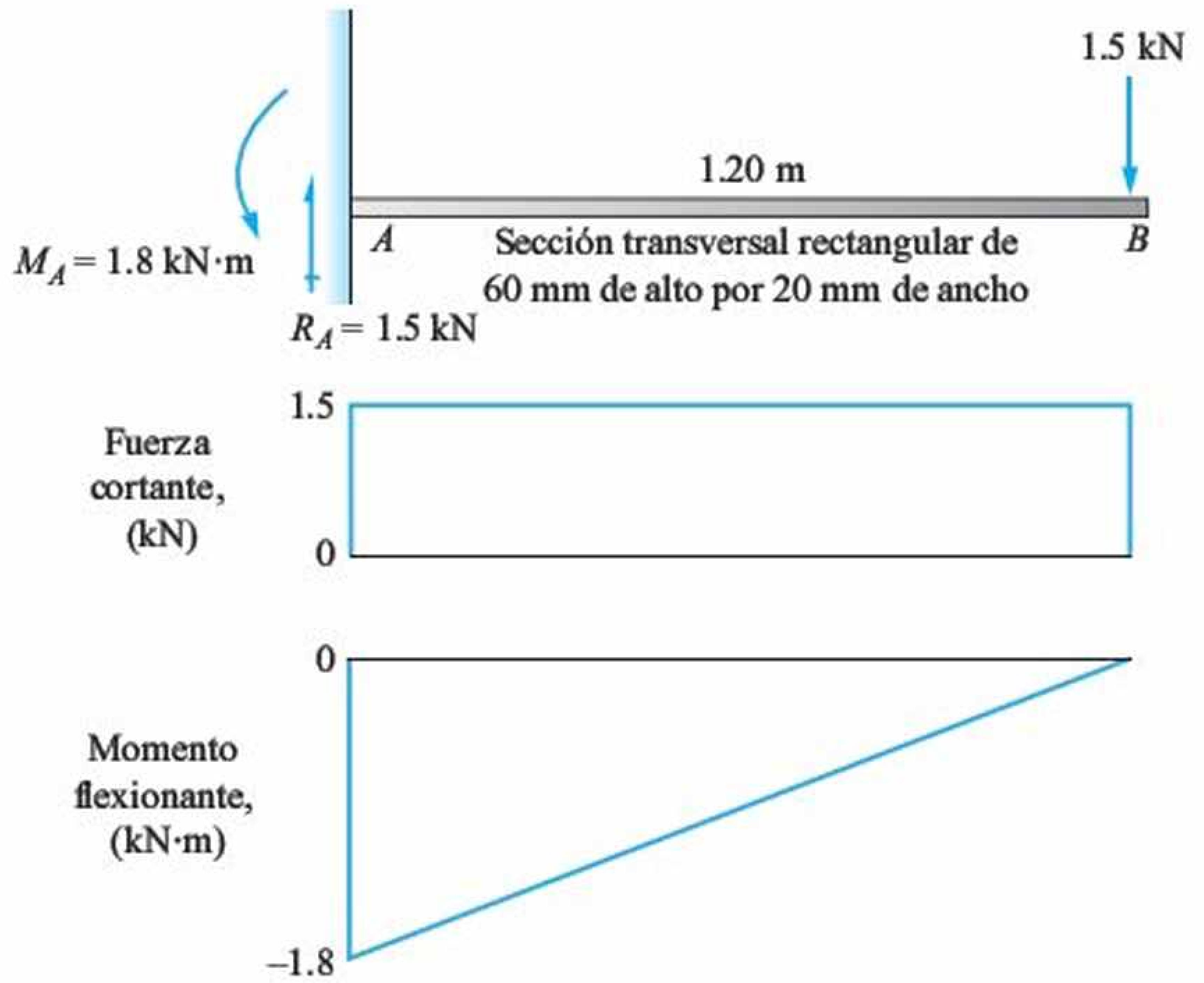


FIGURA 9–36 Diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante de los problemas de ejemplo 9–11 y 9–12.

Resultados

Paso 1. La figura 9–36 muestra los diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante.

Paso 2. La rigidez se calcula como sigue:

$$E = 207\,\text{GPa} = 207 \times 10^9\,\text{N/m}^2$$

$$I = \frac{th^3}{12} = \frac{(0.02\,\text{m})(0.06\,\text{m})^3}{12} = 3.60 \times 10^{-7}\,\text{m}^4$$

$$EI = (207 \times 10^9\,\text{N/m}^2)(3.60 \times 10^{-7}\,\text{m}^4) = 7.45 \times 10^4\,\text{N}\cdot\text{m}^2$$

El diagrama *M*/*EI* se trazó en la figura 9–37. Observe que lo único que cambia en el diagrama de momento flexionante son las unidades y los valores, porque la rigidez de la viga permanece constante a lo largo de ésta.

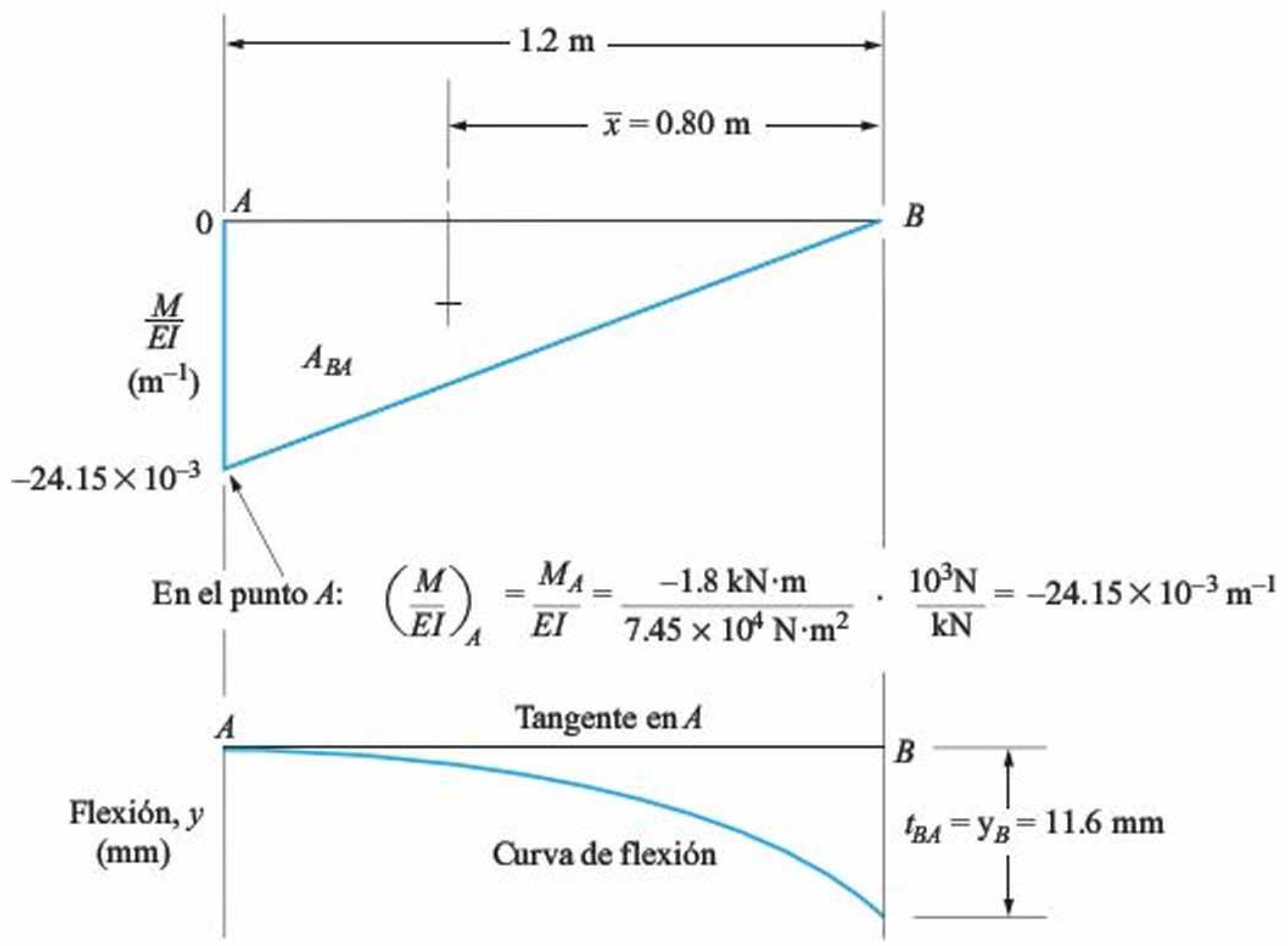


FIGURA 9–37 Curvas *M*/*EI* y de deflexión del problema de ejemplo 9–11.

Paso 3. El área deseada es la del triángulo del diagrama M/EI, designada A_{BA} para indicar que se utiliza para calcular la flexión del punto B con respecto a A.

$$A_{BA} = (0.5)(24.15 \times 10^{-3}\ \text{m}^{-1})(1.20\ \text{m}) = 14.5 \times 10^{-3}\ \text{rad}$$

El centroide de esta área se encuentra a dos tercios de la distancia de B a A, 0.80 m.

Paso 4. Para poner en práctica el teorema 2, tenemos que calcular el momento del área determinado en el paso 3. Éste es igual a t_{BA}, la desviación vertical del punto B con respecto a la tangente trazada por el punto A de la curva de flexión.

$$t_{BA} = A_{BA} \times \bar{x} = (14.5 \times 10^{-3}\ \text{rad})(0.80\ \text{m})$$
$$t_{BA} = y_B = 11.6 \times 10^{-3}\ \text{m} = 11.6\ \text{mm}$$

Como la tangente al punto A es horizontal, t_{BA} es igual a la flexión de la viga en el punto B de la viga.

Comentario Este resultado es idéntico al que se encontraría con la fórmula del caso *a* en el apéndice A–24. El valor del método del área–momento es mucho más evidente cuando intervienen varias cargas o cuando la sección transversal de la viga en voladizo varía a lo largo de ésta.

Problema de ejemplo 9–12

Para la misma viga utilizada en el problema de ejemplo 9–11 y mostrada en la figura 9–36, calcule la flexión en un punto a 1.0 m del apoyo.

Solución

Objetivo Calcular la flexión a 1.0 m del extremo izquierdo de la viga en voladizo.

Datos La viga y la carga mostradas en la figura 9–36.

Análisis Use el *procedimiento para determinar la flexión de una viga en voladizo–método del área–momento*. Los pasos 1 y 2 del problema de ejemplo 9–11 son idénticos, y dan por resultado los diagramas de carga, fuerza cortante, momento flexionante y M/EI mostrados en la figuras 9–36 y 9–37. El procedimiento de solución continúa en el paso 3.

Resultados ***Paso 3.*** Este paso cambia porque se utiliza sólo el área del diagrama M/EI entre el apoyo y el punto situado a 1.0 m hacia fuera de la viga, como se muestra en la figura 9–38. Si el punto C es el punto de interés, tenemos que calcular t_{CA}; es decir, la desviación vertical del punto C con respecto a la tangente trazada por el punto A en el apoyo. El área requerida es un trapezoide, y conviene dividirlo en un triángulo y un rectángulo, y tratarlos como formas simples. Entonces el cálculo se hace como sigue

$$t_{CA} = A_{CA} \times \bar{x} = A_{CA1} \times x_1 + A_{CA2} \times x_2$$

donde las áreas y las distancias x se muestran en la figura 9–38. Observe que las distancias se miden *del punto C al centroide del área componente*. Entonces

$$A_{CA1} \times x_1 = (0.004\,025\ \text{m}^{-1})(1.0\ \text{m})(0.50\ \text{m}) = 2.01 \times 10^{-3}\ \text{m}$$
$$A_{CA2} \times x_2 = (0.5)(0.020\,125\ \text{m}^{-1})(1.0\ \text{m})(0.667\ \text{m}) = 6.71 \times 10^{-3}\ \text{m}$$
$$t_{CA} = y_C = (2.01 + 6.71)(10^{-3})\ \text{m} = 8.72\ \text{mm}$$

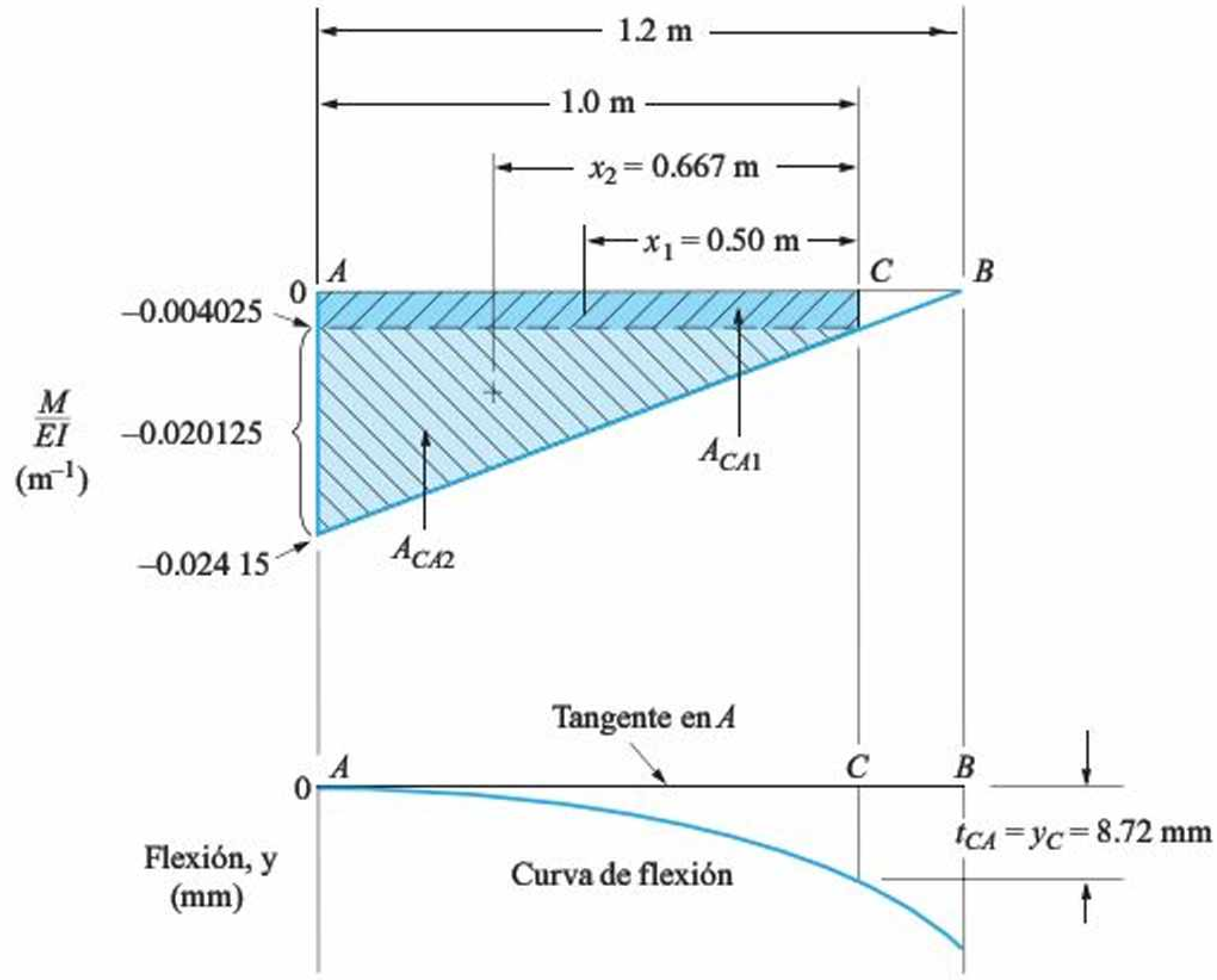


FIGURA 9–38 Curvas *M/EI* y de deflexión del problema de ejemplo 9–12.

Como antes, dado que la tangente al punto A es horizontal, la desviación vertical, t_{CA}, es la flexión verdadera del punto *C*.

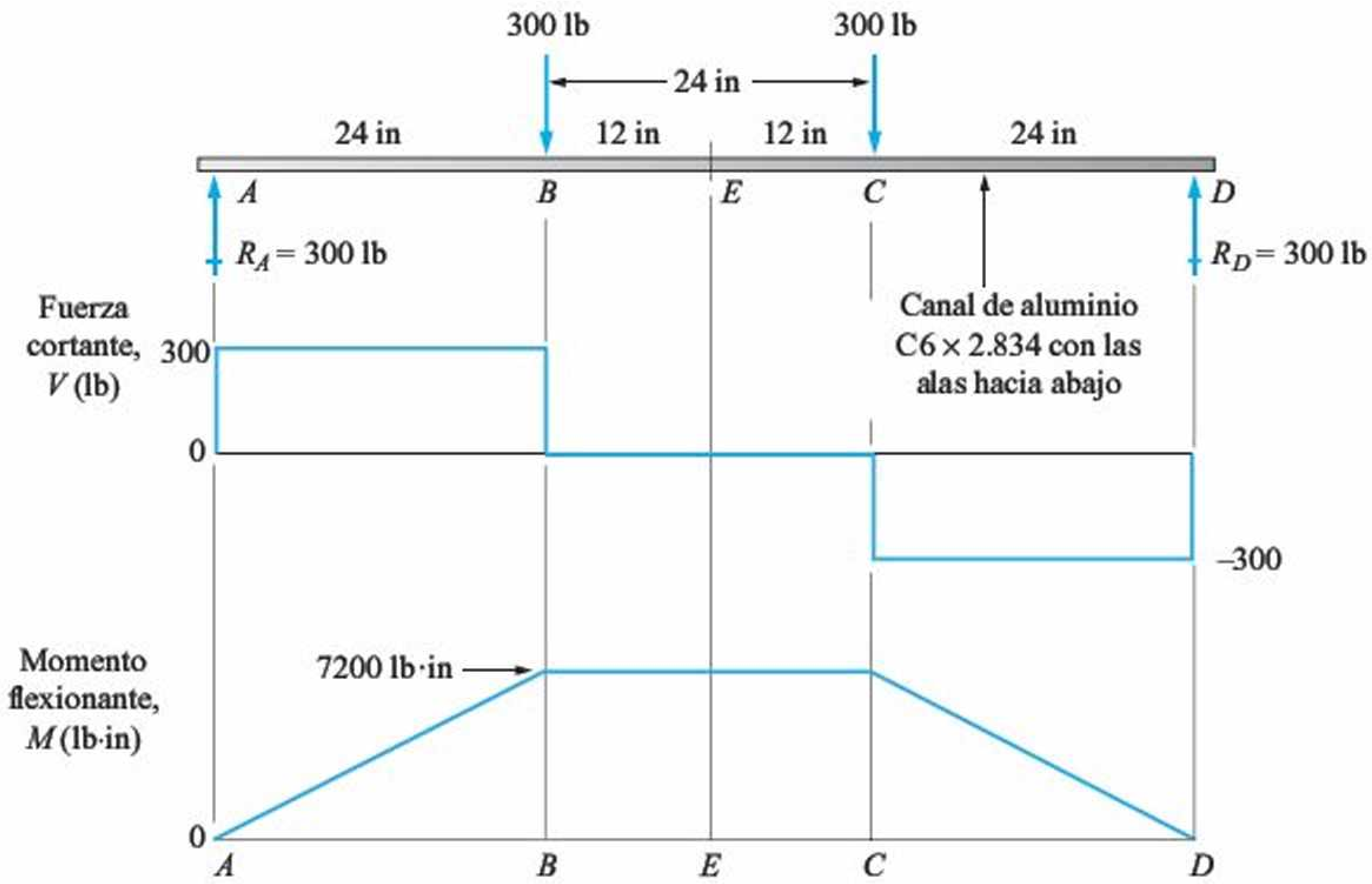
Vigas simétricamente cargadas y simplemente apoyadas. Esta clase de problemas tiene la ventaja de que se sabe que la flexión máxima ocurre a la mitad del claro de la viga. En la figura 9–39 se muestra un ejemplo, donde la viga soporta dos cargas idénticas equidistantes de los apoyos. Desde luego, cualquier carga para la cual se pueda predecir el punto de flexión máxima puede resolverse con el procedimiento descrito a continuación.

Procedimiento para determinar la flexión de una viga simétricamente cargada y simplemente apoyada—Método del área-momento.

1. Trace los diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante.
2. Divida los valores del momento flexionante entre la rigidez de la viga, *EI,* y trace el diagrama *M/EI.*
3. Si se desea la flexión máxima, a la mitad del claro, use la parte del diagrama *M/EI* entre el centro y uno de los apoyos; es decir, la mitad del diagrama.
4. Use el teorema 2 para calcular la desviación vertical del punto en uno de los apoyos de la tangente al eje neutro localizado a la mitad de la viga. Como la tangente es horizontal y como la flexión en el apoyo es cero, la desviación así encontrada es la flexión a la mitad de la viga.
5. Para determinar la flexión en otro punto de la misma viga, use el área del diagrama *M/EI* entre el centro y el punto de interés. Use el teorema 2 para calcular la desviación vertical del punto de interés con respecto al punto de flexión máxima a la mitad de la viga. Luego reste esta desviación de la flexión máxima determinada en el paso 4.

Problema de ejemplo 9–13 Determine la flexión máxima de la viga mostrada en la figura 9–39. La viga es un canal, C6 × 2.834, de aluminio 6061–T6, colocado con las alas hacia abajo.

FIGURA 9–39 Diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante de los problemas de ejemplo 9–13 y 9–14.



Solución

Objetivo Calcule la flexión máxima de la viga.

Datos La viga y las cargas mostradas en la figura 9–39.

Análisis Use el *Procedimiento para determinar la flexión de una viga simétricamente cargada y simplemente apoyada–método del área-momento*, pasos del 1 al 4. Como el patrón de carga es simétrico, la flexión máxima ocurrirá a la mitad de la viga.

Resultados ***Paso 1.*** Los diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante se muestran en la figura 9–39, preparados a la manera tradicional. El momento flexionante máximo es de 7200 lb·in entre *B* y *C*.

Paso 2. La rigidez de la viga, *EI*, se calcula con los datos de los apéndices. Según el apéndice A–18, para aluminio 6061–T6, *E* es de 10×10^6 psi. Según el apéndice A–10, el momento de inercia del canal, con respecto al eje *Y–Y*, es de 1.53 in^4. Entonces.

$$EI = (10 \times 10^6 \text{ lb/in}^2)(1.53 \text{ in}^4) = 1.53 \times 10^7 \text{ lb}\cdot\text{in}^2$$

Como la rigidez es uniforme a lo largo de la viga, la forma del diagrama *M*/*EI* es igual a la del diagrama de momento flexionante, aunque los valores son diferentes, como se muestra en la figura 9–40. El valor máximo de *M*/*EI* es de 4.71×10^{-4} in^{-1}.

Paso 3. Para determinar la flexión a la mitad de la viga, se utiliza la mitad del diagrama *M*/*EI*. Por conveniencia, se divide en rectángulo y un triángulo; se muestra el centroide de cada uno.

Paso 4. Tenemos que determinar t_{AE}, la desviación vertical del punto *A* con respecto a la tangente trazada por el punto *E*, la mitad de la viga, de la curva de flexión. De acuerdo con el teorema 2,

$$t_{AE} = A_{AE1} \times x_{A1} + A_{AE2} \times x_{A2}$$

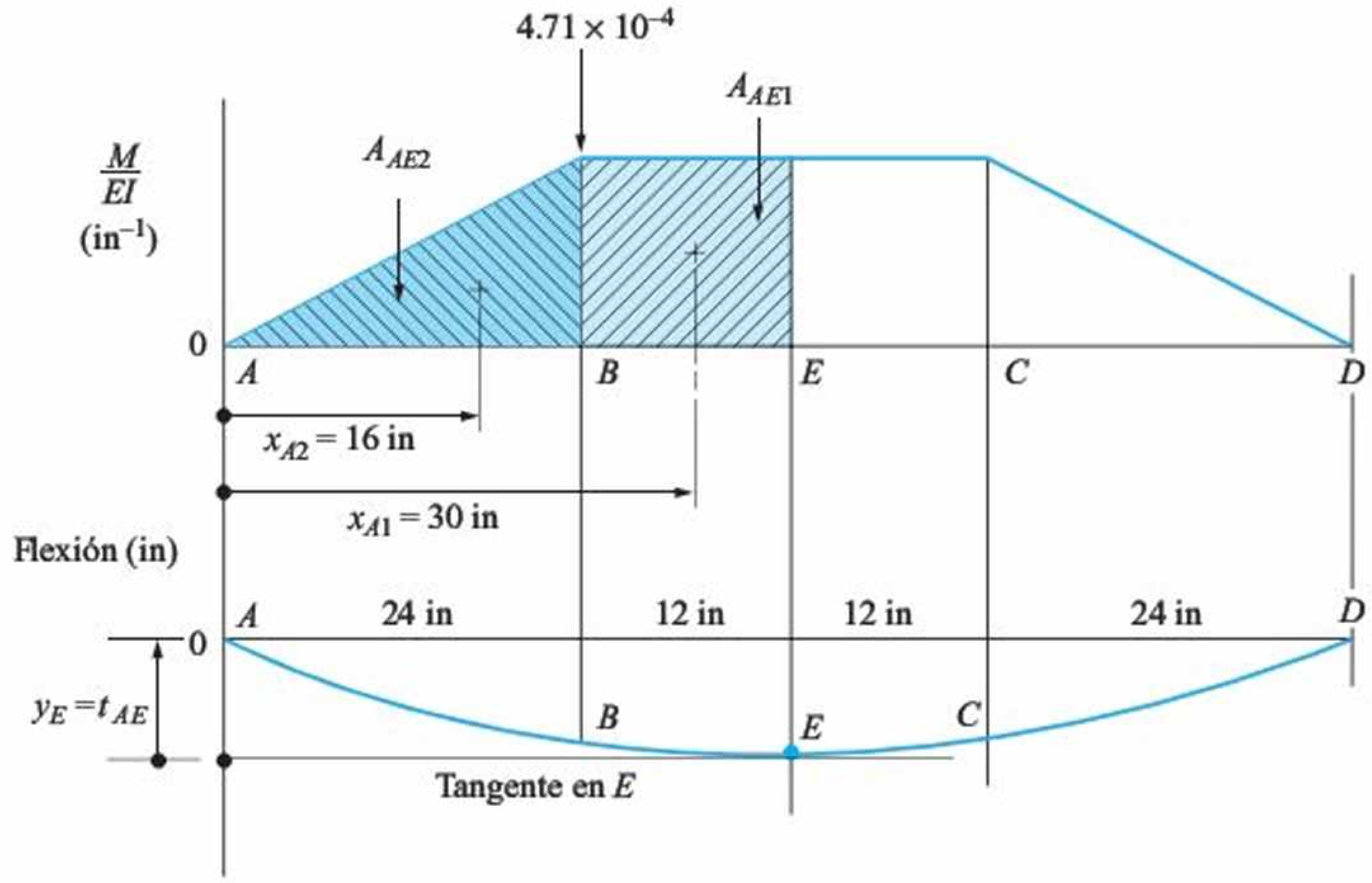


FIGURA 9–40 Curvas *M/EI* y de flexión del problema de ejemplo 9–13.

Los símbolos x_{A1} y x_{A2} indican que las distancias a los centroides de las áreas deben medirse *a partir del punto A*.

$$A_{AE1} \times x_{A1} = (4.71 \times 10^{-4}\,\text{in}^{-1})(12\,\text{in})(30\,\text{in}) = 0.170\,\text{in}$$
$$A_{AE2} \times x_{A2} = (0.5)(4.71 \times 10^{-4}\,\text{in}^{-1})(24\,\text{in})(16\,\text{in}) = 0.090\,\text{in}$$
$$t_{AE} = y_E = 0.170 + 0.090 = 0.260\,\text{in}$$

Ésta es la desviación vertical del punto *A* con respecto a la tangente al punto *E*. Como la tangente es horizontal y la flexión del punto *A* es cero, ésta representa la flexión verdadera del punto *E* con respecto a la posición original del eje neutro de la viga.

Comentario Este resultado es idéntico al que se determinaría con la fórmula del caso *c* del apéndice A–23.

Problema de ejemplo 9–14 Para la misma viga del problema de ejemplo 9–13, mostrada en la figura 9–39, determine la flexión en el punto *B* bajo una de las cargas.

Solución

Objetivo Calcular la flexión en el punto *B* bajo una de las cargas.

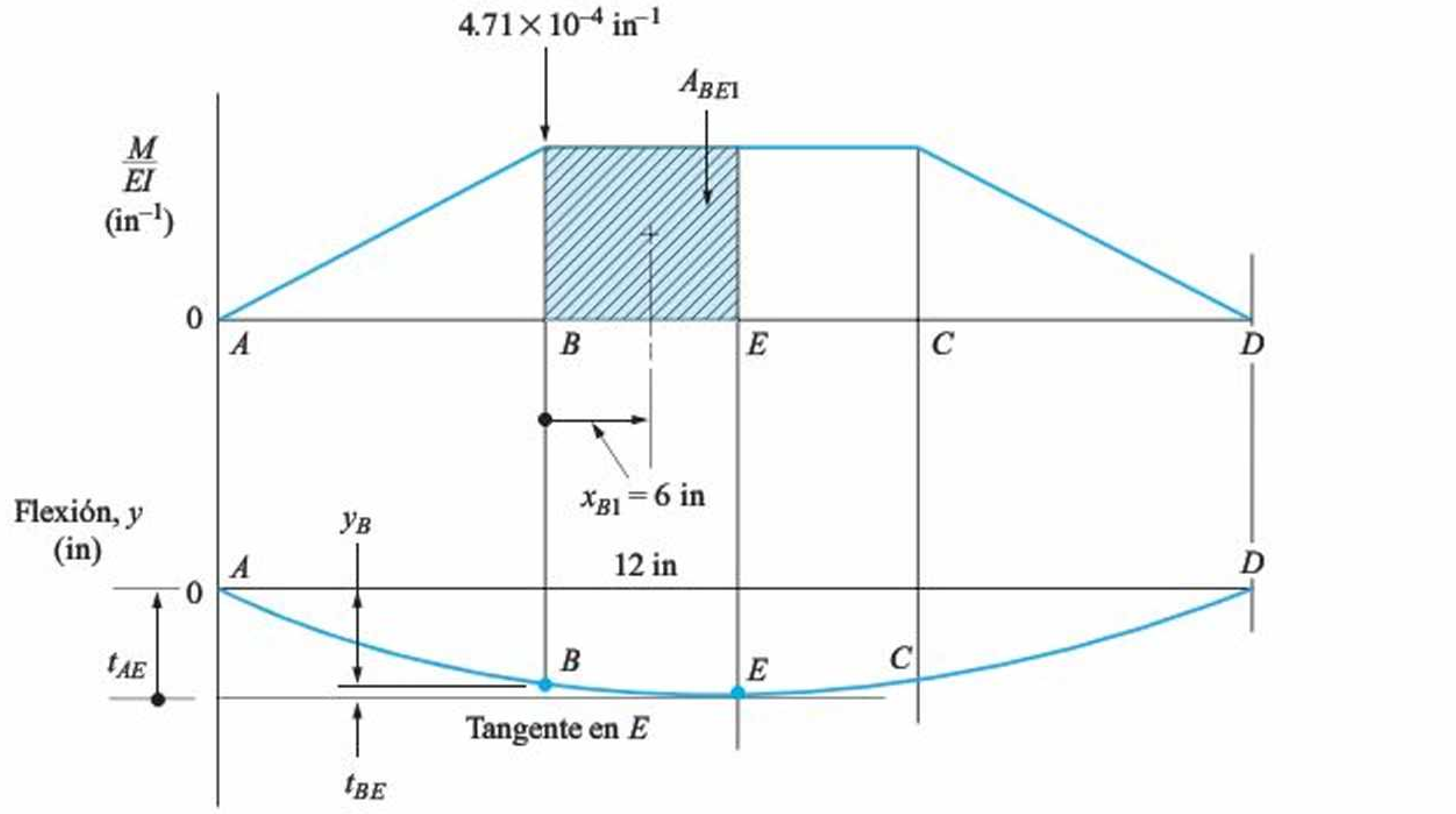
Datos La viga y las cargas mostradas en el figura 9–39.

Análisis Use el *Procedimiento para determinar la flexión de una viga simétricamente cargada y simplemente apoyada–método del área-momento*, pasos 1 a 5. Los pasos 1 a 4 del problema de ejemplo 9–13 son idénticos y dan como resultado los diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante, *M*/*EI* y flexión mostrados en las figuras 9–39 y 9–40. El procedimiento de solución continúa en el paso 5.

Resultados ***Paso 5.*** Se puede utilizar el método del área de momento para determinar la desviación vertical, t_{BE}, del punto *B* con respecto a la tangente al punto *E* a la mitad de la viga. Luego, restándola del valor de t_{AE}, calculado en el problema de ejemplo 9–13, se obtiene la flexión verdadera del punto *B*. En la figura 9–41 se muestran los datos necesarios para calcular t_{BE}.

$$t_{BE} = A_{BE1} \times x_{B1} = (4.71 \times 10^{-4}\,\text{in}^{-1})(12\,\text{in})(6\,\text{in}) = 0.034\,\text{in}$$

FIGURA 9–41
Diagrama M/EI y curva de flexión del problema de ejemplo 9–14.



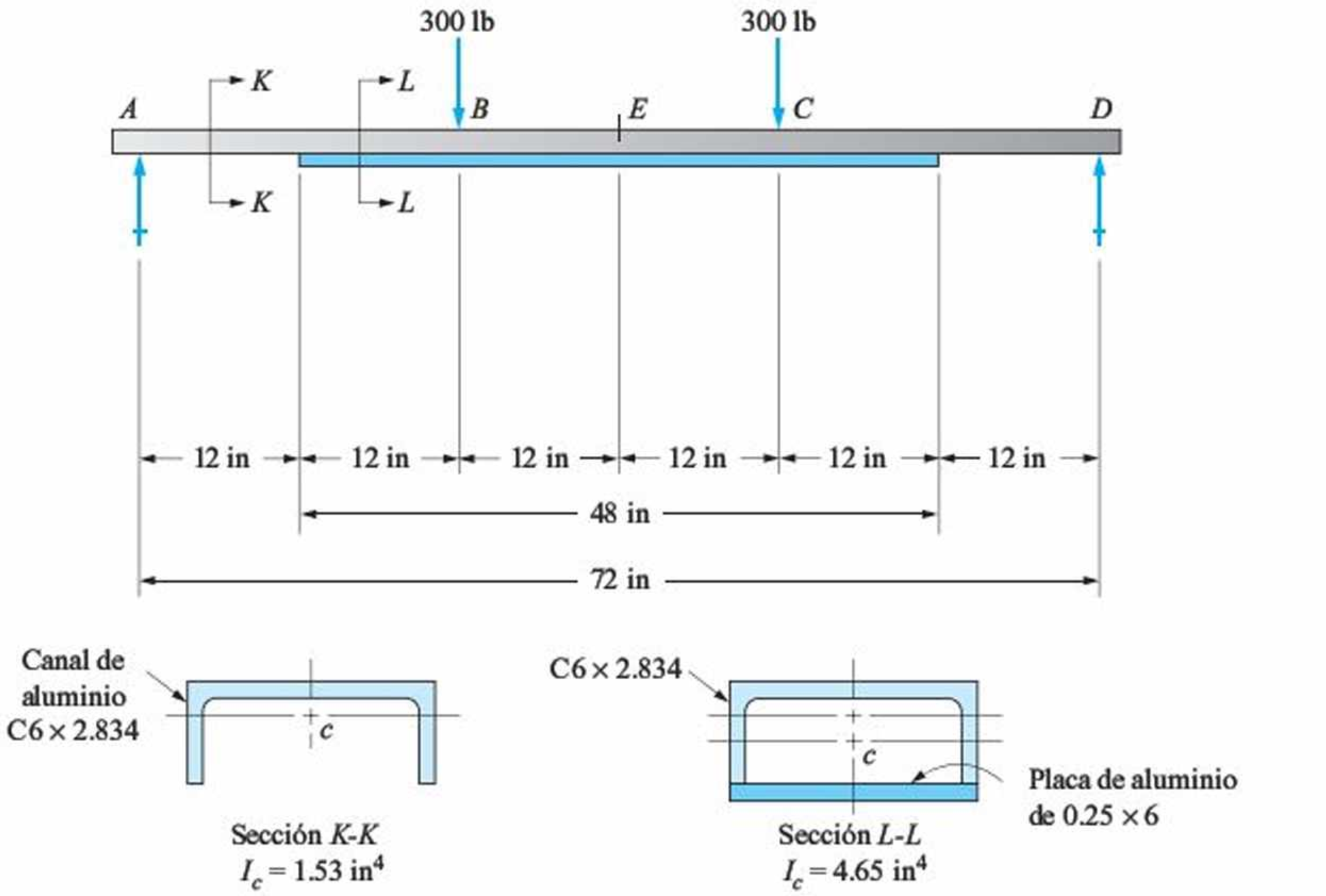
Observe que la distancia x_{B1} debe medirse a partir del punto B. Entonces la flexión del punto B es

$$y_B = t_{AE} - t_{BE} = 0.260 - 0.034 = 0.226 \text{ in}$$

Vigas con secciones transversales variables. Uno de los usos más importantes del método del área–momento es para calcular la flexión de una viga de sección transversal a lo largo de ella. Se requiere sólo un paso adicional en comparación con las vigas de sección transversal uniforme, como las consideradas hasta ahora.

Un ejemplo de una viga de este tipo se ilustra en la figura 9–42. Observe que es una modificación de la viga usada en los problemas de ejemplo 9–13 y 9–14, y que se muestra en la figura 9–39.

FIGURA 9–42
Viga del problema de ejemplo 9–15.



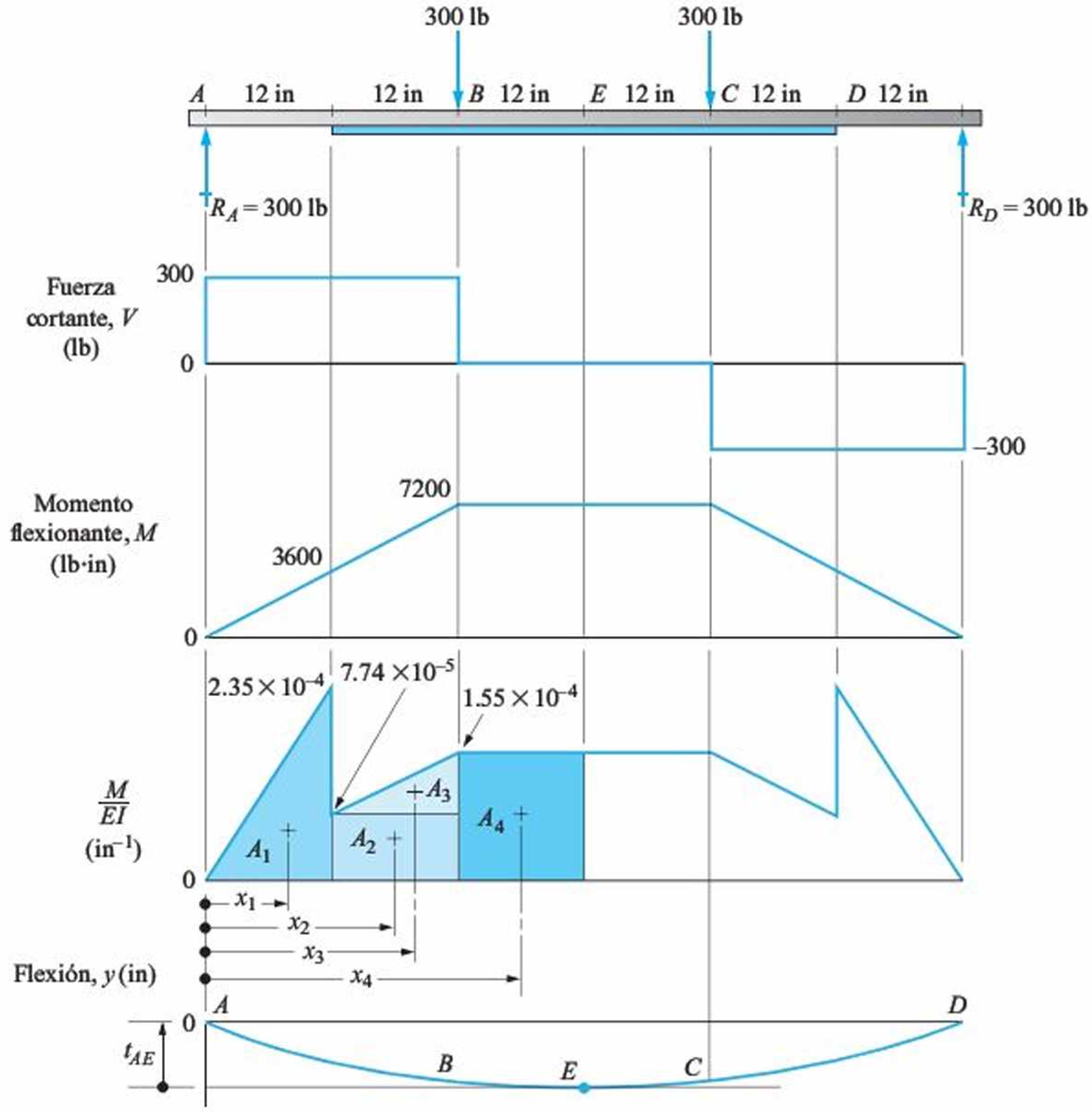


FIGURA 9–43 Diagramas de la viga del problema de ejemplo 9–15.

En este caso se le agregó una placa rectangular, de 0.25 in por 6.0 in, a la cara inferior del canal original a lo largo de 48 in a la mitad de la viga. El perfil tubular incrementa significativamente la rigidez, con lo cual se reduce la flexión de la viga. El esfuerzo en la viga también se reduciría.

El cambio del procedimiento de analizar la flexión de la viga radica en la preparación del diagrama *M*/*EI*. La figura 9–43 muestra los diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante como antes. En las primeras y últimas 12 in del diagrama *M*/*EI*, la rigidez del canal simple se utiliza como antes. Para cada segmento a lo largo de las 48 in intermedias, se debe utilizar la rigidez del perfil rectangular. El diagrama *M*/*EI* incluye entonces el efecto del cambio de rigidez a lo largo de la viga. El problema de ejemplo 9–15 demuestra este proceso.

Problema de ejemplo 9–15 Determine la flexión a la mitad de la viga reforzada mostrada en la figura 9–42.

Solución Objetivo Calcular la flexión a la mitad de la viga.

Datos La viga y las cargas mostradas en la figura 9–42. El perfil mostrado en la figura 9–39 modificado. La viga es un canal C6 × 2.835 de aluminio con las alas hacia abajo. A lo largo de las 48 in intermedias de la viga se suelda una placa de 0.25 in en la parte inferior de las alas del canal para formar una sección rectangular cerrada.

Análisis Se utilizan algunas partes de la solución del problema de ejemplo 9–13. El diagrama M/EI se ajusta para incluir el efecto de la sección transversal modificada de la viga.

Resultados ***Paso 1.*** Los diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante se preparan a la manera tradicional, como se muestra en la figura 9–43.

Paso 2. Para preparar el diagrama M/EI, se requieren dos valores de la rigidez, EI. El valor del canal simple es el mismo que se utilizó en los problemas previos, 1.53×10^7 lb·in². Para el perfil rectangular,

$$EI = (10 \times 10^6\ \text{lb/in}^2)(4.65\ \text{in}^4) = 4.65 \times 10^7\ \text{lb}\cdot\text{in}^2$$

Entonces, en el punto de la viga situado a 12 in de A, donde el momento flexionante es de 3600 lb·in

$$\frac{M}{EI} = \frac{3600\ \text{lb}\cdot\text{in}}{1.53 \times 10^7\ \text{lb}\cdot\text{in}^2} = 2.35 \times 10^{-4}\ \text{in}^{-1}$$

Justo después del punto a 12 in de A,

$$\frac{M}{EI} = \frac{3600\ \text{lb}\cdot\text{in}}{4.65 \times 10^7\ \text{lb}\cdot\text{in}^2} = 7.74 \times 10^{-5}\ \text{in}^{-1}$$

En el punto B, donde $M = 7200$ lb·in y $EI = 4.65 \times 10^7$ lb·in²

$$\frac{M}{EI} = \frac{7200\ \text{lb}\cdot\text{in}}{4.65 \times 10^7\ \text{lb}\cdot\text{in}^2} = 1.55 \times 10^{-4}\ \text{in}^{-1}$$

Estos valores establecen los puntos críticos en el diagrama M/EI.

Paso 3. Se utilizará el área–momento correspondiente a la mitad izquierda del diagrama M/EI para determinar el valor de t_{AE}, como se hizo en el problema de ejemplo 9–13. Por conveniencia, el área total se divide en cuatro partes, como se muestra en la figura 9–43, con las ubicaciones de los centroides indicadas con respecto al punto A. Las distancias son

$$x_1 = (\tfrac{2}{3})(12\ \text{in}) = 8\ \text{in}$$

$$x_2 = (\tfrac{1}{2})(12\ \text{in}) + 12\ \text{in} = 18\ \text{in}$$

$$x_3 = (\tfrac{2}{3})(12\ \text{in}) + 12\ \text{in} = 20\ \text{in}$$

$$x_4 = (\tfrac{1}{2})(12\ \text{in}) + 24\ \text{in} = 30\ \text{in}$$

Paso 4. Ahora podemos utilizar el teorema 2 para calcular el valor de t_{AE}, la desviación del punto A con respecto a la tangente al punto E, calculando el momento de cada una de las cuatro áreas sombreadas en el diagrama M/EI de la figura 9–43.

$$t_{AE} = A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4$$
$$A_1x_1 = (0.5)(2.35 \times 10^{-4}\ \text{in}^{-1})(12\ \text{in})(8\ \text{in}) = 1.128 \times 10^{-2}\ \text{in}$$
$$A_2x_2 = (7.74 \times 10^{-5}\ \text{in}^{-1})(12\ \text{in})(18\ \text{in}) = 1.672 \times 10^{-2}\ \text{in}$$

$$A_3x_3 = (0.5)(7.74 \times 10^{-5}\ \text{in}^{-1})(12\ \text{in})(20\ \text{in}) = 9.293 \times 10^{-3}\ \text{in}$$
$$A_4x_4 = (1.55 \times 10^{-4}\ \text{in}^{-1})(12\ \text{in})(30\ \text{in}) = 5.580 \times 10^{-2}\ \text{in}$$

Por consiguiente

$$t_{AE} = y_E = \sum(A_ix_i) = 9.309 \times 10^{-2}\ \text{in} = 0.093\ \text{in}$$

Comentario Como antes, este valor es igual a la flexión del punto E a la mitad de la viga. Al compararla con la flexión de 0.260 in calculada en el problema de ejemplo 9–14, se ve que la adición de la cubreplaca redujo la flexión máxima en aproximadamente 64%.

Vigas simplemente apoyadas asimétricamente cargadas. La diferencia principal entre este tipo de viga y las antes consideradas es que no se conoce el punto de flexión máxima. Se requiere un cuidado especial para describir la geometría del diagrama M/EI y la curva de flexión de la viga.

El procedimiento general de determinar la flexión en cualquier punto de la curva de flexión de una viga simplemente apoyada asimétricamente cargada se describe a continuación. Debido a los incontables patrones de carga diferentes, la manera específica de aplicar este procedimiento tiene que ser ajustado a cualquier problema dado. Se recomienda revisar los principios fundamentales del método del área de momento cuando se complete la solución de un problema. El método se demostrará en el problema de ejemplo 9–16.

Procedimiento para determinar la dirección de una viga simplemente apoyada asimétricamente cargada—Método del área-momento

1. Trace los diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante.
2. Construya el diagrama *M/EI* y divida el momento flexionante en cualquier punto entre el valor de la rigidez de la viga, *EI*, en dicho punto.
3. Bosqueje la forma probable de la curva de flexión. Enseguida trace la tangente a la curva de flexión en uno de los apoyos. Con el teorema 2, calcule la desviación vertical del otro apoyo con respecto a esta línea tangente. Se requiere el momento de todo el diagrama *M/EI* con respecto al segundo apoyo.
4. Utilizando proporciones, calcule la desviación vertical del punto de interés con respecto a la línea tangente del paso 3 en el punto donde se desee la flexión.
5. Con el teorema 2, calcule la desviación vertical del punto de interés desde la línea de tangente del paso 3. Se utilizará el momento de la parte del diagrama *M/EI* situada entre el primer apoyo y el punto de interés.
6. Reste la desviación calculada en el paso 5 de la calculada en el paso 4. El resultado es la desviación de la viga en el punto de interés.

Problema de ejemplo 9–16 Determine la flexión a la mitad de la viga mostrada en la figura 9–44, a 1.0 m de los apoyos. La viga es una viga de acero American Standard, S3 × 5.7.

Solución Objetivo Calcular la flexión a la mitad de la viga.

Datos La viga y la carga mostradas en la figura 9–44. La viga es de acero. El perfil de la viga es un S3 × 5.7 American Standard.

Análisis Use el *Procedimiento para determinar la flexión de una viga simplemente apoyada asimétricamente cargada–método del área-momento.*

Resultados ***Paso 1.*** En la figura 9–44 se muestran los diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante.

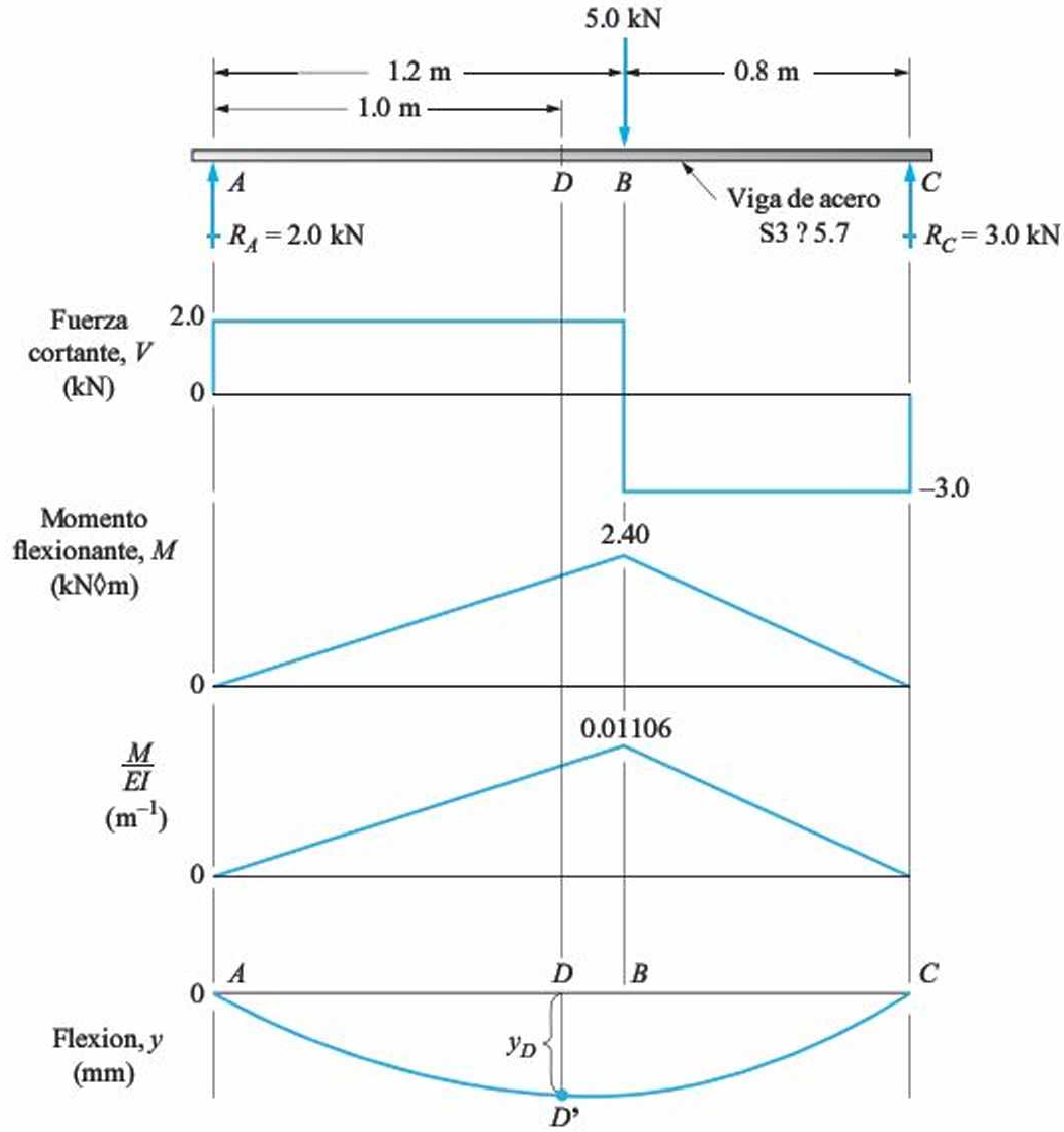


FIGURA 9–44 Diagramas de la viga del problema de ejemplo 9–16.

Paso 2. La rigidez de la viga se mantiene uniforme a lo largo de ella, lo que hace que el diagrama M/EI sea igual al diagrama de momento flexionante. El valor de M/EI en el punto B se calcula dividiendo el momento flexionante que ocurre allí (2.40 kN·m o 2400 N·m) entre EI. Utilizaremos $E = 207$ GPa para acero. En el apéndice se encuentra que $I = 2.50\ \text{in}^4$, el cual debe convertirse en unidades métricas.

$$I = \frac{(2.50\ \text{in}^4)(0.0254\ \text{m})^4}{1.0\ \text{in}^4} = 1.041 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$

Entonces la rigidez de la viga es

$$EI = (207 \times 10^9\ \text{N/m}^2)(1.041 \times 10^{-6}\ \text{m}^4) = 2.15 \times 10^5\ \text{N}\cdot\text{m}^2$$

Ahora ya se puede calcular el valor de M/EI en el punto B.

$$\left(\frac{M}{EI}\right)_B = \frac{2400\ \text{N}\cdot\text{m}}{2.15 \times 10^5\ \text{N}\cdot\text{m}^2} = 0.01114\ \text{m}^{-1}$$

El diagrama M/EI aparece en la figura 9–44. Se desea calcular la flexión de la viga en su punto medio, marcado como punto D.

Paso 3. La figura 9–44 muestra un bosquejo exagerado de la curva de flexión de la viga. Es probable que la flexión ocurra muy cerca del centro de la viga donde tenemos que determinar

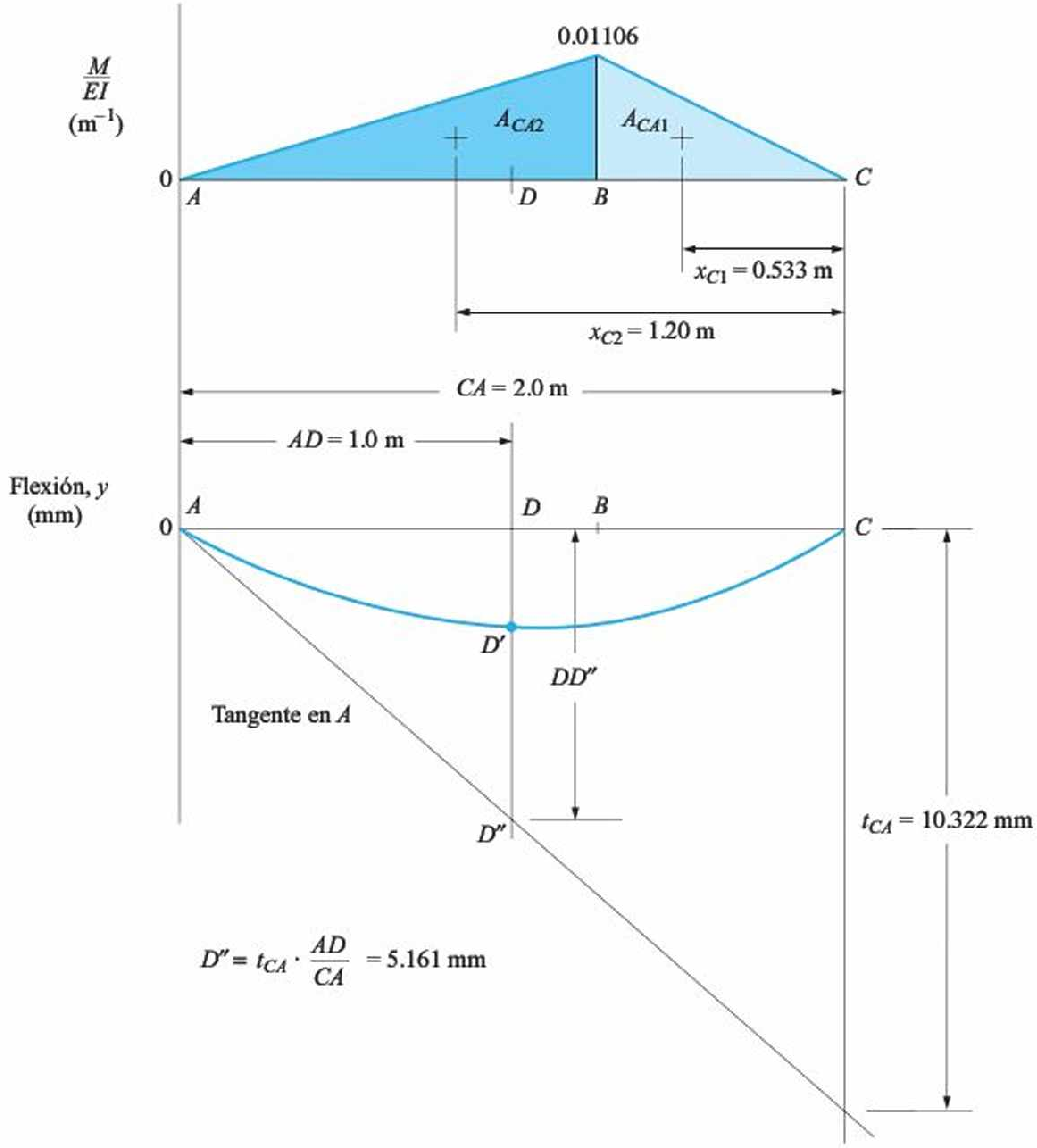


FIGURA 9–45
Diagramas del área de momento del problema de ejemplo 9–16.

la flexión, punto D. La figura 9–45 muestra la tangente a la curva de flexión en el punto A en el apoyo izquierdo y la desviación vertical del punto C con respecto a esta línea. Observe que el punto C es un punto conocido de la curva de deflexión porque por allí la flexión es cero. Ahora podemos utilizar el teorema 2 para calcular t_{CA}. Se utiliza el diagrama M/EI completo, dividido en dos triángulos.

$$t_{CA} = A_{CA1}x_{C1} + A_{CA2}x_{C2}$$
$$A_{CA1}x_{C1} = (0.5)(0.01106\ \text{m}^{-1})(0.8\ \text{m})(0.533\ \text{m}) = 0.002359\ \text{m}$$
$$A_{CA2}x_{C2} = (0.5)(0.01106\ \text{m}^{-1})(1.2\ \text{m})(1.2\ \text{m}) = 0.007963\ \text{m}$$

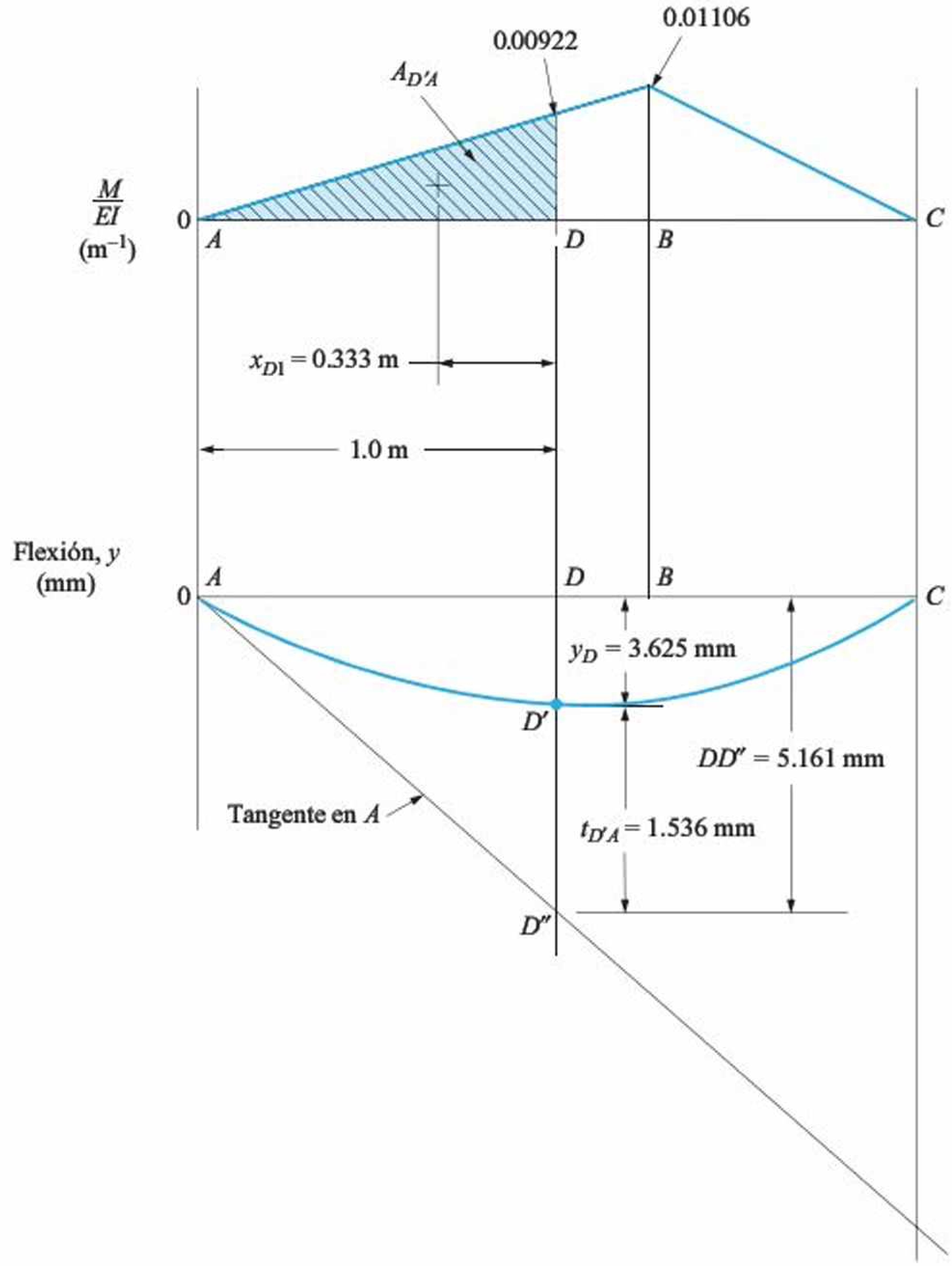
Por consiguiente

$$t_{CA} = 0.002359 + 0.007963 = 0.010322\ \text{m} = 10.322\ \text{mm}$$

Paso 4. Use el principio de las proporciones para determinar la distancia DD' de D a la línea tangente.

$$\frac{t_{CA}}{CA} = \frac{DD''}{AD}$$

FIGURA 9–46
Diagramas del área de momento del problema de ejemplo 9–16.



o

$$DD'' = t_{CA} \times \frac{AD}{CA} = (10.322\,\text{mm}) \times \frac{1.0\,\text{m}}{2.0\,\text{m}} = 5.161\,\text{mm}$$

Paso 5. Calcule la desviación, $t_{D'A}$ del punto D' con respecto a la tangente al punto A con el teorema 2. Se utiliza la parte del diagrama M/EI entre D y A como se muestra en la figura 9–46.

$$t_{D'A} = A_{D'A}x_{D1} = (0.5)(0.00922\,\text{m}^{-1})(1.0\,\text{m})(0.333\,\text{m}) = 0.001536\,\text{m}$$
$$t_{D'A} = 1.536\,\text{mm}$$

Paso 6. Por la geometría del diagrama de flexión mostrado en la figura 9–46 la flexión en el punto D, y_D, es

$$y_D = DD' = DD'' - t_{D'A} = 5.161 - 1.536 = 3.625\,\text{mm}$$

Vigas con cargas distribuidas–método del área-momento. El procedimiento general para determinar la flexión de vigas sometidas a cargas distribuidas es igual al que se demostró para vigas sometidas a cargas concentradas. Sin embargo, la forma del momento flexionante y de las curvas M/EI es diferente y requiere el uso de otras fórmulas para calcular el área y la ubicación del centroide para utilizar el método del área-momento. El ejemplo siguiente ilustra las diferencias que cabe esperar.

Problema de ejemplo 9–17 Determine la flexión en el extremo de la viga en voladizo que soporta una carga uniformemente distribuida mostrada en la figura 9–47. La viga es un tubo de acero rectangular hueco de $6 \times 2 \times \frac{1}{4}$ con la dimensión de 6.0 in horizontal.

Solución Objetivo Calcular la flexión en el extremo de la viga en voladizo.

Datos La viga y la carga mostradas en la figura 9–47. La viga es un tubo de acero rectangular, de $6 \times 2 \times \frac{1}{4}$ con la dimensión de 6.0 in horizontal.

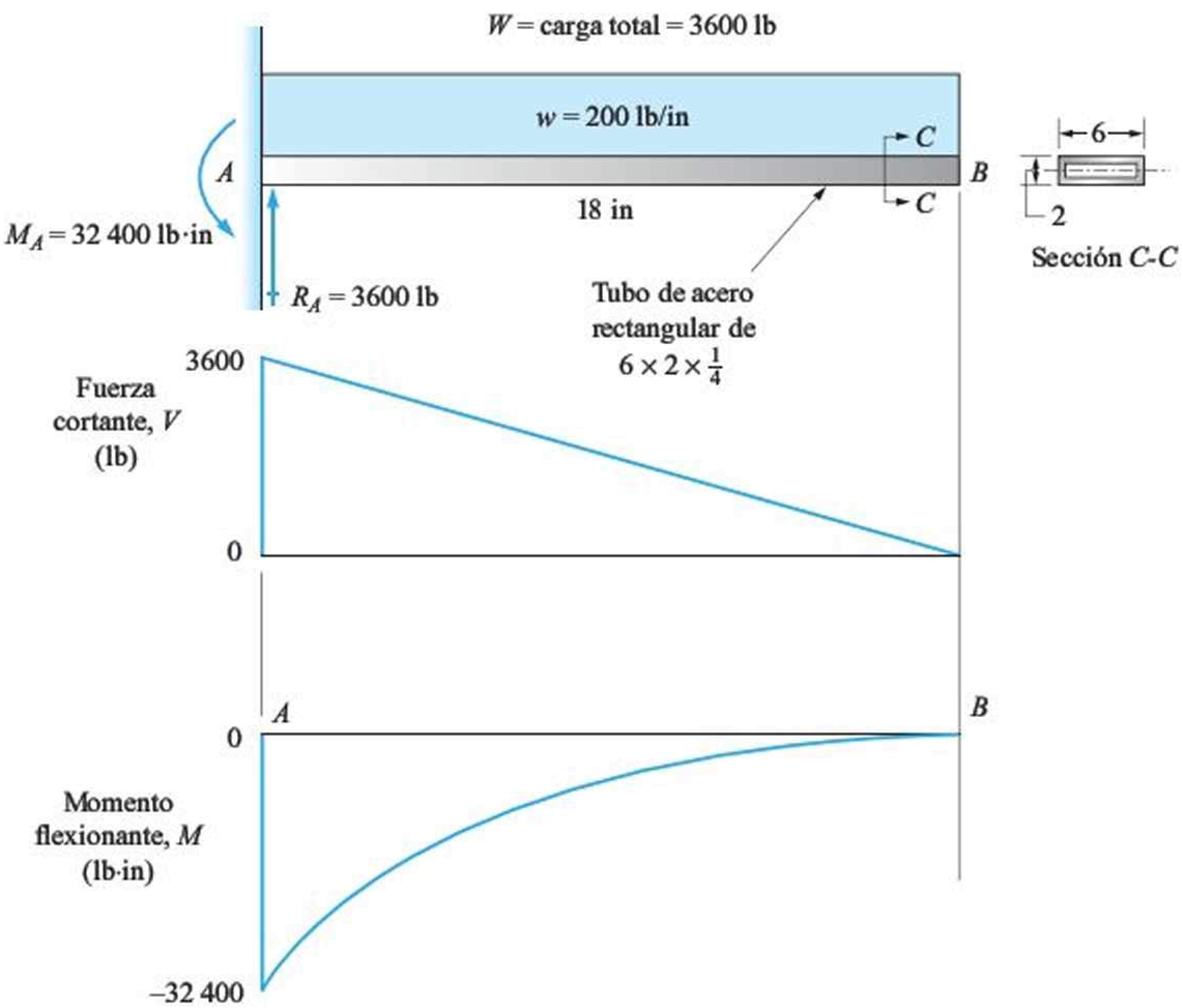
Análisis Se puede utilizar el mismo procedimiento básico del problema de ejemplo 9–11.

Resultados La solución se inicia con la preparación de los diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante, mostrados en la figura 9–47. Entonces la curva M/EI será igual a la curva del momento flexionante porque la rigidez de la viga es uniforme. En el apéndice A–9 se encuentra que $I = 2.21\ \text{in}^4$. Por consiguiente, se utiliza $E = 30 \times 10^6$ psi para acero.

$$EI = (30 \times 10^6\ \text{lb/in}^2)(2.21\ \text{in}^4) = 6.63 \times 10^7\ \text{lb} \cdot \text{in}^2$$

Ahora la figura 9–48 muestra tanto la curva M/EI como la curva de flexión de la viga. La línea horizontal en el diagrama de flexión es la tangente a la forma flexionada de la viga trazada por el punto A,

FIGURA 9–47 Diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante del problema de ejemplo 9–17.



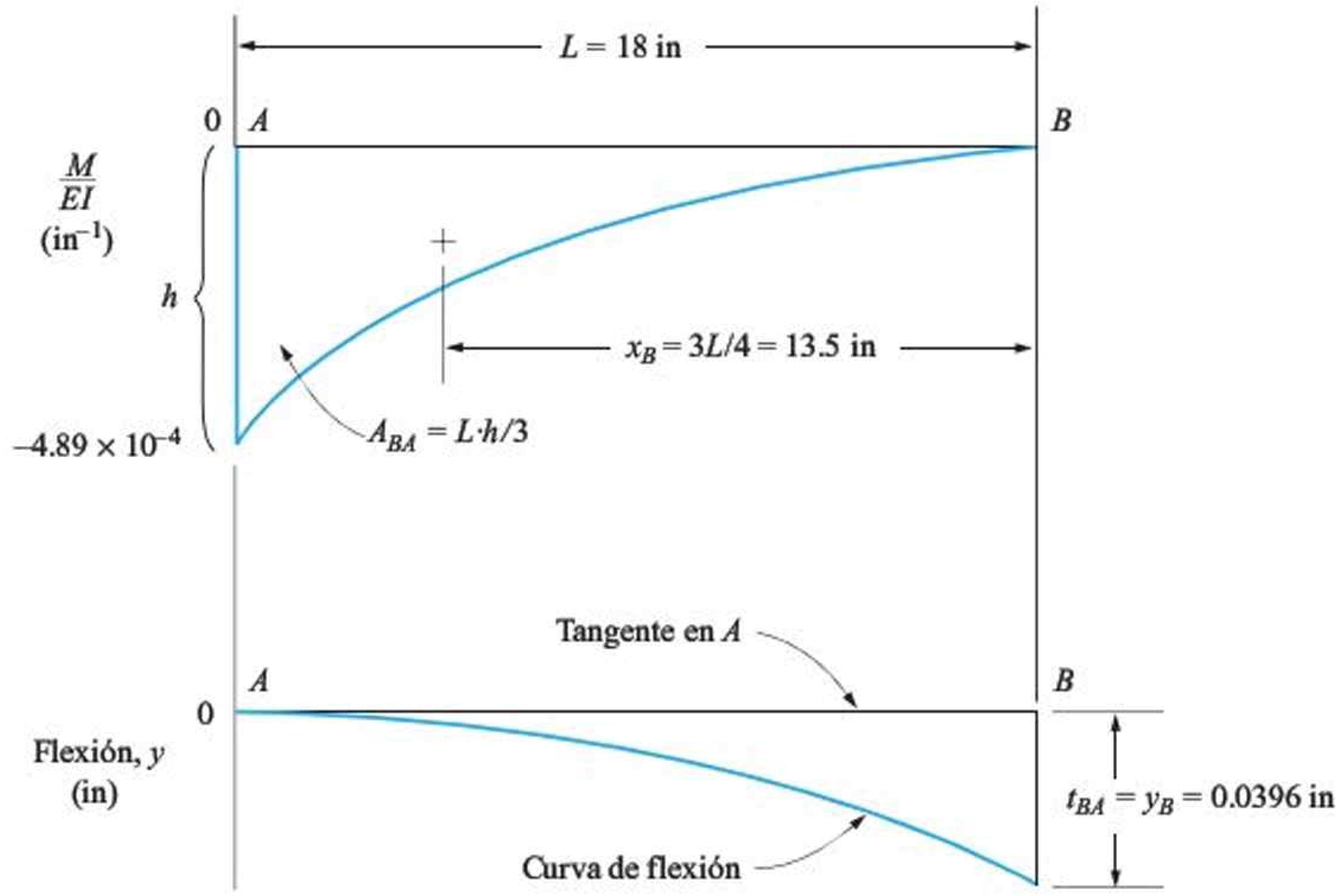


FIGURA 9–48
Curvas *M/EI* y de deflexión del problema de ejemplo 9–17.

donde la viga está empotrada. Por consiguiente en el extremo derecho de la viga, la desviación de la curva de flexión con respecto a esta tangente, t_{BA}, es igual a la flexión de la viga.

Según el teorema 2, la desviación t_{BA} es igual al producto del área de la curva *M*/*EI* entre *B* y *A* por la distancia del punto *B* al centroide del área. Es decir,

$$t_{BA} = A_{BA} \cdot x_B$$

Recordando que los diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante están relacionados entre sí de tal forma que la curva de arriba es la derivada de la curva de abajo, se concluye lo siguiente:

1. La curva de la fuerza cortante es una curva de primer grado (línea recta de pendiente constante). Su ecuación es de la forma

$$V = m \cdot x + b$$

donde m es la pendiente de la línea y b es su intersección con el eje vertical. La variable x es la posición en la viga.

2. La curva del momento flexionante es una curva de segundo grado, una parábola. La ecuación general de la curva es de la forma

$$M = a \cdot x^2 + b$$

El apéndice A–1 muestra las relaciones para calcular el área y la ubicación del centroide de áreas delimitadas por curvas de segundo grado. Para un área cuya forma es la de las curvas de momento flexionante y *M*/*EI*,

$$\text{área} = \frac{L \cdot h}{3}$$

$$x = \frac{L}{4}$$

donde L = longitud de la base del área
h = altura del área
x = distancia de un lado del área al centroide

Observe que la distancia correspondiente del vértice de la curva al centroide es

$$x' = \frac{3L}{4}$$

Ahora, con los datos mostrados en la figura 9–42,

$$A_{BA} = \frac{L \cdot h}{3} = \frac{(18\text{ in})(-4.89 \times 10^{-4}\text{ in}^{-1})}{3} = 2.932 \times 10^{-3}$$

$$x_B = \frac{3L}{4} = \frac{3(18\text{ in})}{4} = 13.5\text{ in}$$

Ahora podemos utilizar el teorema 2.

$$t_{BA} = A_{BA}x_B = (2.932 \times 10^{-3})(13.5\text{ in}) = 0.0396\text{ in}$$

Esta desviación es igual a la flexión en el extremo de la viga, y_B.

REFERENCIAS

1. Aluminum Association, *Aluminum Design Manual*, Washington, DC, 2005.
2. Blodgett, Omer W., *Design of Weldments*, James F. Lincoln Arc Welding Foundation, Cleveland, OH, 1963.
3. Mott, Robert L., *Machine Elements in Mechanical Design*, 4ª ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2004.
4. Popov, E.P., *Engineering Mechanics of Solids*, 2ª ed. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1999.
5. Young, W. C. y R. G. Budynas, *Roark's Formulas for Stress and Strain*, 7ª ed., McGraw–Hill, Nueva York, 2002.

SITIOS DE INTERNET

1. MDSolids www.mdsolids.com Software educativo para estudiantes que estén llevando un curso de mecánica de materiales, resistencia de materiales o mecánica de sólidos deformables, compuesto de módulos especiales, uno de los cuales es análisis de vigas.
2. Grand Systems www.grandsystems.com Productor del software Beam2D para análisis de vigas.
3. Creative Engineering www.suverkrop.com/winbuild.html Software de análisis estructural con la facilidad de seleccionar la viga de peso mínimo para una carga dada.
4. MITCalc www.mitcalc.com Software de cálculo para análisis mecánico, industrial y técnico, incluido el análisis de vigas y muchos otros temas técnicos.
5. Engineers Edge www.engineersedge.com/CalculatorsOnline.shtml Varias calculadoras en línea, incluida la de *Beam Deflections and Stress*, *Section Properties of Selected Shapes*, *Pressure Vessels*, y otros fenómenos de diseño mecánico.
6. Free Structural Software www.structural–engineering.fsnet.co.uk.htm Listas de muchos paquetes de software, muchos de los cuales son gratuitos y otros que tienen un periodo de prueba gratuito.

PROBLEMAS

Método de la fórmula – Vigas estáticamente determinadas

9–1.M Una flecha circular de 32 mm de diámetro y 700 mm de largo se somete a una carga de 3.0 kN en su centro. La flecha es de acero y está simplemente apoyada en sus extremos; calcule la flexión en el centro.

9–2.M Para la flecha del problema 9–1 calcule la flexión; en este caso, la flecha es de aluminio 6061–T6 en lugar de acero.

9–3.M Para la flecha del problema 9–1, calcule la flexión si los extremos están fijos contra rotación de lugar de estar simplemente apoyados.

9–4.M Para la flecha del problema 9–1, calcule la flexión si la flecha es de 350 mm de largo y no de 700 mm.

9–5.M Para la flecha del problema 9–1, calcule la flexión si el diámetro es de 25 mm y no de 32 mm.

9–6:M Para la flecha del problema 9–1, calcule la flexión si la carga se coloca a 175 mm del apoyo izquierdo y no en el centro. Calcule la flexión tanto en el punto de aplicación de la carga como en el centro de la flecha.

9–7.E Una viga de acero patín ancho, W12 × 16, soporta la carga mostrada en la figura P9–7. Calcule la flexión en los puntos de aplicación de las cargas y en el centro de la viga.

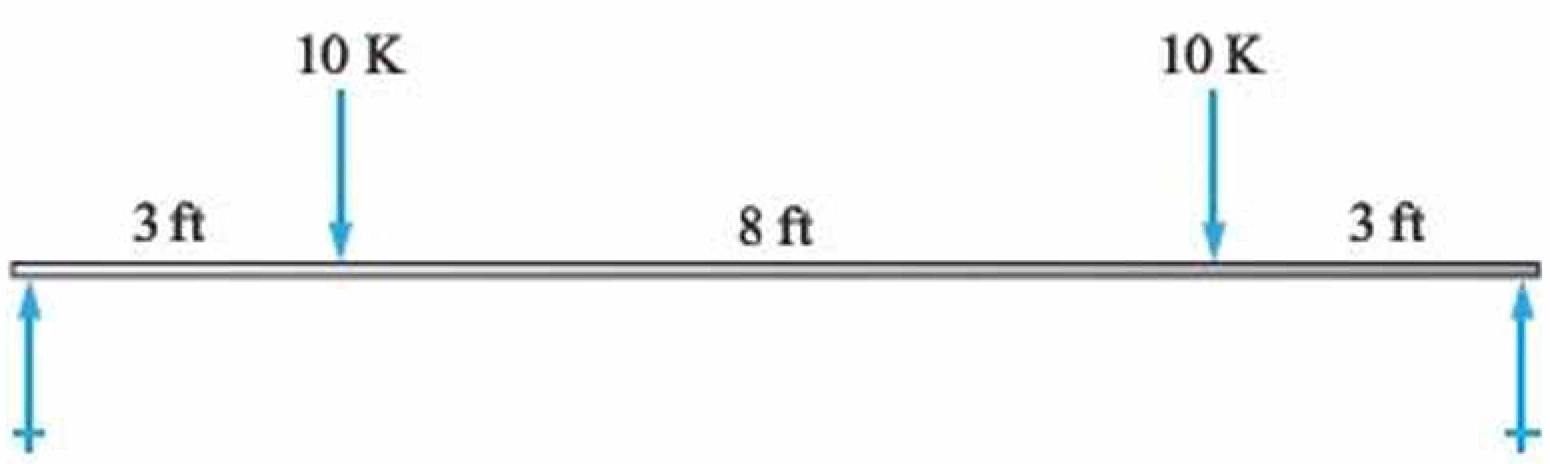


FIGURA P9–7

9–8.E Un tubo de acero estándar cédula 40 de 1½ in simplemente apoyado soporta una carga de 650 lb en el centro de un claro de 28 in. Calcule la flexión del tubo en el punto de aplicación de la carga.

9–9.E Una viga I estándar Aluminum Association, I8 × 6.181, soporta una carga uniformemente distribuida de 1125 lb/ft a lo largo de un claro de 10 ft. Calcule la flexión en el centro del claro.

9–10.E Para la viga del problema 9–9, calcule la flexión en un punto a 3.5 ft del apoyo izquierdo de la viga.

9–11.E Una viga de acero de patín ancho, W12 × 30, soporta la carga mostrada en la figura P9–11. Calcule la flexión en el punto de aplicación de la carga.

9–12.E Para la viga del problema 9–11, calcule la flexión en el punto de aplicación de la carga si el apoyo izquierdo se recorre 2.0 ft hacia la carga.

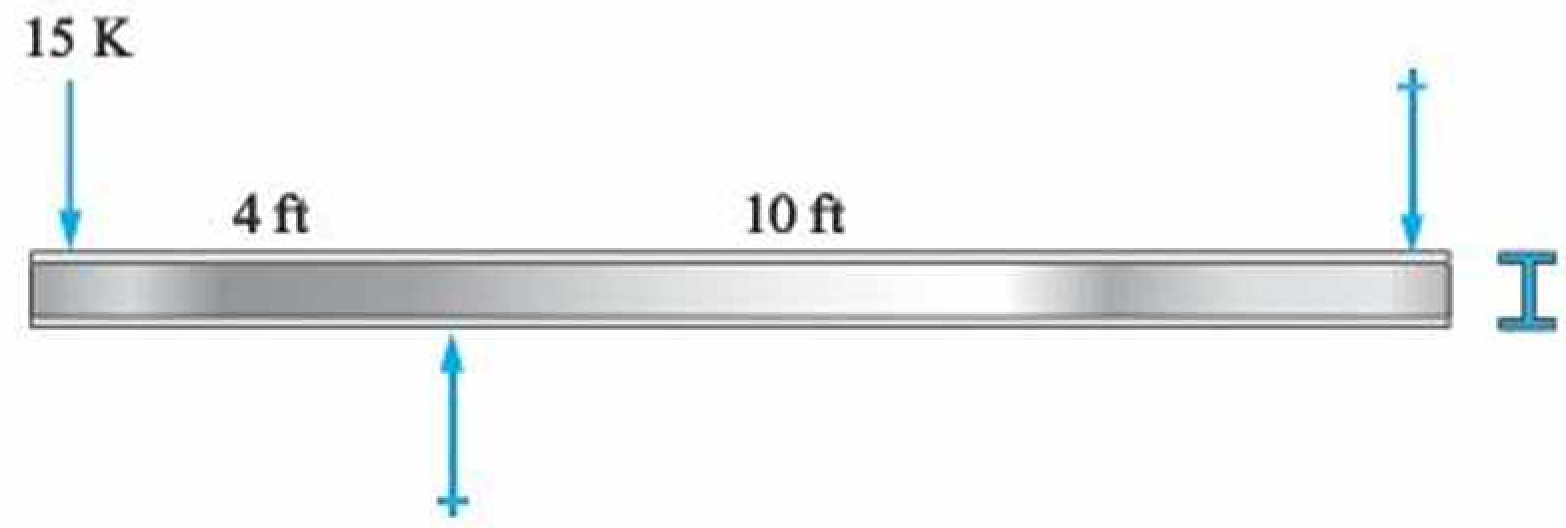


FIGURA P9–11

9–13.E Para la vig.a del problema 9–11, calcule la flexión máxima hacia arriba y determine su ubicación.

9–14.E Se utiliza un tubo de acero cédula 40 de 1 in como viga en voladizo de 8 in de largo para soportar una carga de 120 lb en su extremo. Calcule la flexión en el extremo del tubo.

9–15.M Se tiene que utilizar un barra de acero circular para soportar una carga concentrada única de 3.0 kN en el centro de un claro de 700 mm de largo sobre apoyos simples. Determine el diámetro requerido de la barra; su flexión no debe exceder de 0.12 mm.

9–16.M Para la barra diseñada en el problema 9–15, calcule el esfuerzo en la barra y especifique un acero adecuado para obtener un factor de diseño de 8 basado en la resistencia máxima.

9–17.E Una solera plana de acero de 0.100 in de ancho y 1.200 in de largo se sujeta por un extremo y se carga en el otro como una viga en voladizo (como en el caso *a* del apéndice A–24). ¿Cuál debe ser el espesor de la solera para que se flexione 0.15 in bajo una carga de 0.52 lb?

9–18.E Una vigueta de madera de un edificio comercial es de 14 ft 6 in de longitud y soporta una carga uniformemente distribuida de 50 lb/ft. Es de 1.50 in de ancho por 9.25 de altura. Es de pino del sur; calcule la flexión máxima de la vigueta. También calcule el esfuerzo en la viga producido por flexión y el cortante horizontal y compárelos con los esfuerzos permisibles para pino del sur grado 2.

Método de la fórmula–Vigas estáticamente indeterminadas

Para las problemas 9–19 a 9–45, utilice las fórmulas del apéndice A–25 para completar cualquiera de lo siguiente de acuerdo con las instrucciones dadas para una tarea particular.

(a) Determine las reacciones y trace los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante completos. Reporte la fuerza cortante y el momento flexionante máximos e indique dónde ocurren.

(b) En los casos en que se disponga de fórmulas de flexión, también calcule la flexión máxima de la viga expresada como

$$y = C_d/EI$$

donde EI es la rigidez de la viga, el producto del módulo de elasticidad del material de la viga por el momento de inercia de la sección transversal de la misma. El término C_d será entonces el resultado del cálculo de todas las demás variables de la ecuación de flexión para la viga, tipo de apoyo, longitud de claro y patrón de carga particulares.

(c) Complete el diseño de viga y especifique un material adecuado y la forma y tamaño de la sección transversal. El estándar de diseño debe incluir la especificación de que los esfuerzos flexionantes y los esfuerzos cortantes sean seguros para el material dado. A menos que la tarea especifique lo contrario, considere que todas las cargas son estáticas.

(d) Complete el diseño de la viga para limitar la flexión máxima a un valor especificado por la tarea. Sin un límite especificado, use $L/360$ como la flexión máxima permisible donde L es el claro entre los apoyos o la longitud total de la viga. El diseño debe especificar un material adecuado y la forma y tamaño de la sección transversal. La tarea puede vincularse a la parte b en los casos en que la flexión se calculó en función de la rigidez de la viga, EI. Entonces, por ejemplo, puede especificar el material y el valor de E, calcular la flexión límite y resolver para el momento de inercia requerido, I. Entonces se puede determinar la forma y el tamaño de la sección transversal. Observe que también se tiene que demostrar que cualquier diseño es seguro con respecto a esfuerzos flexionantes y esfuerzos cortantes como en la parte c.

9–19.M Use la A–25(a) con $P = 35$ kN, $L = 4.0$ m.

9–20.M Use la A–25(b) con $P = 35$ kN, $L = 4.0$ m, $a = 1.50$ m

9–21.M Use la A–25(b) con $P = 35$ kN, $L = 4.0$ m, $a = 2.50$ m

9–22.E Use la A–25(c) con $w = 400$ lb/ft, $L = 14.0$ ft

9–23.E Use la A–25(c) con w $= 50$ lb/in, $L = 16.0$ in

9–24.E Use la A–25(d) con $P = 350$ lb, $L = 10.8$ in, $a = 2.50$ in

9–25.M Use la A–25(e) con $P = 35$ kN, $L = 4.0$ m

9–26.M Use la A–25(f) con $P = 35$ kN, $L = 4.0$ m, $a = 1.50$ m

9–27.M Use la A–25(f) con $P = 35$ kN, $L = 4.0$ m, $a = 2.50$ m

9–28.E Use la A–25(g) con $w = 400$ lb/ft, $L = 14.0$ ft

9–29.E Use la A–25(g) con $w = 50$ lb/in, $L = 16.0$ in

9–30.E Use la A–25(h) con $w = 400$ lb/ft, $L = 7.0$ ft

9–31.E Use la A–25(h) con $w = 50$ lb/in, $L = 8.0$ in

9–32.E Use la A–25(i) con $w = 400$ lb/ft, $L = 56$ in

9–33.E Use la A–25(i) con $w = 50$ lb/in, $L = 5.333$ in

9–34.E Use la A–25(j) con $w = 400$ lb/ft, $L = 3.5$ ft

9–35.E Use la A–25(j) con $w = 50$ lb/in, $L = 4.0$ in

9–36.E Use la figura P9–36.

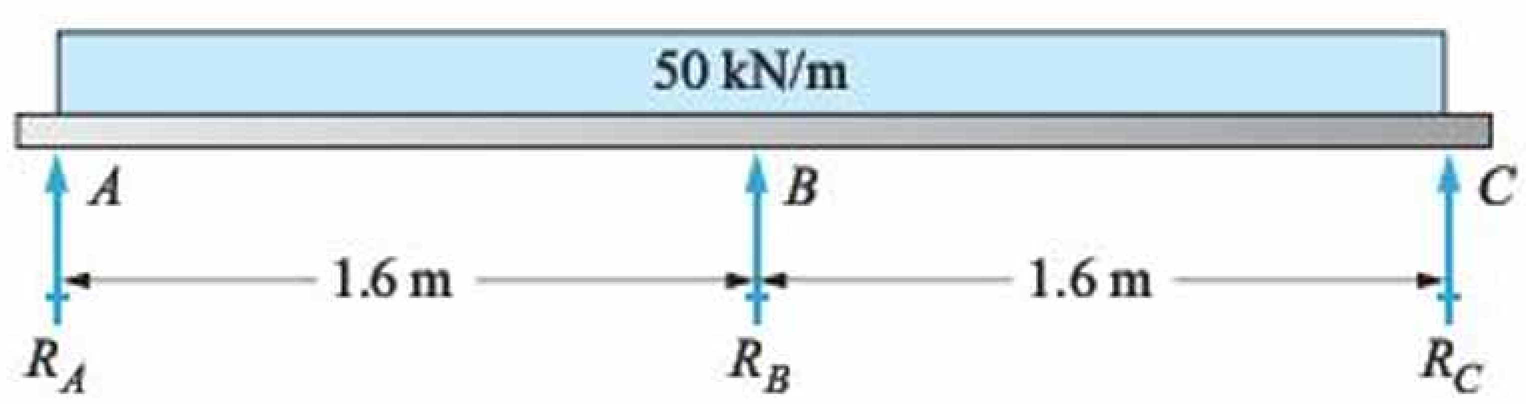


FIGURA P9–36

9–37.M Use la figura P9–37.

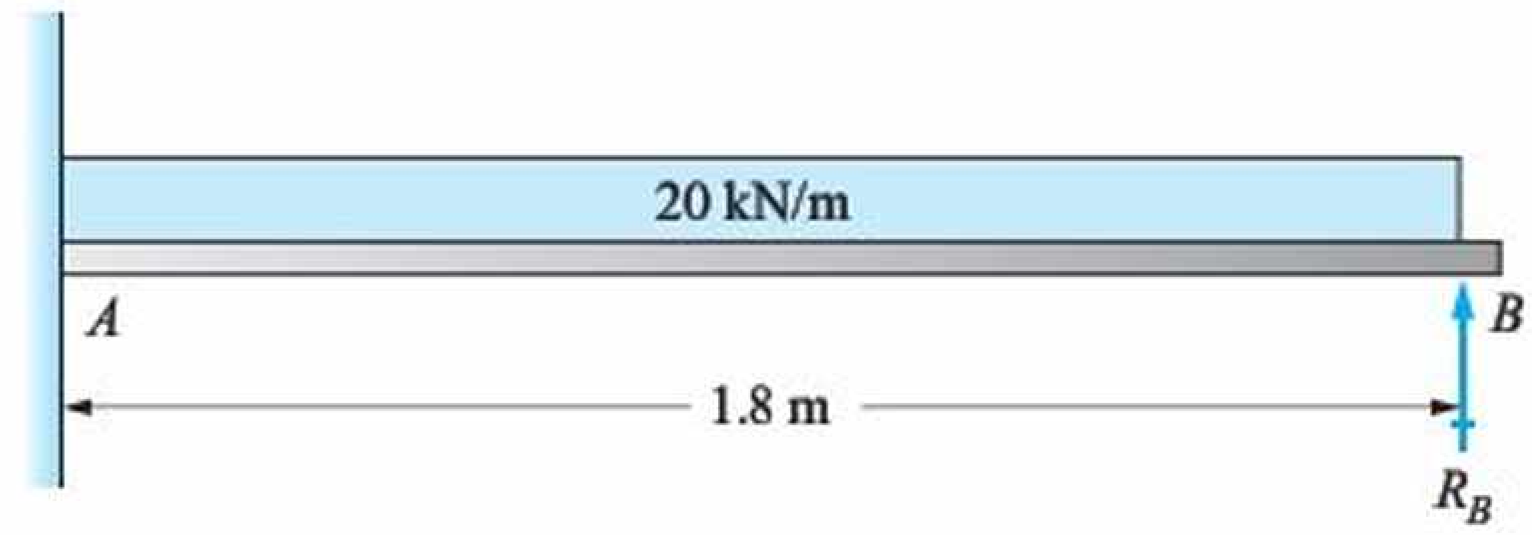


FIGURA P9–37

9–38.M Use la figura P9–38.

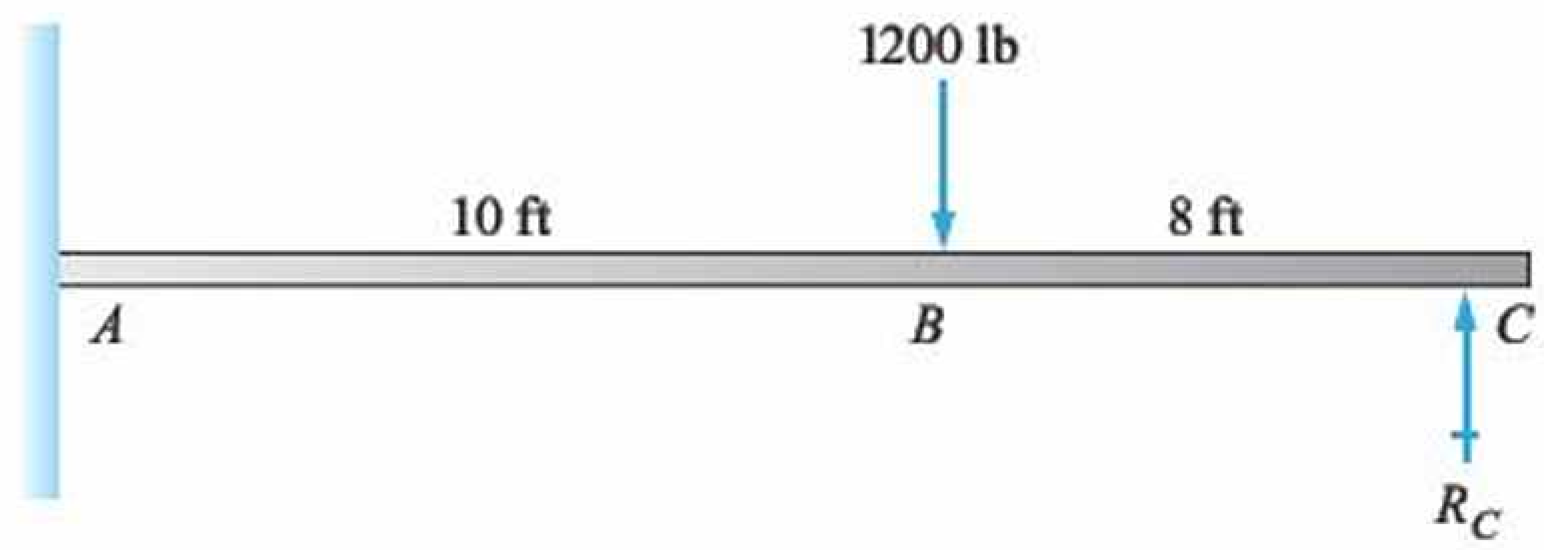


FIGURA P9–38

9–39.M Use la A–25(d) con $P = 18$ kN, $L = 2.75$ m, $a = 1.40$ in

9–40.E Use la A–25(f) con $P = 8500$ lb, $L = 109$ in, $a = 75$ in

9–41.E Use la A–25(h) con $w = 4200$ lb/ft, $L = 16.0$ ft

9–42.M Use la A–25(i) con $w = 50$ kN/m, $L = 3.60$ m

9–43.E Use la A–25(j) con $w = 15$ lb/in, $L = 36$ in

9–44.E Use la A–25(e) con $P = 140$ lb, $L = 54$ in

9–45.M Use la A–25(b) con $P = 250$ N, $L = 55$ mm, $a = 15$ mm

Comparación del comportamiento de vigas

9–46.M Compare el comportamiento de las cuatro vigas mostradas en la figura P9–46 con respecto a fuerza cortante, momento flexionante y flexión máxima. En cada caso, la viga se diseña para que soporte una carga uniformemente distribuida a través de un claro dado. Complete el análisis como en los problemas 9–3 a 9–7.

9–47.M Compare los problemas 9–22, 9–28, 9–30, 9–32 y 9–34 con respecto a los valores máximos de fuerza cortante, momento flexionante y flexión.

9–48.M Compare los problemas 9–23, 9–29, 9–31, 9–33 y 9–35 con respecto a los valores máximos de fuerza cortante, momento flexionante y flexión.

9–49.E Especifique un diseño adecuado para una viga de madera, simplemente apoyada en sus extremos, con el fin de que soporte una carga uniformemente distribuida de 120 lb/ft a lo largo de un claro de 24 ft. La viga debe ser segura tanto a esfuerzo flexionante como cortante cuando se hace de

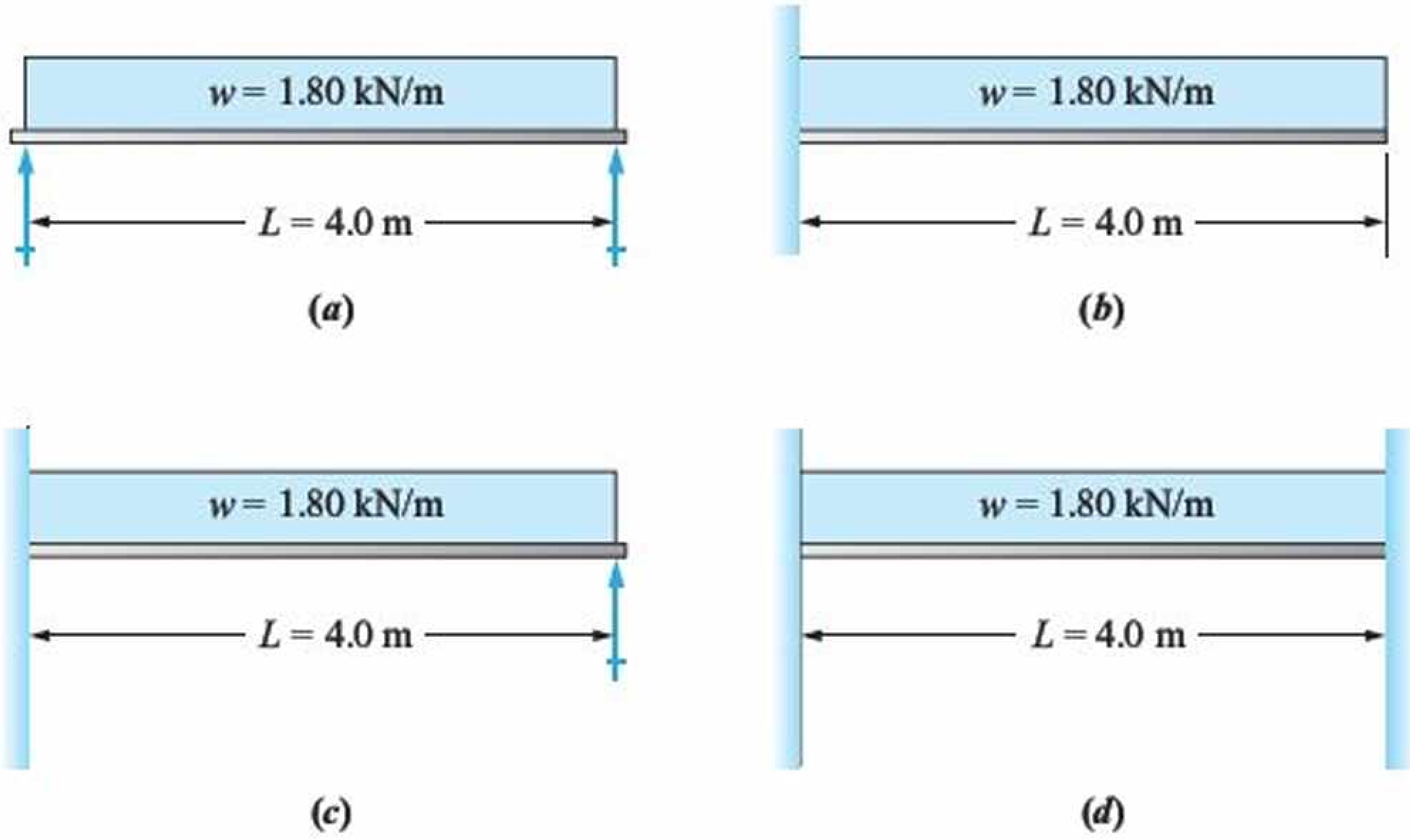


FIGURA P9–46 Vigas del problema 9–46. (a) Viga simplemente apoyada. (b) Viga en voladizo. (c) Viga en voladizo apoyada. (d) Viga empotrada.

pino del sur grado núm. 2. A continuación calcule la flexión máxima de la viga que diseñó.

9–50.E Repita el problema 9–49 pero ahora coloque un apoyo adicional a la mitad de la viga, a 12 ft de uno u otro extremo.

9–51.E Repita el problema 9–49 pero ahora utilice 4 apoyos a 8 ft uno de otro.

9–52.E Compare el comportamiento de las tres vigas diseñadas en los problemas 9–49, 9–50 y 9–51 con respecto a fuerza cortante, momento flexionante y flexión máxima. Complete el análisis como se hizo en los problemas de ejemplo, del 9–3 al 9–7.

Superposición—Vigas estáticamente determinadas

9–53.M Una viga de aluminio extraído (6061–T6) soporta la carga mostrada en la figura P9–53a cuyo perfil se muestra en la figura 9–53b. Calcule la flexión de la viga en cada carga.

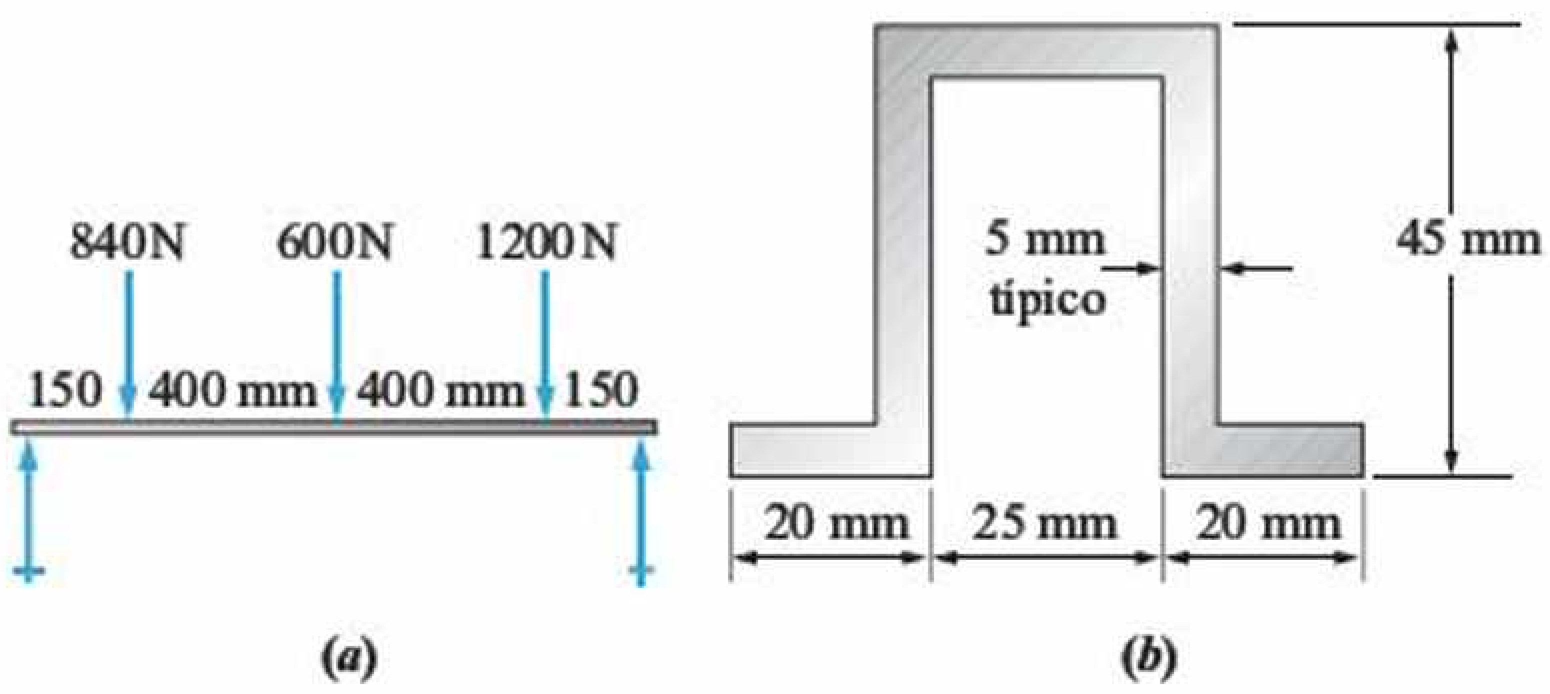


FIGURA P9–53

9–54.M Las cargas mostradas en la figura P9–54a representan las patas de un motor montado sobre el armazón de una máquina. La sección transversal del armazón se muestra en la figura P9–54b, y su momento de inercia es de 16956 mm^4. Calcule la flexión en cada carga. El armazón es de aluminio 2014–T4.

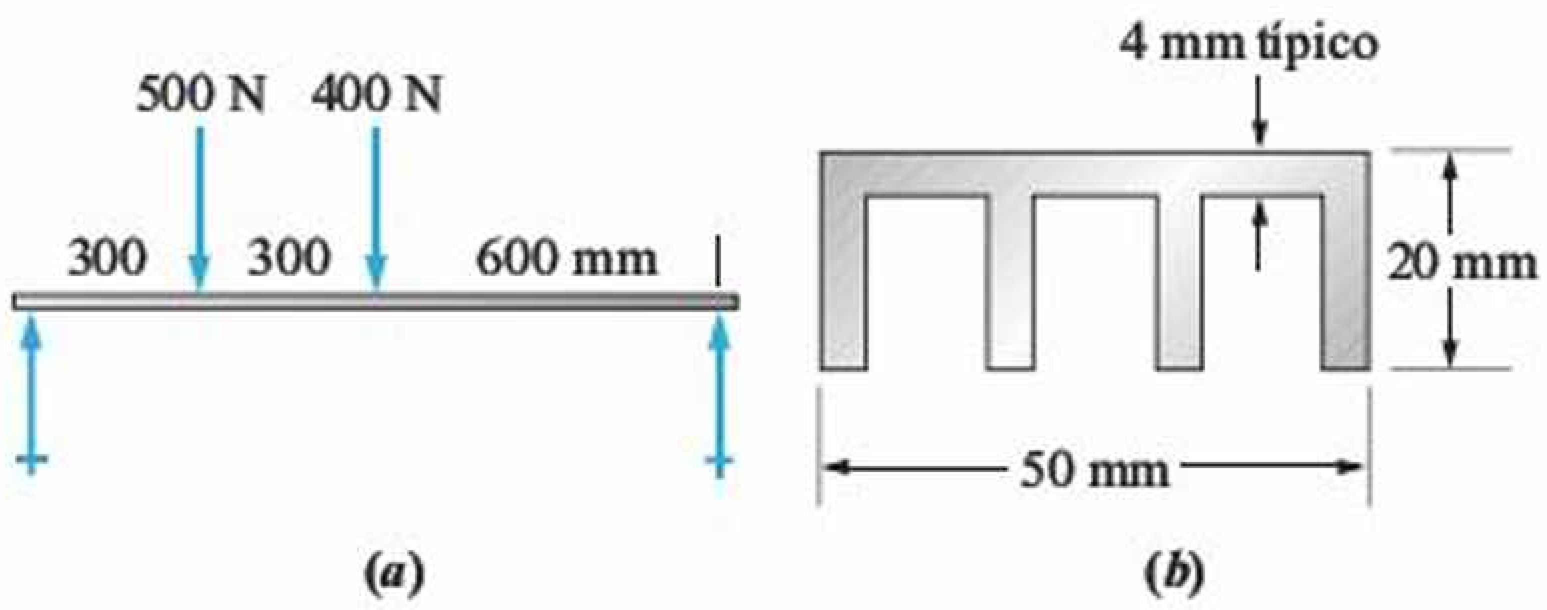


FIGURA P9–54

9–55.C Calcule la flexión a la mitad de una viga de acero W460 × 82 (W18 × 55) cuando se somete a la carga mostrada en la figura P9–55.

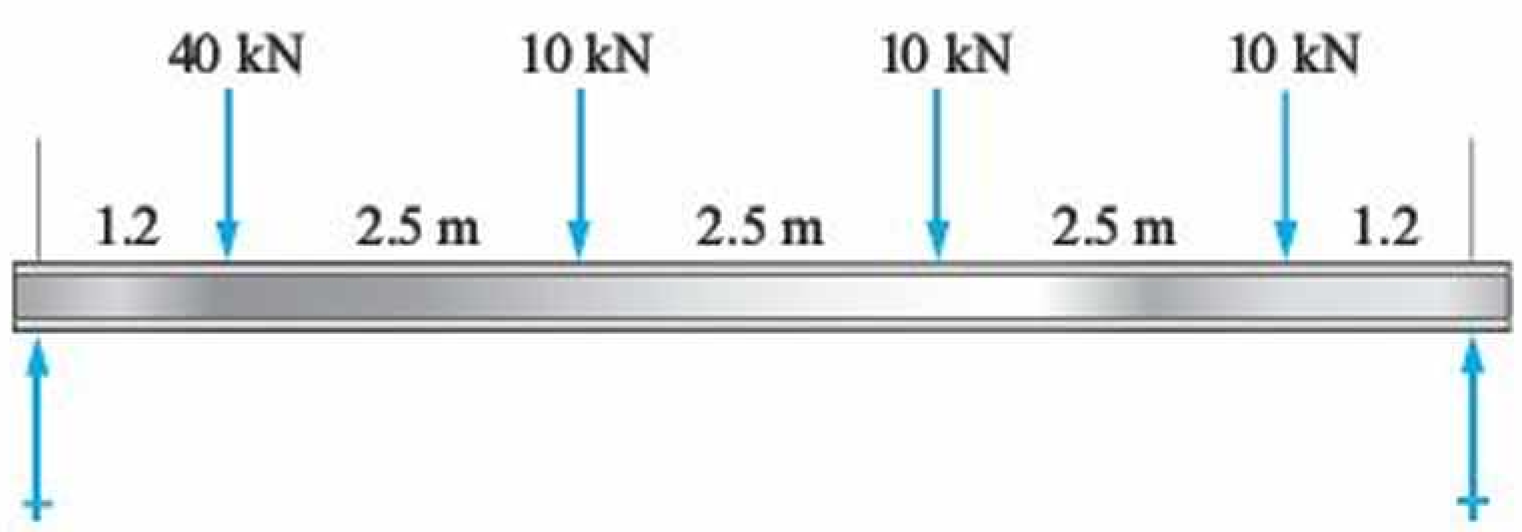


FIGURA P9–55

9–56.E Un tubo de acero cédula 40 de 1 in soporta las dos cargas mostradas en la figura P9–56. Calcule la flexión del tubo en cada carga.

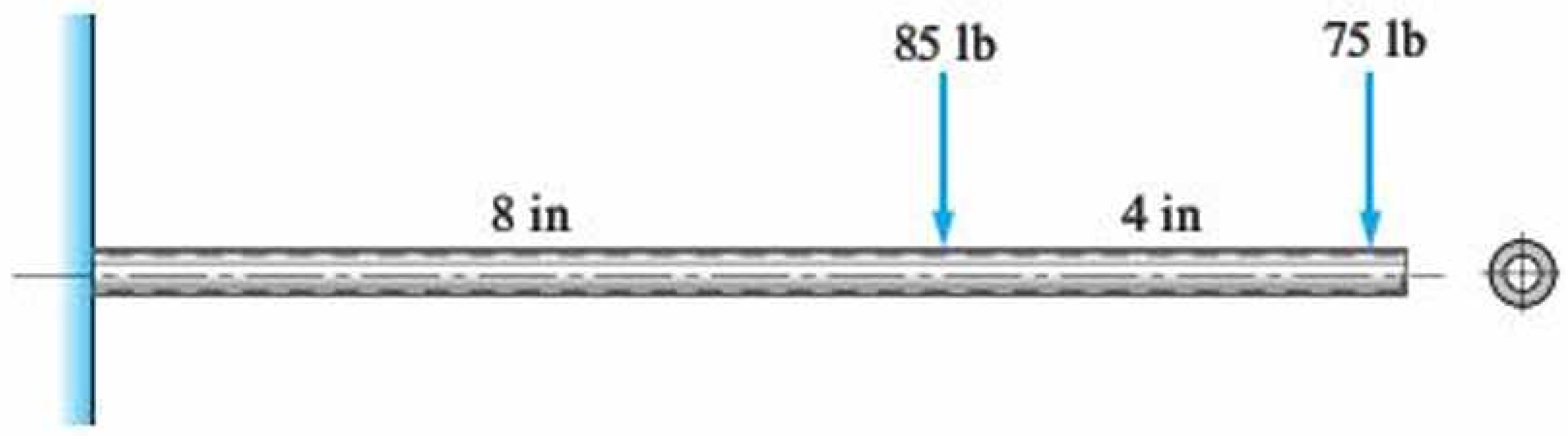


FIGURA P9–56

9–57.M Una viga en voladizo soporta dos cargas como se muestra en la figura P9–57. Si la viga es una barra rectangular de acero de 20 mm de ancho por 80 mm de altura, calcule la flexión en el extremo de la viga.

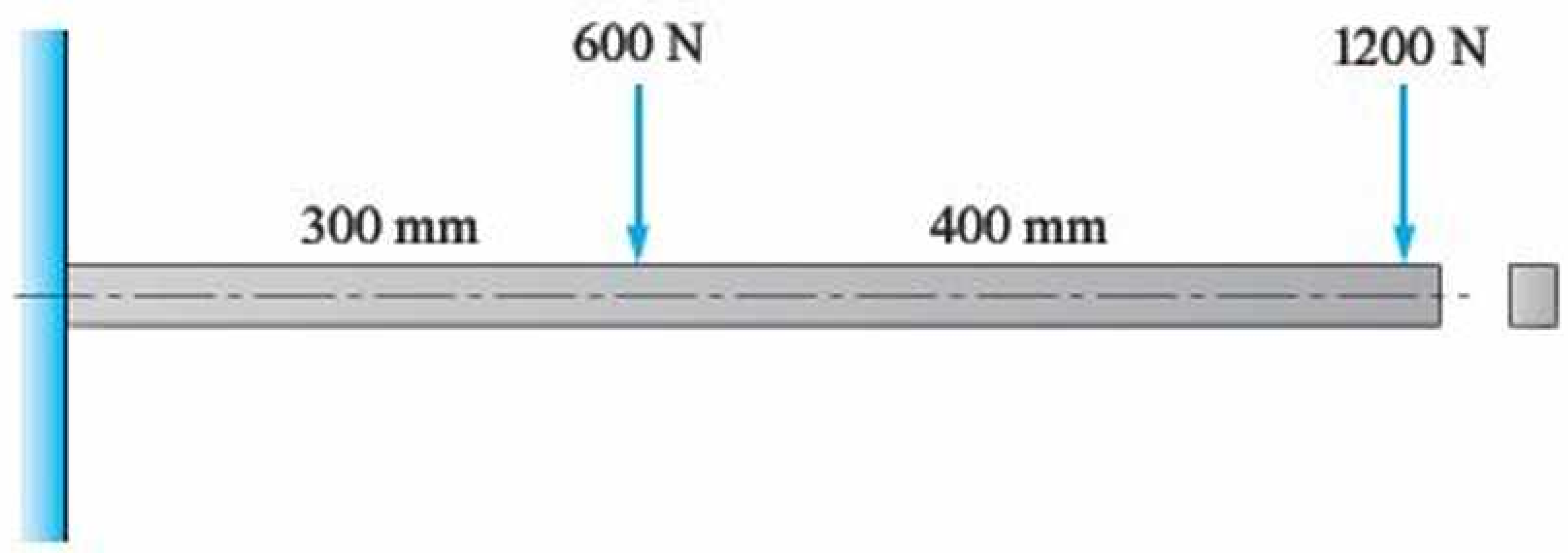


FIGURA P9–57

9–58.M Para la viga del problema 9–57, calcule la flexión si la barra es de aluminio 2014–T4 y no de acero.

9–59.M Para la viga del problema 9–57, calcule la flexión si la barra es de magnesio, ASTM AZ 63A–T6 y no de acero.

9–60.E La carga mostrada en la figura P9–60 es soportada por una barra de acero circular de 0.800 in de diámetro. Calcule la flexión en su extremo derecho.

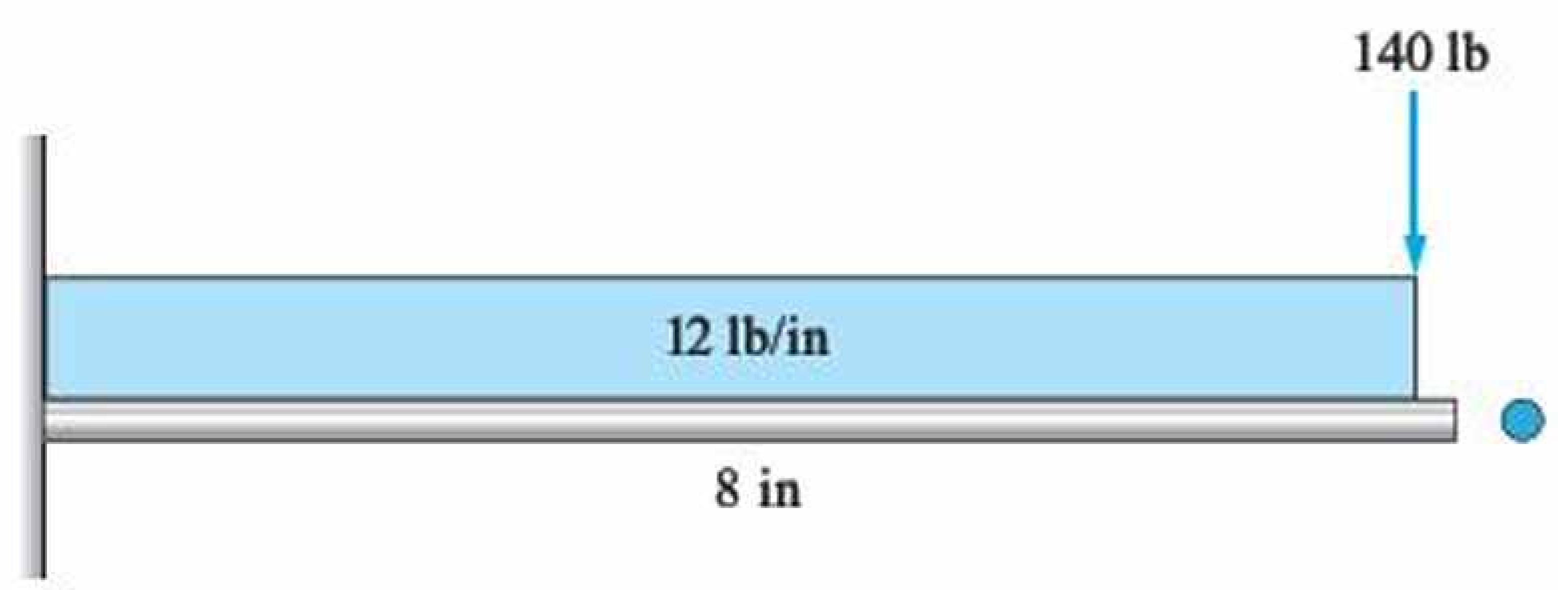


FIGURA P9–60

9–61.M Especifique una viga de acero de patín ancho estándar que sea capaz de soportar las cargas mostradas en la figura P9–55 con una flexión a la mitad de menos de 1/360 veces de su longitud.

9–62.E Se pretende utilizar un canal Aluminum Association con sus alas hacia abajo para que soporte las cargas mostradas en la figura P9–62 de modo que la cara plana pueda estar en contacto con la carga. La flexión máxima permisible es de 0.080 in. Especifique un canal adecuado.

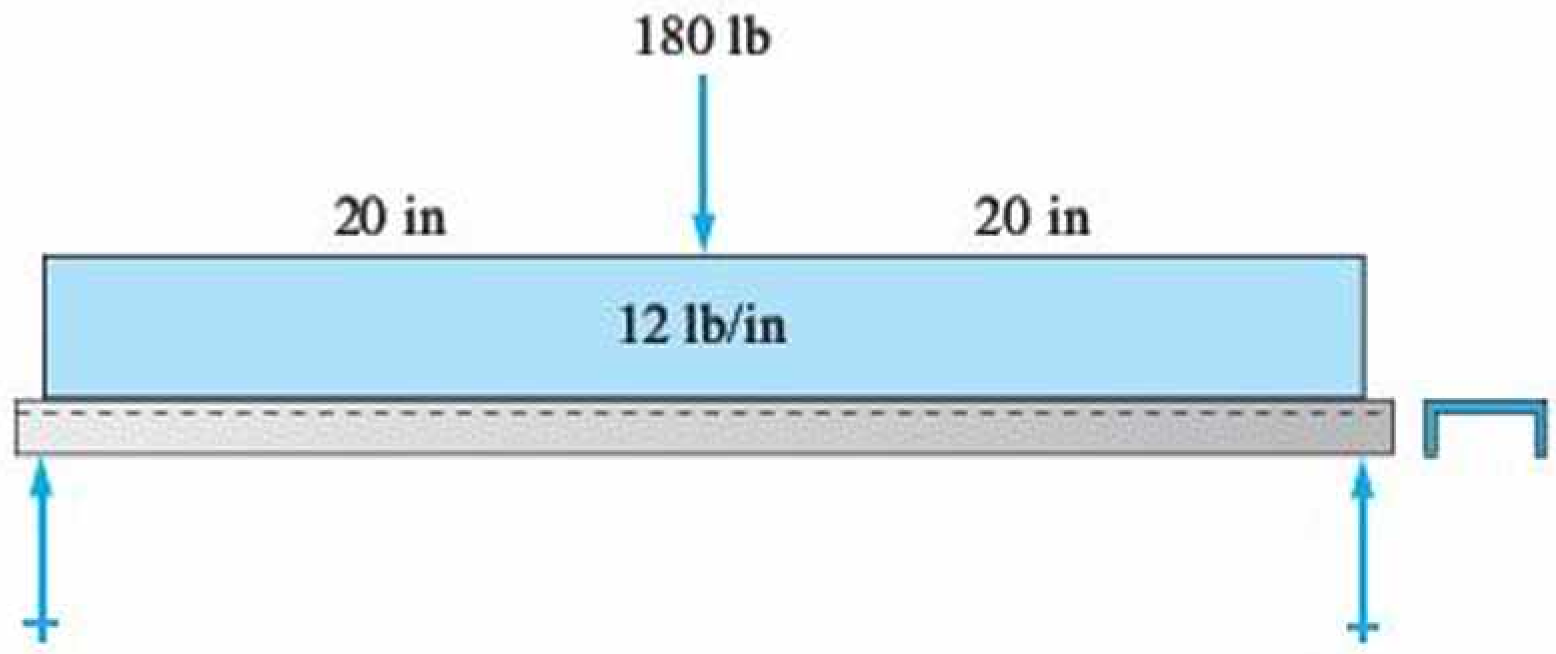


FIGURA P9–62

Superposición–Vigas estáticamente indeterminadas

En los problemas 9–63 a 9–70, use el método de superposición para determinar las reacciones en todos los apoyos y trace los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante completos. Indique la fuerza cortante y el momento flexionante máximos para cada viga.

9–63.M Use la figura P9–36.

9–64.M Use la figura P9–37.

9–65.E Use la figura P9–38.

9–66.E Use la figura P9–66.

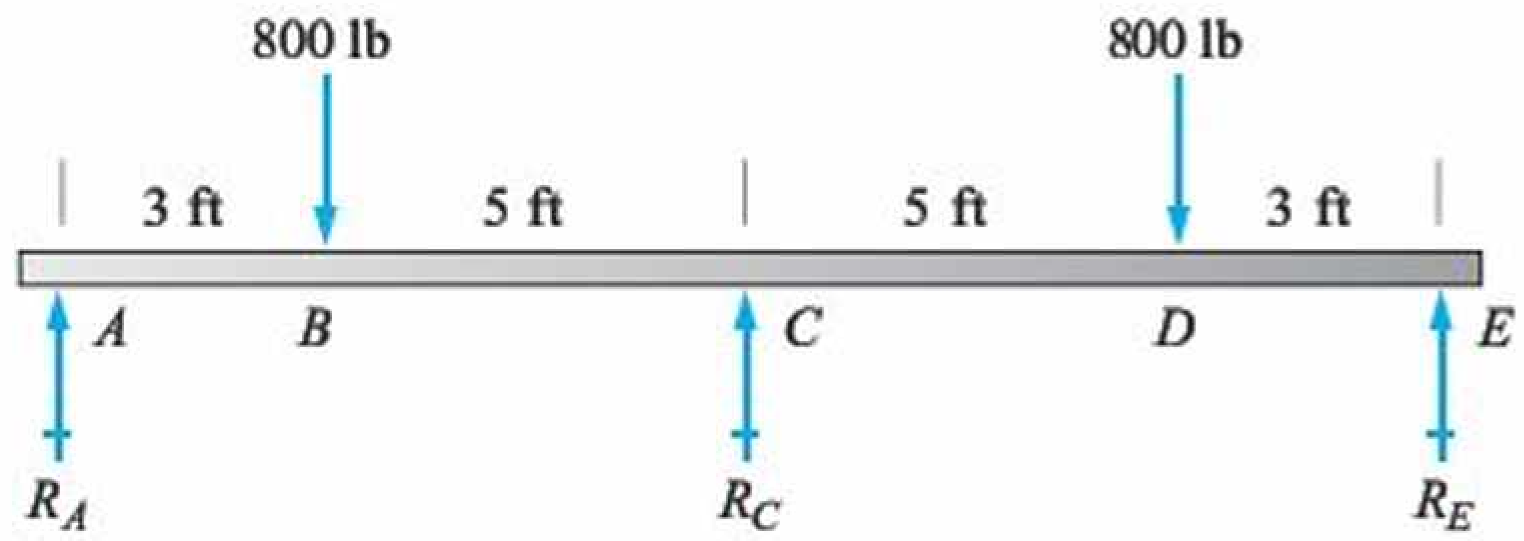


FIGURA P9–66

9–67.E Use la figura P9–67.

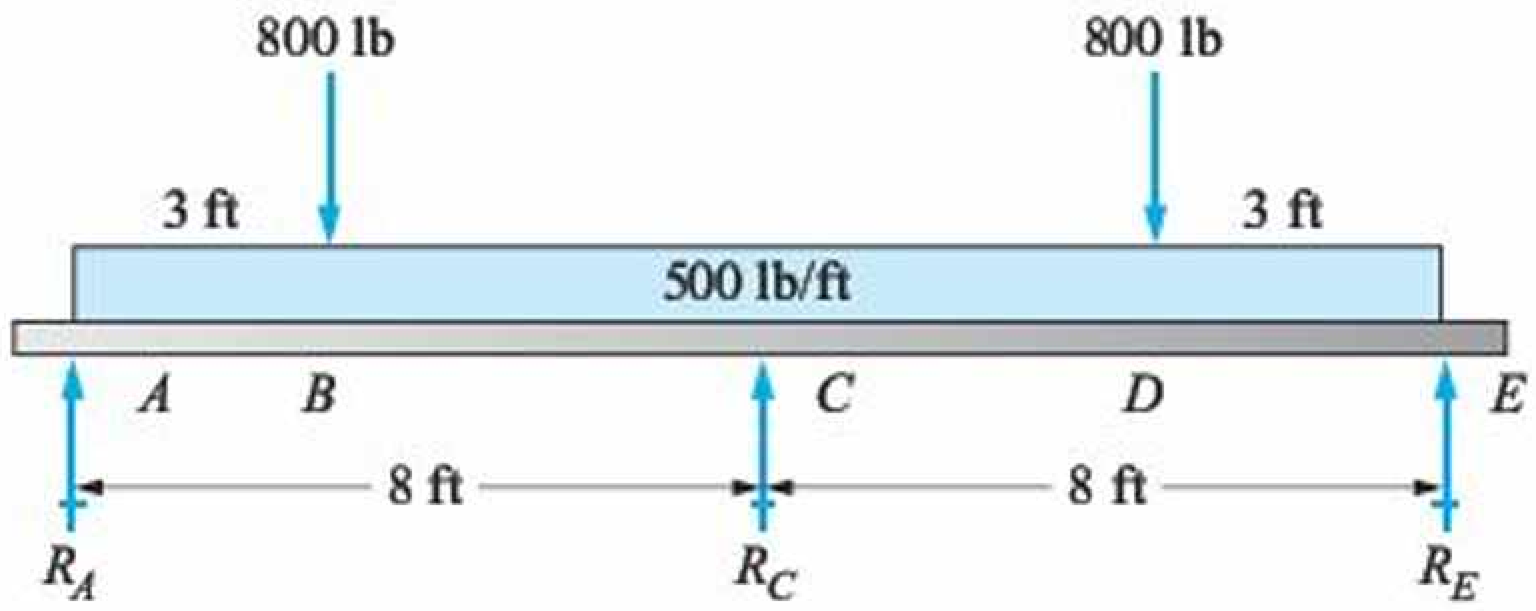


FIGURA P9–67

9–68.M Use la figura P9–68.

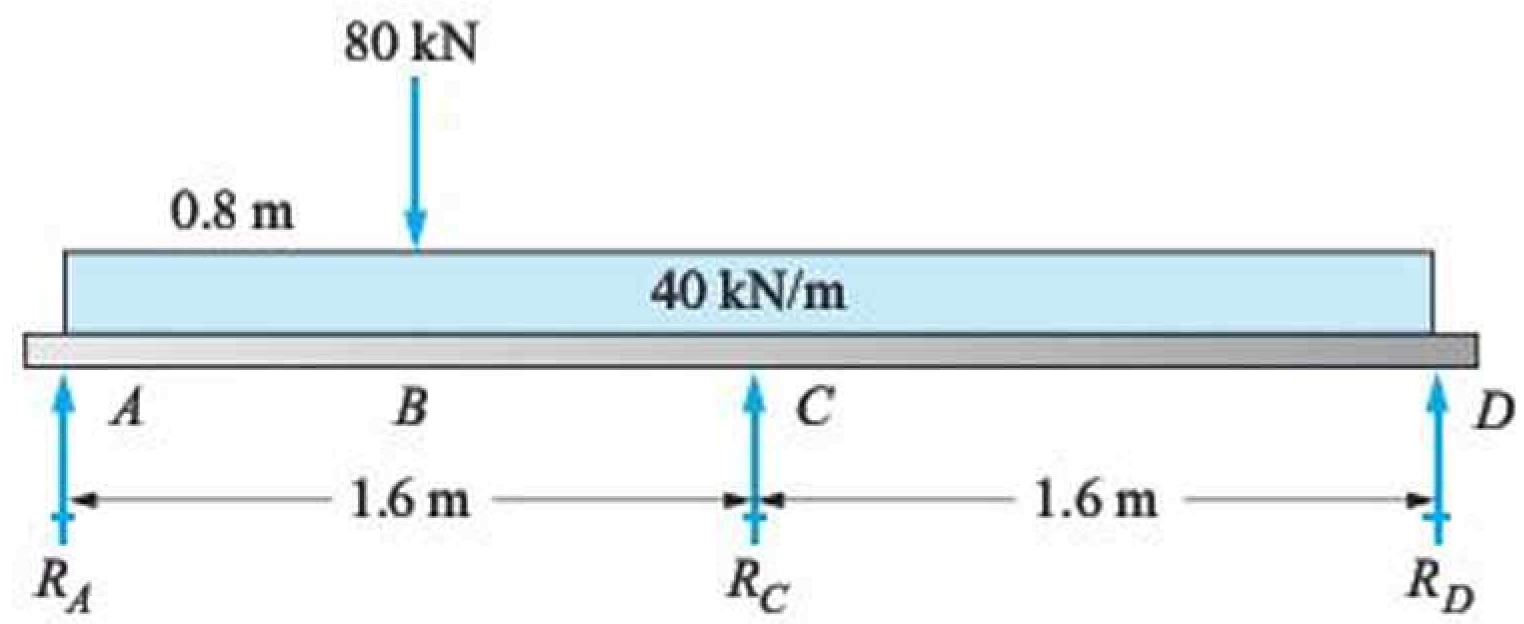


FIGURA P9–68

9–69.M Use la figura P9–69.

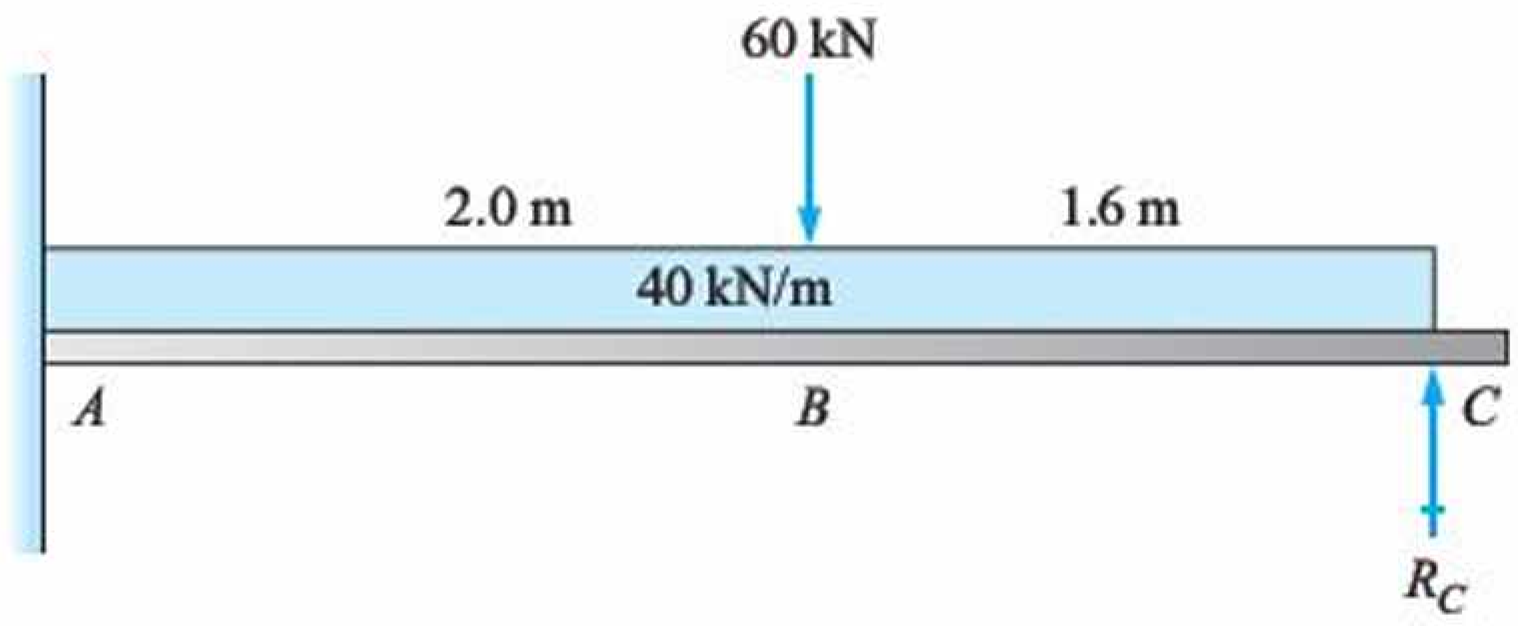


FIGURA P9–69

9–70.E Use la figura P9–70.

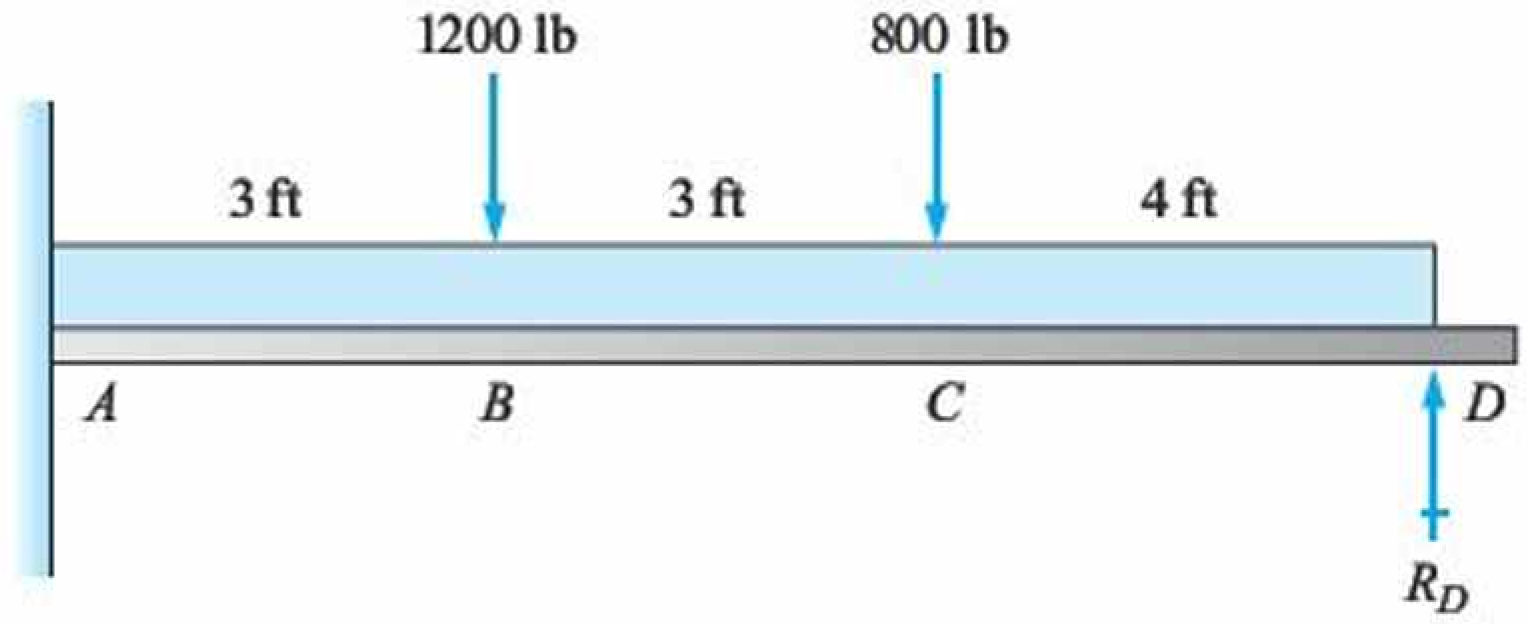


FIGURA P9–70

Problemas de diseño–límites de esfuerzo y deflexión

9–71.E Un tablón de una plataforma de madera soporta una carga como la del caso *f* del apéndice A–25 con $w = 100$ lb/ft y $L = 24$ in. El tablón es estándar de 2×6 con 1.50 in de espesor y 5.50 in de ancho con la dimensión larga horizontal. ¿Sería seguro el tablón si es de pino del sur grado núm. 2?

9–72.M Se proponen dos diseños para un trampolín, como se muestra en la figura P9–72. Compare los diseños con respecto a fuerza cortante, momento flexionante y flexión. Exprese la flexión en función de la rigidez de la viga, *EI*. Observe que se pueden utilizar los casos de los apéndices A–23 y A–25.

9–73.M Para cada uno de los diseños de trampolín propuestos y descritos en el problema 9–72 mostrados en la figura P9–72, complete el diseño y especifique el material, la sección transversal y las dimensiones finales. La tabla tiene que ser de 600 mm de ancho.

9–74.M La figura 9–74 muestra una viga de techo sobre la plataforma de carga de la nave de una fábrica. Calcule las reacciones en los apoyos y trace los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante completos.

9–75.M Para la viga de techo descrita en el problema 9–74, complete su diseño y especifique el material, la sección transversal y las dimensiones finales.

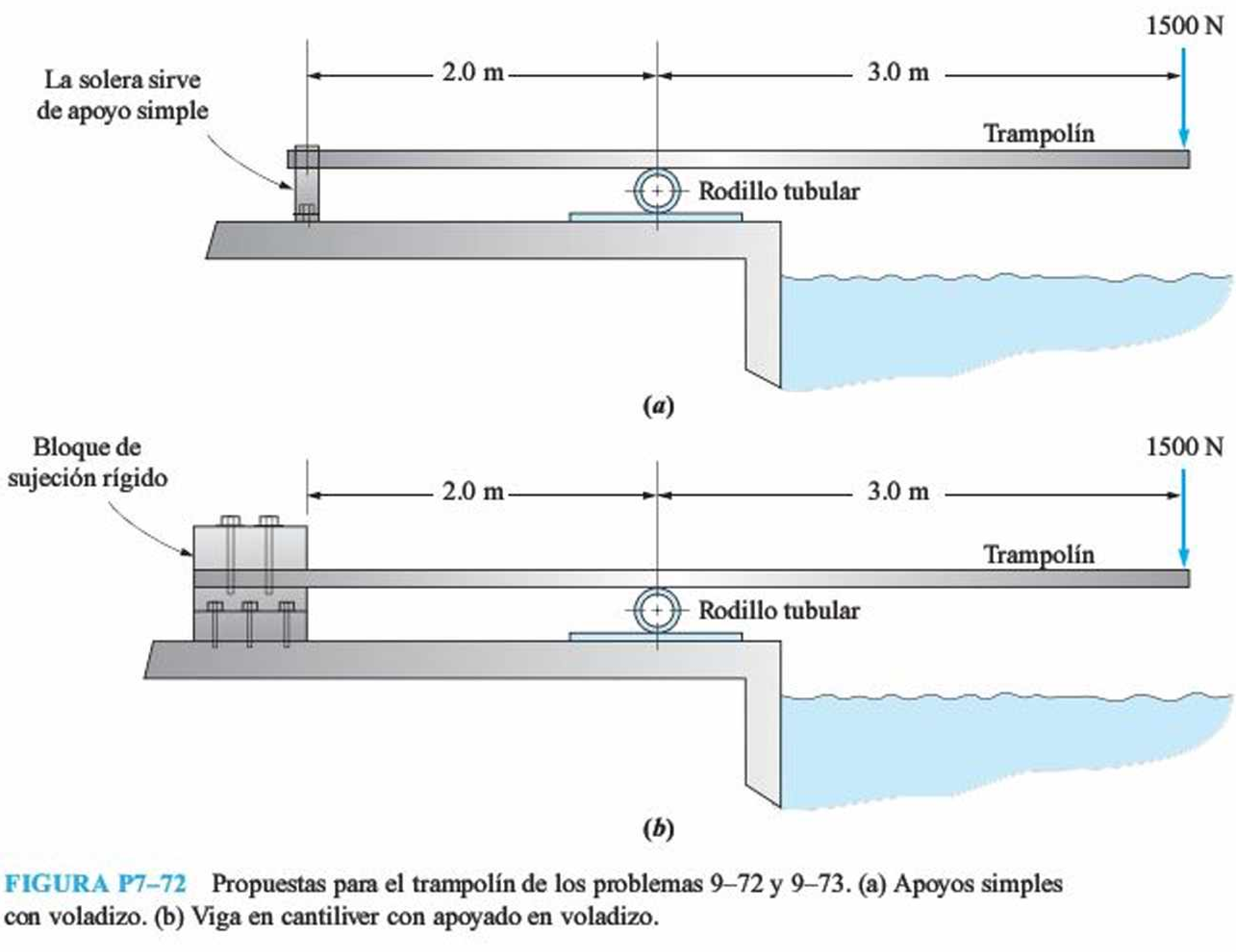


FIGURA P7–72 Propuestas para el trampolín de los problemas 9–72 y 9–73. (a) Apoyos simples con voladizo. (b) Viga en cantiliver con apoyado en voladizo.

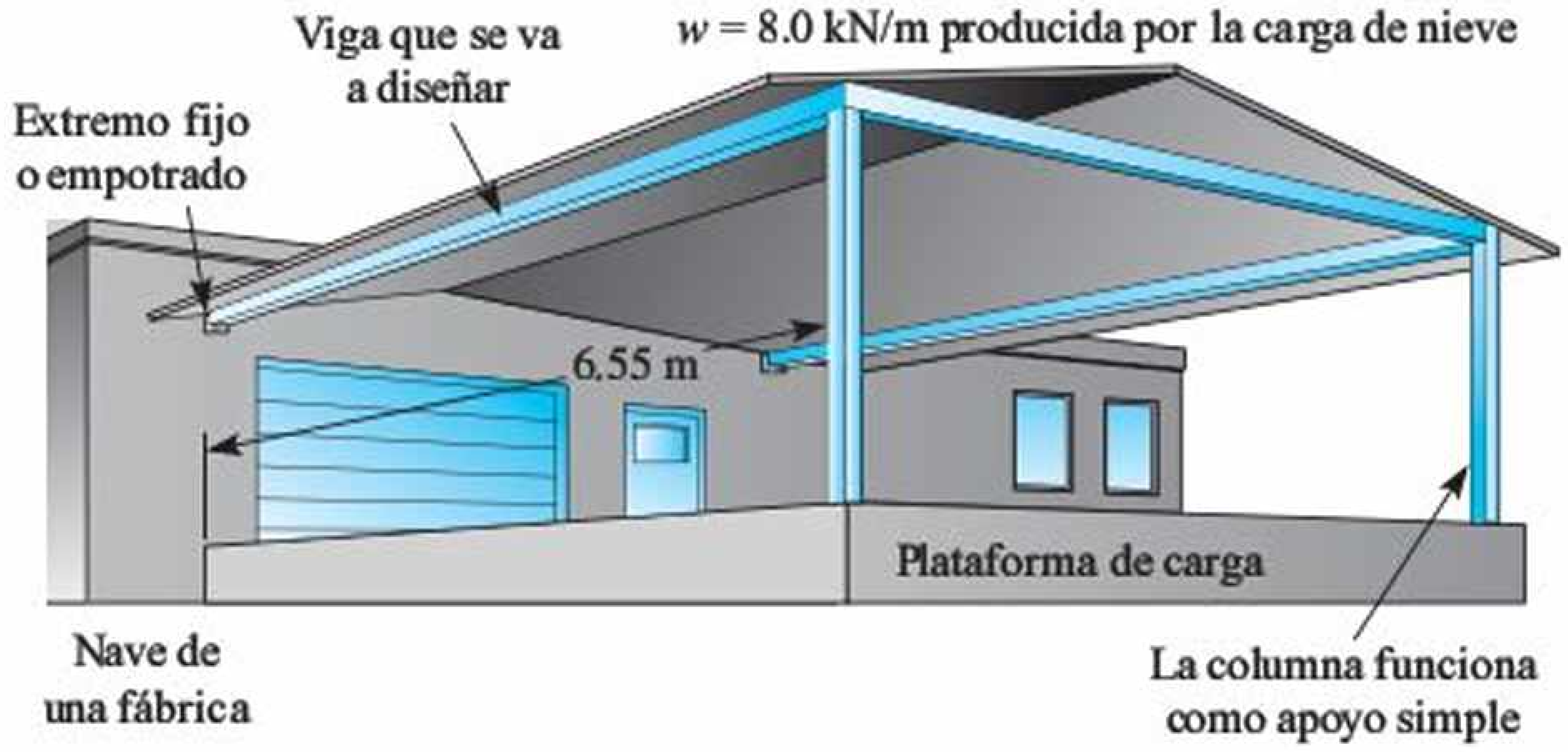


FIGURA P9–74 Viga de techo de la plataforma de carga de los problemas 9–74 y 9–75.

Método de integración sucesiva

En los problemas siguientes, del 9–76 al 9–84, use el procedimiento general descrito en la sección 9–7 para determinar las ecuaciones de las curvas de flexión de las vigas. A menos que se indique de otra manera, calcule la flexión máxima de la viga con las ecuaciones e indique dónde ocurre.

9–76.E La carga se muestra en la figura P9–76. La viga es una barra rectangular de acero, de 1.0 in de ancho por 2.0 in de altura.

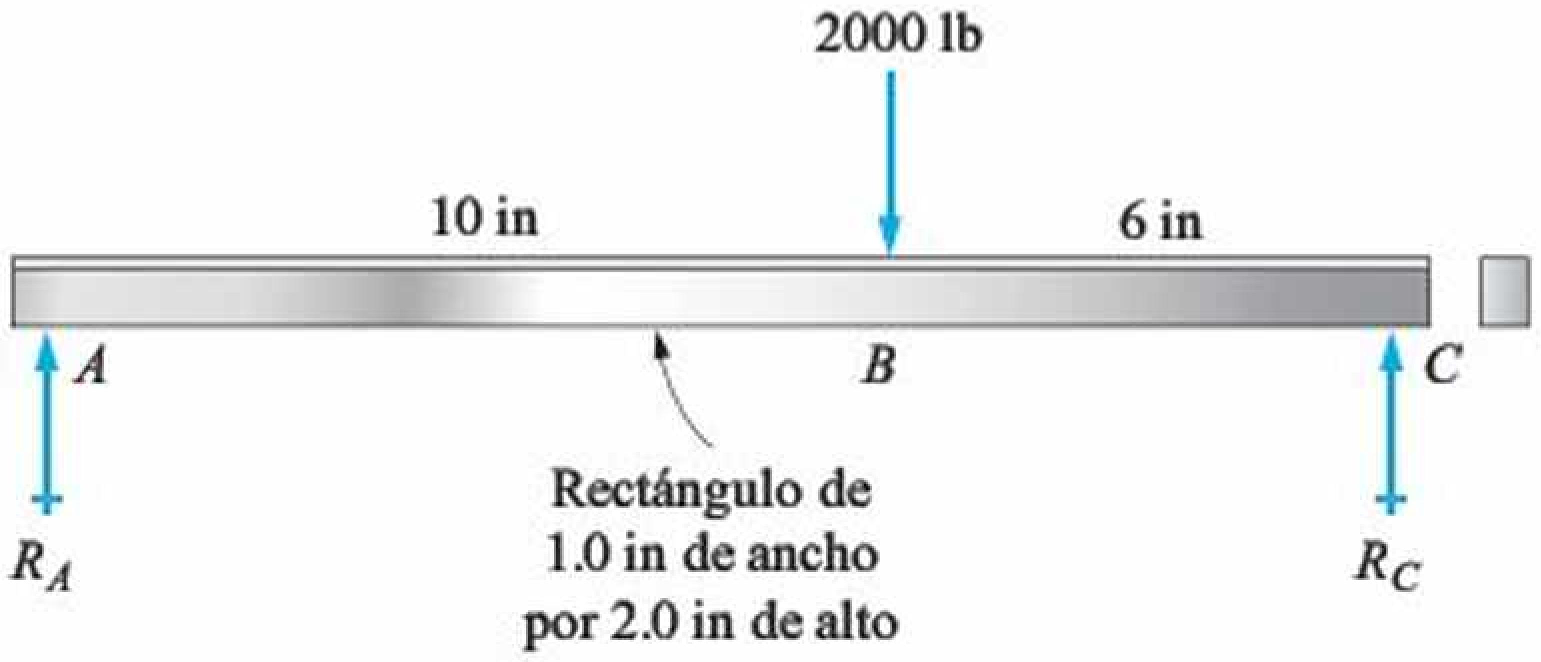


FIGURA P9–76

9–77.E La carga se muestra en la figura P9–77. La viga es un perfil de acero de patín ancho W18 × 55.

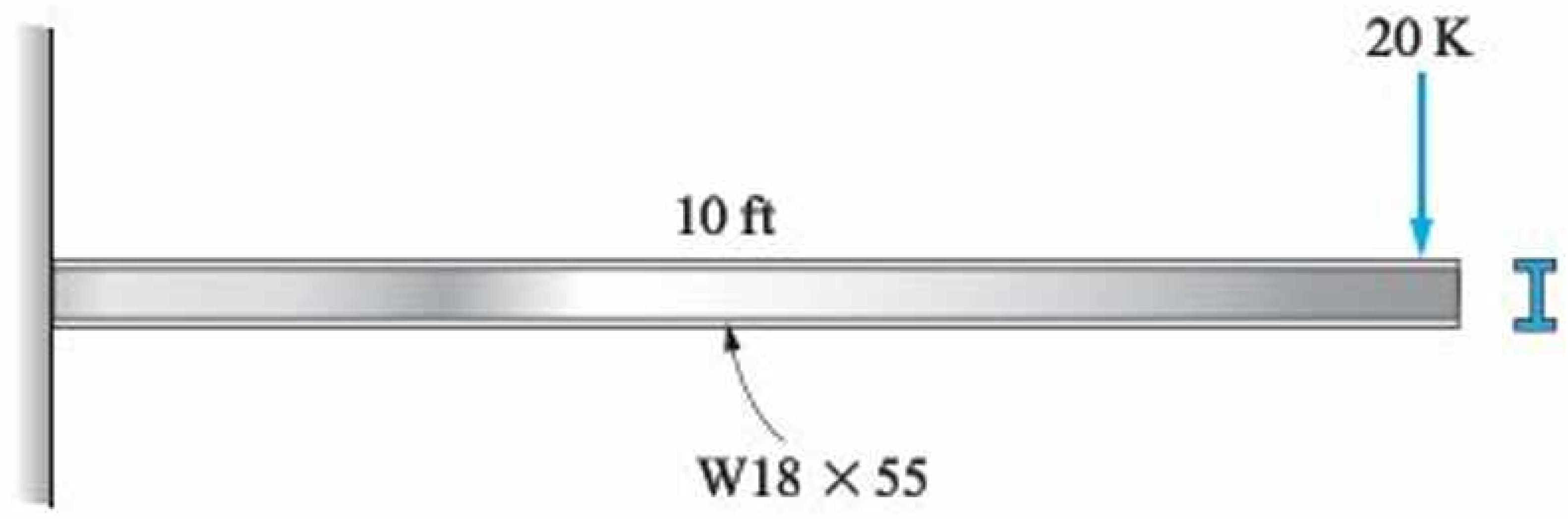


FIGURA P9–77

9–78.C En la figura P9–78 se muestra la carga. La viga es un tubo de acero cédula 40 de $2\frac{1}{2}$ in.

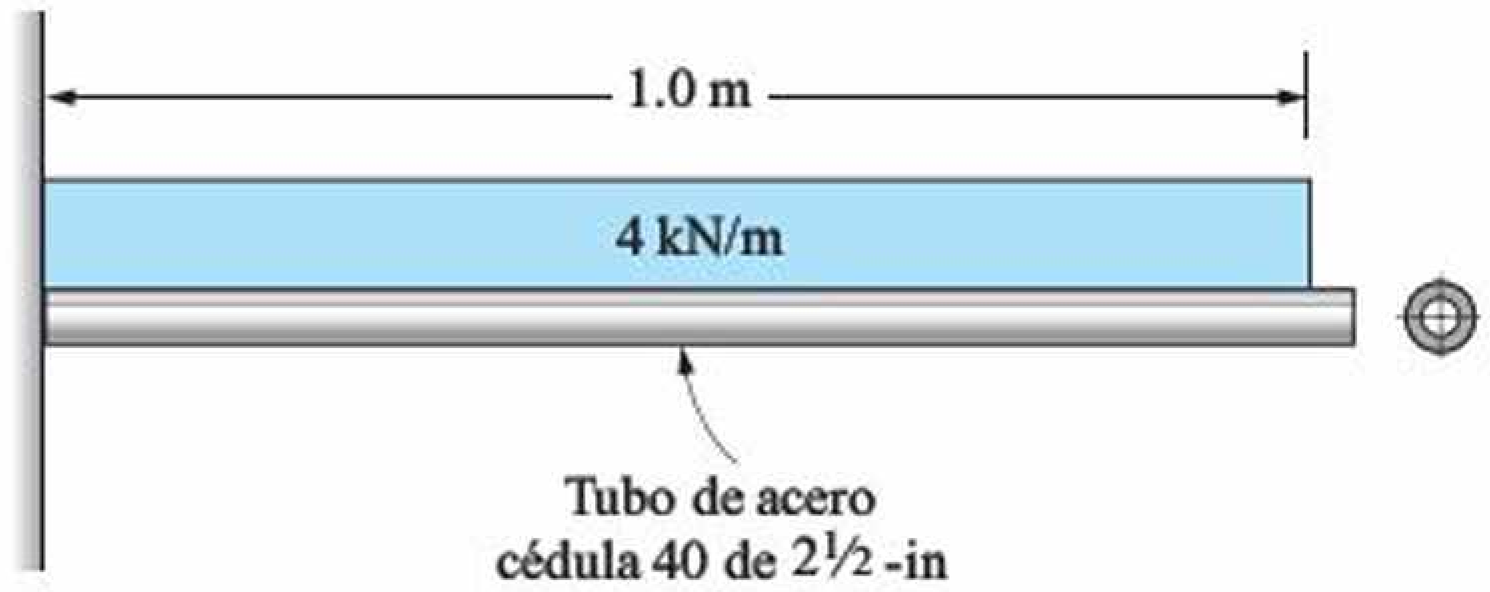


FIGURA P9–78

9.79.E En la figura P9–79 se muestran las cargas. La viga es un perfil de patín ancho W24 × 76.

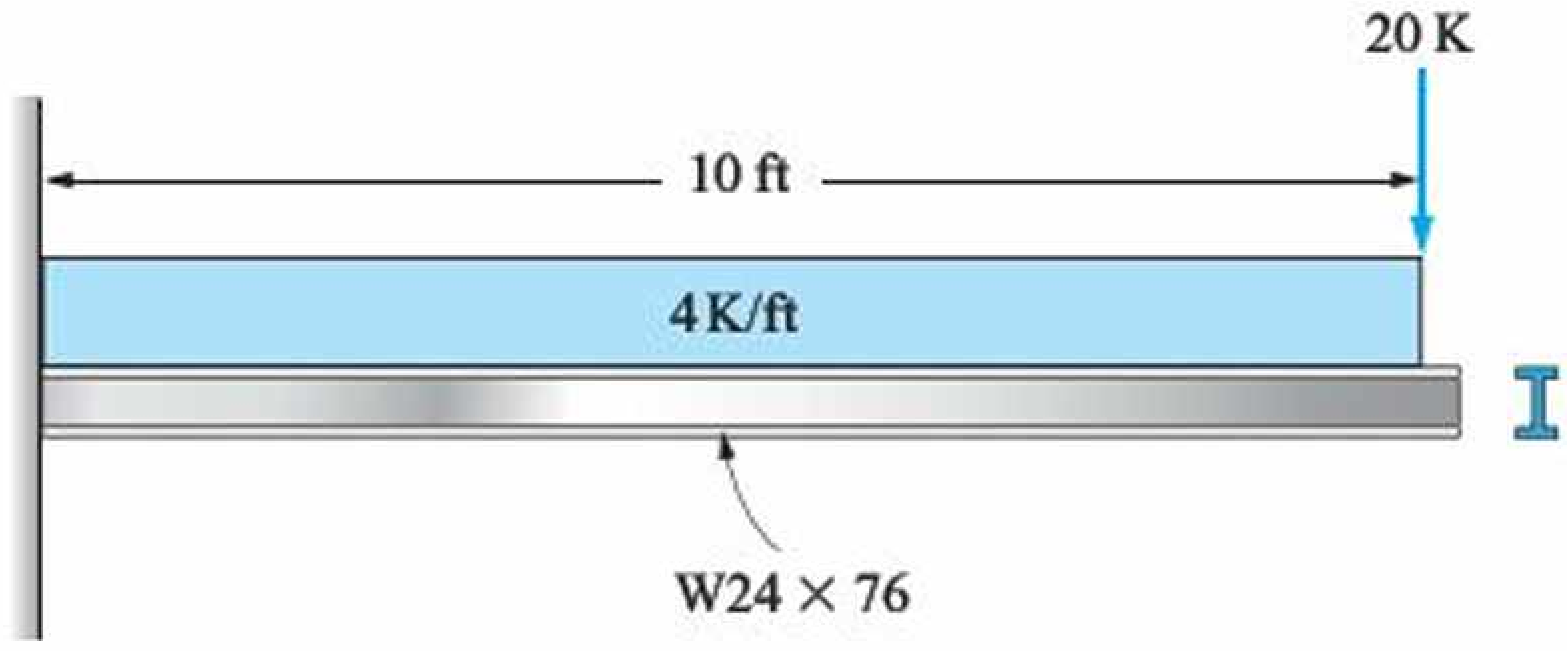


FIGURA P9–79

9–80.M En la figura P9–80 se muestran las cargas. Diseñe una barra de acero circular que limite la flexión en el extremo de la viga a 5.0 mm.

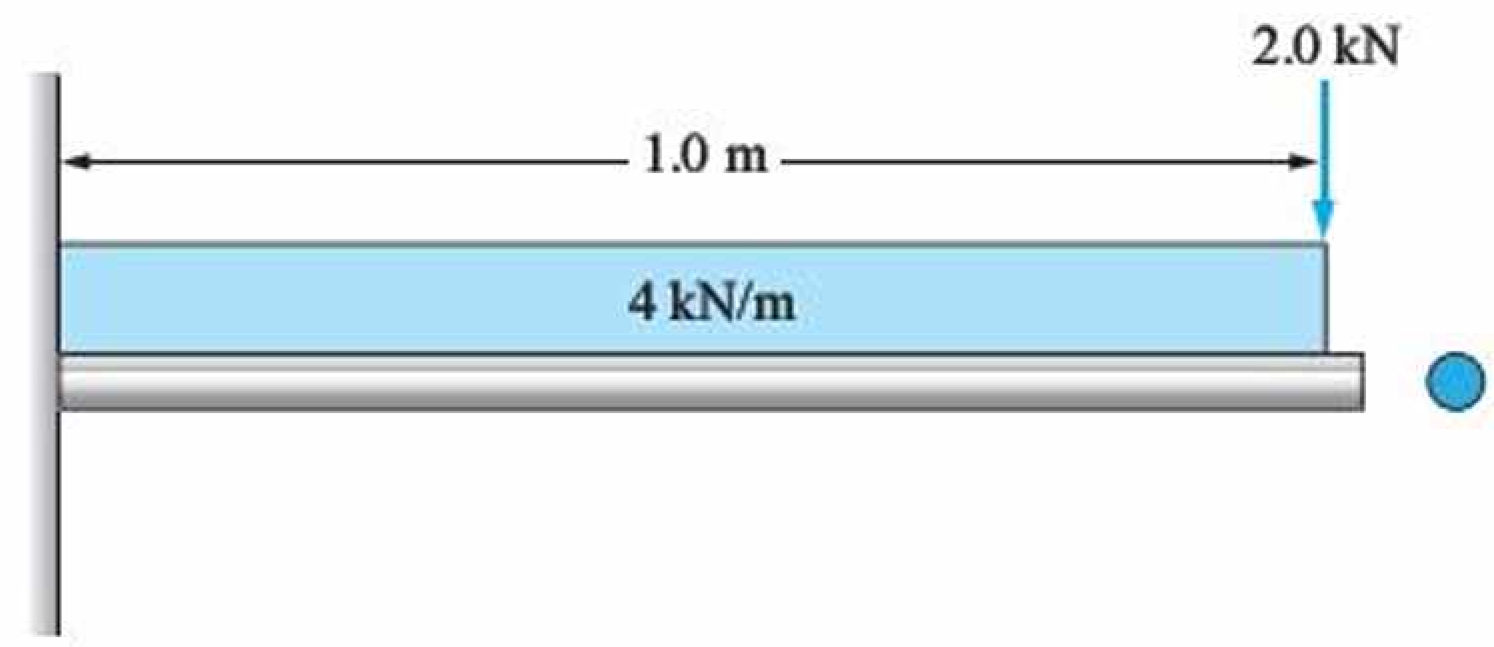


FIGURA P9–80

9–81.C En la figura P9–81 se muestran las cargas. Diseñe una viga de acero que limite la flexión máxima a 1.0 mm. Use cualquier perfil, incluidos los del apéndice.

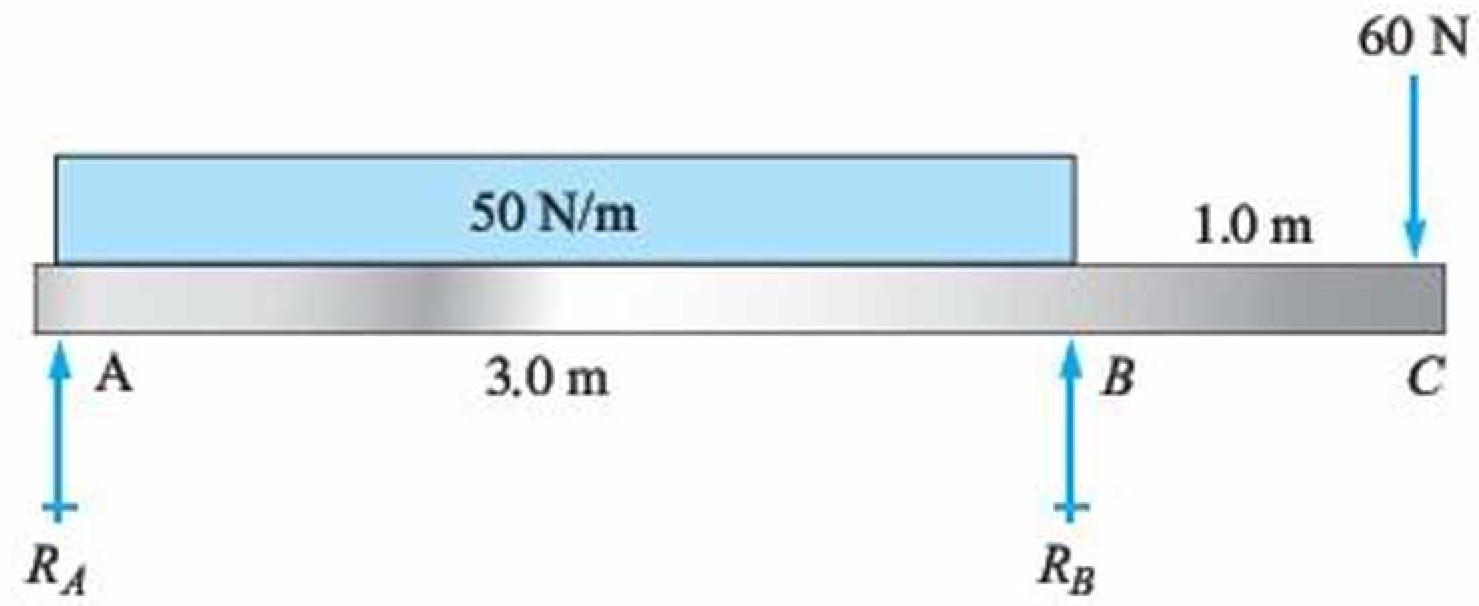


FIGURA P9–81

9–82.C En la figura P9–82 se muestran las cargas. Seleccione una viga I de aluminio que limite el esfuerzo a 120 Mpa, luego calcule la flexión máxima en la viga.

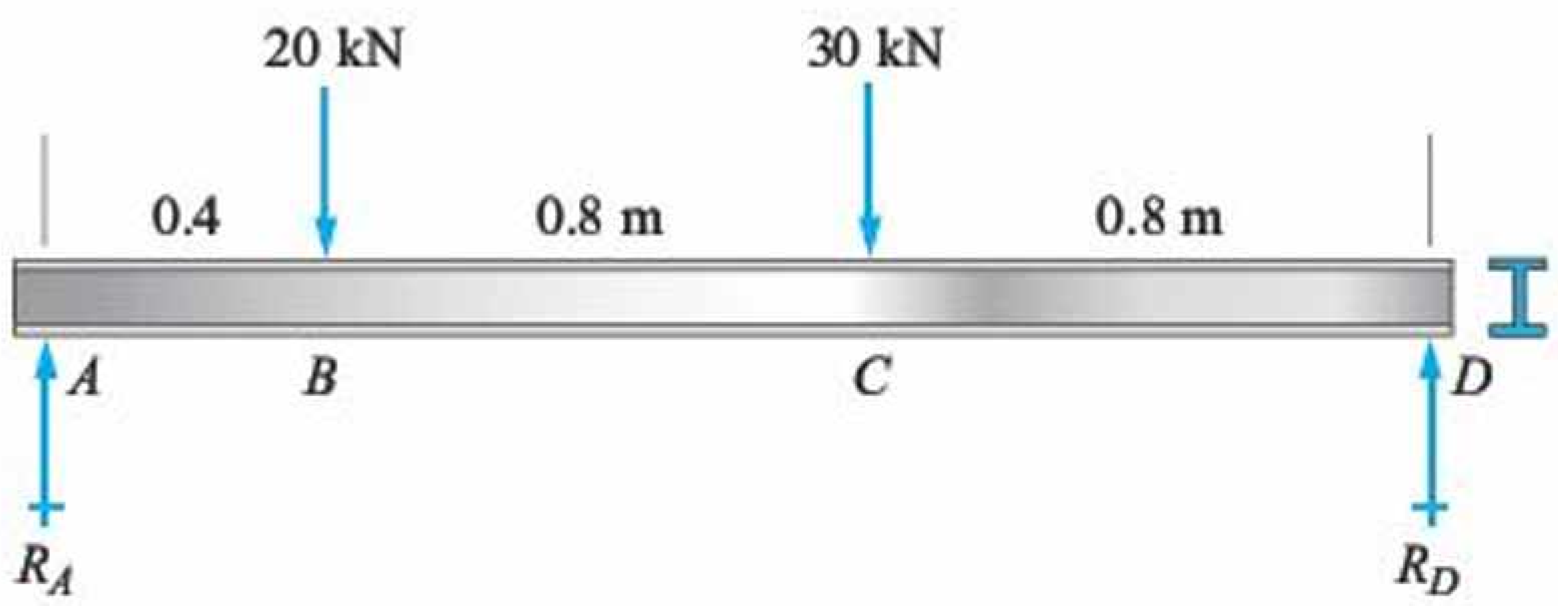


FIGURA P9–82

9–83.C Una viga de acero de patín ancho W360 × 39 soporta las cargas mostradas en la figura P9–83. Calcule la flexión máxima entre los apoyos y en cada extremo.

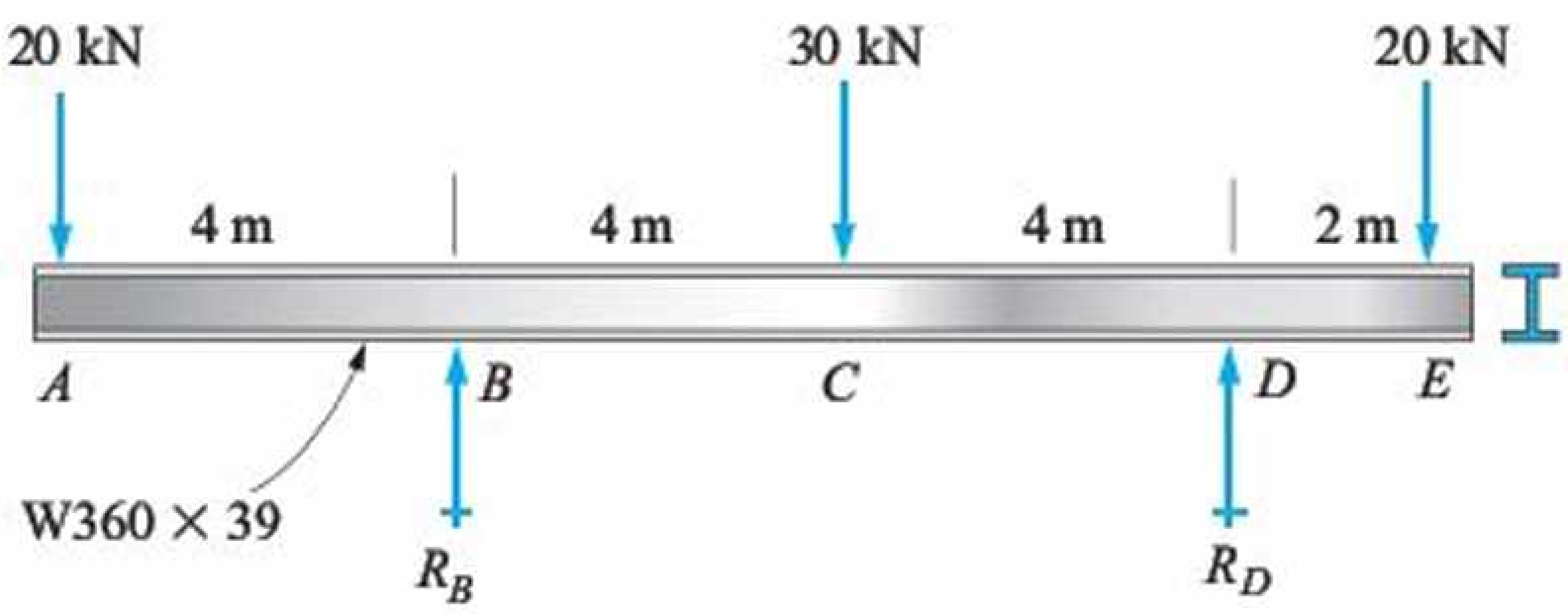


FIGURA P9–83

9–84.M Las cargas mostradas en la figura P9–84 representan la flecha de acero de una máquina. Los engranes montados en la flecha producen las cargas. Suponiendo que el diámetro de la flecha no cambia, determine el diámetro requerido para limitar la flexión en cualquier engrane a 0.13 mm.

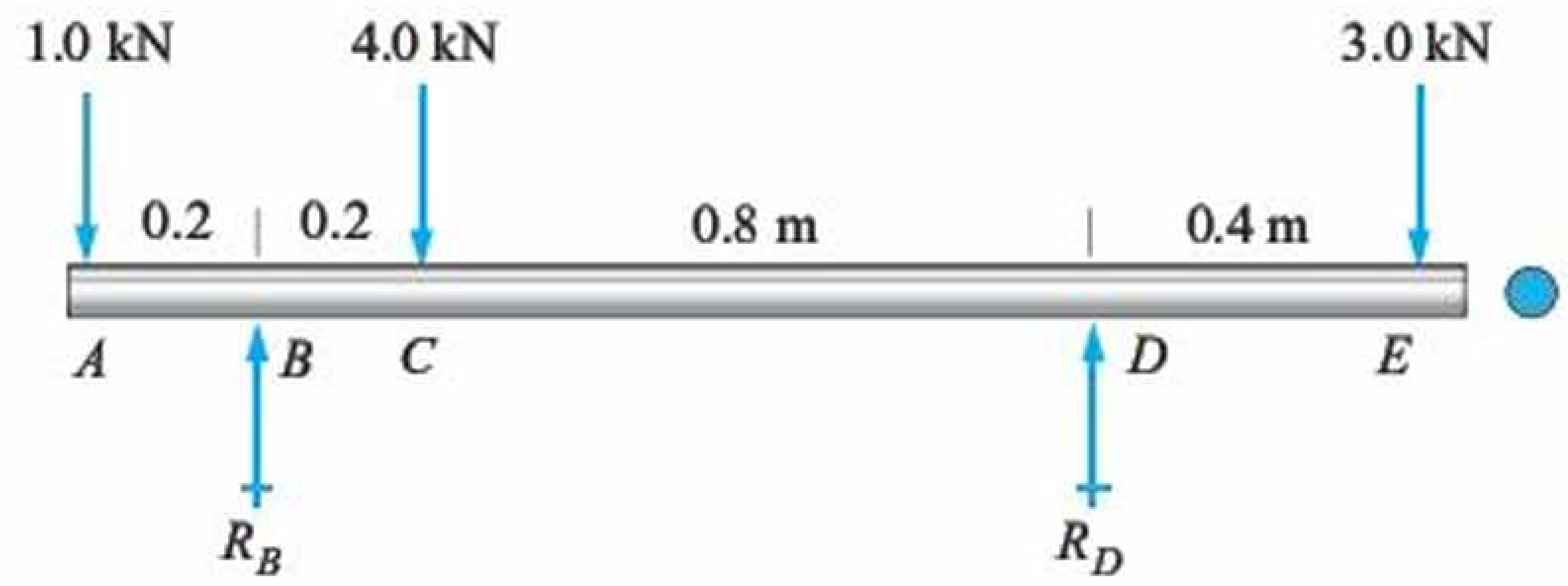


FIGURA P9–84

Método del área–momento

Use el método del área–momento para resolver los problemas siguientes.

9–85.E Para la viga mostrada en la figura P9–76, calcule la flexión en la carga. La viga es una barra rectangular de acero de 1.0 in de ancho por 2.0 in de altura.

9–86.E Para la viga mostrada en la figura P9–76, calcule la flexión a la mitad, a 8.0 in de uno u otro apoyo. La viga es una barra rectangular de acero de 1.0 in de ancho por 2.0 in de altura.

9–87.E Para la viga mostrada en la figura P9–77, calcule la flexión en el extremo. La viga es un perfil de acero de patín ancho W18 × 55.

9–88.C Para la viga mostrada en la figura P9–78, calcule la flexión en el extremo. La viga es un tubo de acero cédula 40 de $2\frac{1}{2}$ in (PIPE64STD).

9–89.E Para la viga mostrada en la figura P9–79, calcule la flexión en el extremo. La viga es un perfil de acero de patín ancho W24 × 76.

9–90.M Para la viga mostrada en la figura P9–80, calcule la flexión en el extremo. La viga es una barra circular de aluminio 6061–T6 de 100 mm de diámetro.

9–91.C Para la viga mostrada en la figura P9–81, calcule la flexión en el extremo derecho, C. La viga es un tubo de acero estructural cuadrado de $2 \times 2 \times \frac{1}{4}$ (HSS51 × 1 × 6.4).

9–92.C Para la viga mostrada en la figura P9–82, calcule la flexión en el punto *C*. La viga es una viga I7 × 5.800 de aluminio 6061–T6,

9–93.C Para la viga mostrada en la figura P9–83, calcule la flexión en el punto *A*. La viga es un perfil de acero de patín ancho W14 × 26.

9–94.E La figura P9–94 muestra una flecha de acero circular escalonada que soporta una carga concentrada única en su centro. Calcule la flexión producida por la carga.

9–95.E La figura P9–95 muestra una viga compuesta hecha de tubería estructural de acero. Calcule la flexión en la carga.

9–96.E La figura P9–96 muestra una viga en voladizo cuyo perfil es de acero de perfil ancho W18 × 55 con cubreplacas soldadas en las caras superior e inferior de la viga a lo largo de los primeros 6.0 ft. Calcule la flexión en el extremo de la viga.

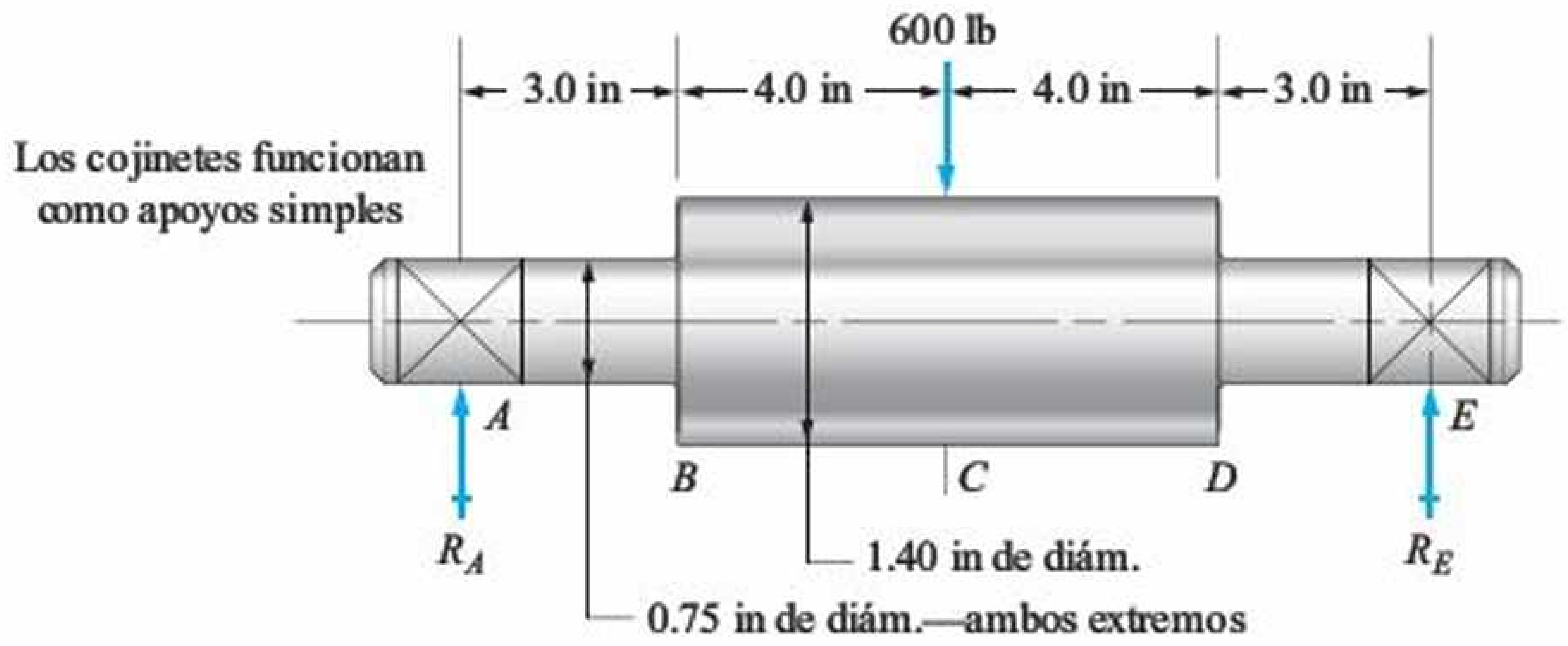


FIGURA P9–94

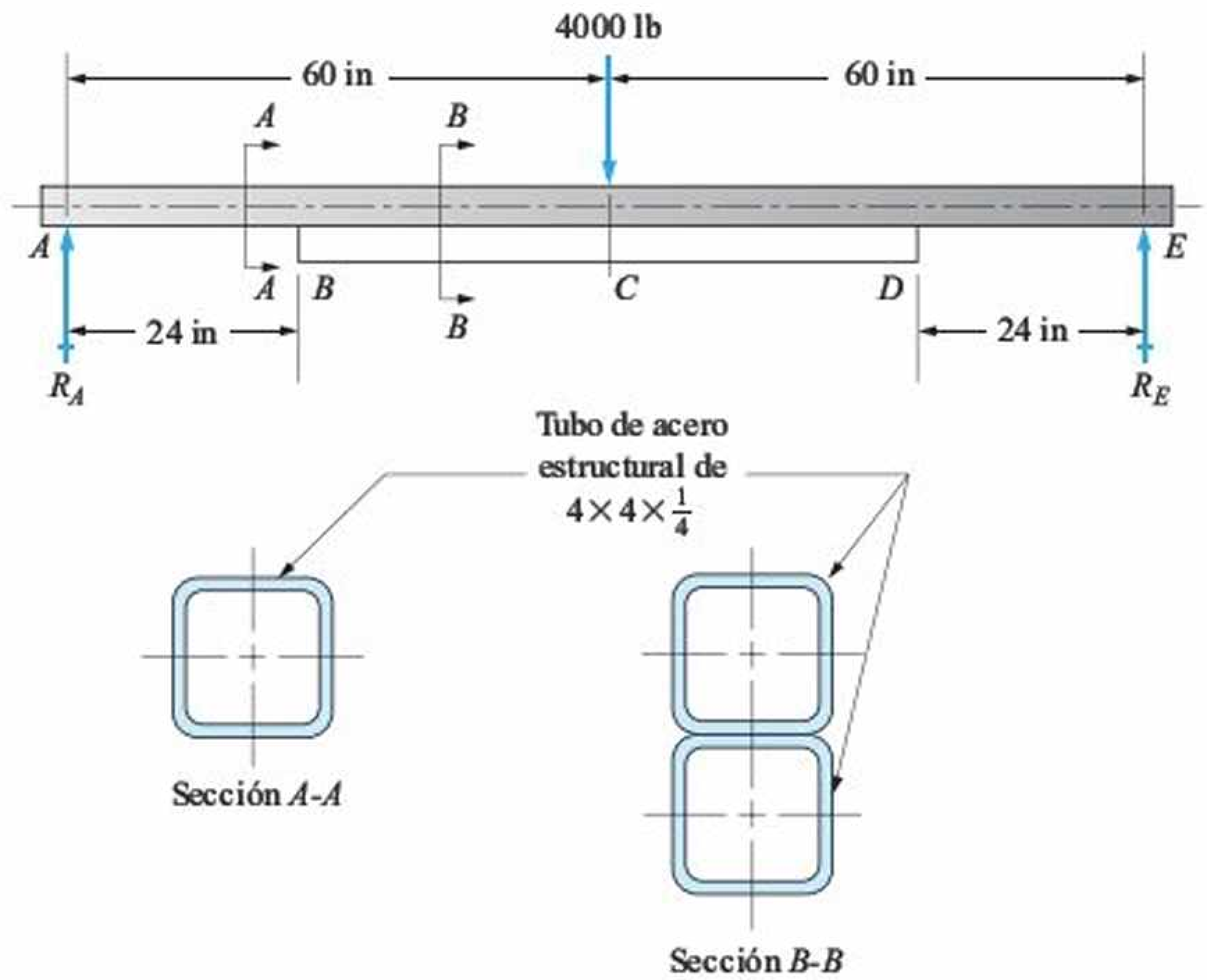


FIGURA P9–95

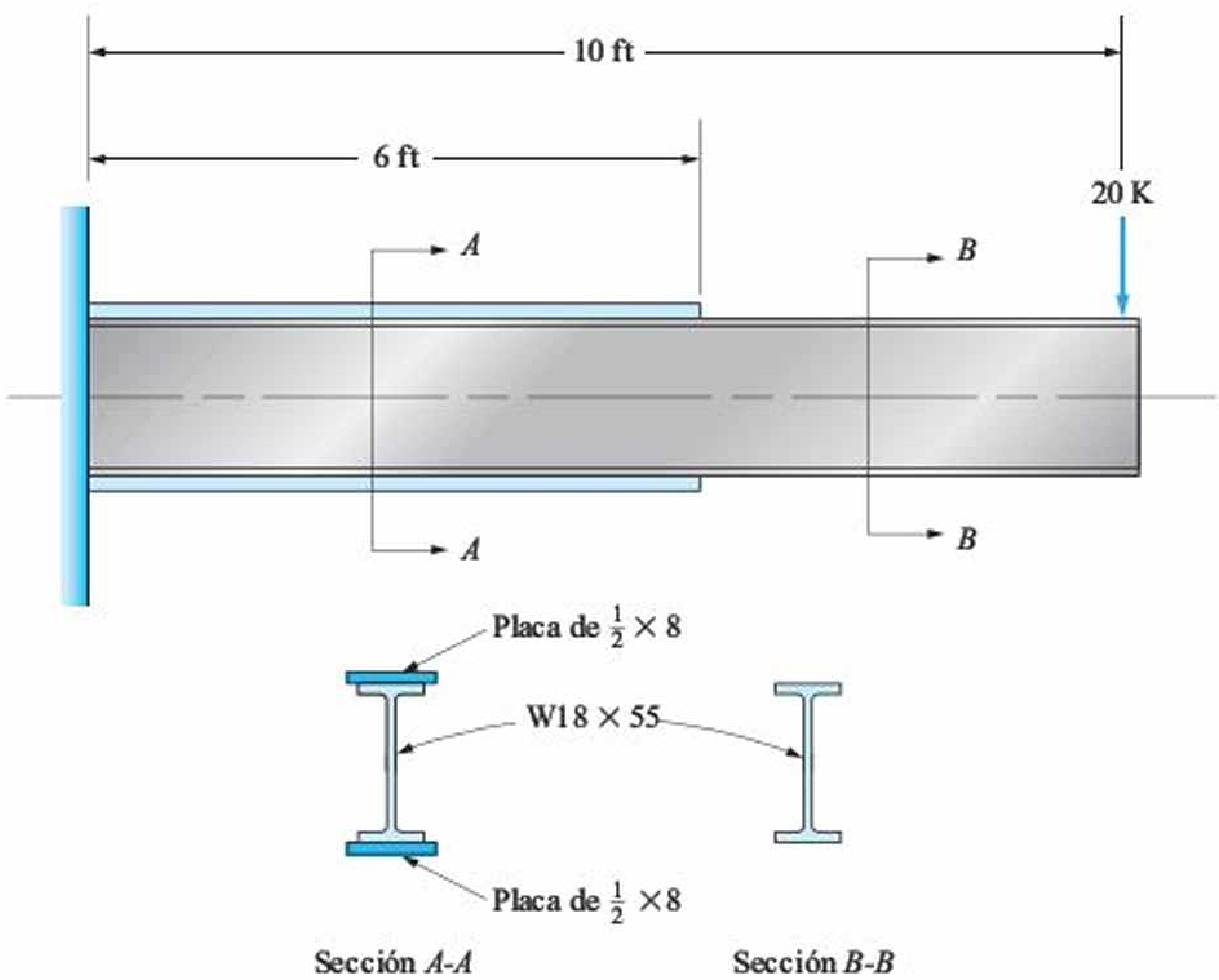


FIGURA P9–96

9–97.E El miembro superior de una grúa de caballete se armó como se muestra en la figura P9–97. Las dos piezas de los extremos son tubos estructurales de acero de $3 \times 3 \times \frac{1}{4}$. La pieza de en medio es de $4 \times 4 \times \frac{1}{2}$. Los tubos de 3 in se insertan apretadamente 10 in en el tubo de 4 in y se sueldan entre sí. Calcule la flexión a la mitad de la viga.

9–98.M Un trampolín rústico se hace clavando dos tablones de madera entre sí como se muestra en la figura P9–98. Calcule la flexión en el extremo si el clavadista ejerce una fuerza de 1.80 kN en el extremo. La madera es pino del sur núm. 2.

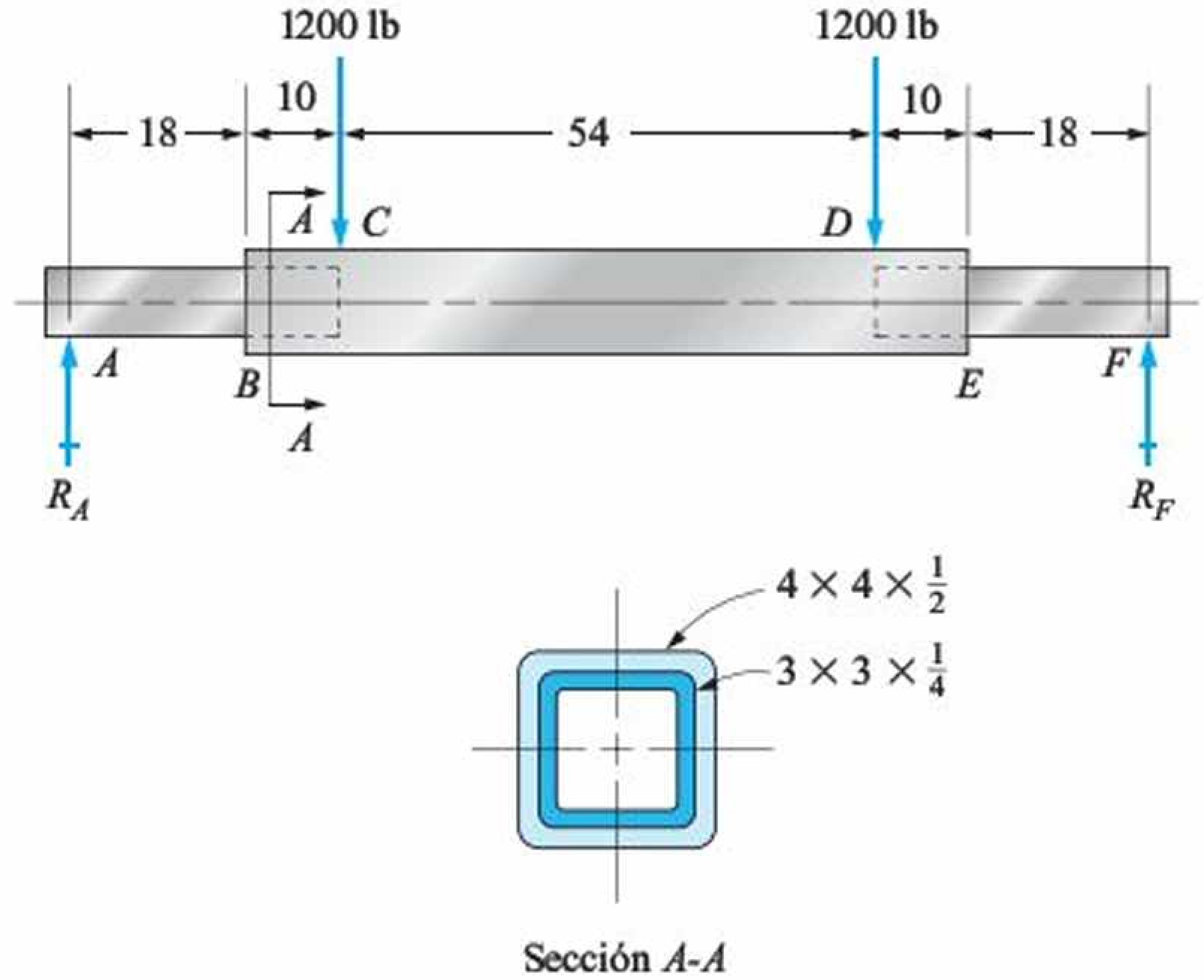


FIGURA P9–97 Viga de la grúa de caballete del problema 9–97.

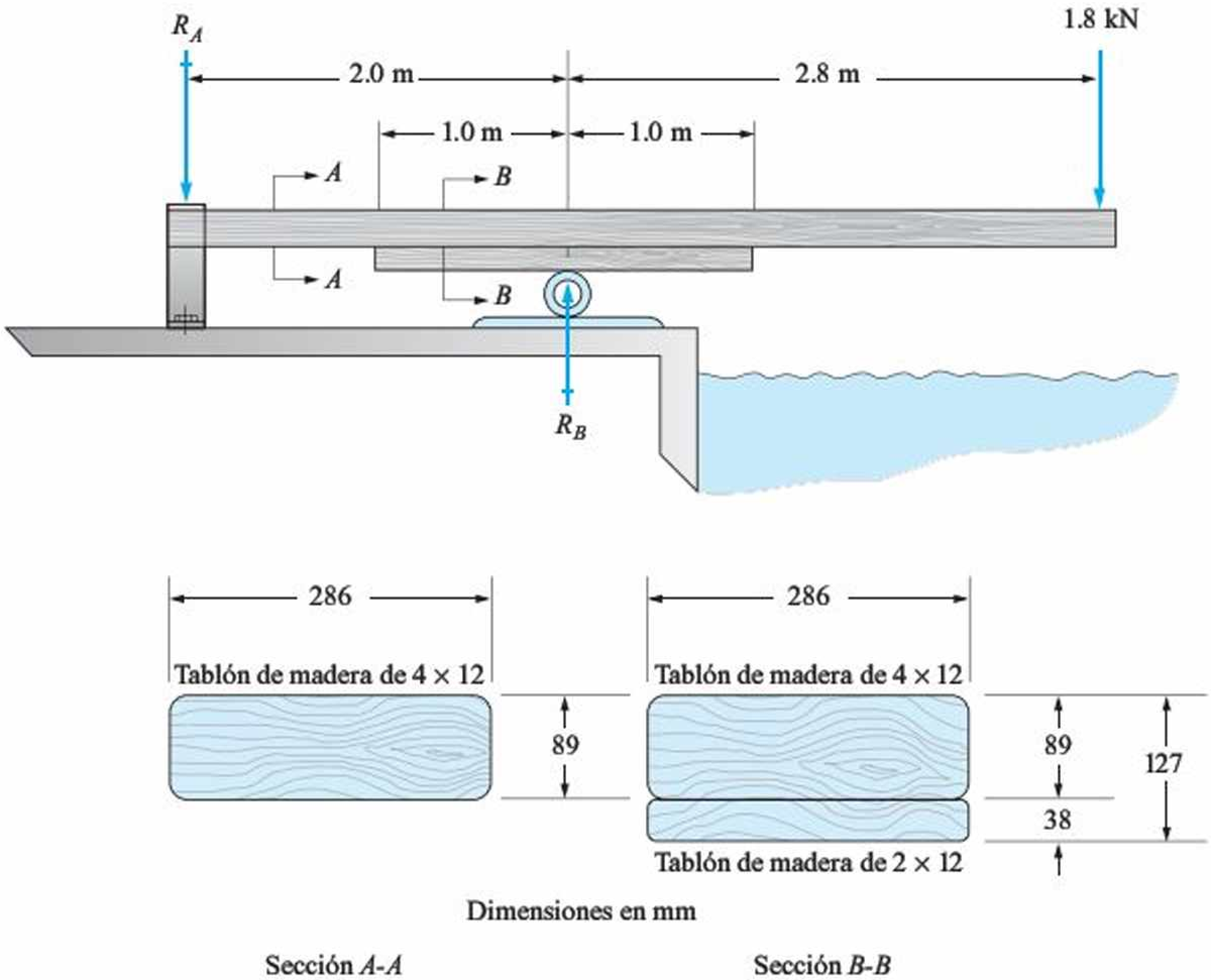


FIGURA P9–98 Trampolín del problema 9–98.

TAREAS PARA RESOLVERSE CON COMPUTADORA

1. Escriba un programa de computadora para evaluar la flexión de una viga simplemente apoyada sometida a una carga concentrada entre los apoyos utilizando las fórmulas dadas en el caso *b* del apéndice A–23. El programa debe aceptar el ingreso de datos tales como la longitud, la posición de la carga, la longitud del extremo voladizo, si lo hay, los valores de rigidez de la viga (E e I) y el punto donde se va a calcular la flexión.

Adiciones

(a) Diseñe el programa de modo que calcule la flexión en una serie de puntos que permitan trazar la curva de flexión completa.

(b) Además de calcular la flexión de la serie de puntos, haga que el programa trace la curva de flexión con un graficador o impresora.

(c) Haga que el programa calcule la flexión máxima y el punto donde ocurre.

2. Repita la tarea 1 con cualquiera de los patrones de carga y apoyos mostrados en el apéndice A–23.
3. Escriba un programa similar al de la tarea 1 para el caso *b* del apéndice A–23, pero haga que acepte dos o más cargas concentradas aplicadas en cualquier punto de la viga y calcule la flexión en puntos específicos mediante el principio de superposición.
4. Combine dos o más programas que determinen la flexión de vigas con un patrón de carga dado de modo que se pueda usar el método de superposición para calcular la flexión en cualquier punto producida por la carga combinada. Por ejemplo, combine los casos *b* y *d* del apéndice A–23 para manejar cualquier viga con una combinación de cargas concentradas y una carga uniformemente distribuida completa. O añada el caso *g* para incluir una carga distribuida a lo largo de sólo una parte de la longitud de la viga.
5. Repita las tareas de la 1 a la 4 para la viga en voladizo del apéndice A–24.
6. Escriba un programa u hoja de cálculo para determinar las fuerzas cortantes y momentos flexionantes para cualquiera de los tipos de viga estáticamente indeterminadas del apéndice A–25.

Adiciones a la tarea 6

(a) Use el modo de gráficos para trazar loa diagramas de fuerza cortante y momento flexionante completos de las vigas.

(b) Calcule el módulo de sección requerido para la sección transversal de la viga para limitar el esfuerzo flexionante a un valor especificado.

(c) Incluya una tabla de propiedades de sección de vigas de acero de patín ancho y busque tamaños de viga adecuados para soportar la carga.

(d) Suponiendo que la sección transversal de la viga será una sección circular sólida, calcule el diámetro requerido.

(e) Suponiendo que la sección transversal de la viga será un rectángulo con una relación dada de altura a espesor, calcule las dimensiones requeridas.

(f) Suponiendo que la sección transversal de la viga será un rectángulo con una altura *o* espesor dado, calcule la otra dimensión requerida.

(g) Suponga que la viga se va a hacer de madera, de forma rectangular, y calcule el área requerida de la sección transversal de la viga para limitar el esfuerzo cortante a un valor especificado. Use la fórmula de cortante especial para las vigas rectangulares del capítulo 8.

(h) Agregue el cálculo de la flexión en un punto especificado de la viga con fórmulas del apéndice A–25.

10

Esfuerzos combinados

La imagen completa y actividad

10–1 Objetivos de este capítulo

10–2 Elemento sometido a esfuerzo

10–3 Distribución de esfuerzos creada por esfuerzos básicos

10–4 Creación del elemento sometido a un esfuerzo inicial

10–5 Esfuerzos normales combinados

10–6 Esfuerzos normales y cortantes combinados

10–7 Ecuaciones para determinar esfuerzos en cualquier dirección

10–8 Esfuerzos máximos

10–9 Círculo de Mohr para determinar esfuerzo

10–10 Condición de esfuerzo en planos seleccionados

10–11 Caso especial en el que los dos esfuerzos principales tienen el mismo signo

10–12 Uso de las rosetas de medición de deformación para determinar esfuerzos principales

La imagen completa

Esfuerzos combinados

Mapa de análisis

- En los capítulos precedentes el objetivo fue que adquiriera las habilidades necesarias para analizar y diseñar miembros sometidos a carga y a un tipo de esfuerzo único. Se incluyeron los siguientes esfuerzos:
  - Esfuerzo de tensión directo
  - Esfuerzo de compresión directo
  - Esfuerzo cortante directo
  - Esfuerzo de apoyo
  - Esfuerzo cortante torsional
  - Esfuerzo flexionante

  También se consideraron las deformaciones en los casos individuales.
- En este capítulo consideraremos casos en los que existe más de un tipo de esfuerzo en el miembro al mismo tiempo. En primer lugar analizamos combinaciones especiales de esfuerzos que ocurren con frecuencia en máquinas, estructuras y vehículos. Consideraremos lo siguiente:
  - Esfuerzos normales combinados producidos por flexión, tensión directa y compresión.
  - Esfuerzos normales y cortantes combinados producidos por flexión, cargas axiales y torsión.
- El análisis satisfactorio de los esfuerzos combinados requiere que usted sea capaz de visualizar la distribución del esfuerzo en el material del que está hecho el miembro sometido a carga. El procedimiento básico que utilizamos es visualizar la distribución de esfuerzo producido por los componentes de la carga total que pueda ser analizada con los mismos procedimientos que se desarrollaron en capítulos previos. Luego combinamos estos componentes en puntos específicos de la sección transversal del miembro donde es probable que ocurran.
- Existen muchos otros casos en los que no sabrá la dirección de los esfuerzos máximos. Tendrá que realizar cualquier análisis posible con los datos dados y luego utilizar técnicas adicionales para calcular el esfuerzo máximo y determinar la dirección en la que actúa.
- Es probable que otros casos requieran calcular el esfuerzo en una dirección particular que pudiera diferir de aquélla en la cual pueda calcular convenientemente la distribución de esfuerzo.

Actividad Busque a su alrededor ejemplos de miembros que soporten carga sometidos a esfuerzos combinados.

- Trate de encontrar vigas sometidas a flexión y a esfuerzos de tensión y compresión axiales.
- Las flechas transmisoras de potencia que llevan engranes, poleas o ruedas dentadas en general transmiten un par de torsión y también experimentan fuerzas de flexión (figura 1–3).
- La maquinaria de construcción y agrícola con frecuencia contienen miembros sometidos a esfuerzos flexionantes, axiales y torsionales al mismo tiempo [figura 1–1(d)]
- Las plumas de grúa que se extienden hacia arriba del piso de la caja de un camión se someten a flexión y compresión axial combinadas.
- Los cuadros de bicicleta y motocicleta, palancas, postes de asiento y otro componentes soportan combinaciones complejas de fuerzas, momentos y pares de torsión [figura 1–1(b)]
- Los chasises automotrices, miembros de suspensión, varillajes de dirección y componentes del tren motriz experimentan varios tipos de carga durante diferentes condiciones

de operación tales como manejo tranquilo en línea recta, virajes, frenado, aceleración y manejo en carreteras con baches o terreno difícil en campo traviesa.

- Los componentes interiores y de la carrocería de automóviles tales como mecanismos de ajuste de asientos, elevadores de ventanas, sistemas de limpiaparabrisas, bisagras y cerrojos de puertas, cofres o cajuelas experimentan esfuerzos combinados.
- Las aeronaves y los vehículos espaciales emplean la construcción de revestimiento esforzado con miembros de configuraciones especiales que distribuyen las cargas a través de la estructura y que producen estructuras ligeras muy optimizadas [Figura 1–1(e)]
- Las vigas estructurales de edificios y puentes sometidas a cargas que actúan fuera de su centro experimentan tanto esfuerzos de flexión como de torsión (figura 10–3).
- Los componentes de muebles como sillas, mesas y gabinetes de equipo audiovisual en general soportan compresión y flexión axiales combinadas.
- Las señales viales utilizadas en carreteras no sólo tienen que soportar su propio peso, sino también intensas fuerzas del viento, ya que sus postes de sustentación se ven sometidos a esfuerzos flexionantes, de compresión axial y torsionales combinados.

FIGURA 10–1
(Fuente: Pearson Education/PH Collage.)



FIGURA 10–2
(Fuente: Getty Images, Inc.—Taxi.)



FIGURA 10–3
(Fuente: Omni–Photo Communications, Inc.)



- Los armazones y cubiertas de maquinaria industrial, robots, motores, bombas, máquinas-herramienta, dispositivos de medición y productos de consumo en general se ven sometidos a complejos campos de esfuerzo que pueden ser analizados con la aplicación de fórmulas de análisis tradicionales (figura 10–2).

En este capítulo aprenderá métodos de análisis de estos tipos de miembros sometidos a cargas. En primer lugar considerará varios casos especiales que comúnmente se presentan en los que se pueden aplicar las combinaciones, adaptaciones y extensiones de las técnicas de análisis de esfuerzo aprendidas en este libro. Esto es, se considerarán combinaciones de esfuerzos normales de tensión o compresión axiales directos, esfuerzos flexionantes, esfuerzo cortante directo, esfuerzos cortantes verticales. En seguida se aplica y desarrolla un método más general de combinar esfuerzos que es útil para geometrías de componentes y carga más complejas.

En el método general, comenzará con el conocido sistema de esfuerzo en un punto particular, donde puede existir cualquier combinación de esfuerzos normales (de tensión o compresión) y esfuerzos cortantes. El elemento conocido sometido a esfuerzo se puede determinar mediante análisis directo, análisis de esfuerzo experimental o análisis del elemento finito asistido por computadora. Con el elemento sometido a esfuerzo conocido aprenderá a calcular los esfuerzos (normales) principales máximo y mínimo, el esfuerzo cortante máximo y la orientación del elemento sometido a esfuerzo en el cual ocurren dichos esfuerzos. En algunos análisis de esfuerzo, es útil calcular un esfuerzo combinado adicional, llamado esfuerzo de *von Mises*, a partir de los esfuerzos principales. La definición del esfuerzo de von Mises se presentará más adelante.

Estos esfuerzos se comparan con la resistencia inherente del material del cual está hecho el miembro para garantizar que es seguro y que funcionará conforme a los requerimientos esperados. La resistencia de material apropiadas pueden incluir la resistencia máxima a tensión, la resistencia máxima a compresión, la resistencia máxima a cortante, la resistencia a la cedencia por tensión, la resistencia a la cedencia por compresión, la resistencia a la cedencia por cortante, y la resistencia a cargas repetidas (fatiga).

Después de llevar cursos, tales como diseño de elementos de máquinas, análisis del elemento finito, análisis experimental de esfuerzos, diseños estructurales aeroespaciales, diseño de acero estructural, diseño de estructuras de concreto o diseño de estructuras de madera, estos métodos de análisis de esfuerzo se aplican a casos aún más complejos. Además, los cursos avanzados de elasticidad, plasticidad, materiales compuestos, ciencia de los materiales, placas y cascos, y mecánica de fracturas ampliarán su dominio de la gran variedad de aplicaciones que encontrará en su carrera.

10–1 OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

Al término de este capítulo, usted podrá:

1. Reconocer casos en los que ocurren esfuerzos combinados.
2. Representar la condición de esfuerzo en un elemento sometido a esfuerzo.
3. Reconocer la importancia de visualizar la distribución del esfuerzo en la sección transversal de un miembro sometido a carga y considerar la condición de esfuerzo en un punto.
4. Reconocer la importancia de los diagramas de cuerpo libre de componentes de estructuras y mecanismos en el análisis de esfuerzos combinados.
5. Calcular el esfuerzo normal resultante de la aplicación de esfuerzo flexionante con esfuerzos de tensión o compresión directos mediante el principio de superposición.
6. Evaluar el factor de diseño para esfuerzo normal combinado, incluidas las propiedades de materiales isotrópicos o no isotrópicos.

7. Optimizar el perfil y dimensiones del miembro sometido a carga con respecto a la variación del esfuerzo en él y sus propiedades de resistencia.
8. Analizar miembros sometidos únicamente a flexión y torsión combinadas, mediante el cálculo del esfuerzo cortante máximo resultante.
9. Utilizar apropiadamente la teoría de falla por esfuerzo cortante máximo.
10. Aplicar la técnica de par de torsión equivalente para analizar miembros sometidos a flexión y torsión combinadas.
11. Considerar los factores de concentración de esfuerzo cuando se utiliza una técnica de par de torsión equivalente.
12. Comprender el desarrollo de las ecuaciones de esfuerzos combinados, con las que se puede calcular lo siguiente:
    a. Los esfuerzos principales máximo y mínimo
    b. La orientación del elemento principal sometido a esfuerzo
    c. El esfuerzo cortante máximo en un elemento
    d. La orientación del elemento sometido a esfuerzo cortante máximo
    e. El esfuerzo normal que actúa junto con el esfuerzo cortante máximo
    f. Los esfuerzos normal y cortante que ocurren el elemento orientado en cualquier dirección
13. Construir el círculo de Mohr para esfuerzo biaxial.
14. Interpretar la información disponible en el círculo de Mohr sobre la condición de esfuerzo en un punto orientado en cualquier dirección.
15. Utilizar los datos del círculo de Mohr para trazar el elemento sometido al esfuerzo principal y el elemento sometido al esfuerzo cortante máximo.

10–2 ELEMENTO SOMETIDO A ESFUERZO

En general, esfuerzo combinado se refiere a casos en que dos o más tipos de esfuerzo actúan en un punto dado al mismo tiempo. Los esfuerzos componentes pueden ser *normales* (es decir, de tensión o compresión) o esfuerzos *cortantes*.

Cuando un miembro de carga se somete a dos o más clases diferentes de esfuerzos, la primera tarea es calcular el esfuerzo producido por cada componente. Luego se decide sobre qué punto del miembro soporta la máxima *combinación* de esfuerzos y el análisis del esfuerzo combinado en dicho punto se completa. En algunos casos especiales, se desea conocer la condición de esfuerzo en un punto dado haciendo caso omiso de si es no el punto de esfuerzo máximo. Algunos ejemplos serían puntos cercanos a soldaduras en una estructura fabricada, situados a lo largo de la veta de un miembro de madera o cercanos a un punto de conexión entre miembros.

Con el punto de interés identificado se determina la condición de esfuerzo en dicho punto con las relaciones de esfuerzo clásicas presentadas en este libro, si es posible. En ocasiones, por la complejidad de la geometría del miembro o del patrón de carga, no es posible completar un análisis de esfuerzo confiable completo por medio de cálculos. En esos casos se pueden emplear el análisis experimental de esfuerzo en los que medidores de deformación, modelos fotoelásticos o recubrimientos sensibles a la deformación aportan datos experimentales. Asimismo, con la ayuda de técnicas de análisis de esfuerzo del elemento finito, la condición de esfuerzo se determina con análisis basados en la computadora.

Entonces, después de usar uno de estos métodos, deberá disponer de la información requerida para construir el *elemento sometido a esfuerzo* mostrado en la figura 10–4. Se supone que el elemento es infinitesimalmente pequeño y que está alineado con las direcciones conocidas en el miembro que se va a analizar. El elemento completo, mostrado, podría estar sometido a un esfuerzo normal (de tensión o compresión) que actúa cada par de caras en

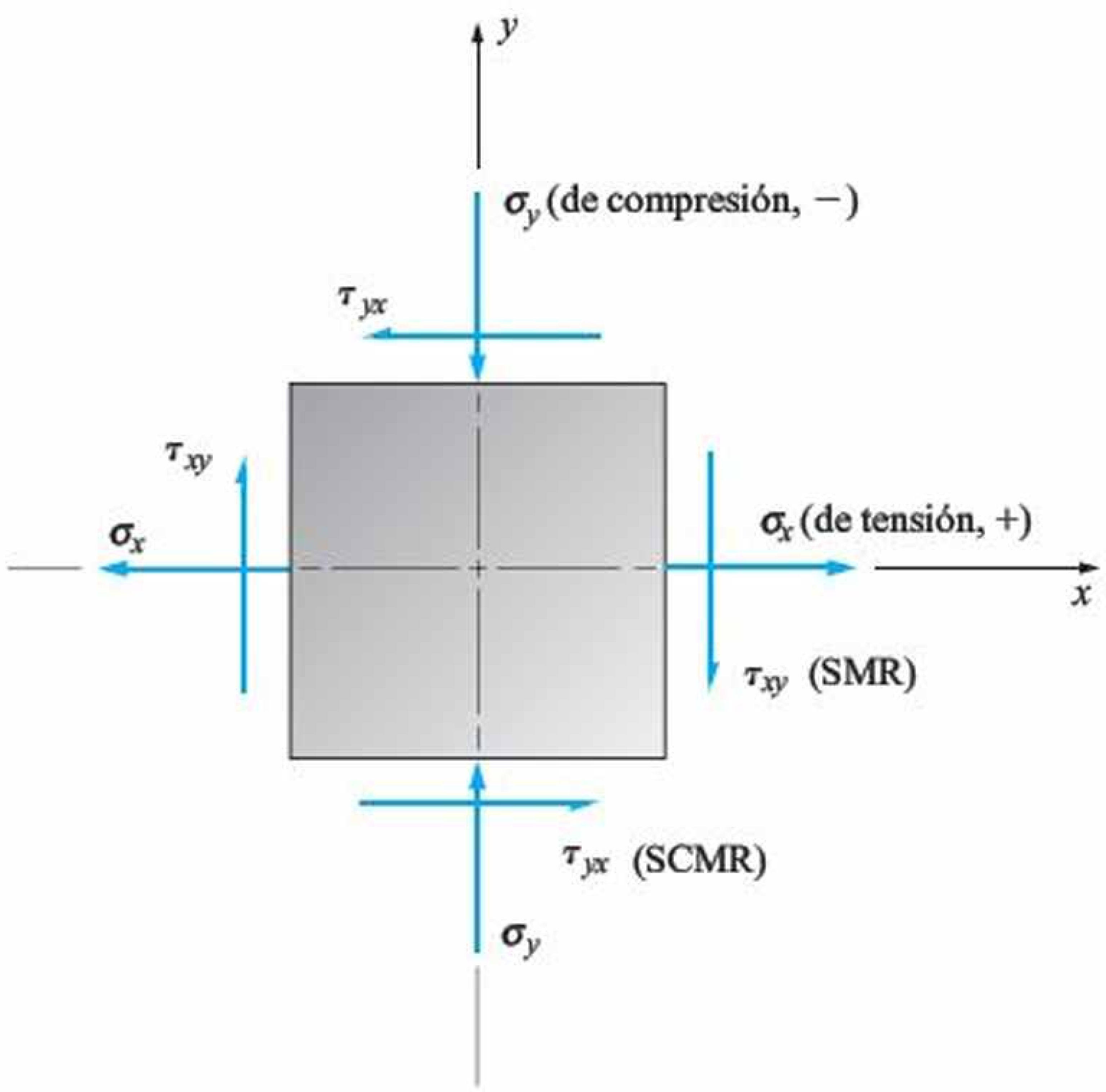


FIGURA 10–4 Elemento sometido a esfuerzo completo.

direcciones mutualmente perpendiculares, generalmente designadas como ejes x y y. Como su nombre *esfuerzo normal* lo implica, estos esfuerzos actúan normales (perpendiculares) a las caras. Como se muestra, σ_x está alineado con el eje x y es un esfuerzo de tensión que tiende a jalar el elemento para romperlo. Recuerde que los esfuerzos de tensión se consideran positivos. Entonces σ_y resulta ser de compresión, puesto que tiende a aplastar el elemento. Los esfuerzos de compresión se consideran negativos.

Además, puede haber esfuerzos cortantes actuando a lo largo de las caras del elemento como si cada una estuviera siendo desprendida del material adyacente. Recuerde que cuando se analizaron los esfuerzos cortantes, se vio que en cualquier elemento en equilibrio existen cuatro esfuerzos cortantes de igual magnitud. En dos caras opuestas cualquiera de los esfuerzos cortantes actúan en direcciones opuestas, por lo que crean un *par* que tiende a girar el elemento. Entonces, debe existir un par de esfuerzos cortantes en las caras adyacentes que producen un par opuestamente dirigido para que el elemento esté en equilibrio. Nos referiremos a cada *par* de cortantes con una notación de subíndice doble. Por ejemplo, τ_{xy} se refiere al esfuerzo cortante que actúa perpendicular al eje x y paralelo al eje x. A la inversa, τ_{yx} actúa perpendicular al eje y y paralelo al eje x. En lugar de establecer una convención para los signos de los esfuerzos cortantes, nos referiremos a ellos como *en el sentido de las manecillas del reloj* (SMR) o *en sentido contrario al de las manecillas del reloj* (SCMR) según tiendan a hacer girar al elemento sometido a esfuerzo.

10–3 DISTRIBUCIÓN DE ESFUERZOS CREADA POR ESFUERZOS BÁSICOS

Las figuras 10–5, 10–6 y 10–7 muestran esfuerzos de tensión directa, compresión directa y flexionantes en las que se desarrollaron esfuerzos normales. Es importante conocer la distribución de esfuerzo en el miembro, como se muestra en las figuras. También se muestran elementos sometidos a estas clases de esfuerzos. La lista siguiente contiene las fórmulas principales para calcular el valor de estos esfuerzos.

Tensión directa: (vea la figura 10–5)	$\sigma = \dfrac{F}{A}$	Uniforme en toda el área (capítulos 1, 3)
Compresión directa: (vea la figura 10–6)	$\sigma = \dfrac{-F}{A}$	Uniforme en toda el área (capítulos 1, 3)

FIGURA 10–5
Distribución del esfuerzo normal en el caso de tensión directa.

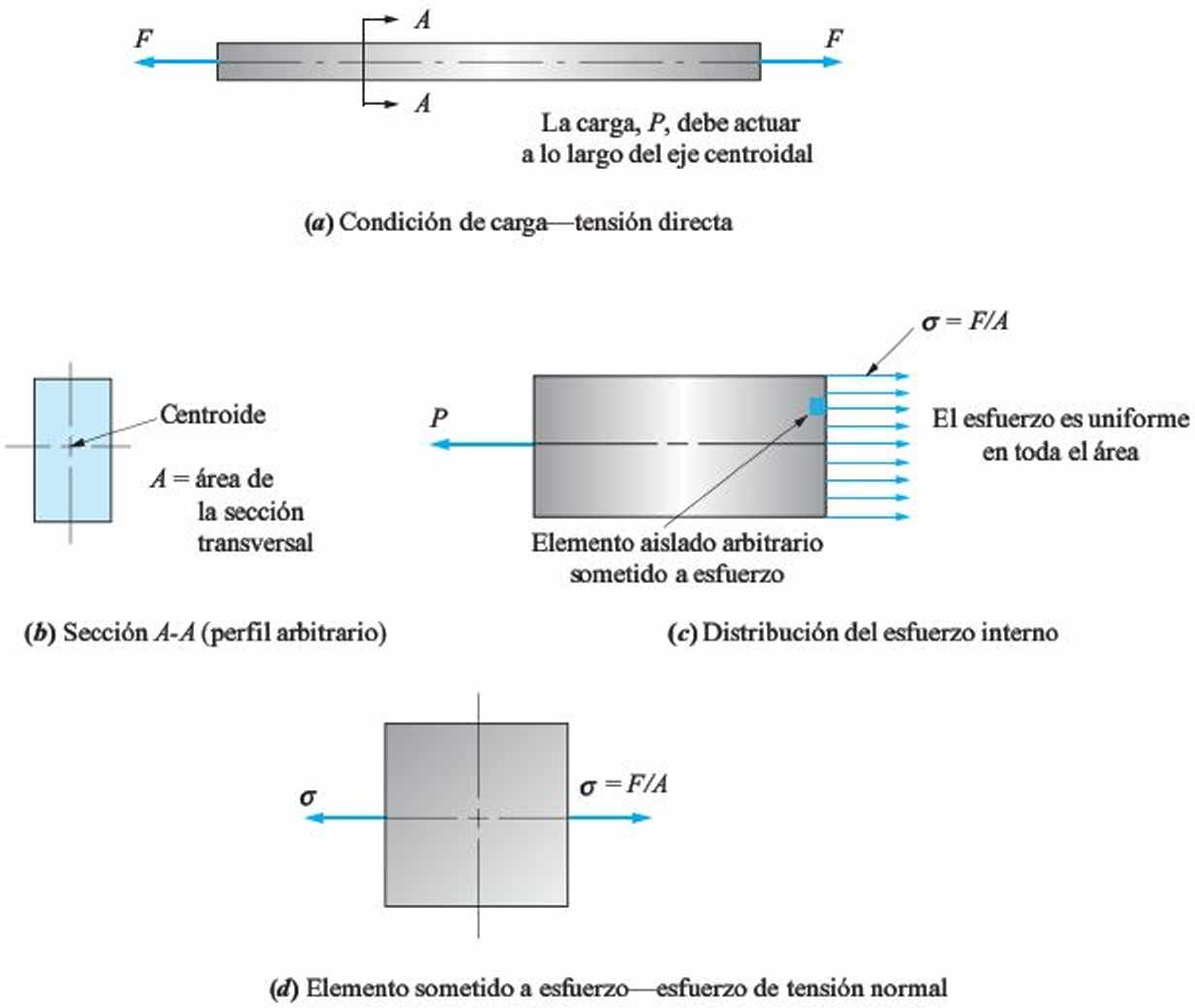
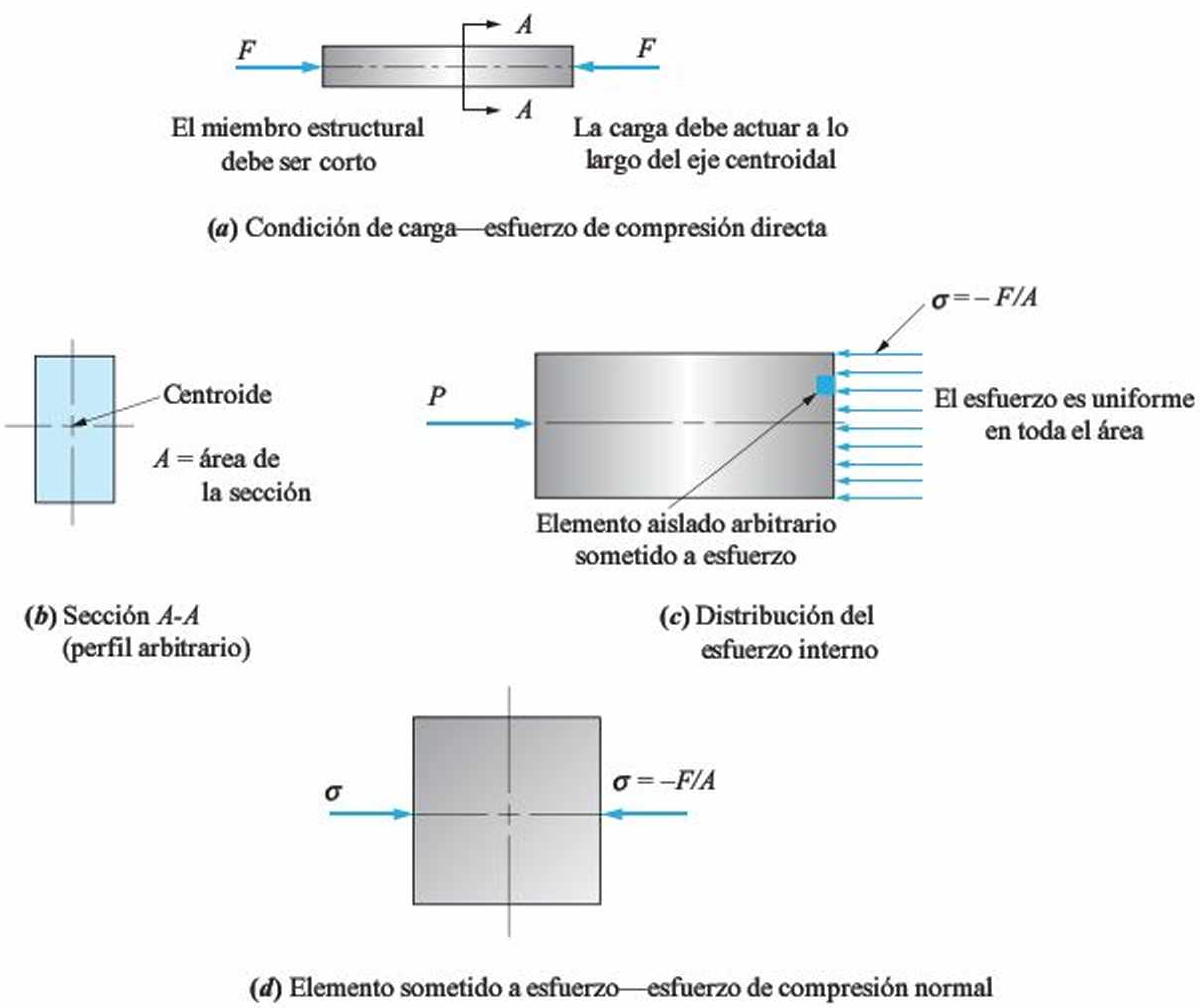
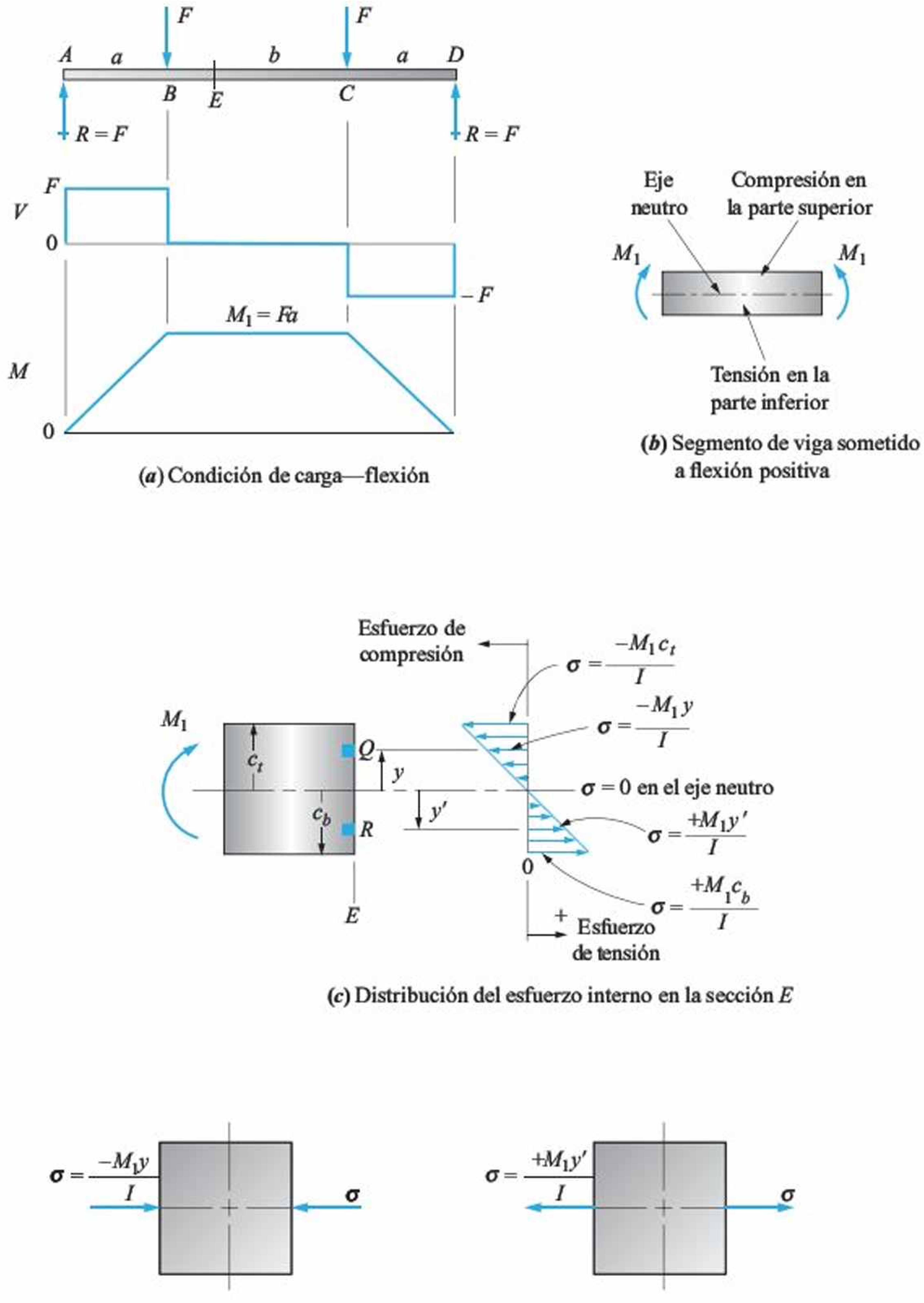


FIGURA 10–6
Distribución del esfuerzo normal en el caso de compresión directa.



Esfuerzo producido por flexión: (vea la figura 10–7)	$\sigma_{\text{máx}} = \pm\dfrac{Mc}{I} = \dfrac{M}{S}$	Esfuerzo máximo en las superficies externas (capítulo 7)
	$\sigma = \pm\dfrac{My}{I}$	Esfuerzo flexionante en cualquier punto y (capítulo 7)

FIGURA 10–7 Distribución del esfuerzo normal en el caso de flexión.



(*a*) Condición de carga—flexión

(*b*) Segmento de viga sometido a flexión positiva

(*c*) Distribución del esfuerzo interno en la sección E

(*d*) Elemento Q sometido a esfuerzo

(*e*) Elemento R sometido a esfuerzo

Las figuras 10–8, 10–9 y 10–10 muestran tres casos en los que se producen esfuerzos cortantes junto con las distribuciones de esfuerzo y los elementos sometidos a estos tipos de esfuerzo. La lista siguiente contiene las fórmulas principales utilizadas para calcular esfuerzos cortantes.

Cortante directo: (vea la figura 10–8)	$\tau = \dfrac{F}{A_s}$	Uniforme en toda el área (capítulo 3)
Cortante torsional: (vea la figura 10–9)	$\tau_{\text{máx}} = \dfrac{Tc}{J}$	Máximo en la superficie externa (capítulo4)
	$\tau = \dfrac{Tr}{J}$	Cortante torsional en cualquier radio (capítulo 4)
Esfuerzos cortantes en vigas: (vea la figura 10–10)	$\tau = \dfrac{VQ}{It}$	(Capítulo 8)

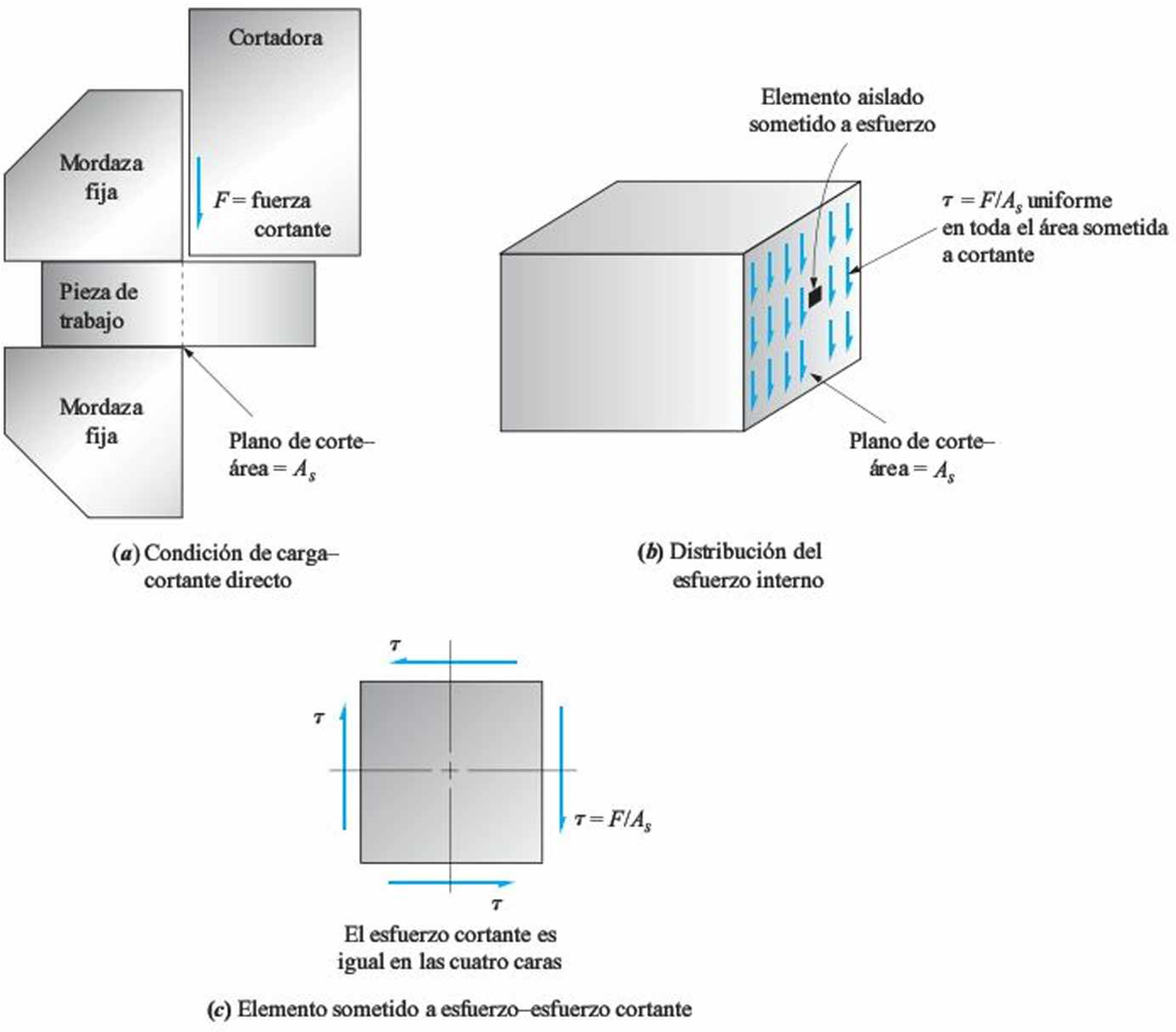
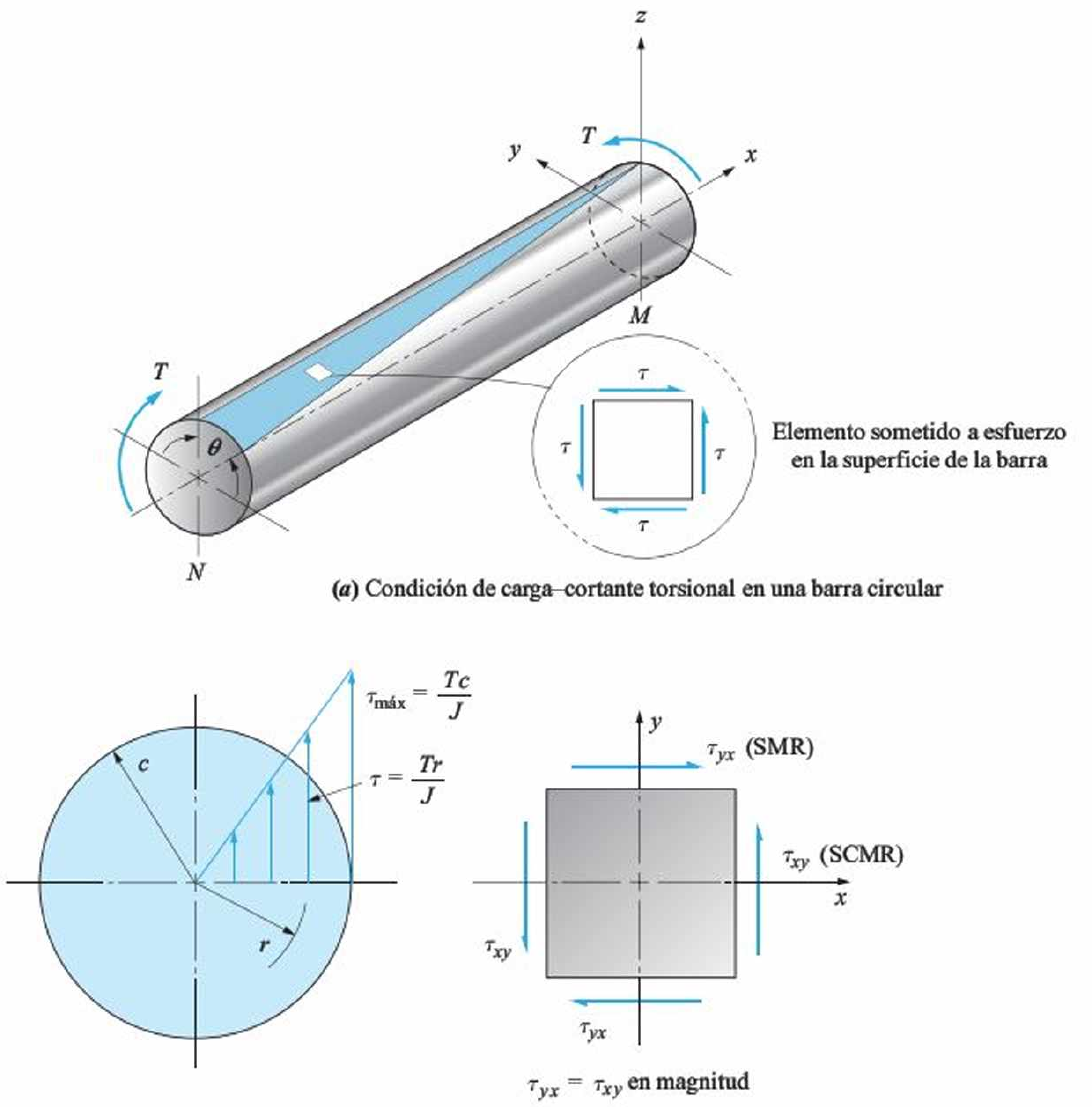


FIGURA 10–8 Distribución del esfuerzo cortante en el caso de cortante directo.

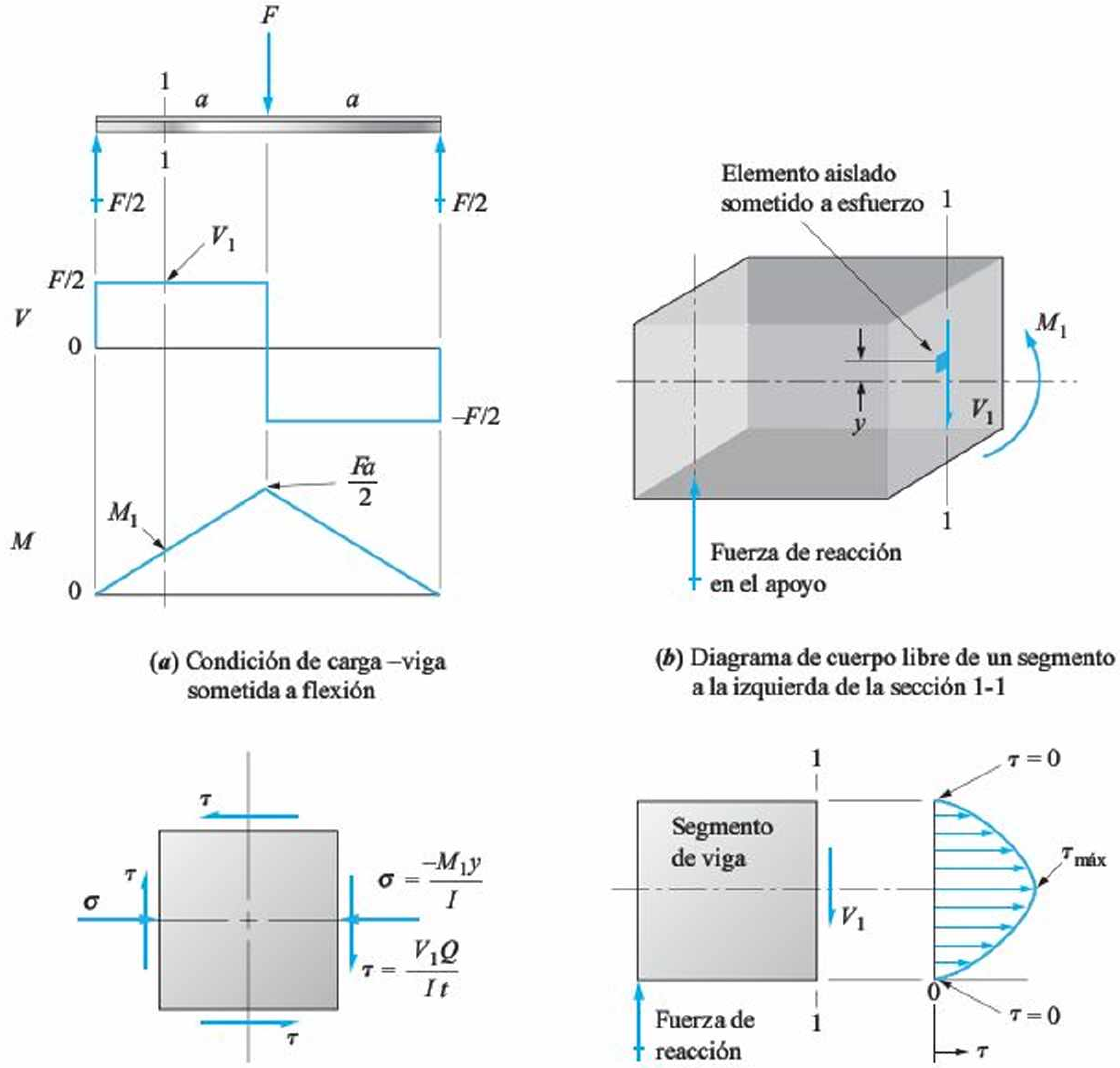
FIGURA 10–9
Distribución del esfuerzo cortante torsional en una flecha circular sólida.



(*b*) Distribución del esfuerzo en una sección transversal

(*c*) Elemento sometido a esfuerzo–cortante torsional

FIGURA 10–10
Distribución del esfuerzo cortante en una viga.



(*a*) Condición de carga –viga sometida a flexión

(*b*) Diagrama de cuerpo libre de un segmento a la izquierda de la sección 1-1

(*c*) Elemento sometido a esfuerzo

(*d*) Distribución del esfuerzo cortante en la sección 1-1

10–4 CREACIÓN DEL ELEMENTO SOMETIDO A UN ESFUERZO INICIAL

Un objetivo importante de este capítulo es desarrollar relaciones con las que se puedan determinar los *esfuerzos principales máximos* y el *esfuerzo cortante máximo*. Antes de que esto se logre, es necesario conocer el estado de esfuerzo en un punto de interés en alguna orientación. En esta sección demostramos cómo se determina la condición de esfuerzo inicial mediante cálculo directo con las fórmulas de los esfuerzos básicos.

La figura 10–11 muestra una palanca en L empotrada en una superficie rígida con una carga P dirigida hacia abajo aplicada en su extremo libre. El segmento más corto al frente de la palanca se carga como si fuera una viga en voladizo, como se muestra en la figura 10–12(a), con el momento en su extremo izquierdo resistido por el otro segmento de la palanca.

La figura 10–12(b) muestra el segmento más largo como un diagrama de cuerpo libre. Al frente, la fuerza P y el par de torsión T son las reacciones a la fuerza y al momento que actúan en el extremo izquierdo del segmento más corto en (a). Por lo tanto, en la parte de atrás, debe haber las reacciones M, P y T para mantener el equilibrio. Observe con cuidado las direcciones de M, P y T.

En el segmento más corto en (a): P y M_1 actúan en el plano y–z

Esta parte de la palanca actúa como viga en voladizo simple con el momento flexionante máximo en su extremo izquierdo con un valor de $M_1 = P{\cdot}a$.

En el segmento más largo en (b): P y M_2 actúan en el plano x–z
T actúa en el plano y–z y produce torsión con respecto al eje x

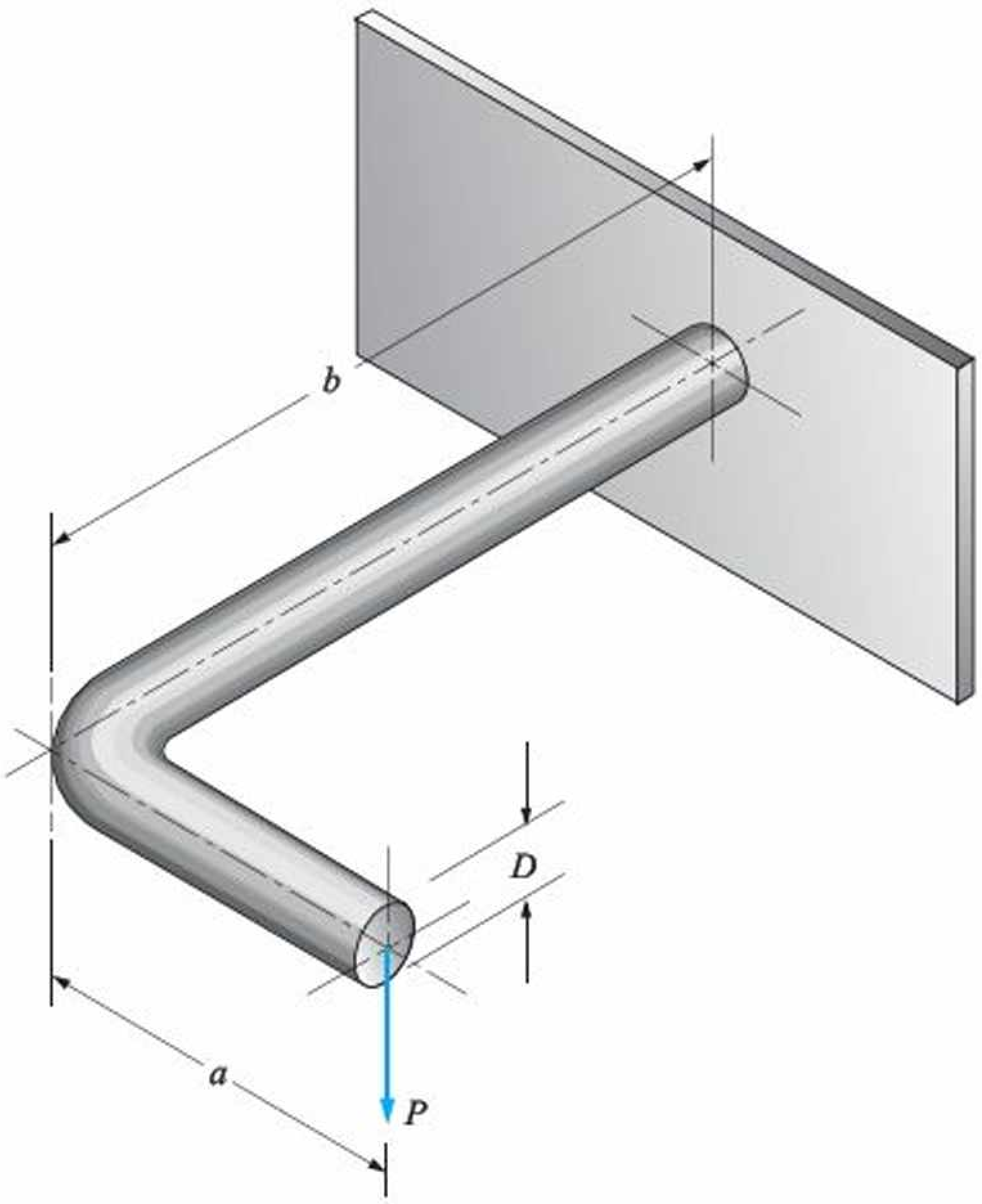


FIGURA 10–11 Palanca en L que ilustra los esfuerzos combinados.

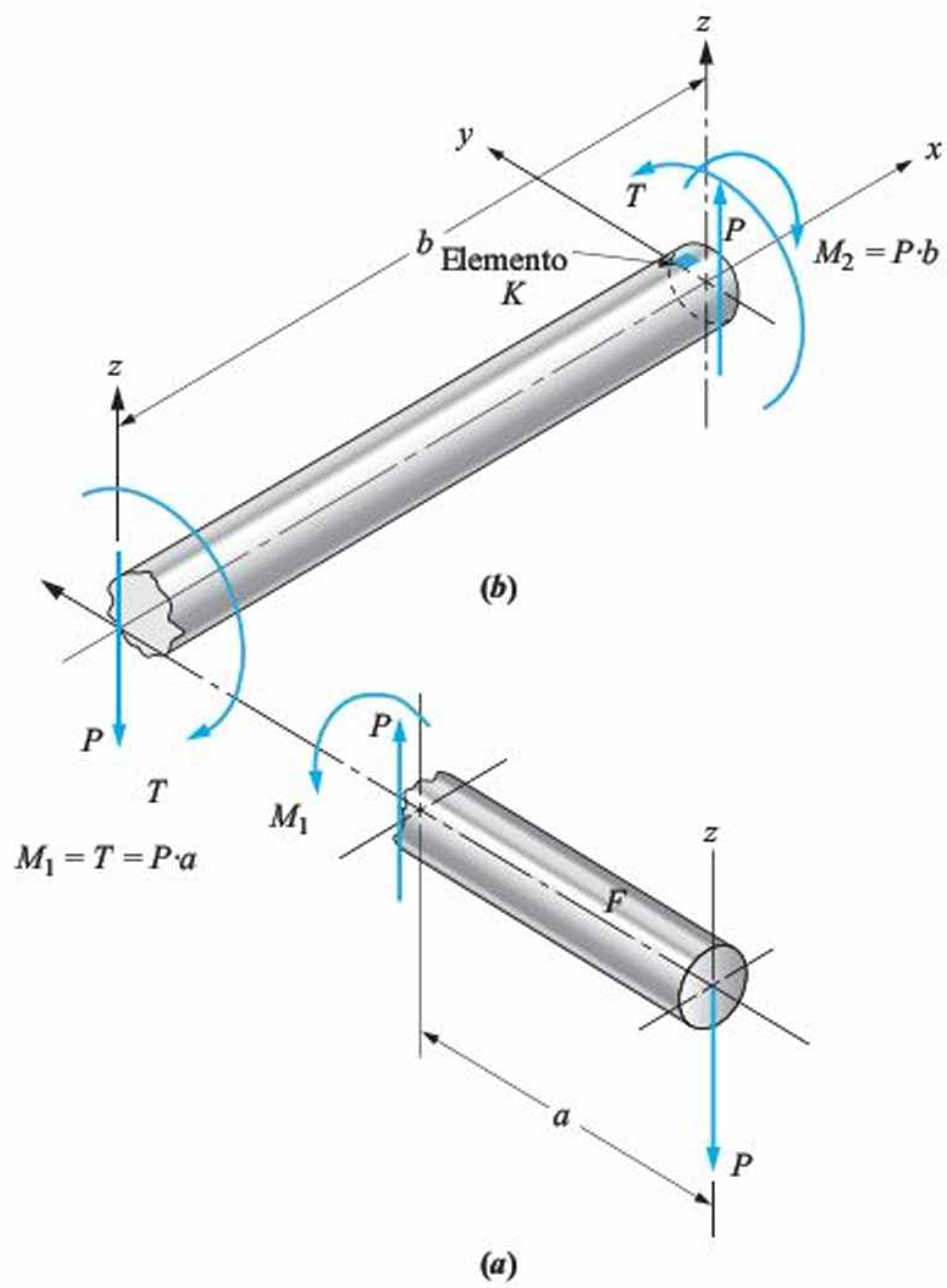


FIGURA 10–12 Diagramas de cuerpo libre de segmentos de una palanca acodada. (a) Segmento corto de la palanca. (b) Segmento largo de la palanca.

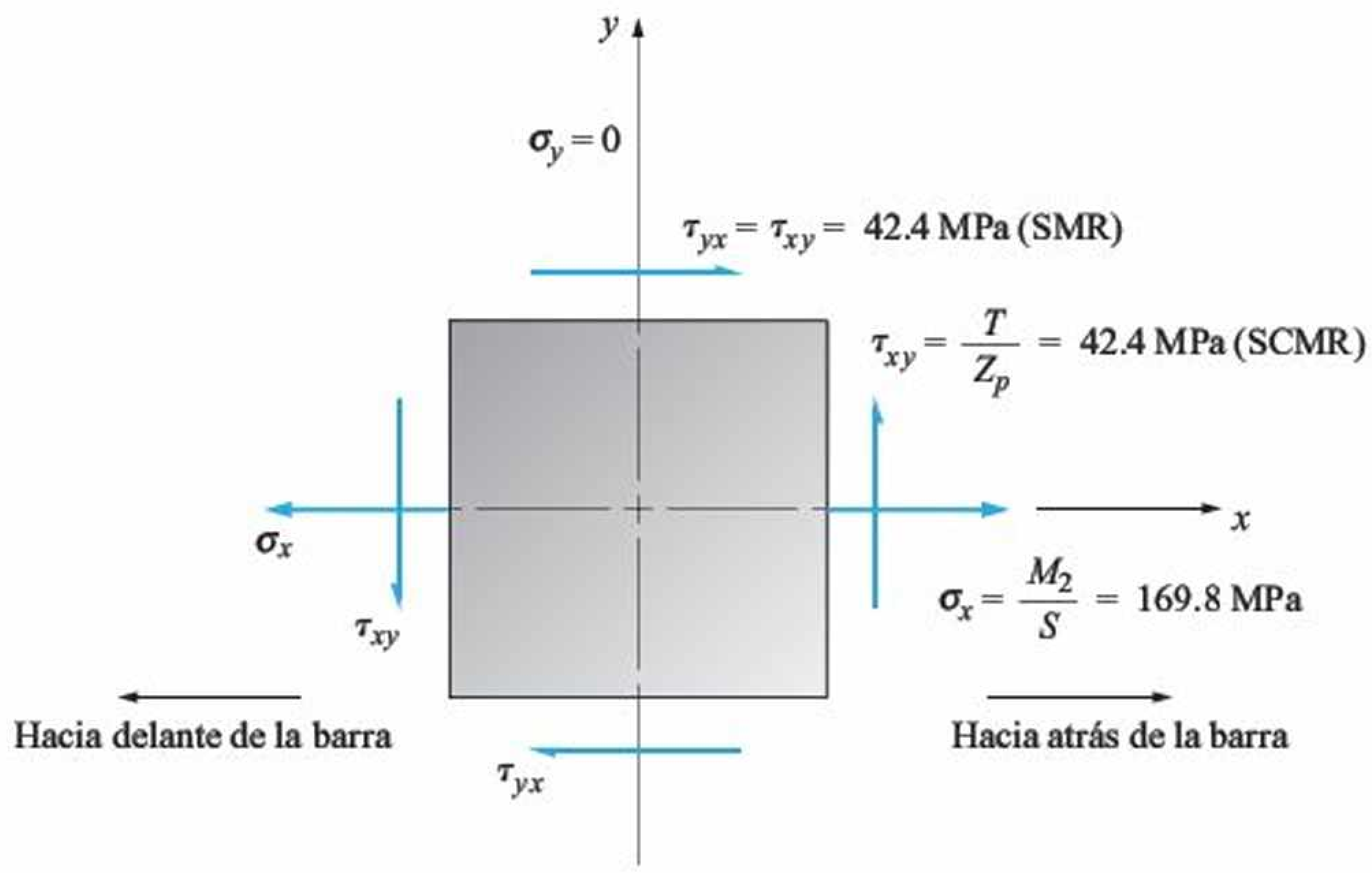


FIGURA 10–13 Esfuerzo en el elemento K de la figura 10–12 con los datos del problema de ejemplo 10–1.

Esta parte de la palanca actúa como una viga en voladizo con torsión agregada. La magnitud del par de torsión, T, es igual a $M_1 = P{\cdot}a$ y es uniforme a todo lo largo del segmento más largo de la barra. El valor de la magnitud de M_2 es $M_2 = P{\cdot}b$. Es el valor máximo en el extremo de la barra donde está rígidamente unida a la placa de soporte.

La barra se somete a una condición de esfuerzo combinado con las siguientes clases de esfuerzo:

Esfuerzo flexionante producido por el momento flexionante

Esfuerzo cortante torsional producido por el par de torsión

Esfuerzo cortante producido por la fuerza cortante vertical

Podemos concluir que uno de los puntos donde es probable que el esfuerzo alcance su valor máximo es en la cara superior del segmento largo cerca del apoyo. Llamado elemento K en la figura 10–12(b), se vería sometido al esfuerzo flexionante de tensión máximo y al esfuerzo cortante torsional máximo, pero el esfuerzo cortante vertical sería cero porque actúan en la cara externa alejado del eje neutro.

El elemento K se ve sometido entonces a un esfuerzo combinado, como se muestra en la figura 10–13. El esfuerzo normal de tensión, σ_x, actúa paralelo al eje x a lo largo de la cara superior de la barra. El par de torsión aplicado tiende a producir un esfuerzo cortante, τ_{xy} en la dirección y negativa en la cara hacia el frente de la barra y en la dirección y positiva con la cara hacia atrás. Juntos crean un par en sentido contrario a las manecillas del reloj en el elemento. El elemento se completa mostrando los esfuerzos cortantes τ_{xy} que producen un par en sentido de las manecillas del reloj en las demás caras.

El problema del ejemplo 10–1 incluye cálculos ilustrativos de los valores de los esfuerzos mostrados en la figura 10–13.

Problema de ejemplo 10–1 La figura 10–11 muestra una palanca en L que soporta una fuerza dirigida hacia abajo en su extremo. Calcule la condición de esfuerzo que existe en un punto de la cara superior de la palanca cerca del apoyo. Sea $P = 1500$ N, $a = 150$ mm, $b = 300$ mm y $D = 30$ mm. Muestre la condición de esfuerzo en un elemento.

Solución Objetivo Calcule la condición de esfuerzo y trace el elemento sometido a esfuerzo.

Datos La geometría y las cargas mostradas en la figura 10–11, $P = 1500$ N

Dimensiones: $a = 150$ mm, $b = 300$ mm, $D = 30$ mm

Análisis La figura 10–12 muestra la palanca dividida en dos diagramas de cuerpo libre. El punto de interés es designado como "Elemento K" en el extremo derecho de la palanca donde se une al

apoyo fijo. El elemento está sometido a un esfuerzo flexionante producido por el momento de reacción en el apoyo, M_2. También está sometido a un esfuerzo cortante torsional producido por el par de torsión, T.

Resultados Con los diagramas de cuerpo libre mostrados en la figura 10–12, podemos demostrar que

$$M_1 = T = P \cdot a = (1500\ \text{N})(150\ \text{mm}) = 225\,000\ \text{N}\cdot\text{mm}$$
$$M_2 = P \cdot b = (1500\ \text{N})(300\ \text{mm}) = 450\,000\ \text{N}\cdot\text{mm}$$

Por tanto, el esfuerzo flexionante en la cara superior de la barra, mostrada como elemento K en la figura 10–12(b), es

$$\sigma_x = \frac{M_2 c}{I} = \frac{M_2}{S}$$

El módulo de sección S es

$$S = \frac{\pi D^3}{32} = \frac{\pi(30\ \text{mm})^3}{32} = 2651\ \text{mm}^3$$

Por consiguiente,

$$\sigma_x = \frac{450\,000\ \text{N}\cdot\text{mm}}{2651\ \text{mm}^3} = 169.8\ \text{N/mm}^2 = 169.8\ \text{MPa}$$

El esfuerzo cortante torsional alcanza su valor máximo alrededor de la superficie externa de la barra con el valor de

$$\tau = \frac{T}{Z_p}$$

El módulo de sección polar Z_p es

$$Z_p = \frac{\pi D^3}{16} = \frac{\pi(30\ \text{mm})^3}{16} = 5301\ \text{mm}^3$$

Por tanto,

$$\tau = \frac{225\,000\ \text{N}\cdot\text{mm}}{5301\ \text{mm}^3} = 42.4\ \text{N/mm}^2 = 42.4\ \text{MPa}$$

Comentario Los esfuerzos flexionante y cortante se muestran en el elemento K en la figura 10–13. Es probable que este punto sea el punto de esfuerzo combinado máximo, que analizaremos más adelante en este capítulo. En un punto en un lado de la barra sobre el eje y, existiría un esfuerzo cortante mayor porque el esfuerzo torsional máximo se combina con el esfuerzo cortante vertical máximo producido por flexión. Pero el esfuerzo flexionante en ese lugar es cero. Ese elemento también debe ser analizado.

10–5 ESFUERZOS NORMALES COMBINADOS

Esta sección examina un tipo de esfuerzo combinado donde el punto de interés está sometido sólo a un esfuerzo normal, es decir, de tensión o compresión. La siguiente sección se ocupa de otro caso especial de esfuerzo combinado donde los esfuerzos normal y cortante combinados actúan en el punto de interés. Por tanto, el resto del capítulo desarrolla y aplica el caso más general de esfuerzo combinado donde se calculan las ecuaciones de esfuerzo normal máximo,

esfuerzo normal mínimo y esfuerzo cortante máximo para cualquier combinación de esfuerzos conocidos en un elemento particular sometido a esfuerzo. Un método semigráfico, llamado *círculo de Mohr*, se utiliza entonces para facilitar los cálculos y visualizar la variedad completa de posibles condiciones de esfuerzo que pueden existir en un punto particular de un miembro de carga.

La primera combinación que se considerará es la flexión con tensión o compresión directa. En cualquier problema de esfuerzo combinado, es útil visualizar la distribución de esfuerzo producida por los diversos componentes del patrón de esfuerzo total. Deberá revisar la sección 10–3 por lo que refiere a resúmenes de la distribución de esfuerzo para flexión y tensión, y compresión directas. Observe que la flexión produce esfuerzos de tensión y compresión, del mismo modo que tensión y compresión directas. Como se produce la misma clase de esfuerzos, una suma algebraica simple de los esfuerzos producidos en cualquier punto es todo lo que se requiere para calcular el esfuerzo resultante en dicho punto. Este proceso se llama *superposición*.

Instrucciones para resolver problemas con esfuerzos normales combinados

Estas instrucciones se aplican a situaciones en las que dos o más cargas o componentes de cargas actúan de tal forma que producen esfuerzos normales (de tensión o compresión) en el miembro de carga. En general, se tienen que incluir las cargas que producen esfuerzos flexionantes o tensión o compresión directa. El objetivo es calcular el esfuerzo combinado máximo en el miembro. Sean positivos los esfuerzos de tensión (+) y negativos los esfuerzos de compresión (−).

1. Trace el diagrama de cuerpo libre del miembro de carga y calcule la magnitud de todas las fuerzas aplicadas.
2. Para cualquier fuerza que actúa formando un ángulo con el eje neutro del miembro, descomponga la fuerza en componentes perpendiculares y paralelos al eje neutro.
3. Las fuerzas o los componentes que actúan en una dirección que coincide con el eje neutro producen tensión directa o compresión directa con una distribución de esfuerzo uniforme a través de la sección transversal. Calcule estos esfuerzos.
4. Las fuerzas o componentes que actúan perpendiculares al eje neutro producen esfuerzos flexionantes. Con los métodos del capítulo 5 determine los momentos flexionantes producidos por estas fuerzas, de forma individual o en combinación. Por tanto, para la sección sometida al momento flexionante máximo, calcule el esfuerzo flexionante con la fórmula de flexión, $\sigma = M/S$. El esfuerzo máximo ocurrirá en las fibras más externas de la sección transversal. Observe los puntos donde el esfuerzo es de tensión y donde es de compresión.
5. Las fuerzas o componentes que actúan paralelos al eje neutro, pero cuya línea de acción está alejada de dicho eje también provocan flexión. El momento flexionante es el producto de la fuerza por la distancia perpendicular del eje neutro a la línea de acción de la fuerza. Calcule el esfuerzo flexionante producido por tales momentos en cualquier sección donde el esfuerzo combinado puede ser el máximo.
6. Considerando todos los esfuerzos normales calculados en los pasos 1–5, utilice el proceso de superposición para combinarlos en cualquier punto de cualquier sección transversal donde el esfuerzo combinado pueda ser el máximo. La superposición se logra sumando algebraicamente todos los esfuerzos que actúan en un punto, teniendo cuidado de observar si cada esfuerzo componente es de tensión (+) o de compresión (−). Puede ser necesario evaluar la condición de esfuerzo en dos o más puntos cuando no es obvio dónde ocurre el esfuerzo combinado máximo. En general, el proceso de superposición se expresa como,

$$\sigma_{comb} = \pm \frac{F}{A} \pm \frac{M}{S} \tag{10–1}$$

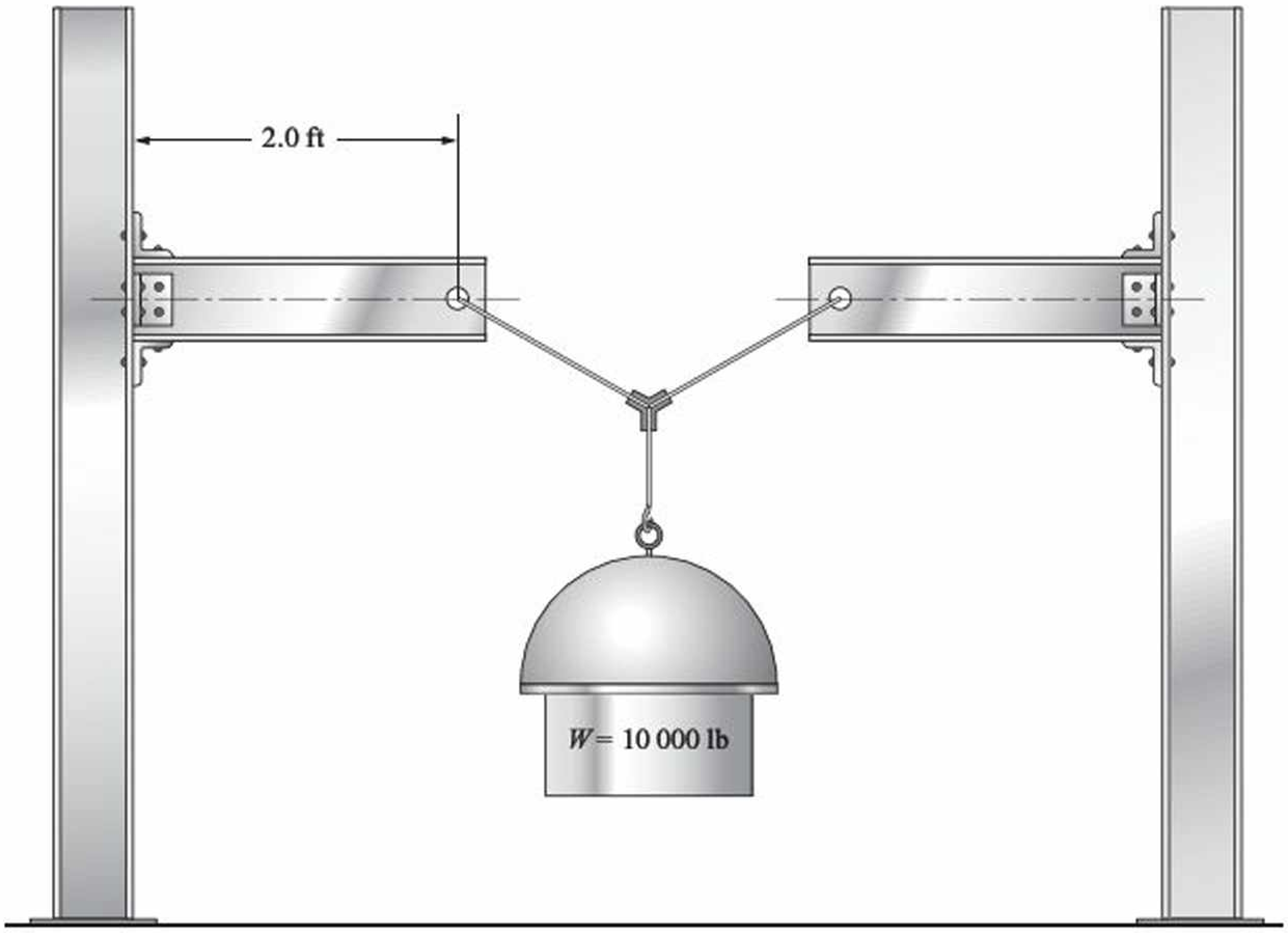
donde el término, $\pm F/A$, incluye todos los esfuerzos de tensión y compresión que actúan en el punto de interés y el término $\pm M/S$ incluye todos los esfuerzos flexionantes que actúan en dicho punto. Las fuerzas que producen los esfuerzos individuales determinan el signo de cada esfuerzo.

7. El esfuerzo máximo combinado que actúa en el miembro se puede comparar entonces con el esfuerzo de diseño del material del cual se va a hacer el miembro para calcular el esfuerzo de diseño resultante y valorar la seguridad del miembro. Para materiales isotrópicos, el esfuerzo de tensión o de compresión podría provocar la falla, cualquiera que sea el máximo. Para materiales no isotrópicos que tienen resistencias diferentes a tensión y a compresión, es necesario calcular el factor de diseño resultante tanto para el esfuerzo de tensión como para el esfuerzo de compresión con el fin de determinar cuál es crítico. Además, en general, será necesario considerar la estabilidad de aquellas partes de los miembros sometidas a esfuerzos de compresión analizando la tendencia a pandearse o desgarrarse localmente del miembro. Consulte el capítulo 11 sobre pandeo de miembros similares a columnas sometidos a compresión. El análisis de desgarre y pandeo de partes de miembros requerirá consultar otras fuentes. Consulte las referencias al final de los capítulos 7, 8 y 10.

En la figura 10–14 se muestra un ejemplo de un miembro en el cual se desarrollan tanto esfuerzos flexionantes como de tensión directa. Las dos vigas horizontales soportan una carga de 10 000 lb por medio del ensamble de cables. Las vigas están rígidamente unidas a columnas, de modo que son vigas en voladizo. La carga que actúa en el extremo de cada viga es igual a la tensión en el cable. La figura 10–15 muestra que el componente vertical de la tensión en cada cable debe ser de 5000 lb. Es decir,

$$F \cos 60° = 5000 \text{ lb}$$

FIGURA 10–14
Dos vigas en voladizo sometidas a esfuerzos combinados de flexión y de tensión axial.



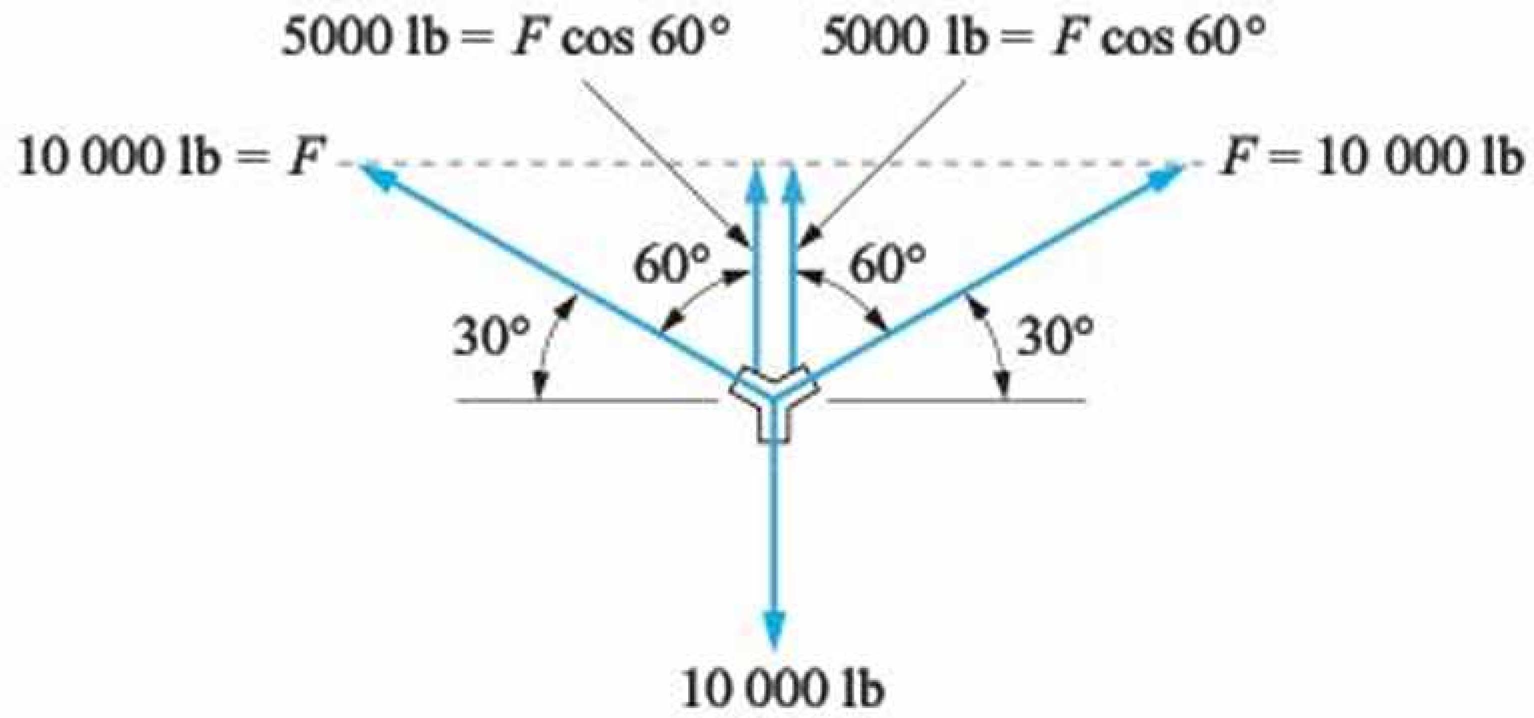


FIGURA 10–15 Análisis de las fuerzas que actúan en el sistema de cables.

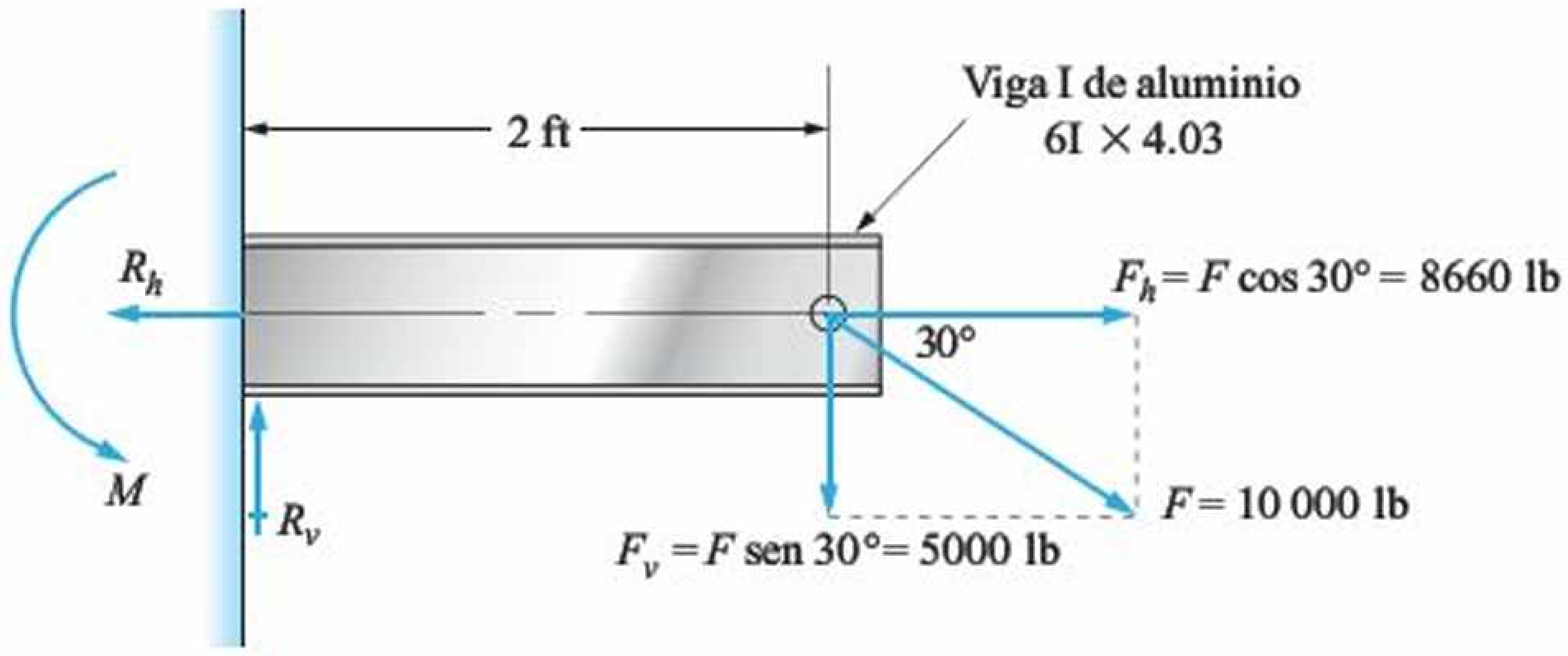


FIGURA 10–16 Fuerzas aplicadas a cada viga.

y la tensión total en el cable es

$$F = \frac{5000 \text{ lb}}{\cos 60°} = 10\,000 \text{ lb}$$

Ésta es la fuerza aplicada a cada viga, como se muestra en la figura 10–16.

El problema de ejemplo 10–2 completa el análisis de la condición de esfuerzo combinado en cada una de las vigas en voladizo horizontales de la figura 10–14.

Problema de ejemplo 10–2 Para el sistema mostrado en la figura 10–14, determine el esfuerzo de tensión o compresión máximo combinado en cada viga en voladizo horizontal cuando se cuelga una carga estática de 10 000 lb del sistema de cables instalado entre ellas. Las vigas son vigas I Aluminum Association, de 6I × 4.03. Entonces calcule el factor de diseño resultante; las vigas tienen que ser de aleación de aluminio 6061–T6.

Solución

Objetivo Calcule el esfuerzo máximo combinado y el factor de diseño resultante para las vigas en voladizo horizontales de la figura 10–14.

Datos La carga de 10 000 lb. El sistema de fuerzas mostrado en la figura 10–15. La tensión en cada cable es de 10 000 lb. Las vigas de 2.0 ft de largo son aleación de aluminio 6061–T6 de 6I × 4.03. Según el apéndice A–11, las propiedades de la viga son $A = 3.427 \text{ in}^2$ y $S = 7.33 \text{ in}^3$.

Análisis La tensión en el cable sujeto al extremo de cada viga en voladizo tenderá a provocar un esfuerzo de tensión directa combinado con un esfuerzo flexionante en la viga. Use las *Instrucciones para resolver problemas con esfuerzos normales combinados* descrito en esta sección.

Resultados ***Paso 1***. La figura 10–16 muestra el diagrama de cuerpo libre de una viga con una fuerza de 10 000 lb aplicada por el cable al extremo de la viga. La reacción en el extremo izquierdo donde la viga está rígidamente unida a la columna se compone de una fuerza de reacción vertical, una fuerza de reacción horizontal y un momento en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Paso 2. En la figura 10–16 también se muestra la descomposición de la fuerza de 10 000 lb en componentes vertical y horizontal donde $F_v = 5000$ lb y $F_h = 8660$ lb.

Paso 3. La fuerza horizontal, F_h, actúa en una dirección que coincide con el eje neutro de la viga. Por consiguiente, produce una esfuerzo de tensión directo de

$$\sigma_t = \frac{F_h}{A} = \frac{8660\,\text{lb}}{3.427\,\text{in}^2} = 2527\text{ psi}$$

Paso 4. La fuerza vertical, F_v, produce flexión dirigida hacia abajo de modo que la cara superior de la viga se somete a tensión y la inferior a compresión. El momento flexionante máximo ocurrirá en el apoyo izquierdo, donde

$$M = F_v(2.0\text{ ft}) = (5000\text{ lb})(2.0\text{ ft})(12\text{ in/ft}) = 120000\text{ lb}\cdot\text{in}$$

Por consiguiente, el esfuerzo flexionante máximo producido por este momento es

$$\sigma_b = \frac{M}{S} = \frac{120000\text{ lb}\cdot\text{in}}{7.33\text{ in}^3} = 16371\text{ psi}$$

Un esfuerzo de esta magnitud ocurre como esfuerzo de tensión en la cara superior y como esfuerzo de compresión en la cara inferior de la viga en el apoyo.

Paso 5. Este paso no se aplica a este problema porque no existe una fuerza horizontal que actúe fuera del eje neutro.

Paso 6. Se puede razonar que el esfuerzo combinado máximo ocurre en la cara superior de la viga en el apoyo, porque tanto el esfuerzo de tensión directo calculado en el paso 3 como el esfuerzo flexionante calculado en el paso 4 son de tensión en dicho punto. Por consiguiente, se suman. Utilizando superposición, como se definió en la ecuación 10–1

$$\sigma_{\text{cara superior}} = 2527\text{ psi} + 16371\text{ psi} = 18\,898\text{ psi tensión}$$

Por comparación, el esfuerzo combinado en la superficie inferior de la viga es

$$\sigma_{\text{cara inferior}} = 2527\text{ psi} - 16371\text{ psi} = -13\,844\text{ psi compresión}$$

La figura 10–17 muestra una serie de diagramas que ilustran el proceso de superposición. La parte (a) es el esfuerzo en la viga provocado por flexión. La parte (b) muestra el esfuerzo de tensión directo producido por F_h. La parte (c) muestra la distribución del esfuerzo combinado.

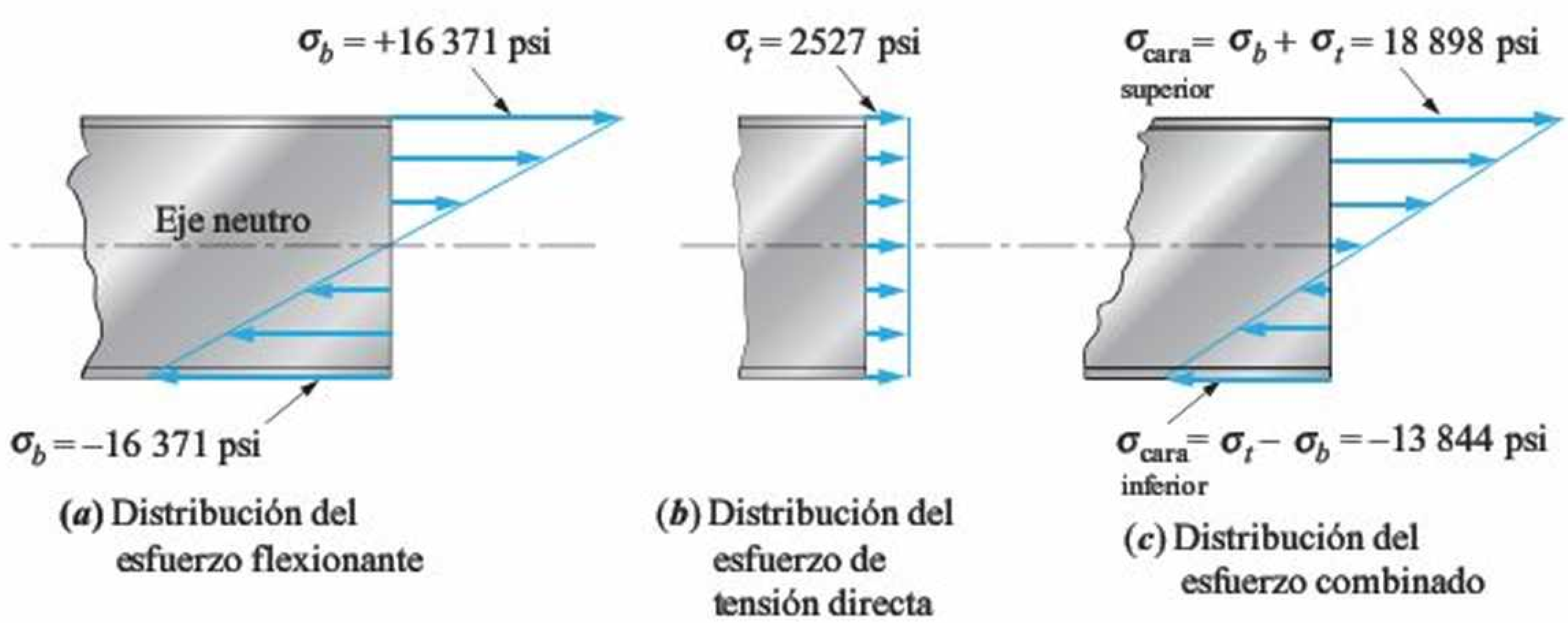


FIGURA 10–17 Diagrama del principio de superposición aplicado a las vigas de la figura 10–14.

Paso 7. Como la carga es estática, podemos calcular el factor de diseño basado en la resistencia a la cedencia de la aleación de aluminio 6061–T6, donde $S_y = 40\,000$ psi (apéndice A–18). Entonces,

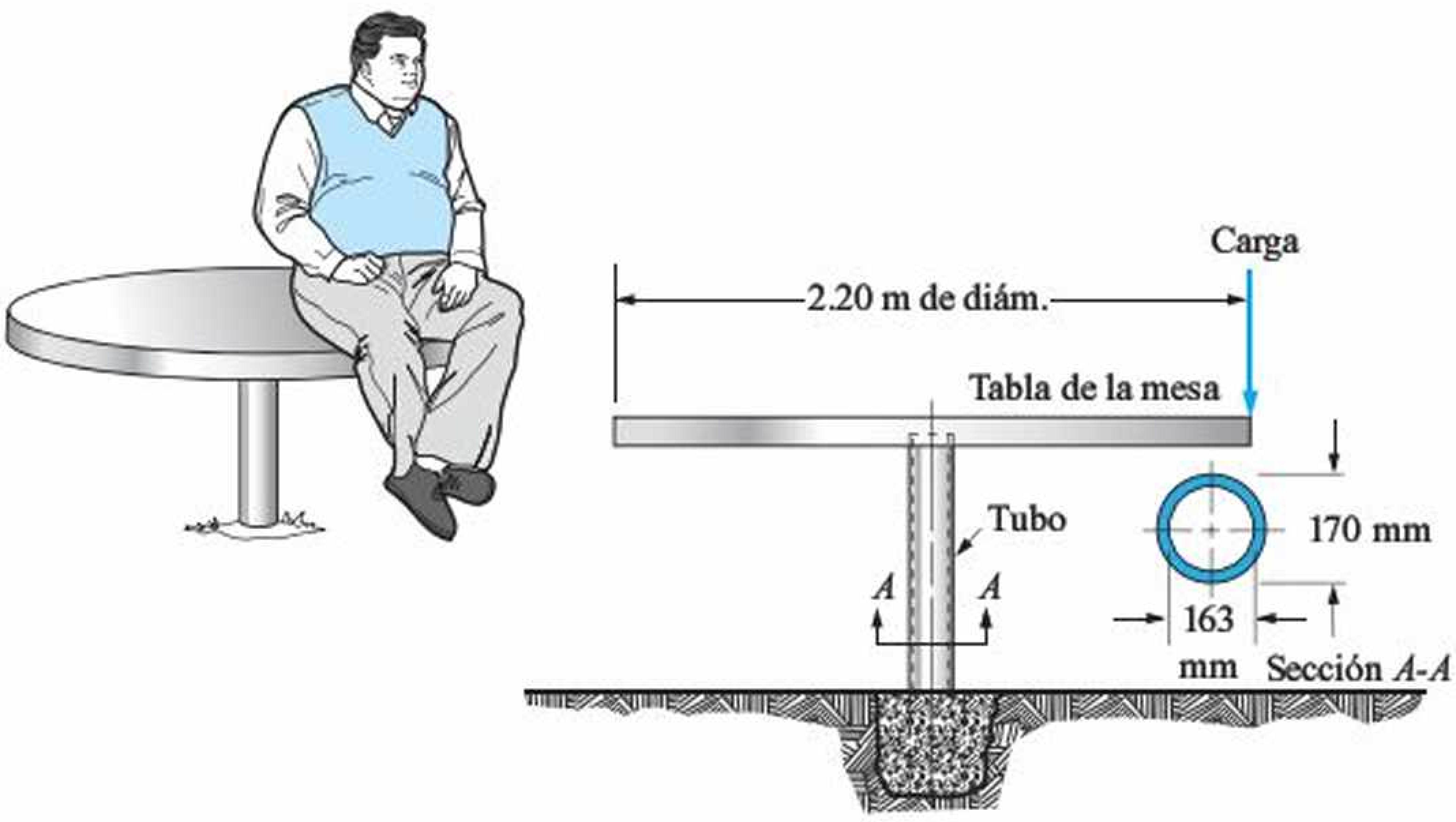
$$N = s_y/\sigma_{\text{cara superior}} = (40\,000\text{ psi})/(18\,898\text{ psi}) = 2.11$$

Comentario: Este factor deberá ser adecuado para una carga puramente estática. Si existe incertidumbre en cuanto la magnitud de la carga o la posibilidad de que la carga se aplique con choque o impacto, se preferiría un factor de diseño más elevado.

Problema de ejemplo 10–3

Una mesa de jardín en un parque se armó con tabla circular soportada por un tubo firmemente encajado en concreto, como se muestra en la figura 10–18. Calcule el esfuerzo máximo en el tubo si una persona de 135 kg de masa se sienta en el borde la mesa. El tubo es de aleación de aluminio con diámetro externo de 170 mm y diámetro interno de 163 mm. El aluminio es 6061–T4; calcule el factor de diseño resultante basado tanto en la resistencia a la cadencia como en la resistencia máxima. En seguida comente sobre la conveniencia del diseño.

FIGURA 10–18
Mesa de jardín soportada por un tubo.



Solución

Objetivo: Calcular el esfuerzo máximo en el tubo de la figura 10–18 y el factor de diseño basado tanto en la resistencia a cedencia como en la resistencia máxima.

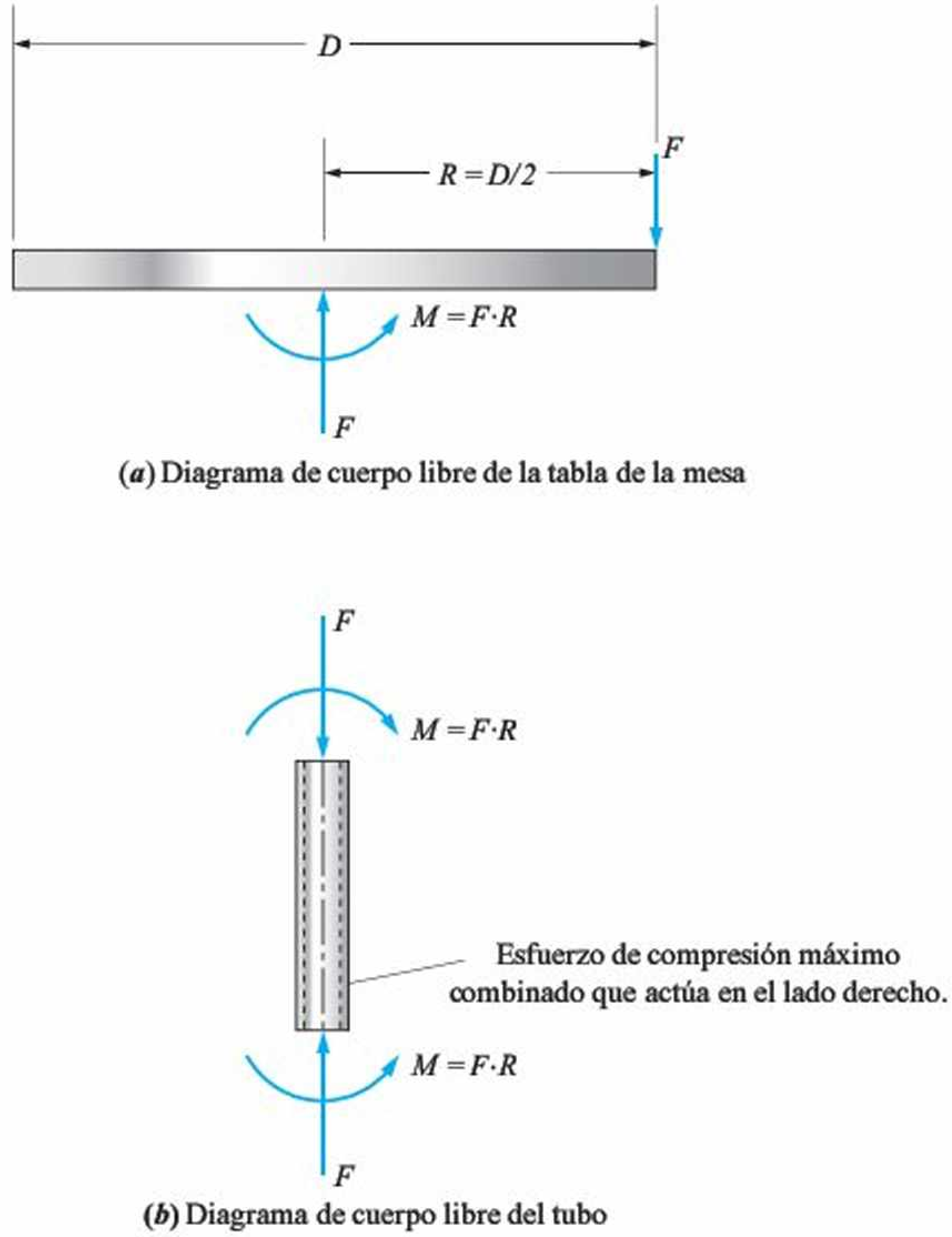
Datos: La carga y las dimensiones del tubo mostradas en la figura 10–18. La carga es la fuerza producida por la masa de 135 kg en el borde de la mesa. El tubo es de aluminio 6061–T4; $s_y = 145$ MPa; $s_u = 241$ MPa.

Análisis: El tubo se somete a compresión directa y flexión, como se ilustra en la figura 10–19, el diagrama de cuerpo libre del tubo. El efecto de la carga es producir una fuerza dirigida hacia abajo en el extremo superior del tubo al mismo tiempo que ejerce un momento en sentido de las manecillas del reloj. El momento es el producto de la carga por el radio de la mesa de la tabla horizontal de la mesa. La reacción en el extremo inferior del tubo, producida por el concreto, es una fuerza que actúa hacia arriba combinada con un momento en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Use las *Instrucciones para resolver problemas con esfuerzos normales combinados*.

Resultados: ***Paso 1.*** La figura 10–19 muestra el diagrama de cuerpo libre. La fuerza es la atracción de la gravedad de la masa de 135 kg.

$$F = m \cdot g = (135\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2) = 1324\text{ N}$$

FIGURA 10–19 Diagramas de cuerpo libre de la tabla de la mesa y el tubo del problema de ejemplo 10–3.



Paso 2. No hay fuerzas actuando a un cierto ángulo con respecto al tubo.

Paso 3. Entonces el esfuerzo de compresión directo en el tubo es

$$\sigma_a = -\frac{F}{A}$$

Pero

$$A = \frac{\pi(D_o^2 - D_i^2)}{4} = \frac{\pi(170^2 - 163^2)\,\text{mm}^2}{4} = 1831\ \text{mm}^2$$

Entonces

$$\sigma_a = -\frac{1324\ \text{N}}{1831\ \text{mm}^2} = -0.723\ \text{MPa}$$

Este es un esfuerzo de compresión uniforme a través de cualquier sección transversal del tubo.

Paso 4. No hay fuerzas actuando perpendiculares al eje del tubo.

Paso 5. Como la fuerza actúa a 1.1 m del eje del tubo, el momento es

$$M = F{\cdot}R = (1324\ \text{N})(1.1\ \text{m}) = 1456\ \text{N}\cdot\text{m}$$

El cálculo del esfuerzo flexionante requiere la aplicación de la fórmula de flexión,

$$\sigma_b = \frac{Mc}{I}$$

donde $c = \dfrac{D_o}{2} = \dfrac{170\ \text{mm}}{2} = 85\ \text{mm}$

$$I = \frac{\pi}{64}(D_o^4 - D_i^4) = \frac{\pi}{64}(170^4 - 163^4)\ \text{mm}^4$$

$$I = 6.347 \times 10^6\ \text{mm}^4$$

Entonces

$$\sigma_b = \frac{(1456\ \text{N}\cdot\text{m})(85\ \text{mm})}{6.347 \times 10^6\ \text{mm}^4} \times \frac{10^3\ \text{mm}}{\text{m}} = 19.5\ \text{MPa}$$

Paso 6. El esfuerzo flexionante σ_b produce un esfuerzo de compresión en el lado derecho del tubo y de tensión en el izquierdo. Como el esfuerzo de compresión se suma al de flexión que actúa en el lado derecho, allí es donde ocurre el esfuerzo máximo. El esfuerzo combinado sería entonces, según la ecuación 10–1,

$$\sigma_c = -\sigma_a - \sigma_b = (-0.723 - 19.5)\ \text{MPa} = -20.22\ \text{MPa}$$

Paso 7. El factor de diseño basado en la resistencia a la cedencia es

$$N = \frac{s_y}{\sigma_c} = \frac{145\ \text{MPa}}{20.22\ \text{MPa}} = 7.17$$

El factor de diseño basado en la resistencia máxima es

$$N = \frac{s_u}{\sigma_c} = \frac{241\ \text{MPa}}{20.22\ \text{MPa}} = 11.9$$

Comentario Estos valores son aceptables en esta aplicación de conformidad con los esfuerzos de tensión y compresión normales. La tabla 3–2 que aparece en el capítulo 3 sugiere $N = 2$ basado en la resistencia a la cedencia con carga estática y $N = 12$ basado en la resistencia máxima con impacto. Si la persona simplemente se sienta en el borde de la mesa, se consideraría que la carga es estática; pero si lo hace de golpe entonces aplicaría una carga de impacto. El factor de diseño de 11.9 se aproxima suficientemente al valor recomendado de 12. Sin embargo, se deberá realizar un análisis adicional para evaluar la tendencia del tubo a pandearse como una columna, como se hace en el capítulo 11. Asimismo, la referencia 1 define el procedimiento para evaluar la tendencia de un tubo circular hueco a pandearse localmente cuando se somete a compresión.

LECCIÓN 12

10–6 ESFUERZOS NORMALES Y CORTANTES COMBINADOS

Las flechas rotatorias de máquinas transmisoras de potencia son buenos ejemplos de miembros cargados de tal forma que producen flexión y torsión combinadas. La figura 10–20 muestra una flecha con dos ruedas dentadas de cadena. La rueda dentada en C transmite potencia a lo largo de la flecha hasta la rueda dentada en *B*, que a su vez la suministra a otra flecha. Como está transmitiendo potencia, la flecha entre *B* y *C* se somete a un par de torsión y a un esfuerzo cortante torsional, como se vio en el capítulo 4. Para que las ruedas dentadas transmitan un par de torsión deben ser jaladas por la cadena. En *C*, el lado posterior de la cadena debe jalar hacia abajo con la fuerza F_1 para propulsar la cadena dentada en sentido de las manecillas del reloj. Como la rueda dentada en *B* impulsa a una rueda dentada compañera, el lado frontal de la cadena estaría sometido a tensión bajo la fuerza F_2. Las dos fuerzas, F_1 y F_2, que actúan hacia abajo, provocan flexión de la flecha. Por tanto, la flecha debe ser analizada tanto en cuanto a esfuerzo cortante torsional como en cuanto a esfuerzo flexionante. Entonces, como ambos esfuerzos actúan en el mismo lugar de la flecha, habrá que determinar su efecto combinado. El método de análisis que se utilizará se llama *teoría de falla por esfuerzo cortante máximo*, la que se describe a continuación. Luego se presentarán algunos ejemplos.

Teoría de falla por esfuerzo cortante máximo. Cuando ocurre un esfuerzo de tensión o compresión provocado por flexión en el mismo lugar donde ocurre un esfuerzo cortante, las dos clases de esfuerzo se combinan para producir un esfuerzo cortante mayor. El esfuerzo máximo se calcula con

$$\tau_{\text{máx}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \qquad \textbf{(10–2)}$$

En la ecuación (10–2), σ se refiere a la magnitud del esfuerzo de tensión o compresión que actúa en el punto y τ es el esfuerzo cortante que actúa en el mismo punto. El resultado $\tau_{\text{máx}}$ es el esfuerzo cortante máximo que actúa en el punto. El fundamento de la ecuación (10–2) se explica con el círculo de Mohr más adelante en este capítulo.

La teoría de falla por esfuerzo cortante máximo establece que un miembro falla cuando el esfuerzo cortante máximo excede la resistencia a la cedencia del material sometido a cortante. Esta teoría de falla guarda una buena correlación con resultados de prueba de materiales dúctiles tales como la mayoría de los aceros.

Par de torsión equivalente. La ecuación (10–2) se puede expresar de una forma simplificada en el caso particular de una flecha circular sometida a flexión y torsión. Evaluando el esfuerzo flexionante por separado, el esfuerzo de tensión o compresión máximo sería

$$\sigma = \frac{M}{S}$$

donde $S = \dfrac{\pi D^3}{32} =$ módulo de sección
$D =$ diámetro de la flecha
$M =$ momento flexionante en la sección

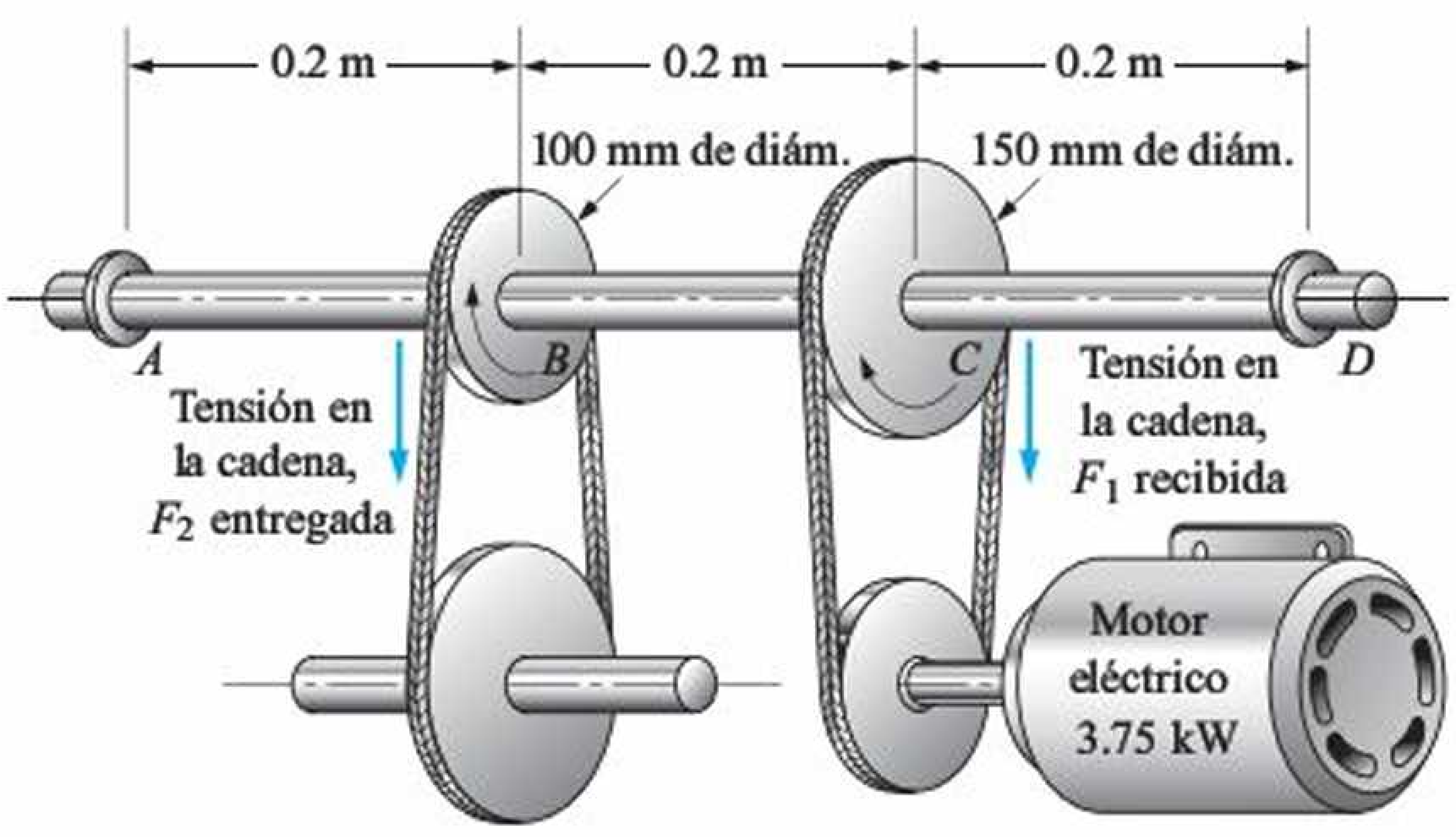


FIGURA 10–20 Flechas transmisoras de potencia.

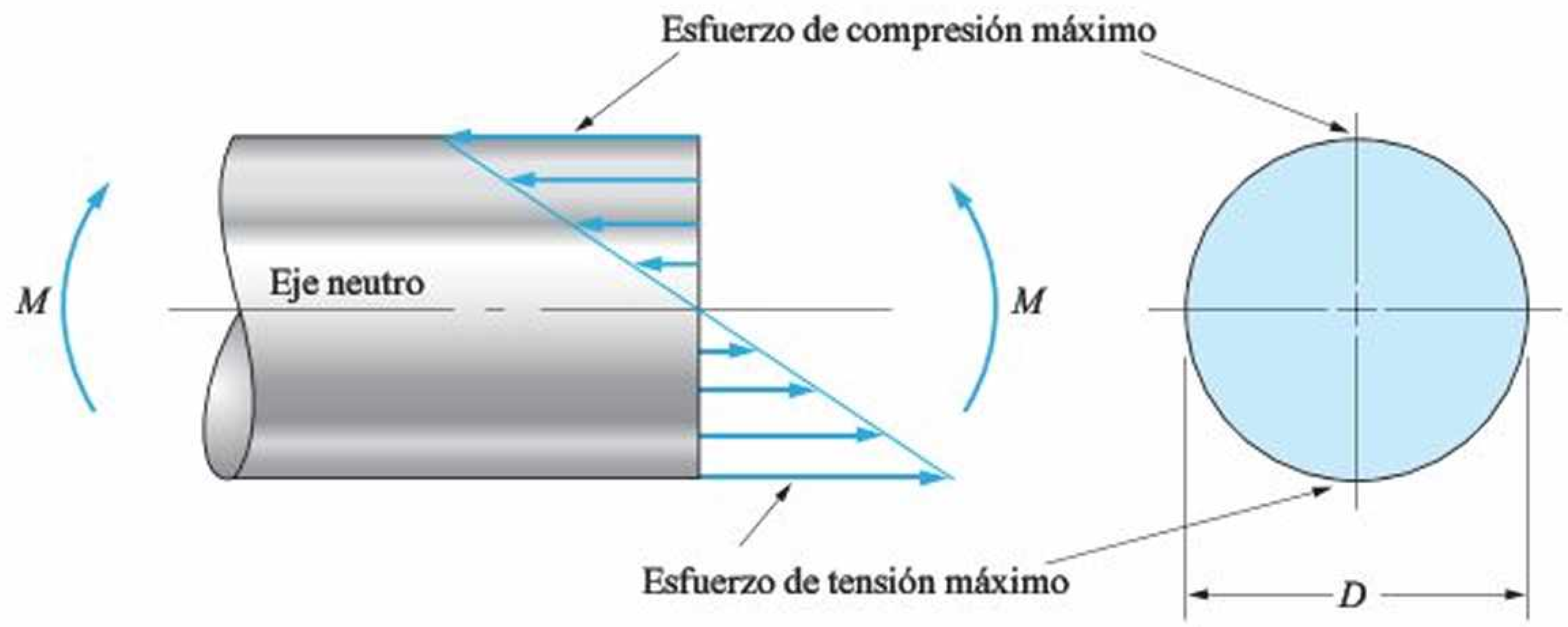


FIGURA 10–21
Distribución del esfuerzo flexionante en una flecha circular.

El esfuerzo máximo producido por flexión ocurre en la superficie externa de la flecha, como se muestra en la figura 10–21.

Ahora considere el esfuerzo cortante torsional por separado. En el capítulo 4 se derivó la ecuación del esfuerzo cortante torsional:

$$\tau = \frac{T}{Z_p}$$

donde $Z_p = \dfrac{\pi D^3}{16}$ = módulo de sección polar

T = par de torsión en la sección

El esfuerzo cortante máximo ocurre en la superficie externa de la flecha alrededor de toda su circunferencia, como se muestra en la figura 10–22.

Por tanto, el esfuerzo de tensión máximo y el esfuerzo cortante torsional máximo ocurren en el mismo punto de la flecha. Ahora utilicemos la ecuación (10–2) para obtener una expresión para el esfuerzo combinado en función del momento flexionante M, el par de torsión T y el diámetro de la flecha D.

$$\tau_{\text{máx}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\tau_{\text{máx}} = \sqrt{\left(\frac{M}{2S}\right)^2 + \left(\frac{T}{Z_p}\right)^2} \qquad \textbf{(10–3)}$$

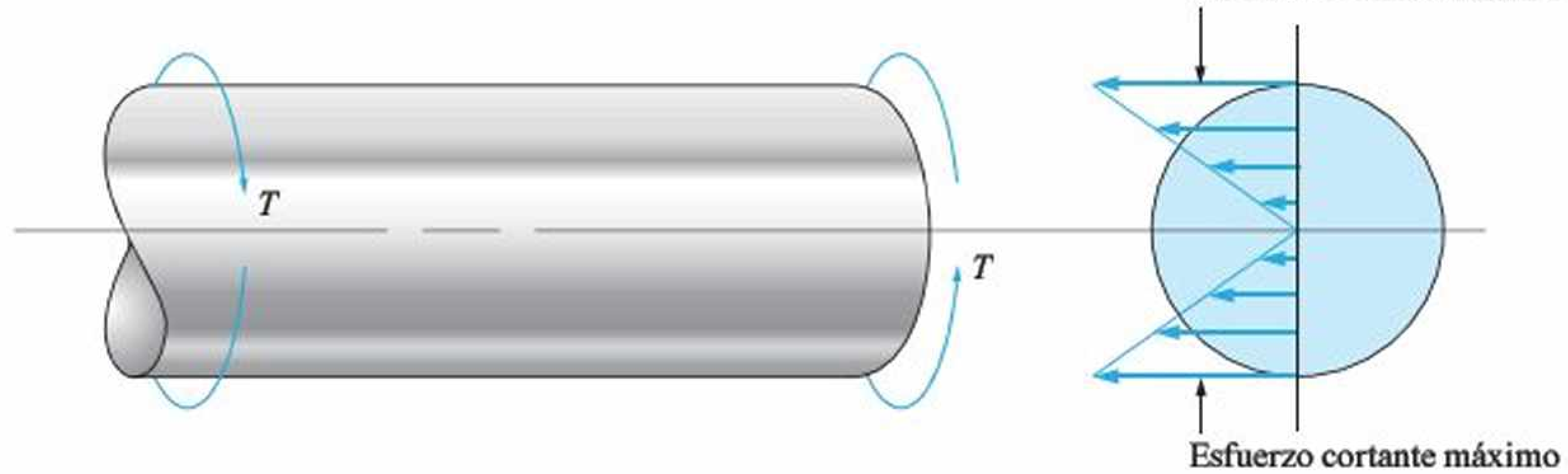


FIGURA 10–22
Distribución del esfuerzo cortante en una flecha circular.

(*a*)

(*b*) La distribución del esfuerzo es la misma en cualquier diámetro

Observe que, de acuerdo con las definiciones de S y Z_p dadas con anterioridad,

$$2S = Zp$$

Sustituyendo en la ecuación (10–3) se obtiene

$$\tau_{\text{máx}} = \sqrt{\left(\frac{M}{Z_p}\right)^2 + \left(\frac{T}{Z_p}\right)^2}$$

Si se saca Z_p como factor se obtiene

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{1}{Z_p}\sqrt{M^2 + T^2}$$

En ocasiones el término $\sqrt{M^2 + T^2}$ se llama *par de torsión equivalente* porque representa la cantidad de par de torsión que la flecha tendría que aplicarse a sí misma para hacer que la magnitud del esfuerzo cortante fuera la combinación de flexión y torsión. Si este par de torsión equivalente se designa como T_e,

$$T_e = \sqrt{M^2 + T^2} \qquad \textbf{(10–4)}$$

y

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{T_e}{Z_p} \qquad \textbf{(10–5)}$$

Las ecuaciones (10–4) y (10–5) simplifican en gran medida el cálculo del esfuerzo cortante máximo en una flecha circular sometida a flexión y torsión.

En el diseño de flechas circulares sometidas a flexión y torsión, un esfuerzo de diseño puede especificarse dando el esfuerzo cortante máximo permisible. Esto se hizo en el capítulo 4.

$$\tau_d = \frac{s_{ys}}{N}$$

donde s_{ys} es la resistencia a la cedencia del material sometido a cortante. Como s_{ys} rara vez se conoce, se puede utilizar el valor aproximado calculado con $s_{ys} = s_y/2$. Entonces

$$\tau_d = \frac{s_y}{2N} \qquad \textbf{(10–6)}$$

donde s_y es la resistencia a la cedencia a tensión, reportada en la mayoría de las tablas de propiedades, como las de los apéndices A–14 a A–18. Se recomienda que el valor del factor de diseño *no sea menor que 4*. Una flecha rotatoria sometida a flexión es un buen ejemplo de una carga repetida e invertida. Con cada revolución de la flecha, un punto particular de su superficie se somete a la tensión máxima y en seguida al esfuerzo de compresión máximo. Por tanto, la fatiga es el modo esperado de falla y se recomienda $N = 4$ o mayor, basado en la resistencia a la cedencia.

Concentraciones de esfuerzo. En flechas, las concentraciones de esfuerzo son provocadas por un cambio repentino de la geometría, como lo son cuñeros, hombros y ranuras. Consulte el apéndice A–22 por lo que refiere a valores de factores de concentración de esfuerzo. La aplicación apropiada de los factores de concentración de esfuerzo a las ecuaciones de par

de torsión equivalente (10–4) y (10–5) deberá ser considerada con cuidado. Si el valor de K_t en la sección de interés es igual tanto a flexión como a torsión, entonces se pueda aplicar directamente a la ecuación (10–5). Es decir,

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{T_e K_t}{Z_p} \tag{10–7}$$

La ecuación (10–7) también se puede aplicar como un cálculo conservador de $\tau_{\text{máx}}$ si se selecciona K_t como el valor máximo ya sea a torsión o a flexión.

Para tener en cuenta el K_t apropiado, tanto a torsión como a flexión, la ecuación (10–4) se modifica como

$$T_e = \sqrt{(K_{tB} M)^2 + (K_{tT} T)^2} \tag{10–8}$$

Entonces se puede utilizar directamente la ecuación (10–5) para calcular el esfuerzo cortante máximo.

Problema de ejemplo 10–4

Especifique un material adecuado para la flecha mostrada en la figura 10–20. La flecha tiene un diámetro uniforme de 55 mm y gira a 120 rpm mientras transmite 3.75 kW de potencia. Las ruedas dentadas B y C están montadas en la flecha por medio de cuñas. La rueda dentada C recibe la potencia y la B la transmite a otra flecha. Los cojinetes A y D funcionan como apoyos simples para la flecha.

Solución

Objetivo: Especificar un material adecuado para la flecha.

Datos: La flecha y las cargas mostradas en la figura 10–20.
Potencia $= P = 3.75$ kW.
Velocidad de rotación $= n = 120$ rpm.
Diámetro de la flecha $= D = 55$ mm.
Cuñeros de extremo en B y C. Apoyos simples en A y D.

Análisis: Los diversos pasos que se seguirán en la solución de este problema se describen a continuación.

1. El par de torsión en la flecha se calculará para la potencia y velocidad de rotación conocidas con $T = P/n$, tal como se desarrolló en el capítulo 4.
2. Se calcularán las tensiones en las ruedas dentadas B y C. Estas son las fuerzas que producen flexión en la flecha.
3. Si se considera la flecha como una viga, se trazarán sus diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.
4. En la sección donde ocurre el momento flexionante máximo, se calculará el par de torsión equivalente T_e con la ecuación (10–4).
5. Se determinará el módulo de sección polar Z_p y el factor de concentración de esfuerzo K_t.
6. El esfuerzo cortante máximo se calculará con la ecuación (10–7).
7. La resistencia a la cedencia requerida del material de la flecha se calculará con $\tau_{\text{máx}} = \tau_d$ en la ecuación (10–6) y resolviendo para s_y. Recuerde, haga $N = 4$ o mayor.
8. En el apéndice A–14 se seleccionará un acero con una suficiente resistencia a la cedencia.

Resultados: ***Paso 1.*** La unidad deseable para el par de torsión es el N·m. Entonces es muy conveniente observar que la unidad de potencia de kilowatts equivale a las unidades de kN·m/s. Además, la velocidad de rotación debe expresarse en rad/s.

$$n = \frac{120\ \text{rev}}{\text{min}} \times \frac{2\pi\ \text{rad}}{\text{rev}} \times \frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}} = 12.57\ \text{rad/s}$$

Ahora podemos calcular el par de torsión.

$$T = \frac{P}{n} = \frac{3.75\,\text{kN}\cdot\text{m}}{\text{s}} \times \frac{1}{12.57\,\text{rad/s}} = 0.298\,\text{kN}\cdot\text{m}$$

Paso 2. Las tensiones en las cadenas se indican en la figura por medio de las fuerzas F_1 y F_2. Para que la flecha esté en equilibrio, el par de torsión en ambas ruedas dentadas debe ser de la misma magnitud pero en dirección opuesta. En cualquiera de las ruedas el par de torsión es el producto de la fuerza ejercida por la cadena por el radio de la polea. Es decir,

$$T = F_1R_1 = F_2R_2$$

Ahora podemos calcular las fuerzas.

$$F_1 = \frac{T}{R_1} = \frac{0.298\,\text{kN}\cdot\text{m}}{75\,\text{mm}} \times \frac{10^3\,\text{mm}}{\text{m}} = 3.97\,\text{kN}$$

$$F_2 = \frac{T}{R_2} = \frac{0.298\,\text{kN}\cdot\text{m}}{50\,\text{mm}} \times \frac{10^3\,\text{mm}}{\text{m}} = 5.96\,\text{kN}$$

Paso 3. La figura 10–23 muestra los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante completos determinados con los métodos del capítulo 5. El momento flexionante máximo es de 1.06 kN·m en la sección *B*, donde se localiza una de las ruedas dentadas.

Paso 4. En la sección *B*, el par de torsión en la flecha es de 0.298 kN·m y el momento flexionante es de 1.06 kN·m. Entonces

$$T_e = \sqrt{M^2 + T^2} = \sqrt{(1.06)^2 + (0.298)^2} = 1.10\,\text{kN}\cdot\text{m}$$

Paso 5. $$Z_p = \frac{\pi D^3}{16} = \frac{\pi(55\,\text{mm})^3}{16} = 32.67 \times 10^3\,\text{mm}^3$$

Para el cuñero situado en *B* que fija la rueda dentada en la flecha, se utilizará $K_t = 1.6$ como se reporta en la figura 4–14.

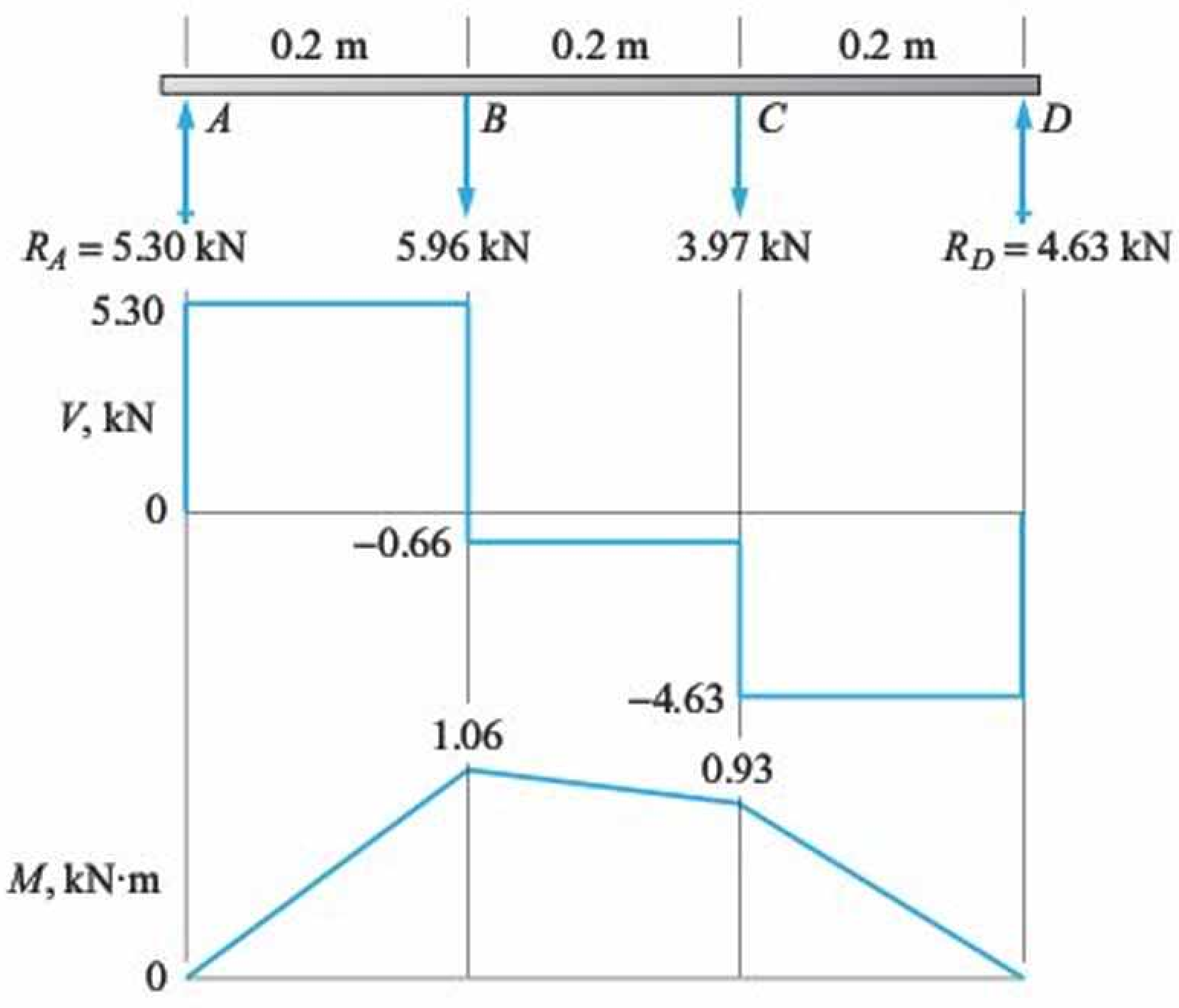


FIGURA 10–23 Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante del problema de ejemplo 10–4.

$$\textbf{Paso 6.}\quad \tau_{\text{máx}} = \frac{T_e K_t}{Z_p} = \frac{1.10 \times 10^3\ \text{N}\cdot\text{m}(1.6)}{32.67 \times 10^3\ \text{mm}^3} \times \frac{10^3\ \text{mm}}{\text{m}} = 53.9\ \text{MPa}$$

$$\textbf{Paso 7.}\quad \text{Sea } \tau_{\text{máx}} = \tau_d = \frac{s_y}{2N}$$

Entonces $s_y = 2N\tau_{\text{máx}} = (2)(4)(53.9\ \text{MPa}) = 431\ \text{MPa}$

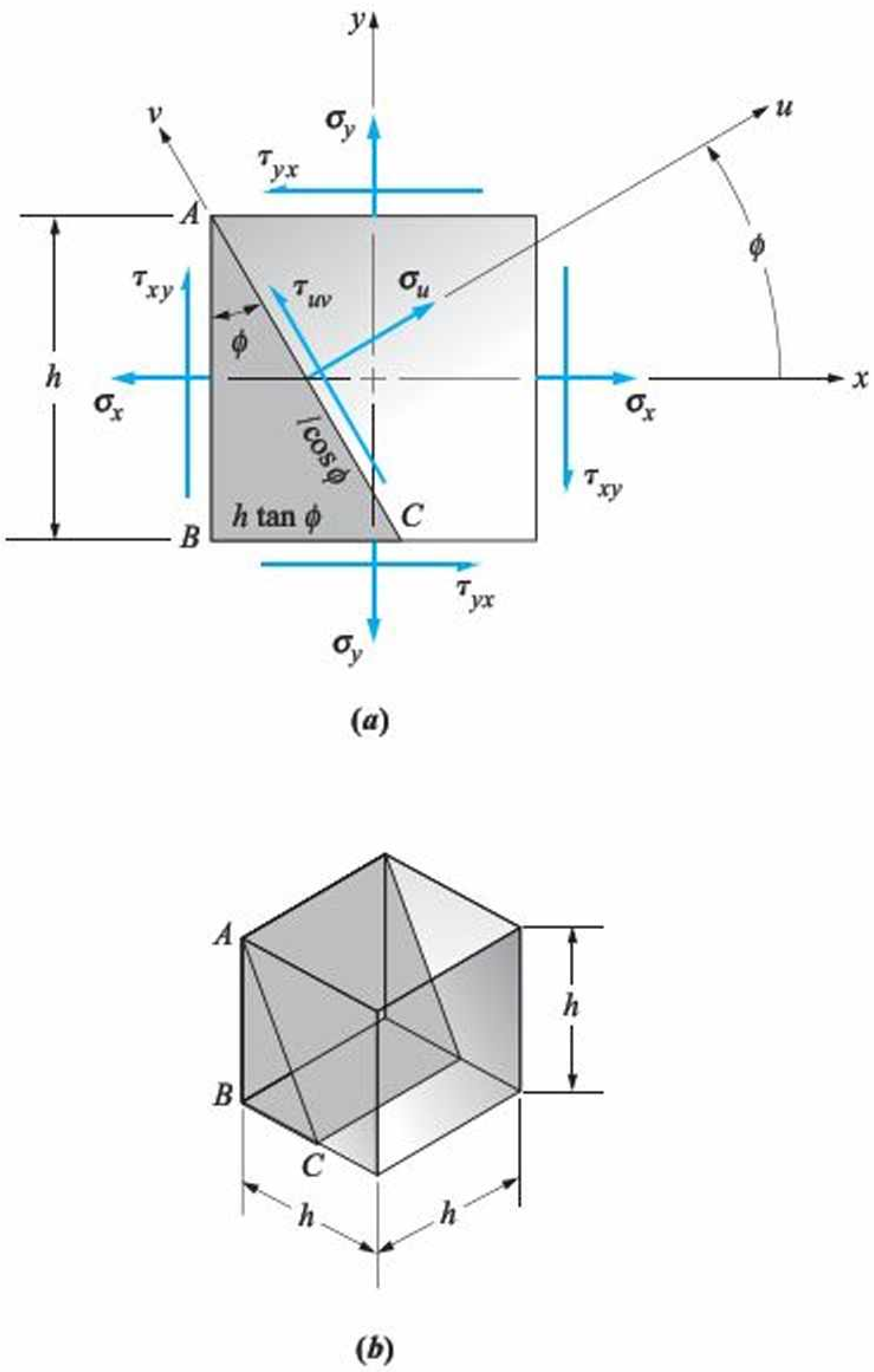
Paso 8. En el apéndice A–14 vemos que se podrían utilizar varias aleaciones. Por ejemplo, la resistencia a la cedencia del acero AISI 1040 estirado en frío es de 490 MPa. La de la aleación AISI 1141 OQT 1300 es de 469 MPa y su ductilidad es muy buena, como lo indica el 28% de alargamiento. Cualquiera de estas aleaciones sería una selección razonable.

10–7 ECUACIONES PARA DETERMINAR ESFUERZOS EN CUALQUIER DIRECCIÓN

El *elemento sometido a esfuerzo inicial* analizado en la sección 10–4 estaba orientado en una dirección conveniente con respecto al miembro que se estaba analizando. Los métodos de sección permiten calcular los esfuerzos normales máximos y el esfuerzo cortante máximo de manera directa.

La figura 10–24 muestra un elemento sometido a esfuerzo con ejes ortogonales u y v superpuestos en el elemento inicial de tal modo que el eje u forma un ángulo ϕ con respecto al eje x dado. En general, habrá un esfuerzo normal σ_u y un esfuerzo cortante τ_{uv} actuando en la superficie inclinada AC. El siguiente desarrollo permite desarrollar ecuaciones para dichos esfuerzos.

FIGURA 10–24 Elemento sometido a esfuerzo inicial con los ejes u y v incluidos. (a) Elemento con una cara inclinada. (b) Elemento tridimensional que muestra la cuña.



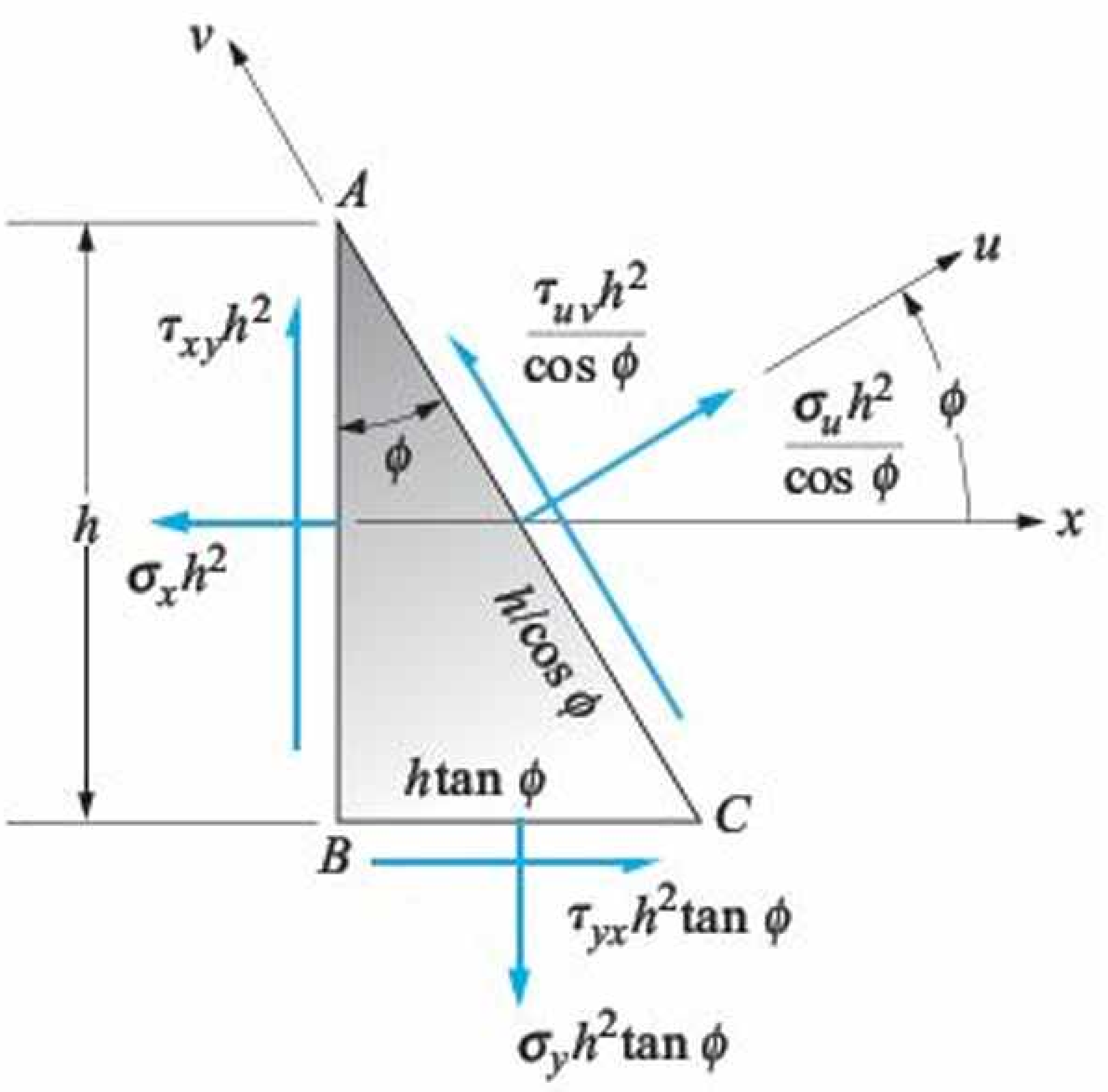


FIGURA 10–25
Diagrama de cuerpo libre de una cuña que muestra las fuerzas que actúan en cada una de sus caras.

Antes de proseguir, observe que la figura 10–24(a) muestra sólo dos dimensiones de un elemento que en realidad es un cubo tridimensional. La parte (b) de la figura muestra el cubo completo con la dimensión h en cada lado.

Esfuerzo normal en la dirección u, σ_u. Visualice una parte en forma de cuña del elemento inicial como se muestra en la figura 10–25. Observe cómo se localiza el ángulo ϕ. El lado AB es el lado izquierdo original del elemento inicial cuya altura es h. La base de la cuña, el lado BC, es sólo una parte de la base del elemento inicial, donde el ángulo ϕ determina la longitud.

$$BC = h \cdot \tan\phi$$

Asimismo, la longitud del lado inclinado de la cuña, AC, es

$$AC = \frac{h}{\cos\phi}$$

Estas longitudes son importantes porque ahora vamos a considerar todas las fuerzas que actúan en la cuña. Como la fuerza es el producto del esfuerzo por el área, tenemos que conocer el área en la cual actúa el esfuerzo. Por principio de cuentas, σ_x actúa en toda la cara izquierda de la cuña cuya área es h^2. Recuerde que el peralte de la cuña perpendicular al papel también es h. Entonces,

$$\text{fuerza producida por } \sigma_x = \sigma_x h^2$$

Si se utiliza un razonamiento similar,

$$\text{fuerza producida por } \sigma_y = \sigma_y h^2 \tan\phi$$
$$\text{fuerza producida por } \tau_{xy} = \tau_{xy} h^2$$
$$\text{fuerza producida por } \tau_{yx} = \tau_{yx} h^2 \tan\phi$$

También se deben considerar los esfuerzos que actúan en la cara inclinada de la cuña:

$$\text{fuerza producida por } \sigma_u = \frac{\sigma_u h^2}{\cos\phi}$$

$$\text{fuerza producida por } \tau_{uv} = \frac{\tau_{uv} h^2}{\cos\phi}$$

Ahora, si utilizamos el principio de equilibrio, podemos sumar las fuerzas en la dirección u. Con la ecuación resultante podemos determinar σ_u. El proceso se facilita si todas las fuerzas se descomponen en componentes perpendiculares y paralelas a la cara inclinada de la cuña. La figura 10–26 muestra lo anterior con cada una de las fuerzas excepto con las producidas por σ_u y τ_{uv} las que ya están alineadas con los ejes u y v. Entonces,

$$\sum F_u = 0 = \frac{\sigma_u h^2}{\cos\phi} - \sigma_x h^2 \cos\phi - \sigma_y h^2 \tan\phi \operatorname{sen}\phi + \tau_{xy} h^2 \operatorname{sen}\phi + \tau_{yx} h^2 \tan\phi \cos\phi$$

Como primer paso para resolver la ecuación anterior para σ_u, todos los términos incluyen h^2, el cual puede ser eliminado. Asimismo, observamos que $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ y por tanto si $\tan\phi = \operatorname{sen}\phi/\cos\phi$. La ecuación de equilibrio se vuelve entonces

$$0 = \frac{\sigma_u}{\cos\phi} - \sigma_x \cos\phi - \frac{\sigma_y \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\phi}{\cos\phi} + \tau_{xy} \operatorname{sen}\phi + \frac{\tau_{xy} \operatorname{sen}\phi \cos\phi}{\cos\phi}$$

Ahora multiplique por $\cos\phi$ para obtener

$$0 = \sigma_u - \sigma_x \cos^2\phi - \sigma_y \operatorname{sen}^2\phi + \tau_{xy} \operatorname{sen}\phi \cos\phi + \tau_{xy} \operatorname{sen}\phi \cos\phi$$

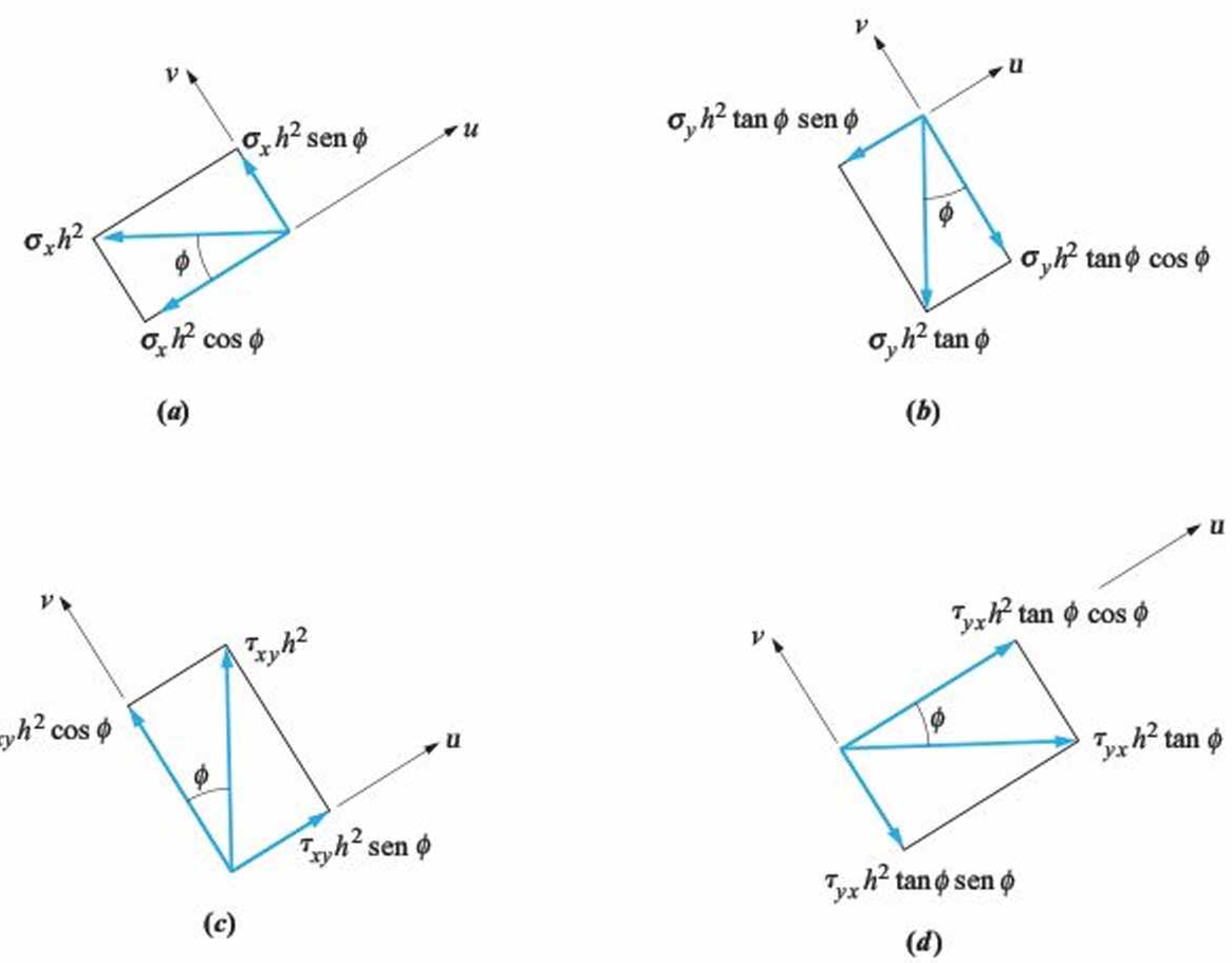


FIGURA 10–26
Descomposición de las fuerzas a lo largo de las direcciones u y v. (a) Componentes de la fuerza producida por σ_x. (b) Componentes de la fuerza producida por σ_y. (c) Componentes de la fuerza producida por τ_{xy}. (d) Componentes de la fuerza producida por τ_{yx}.

Combine los dos últimos términos y resuelva para σ_u.

$$\sigma_u = \sigma_x \cos^2 \phi + \sigma_y \operatorname{sen}^2 \phi - 2\tau_{xy} \operatorname{sen} \phi \cos \phi$$

Con esta fórmula se puede calcular σ_u, aunque se puede obtener una fórmula más conveniente con las siguientes identidades trigonométricas:

$$\cos^2 \phi = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2\phi$$
$$\operatorname{sen}^2 \phi = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2\phi$$
$$\operatorname{sen} \phi \cos \phi = \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2\phi$$

Después de sustituir se obtiene

$$\sigma_u = \tfrac{1}{2}\sigma_x + \tfrac{1}{2}\sigma_x \cos 2\phi + \tfrac{1}{2}\sigma_y - \tfrac{1}{2}\sigma_y \cos 2\phi - \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\phi$$

Al combinar los términos, obtenemos

Esfuerzo normal en la dirección *u*

$$\sigma_u = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\phi - \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\phi \qquad \textbf{(10–9)}$$

Se puede utilizar la ecuación (10–9) para calcular el esfuerzo normal en cualquier dirección siempre que se conozca la condición de esfuerzo en cualquier dirección, indicada por los ejes x y y.

Esfuerzo cortante, τ_{uv}, que actúa paralelo al eje de corte. A continuación se desarrollará la ecuación del esfuerzo cortante, τ_{uv}, que actúa paralelo al plano de corte y perpendicular a σ_u. De nueva cuenta, recurriendo a las figuras 10–25 y 10–26, podemos sumar las fuerzas que actúan en el elemento en forma de cuña en la dirección v.

$$\sum F_v = 0 = \frac{\tau_{uv} h^2}{\cos \phi} + \sigma_x h^2 \operatorname{sen} \phi - \sigma_y h^2 \tan \phi \cos \phi + \tau_{xy} h^2 \cos \phi - \tau_{yx} h^2 \tan \phi \operatorname{sen} \phi$$

Si se utilizan las mismas técnicas anteriores, esta ecuación se simplifica y resuelve para τ_{uv} y se obtiene

Esfuerzo cortante, τ_{uv} que actúa en la cara del elemento

$$\tau_{uv} = -\tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \operatorname{sen} 2\phi - \tau_{xy} \cos 2\phi \qquad \textbf{(10–10)}$$

La ecuación (10–10) se puede utilizar para calcular el esfuerzo cortante que actúa en la cara del elemento a cualquier orientación angular.

10–8 ESFUERZOS MÁXIMOS

En el diseño y el análisis del esfuerzo, en general se requieren los esfuerzos máximos para garantizar la seguridad del miembro de carga. En esta sección se desarrollarán las ecuaciones del *esfuerzo principal máximo*, *el esfuerzo principal mínimo* y el *esfuerzo cortante máximo*. Ambos esfuerzos principales son esfuerzos normales, ya sea de tensión o de compresión. El proceso incluye el uso de la ecuación (10–9) para determinar el ángulo ϕ al cual el esfuerzo normal es máximo y el uso de la ecuación (10–10) para determinar el ángulo al cual el esfuerzo cortante es máximo.

Esfuerzos principales. Por el estudio del cálculo, sabemos que el valor del ángulo ϕ al cual ocurre el esfuerzo normal máximo o mínimo se determina diferenciando la función e igualando el resultado a cero y luego resolviendo para ϕ. Diferenciando la ecuación (10–9) se obtiene

$$\frac{d\sigma_u}{d\phi} = 0 = 0 + \tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)(-\text{sen}\,2\phi)(2) - \tau_{xy}\cos 2\phi(2)$$

Dividiendo entre 2ϕ y simplificando se obtiene

$$0 = -(\sigma_x - \sigma_y)\tan 2\phi - 2\tau_{xy}$$

Resolviendo para 2ϕ se obtiene

$$\tan 2\phi = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{-\tau_{xy}}{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)} \qquad \textbf{(10–11)}$$

El ángulo ϕ es por tanto

Ángulo que localiza el esfuerzo principal máximo, σ_1

$$\phi = \tfrac{1}{2}\tan^{-1}\left[\frac{-\tau_{xy}}{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)}\right] \qquad \textbf{(10–12)}$$

Si sustituimos el valor de ϕ definido por las ecuaciones (10–11) y (10–12) en la ecuación (10–9), podemos desarrollar una ecuación para el esfuerzo normal máximo que actúa en el elemento. Además, podemos desarrollar la ecuación para el esfuerzo normal mínimo. Estos dos esfuerzos se llaman *esfuerzos principales* y σ_1 denota el *esfuerzo principal máximo* y σ_2 el *esfuerzo principal mínimo*.

Observe que según la ecuación (10–9) necesitamos valores de sen 2ϕ y cos 2ϕ. La figura 10–27 es un auxiliar gráfico para obtener expresiones para estas funciones. Los términos de la función tangente de la ecuación (10–11) definen los catetos opuesto y adyacente del triángulo rectángulo.

Sustituyendo en la ecuación (10–9) y simplificando se obtiene

Esfuerzo principal máximo, σ_1

$$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_1 = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{\left[\tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\right]^2 + \tau_{xy}^2} \qquad \textbf{(10–13)}$$

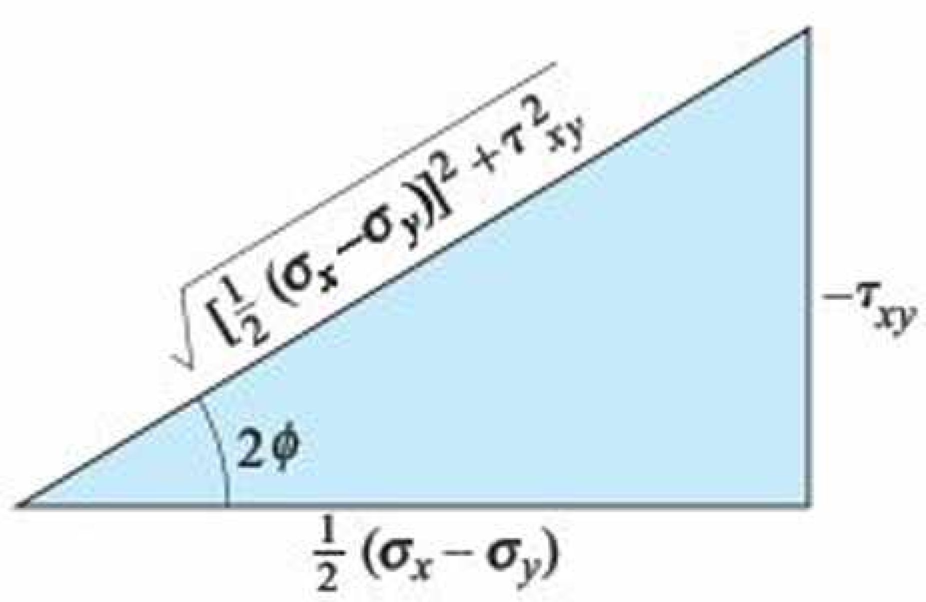
La ecuación (10–11) define el triángulo:

$$\tan 2\phi = \frac{-\tau_{xy}}{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)}$$

$$\text{sen}\,2\phi = \frac{-\tau_{xy}}{\sqrt{\left[\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\right]^2 + \tau_{xy}^2}}$$

$$\cos 2\phi = \frac{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)}{\sqrt{\left[\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\right]^2 + \tau_{xy}^2}}$$

FIGURA 10–27
Desarrollo de sen 2ϕ y cos 2ϕ para las fórmulas de esfuerzo principal.



Como la raíz cuadrada tiene dos valores posibles, + y –, también podemos determinar expresiones para el esfuerzo principal mínimo, σ_2.

Esfuerzo principal mínimo, σ_2

$$\sigma_{\text{mín}} = \sigma_2 = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \sqrt{[\tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)]^2 + \tau_{xy}^2} \qquad \textbf{(10–14)}$$

Se podría suponer que existe un esfuerzo cortante junto con estos esfuerzos normales. Se puede demostrar que si se sustituye el valor de ϕ de la ecuación (10–12) en la ecuación del esfuerzo cortante (10–10) el resultado es cero. En conclusión.

> En el elemento en el cual actúan los esfuerzos principales, el esfuerzo cortante es cero.

Esfuerzo cortante máximo. Se puede utilizar la misma técnica para determinar el esfuerzo cortante máximo con la ecuación (10–10). Diferenciando con respecto a ϕ e igualando el resultado a cero se obtiene

$$\frac{d\tau_{uv}}{d\phi} = 0 = -\tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)(\cos 2\phi)(2) - \tau_{xy}(-\text{sen}2\phi)(2)$$

Dividiendo entre cos 2ϕ y simplificando se obtiene

Ángulo que localiza el esfuerzo cortante máximo, $\tau_{\text{máx}}$

$$\tan 2\phi = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2\tau_{xy}} = \frac{\tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)}{\tau_{xy}} \qquad \textbf{(10–15)}$$

Resolviendo para ϕ se obtiene

$$\phi = \tfrac{1}{2}\tan^{-1}\left[\frac{\tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)}{\tau_{xy}}\right] \qquad \textbf{(10–16)}$$

Obviamente, el valor de ϕ de la ecuación (10–16) es diferente del de la ecuación (10–12). De hecho, veremos que los dos valores *siempre están a 45 grados uno de otro.*

La ecuación (10–15) define el triángulo:

$$\tan 2\phi = \frac{\tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)}{\tau_{xy}}$$

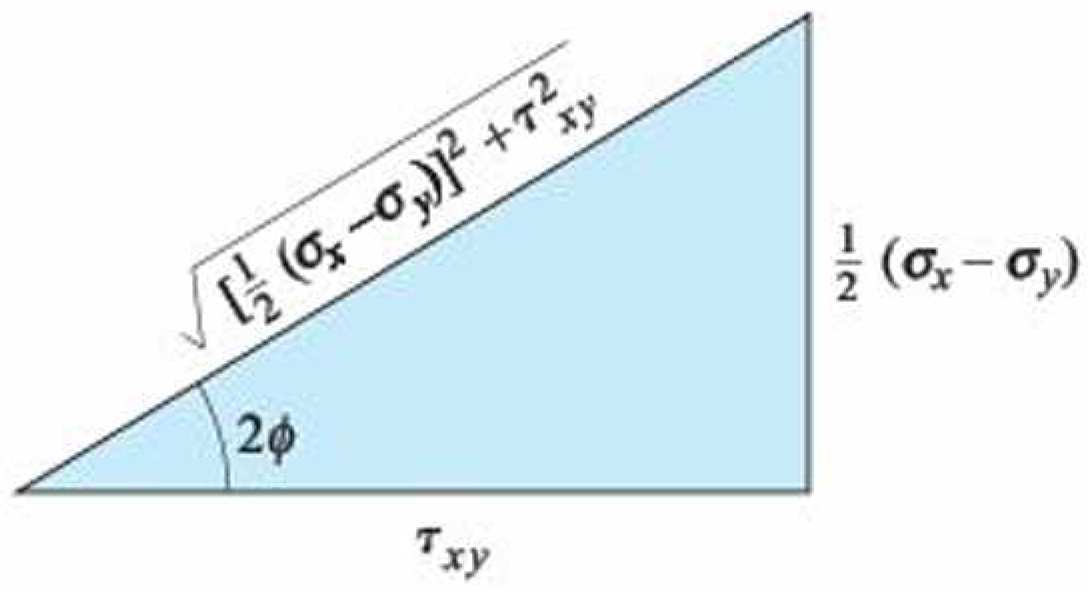
$$\text{sen } 2\phi = \frac{\tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)}{\sqrt{[\tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)]^2 + \tau_{xy}^2}}$$

$$\cos 2\phi = \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{[\tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)]^2 + \tau_{xy}^2}}$$

La figura 10–28 muestra el triángulo rectángulo, con el que podemos determinar sen 2ϕ y cos 2ϕ como lo hicimos en la figura 10–27. Si se sustituyen estos valores en la ecuación (10–10) se obtiene el esfuerzo cortante máximo.

Esfuerzo cortante máximo, $\tau_{\text{máx}}$

$$\tau_{\text{máx}} = \pm\sqrt{[\tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)]^2 + \tau_{xy}^2} \qquad \textbf{(10–17)}$$



$$\tan 2\phi = \frac{\frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)}{\tau_{xy}}$$

$$\operatorname{sen} 2\phi = \frac{\frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)}{\sqrt{[\frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)]^2+\tau_{xy}^2}}$$

$$\cos 2\phi = \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{[\frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)]^2+\tau_{xy}^2}}$$

FIGURA 10–28 Desarrollo de sen 2ϕ y cos 2ϕ para la fórmula de esfuerzo cortante máximo.

En este punto debemos verificar si existe un esfuerzo normal en el elemento que experimenta el esfuerzo cortante máximo. Si se sustituye el valor de ϕ de la ecuación (10–16) en la ecuación del esfuerzo normal general (10–9) se obtiene

Esfuerzo normal que actúa en el elemento sometido a esfuerzo cortante

$$\sigma_{prom} = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \qquad \textbf{(10–18)}$$

Con esta fórmula se calcula el *promedio* de los esfuerzos normales iniciales, σ_x y σ_y. Por tanto, podemos concluir que:

> En el elemento en el cual ocurre el esfuerzo cortante máximo, también habrá un esfuerzo normal igual al promedio de los esfuerzos normales iniciales.

10–9 CÍRCULO DE MOHR PARA DETERMINAR ESFUERZO

El uso de las ecuaciones (10–9) a (10–18) a menudo presenta dificultades por las numerosas combinaciones posibles de los signos de los términos σ_x, σ_y, τ_{xy} y ϕ. Las dos raíces de la raíz cuadrada y el hecho de que la función tangente inversa produce ángulos en cualquiera de los cuatro cuadrantes también presentan dificultades. Afortunadamente, existe un auxiliar gráfico, llamado *círculo de Mohr*, para resolver estos problemas. El uso del círculo de Mohr permite entender mejor el caso general de esfuerzo en un punto.

Se puede demostrar que las dos ecuaciones, (10–9) y (10–10), de los esfuerzos normal y cortante en un punto situado en cualquier dirección pueden combinarse y ordenarse en la forma de la ecuación de un círculo. Presentado por primera vez por Otto Mohr en 1895, el círculo permite un cálculo rápido y exacto de:

1. Los esfuerzos principales máximo y mínimo [ecuaciones (10–13) y (10–14)]
2. El esfuerzo cortante máximo [ecuación (10–17)]
3. Los ángulos de orientación del elemento sometido al esfuerzo principal y del elemento sometido al esfuerzo cortante máximo [ecuaciones (10–12) y (10–16)]
4. El esfuerzo normal que existe junto con el esfuerzo cortante máximo que actúa en el elemento sometido al esfuerzo cortante máximo [ecuación (10–18)]
5. La condición de esfuerzo a cualquier orientación angular del elemento sometido a esfuerzo [ecuaciones (10–9) y (10–10)]

Se puede utilizar el procedimiento descrito a continuación para dibujar el círculo de Mohr. En las figuras 10–29 a 10–31 se ilustra un ejemplo a medida que se van describiendo los pasos. Los pasos 1–7 se muestran en la figura 10–29 con el elemento sometido a esfuerzo inicial requerido para el paso 1 incluido. Para este ejemplo utilizamos el elemento sometido a esfuerzo inicial generalizado con σ_x de tensión (positivo), σ_y de compresión (negativo) y τ_{xy} actuando en sentido contrario al de las manecillas del reloj. La apariencia del círculo será diferente en

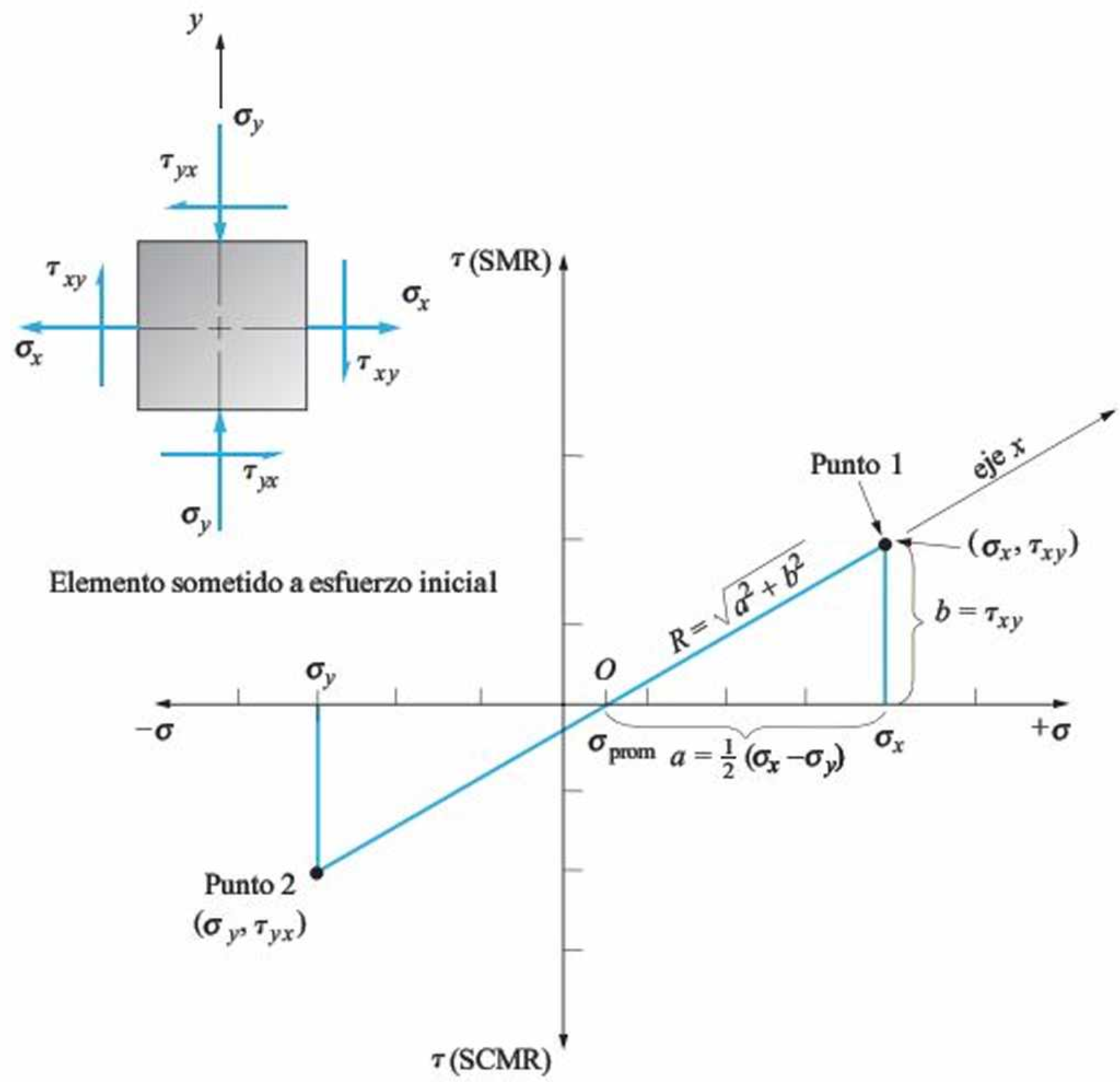


FIGURA 10–29 Pasos del 1 al 7 del procedimiento de construcción del círculo de Mohr.

los problemas que implican esfuerzos que actúan en direcciones diferentes. En este ejemplo no se utilizan datos numéricos y los resultados se dan en forma de símbolos para demostrar la naturaleza de las cantidades que integran el círculo de Mohr completo. Más adelante en este capítulo se presentan varios problemas con valores numéricos reales.

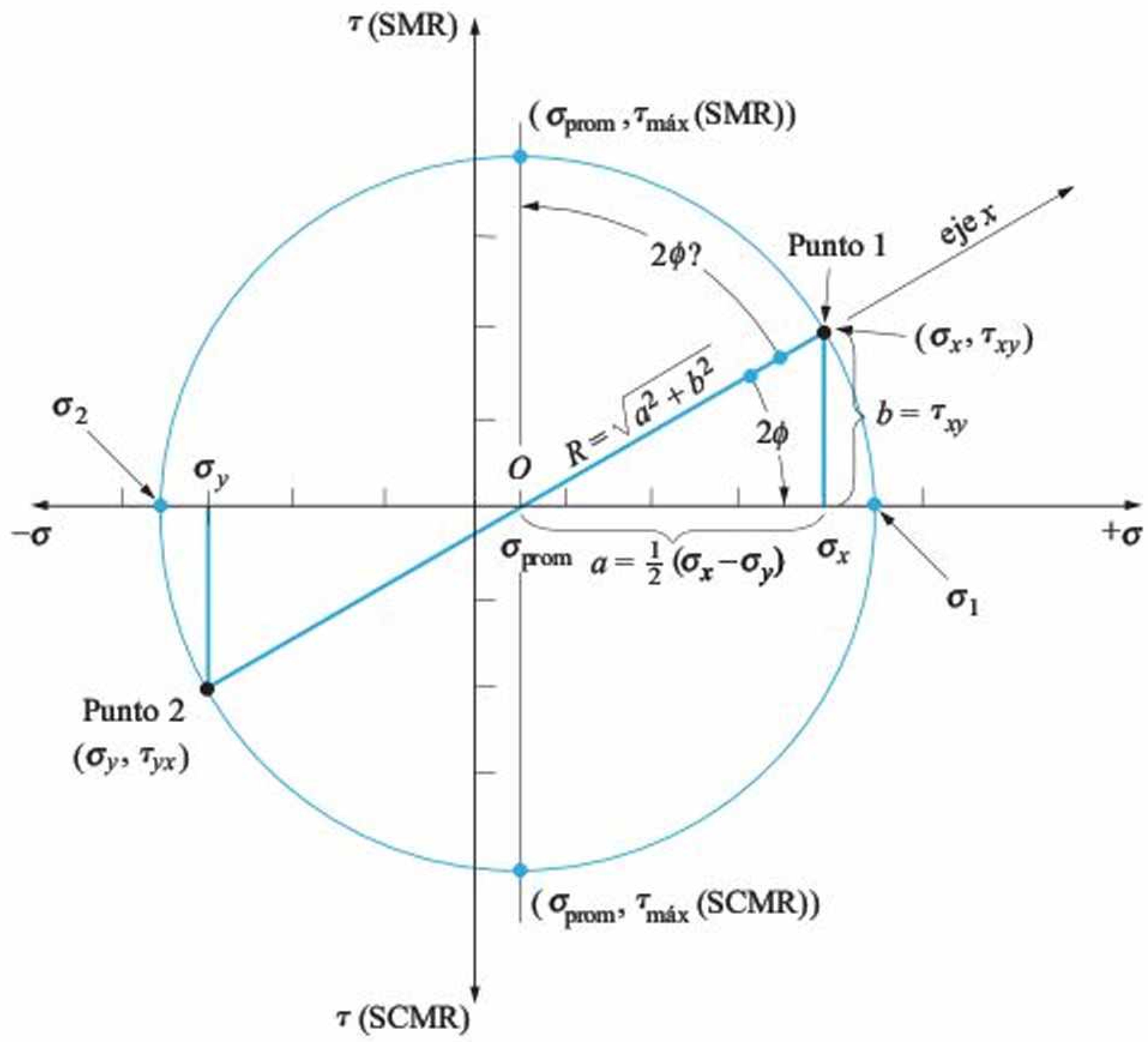


FIGURA 10–30 Círculo de Mohr terminado.

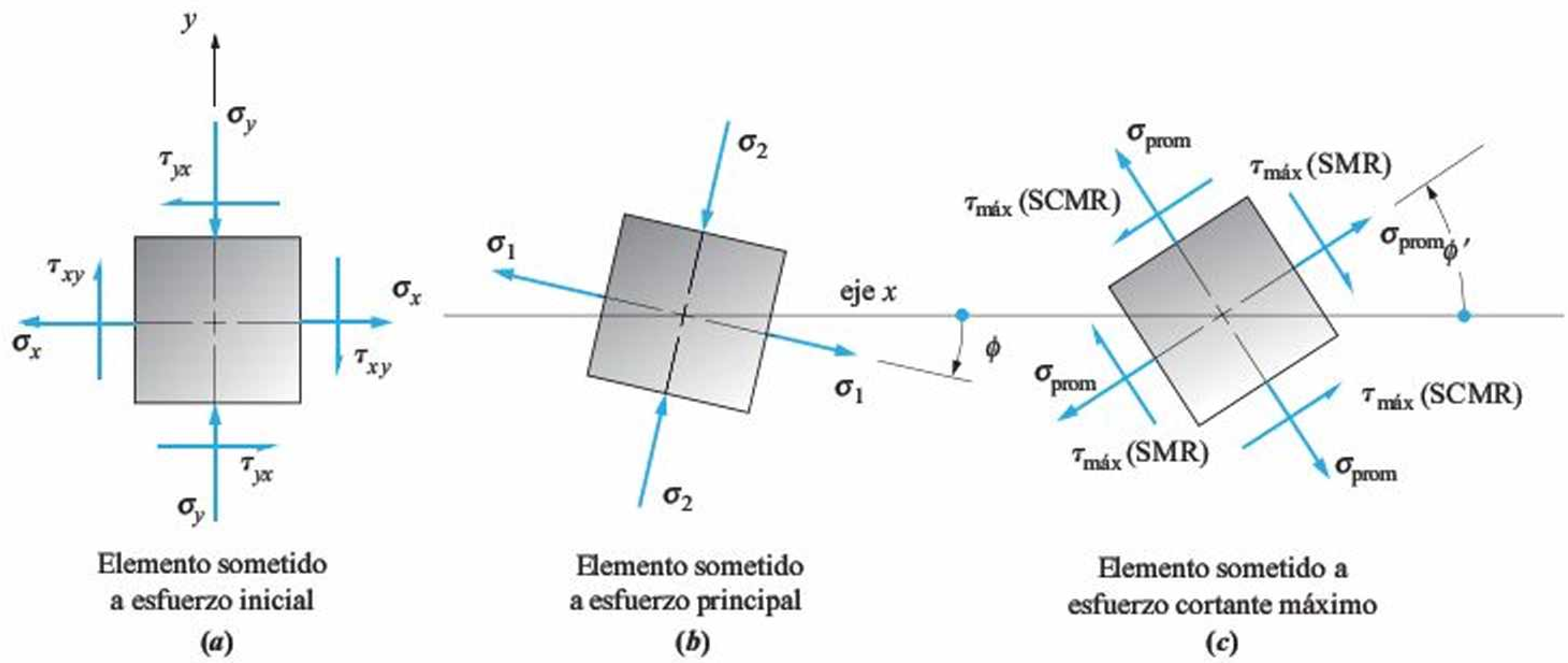


FIGURA 10–31 Forma general de los resultados finales del análisis con el círculo de Mohr.

El círculo de Mohr se traza en un sistema de ejes perpendiculares con el esfuerzo cortante, τ, marcado verticalmente y los esfuerzos normales, σ, horizontalmente, como se muestra en la figura 10–29. En este libro se utiliza la siguiente convención.

Convenciones de signos:

1. Los esfuerzos normales positivos (de tensión) actúan hacia la derecha.
2. Los esfuerzos normales negativos (de compresión) actúan hacia la izquierda.
3. Los esfuerzos cortantes que tienden a girar el elemento sometido a esfuerzo en sentido de las manecillas del reloj se marcan hacia arriba en el eje τ.
4. Los esfuerzos cortantes que tienden a girar el elemento sometido a esfuerzo en sentido contrario al de las manecillas del reloj se marcan hacia abajo.

Procedimiento para trazar el círculo de Mohr

1. Identifique la condición de esfuerzo en el punto de interés y represéntelo como el *elemento sometido a esfuerzo inicial* como se muestra en la figura 10–29.
2. La combinación de σ_x y τ_{xy} se marca como *punto 1* en el plano $\sigma - \tau$.
3. La combinación de σ_y y τ_{yx} se marca entonces como *punto* 2. Observe que τ_{xy} y τ_{yx} siempre actúan en direcciones opuestas. Por consiguiente, un punto se marcará arriba del eje σ y el otro debajo.
4. Trace una línea recta entre los dos puntos.
5. Esta línea corta el eje σ en el centro del círculo de Mohr, el cual también es el valor del *esfuerzo normal promedio* aplicado al elemento sometido a esfuerzo inicial. El centro se localiza con los datos utilizados para marcar los puntos o se calcula con la ecuación (10–18), repetida aquí:

$$\sigma_{prom} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$$

Por comodidad, designe el centro como *O*.

6. Identifique la línea que parte del punto O y pasa por el punto 1 (σ_x, τ_{xy}) como eje x. Esta línea corresponde al eje x original y es esencial para correlacionar los datos del círculo de Mohr con las direcciones originales x y y.
7. Los puntos O, σ_x y el punto 1 forman un triángulo rectángulo importante porque la distancia del punto O al punto 1, la hipotenusa del triángulo, es igual al radio del círculo, R. Si llamamos a y b a los otros dos lados, se pueden hacer los cálculos siguientes.

$$a = \tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)$$
$$b = \tau_{xy}$$
$$R = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{[\tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)]^2 + \tau_{xy}^2}$$

Observe que la ecuación de R es idéntica a la ecuación (10–17) del esfuerzo cortante máximo en el elemento. Por tanto,

La longitud del radio del círculo de Mohr es igual a la magnitud del esfuerzo cortante máximo.

Los pasos 8–11 se muestran en la figura 10–30.

8. Trace el círculo completo con el centro en O y el radio R.
9. Trace el diámetro vertical del círculo. Las coordenadas del punto situado en la parte superior del círculo son (σ_{prom}, $\tau_{máx}$) donde el esfuerzo cortante actúa en sentido de las manecillas del reloj. El punto situado en la parte inferior del círculo representa (σ_{prom}, $\tau_{máx}$) donde el esfuerzo cortante actúa en sentido contrario a las manecillas del reloj.
10. Identifique los puntos en el eje σ s en los extremos del diámetro horizontal como σ_1 a la derecha (el esfuerzo principal máximo) y σ_2 a la izquierda (el esfuerzo principal mínimo). Observe que el esfuerzo cortante es cero en estos puntos.
11. Determine los valores de σ_1 y σ_2 con

$$\sigma_1 = \text{“}O\text{”} + R \qquad \textbf{(10–19)}$$
$$\sigma_2 = \text{“}O\text{”} - R \qquad \textbf{(10–20)}$$

donde “O” representa la coordenada del centro del círculo, σ_{prom}, y R es su radio. Por tanto, las ecuaciones (10–19) y (10–20) son idénticas a las ecuaciones (10–13) y (10–14) de los esfuerzos principales.

Los pasos siguientes determinan los ángulos de orientación del elemento sometido al esfuerzo principal y del elemento sometido al esfuerzo cortante máximo. Un concepto importante a recordar es que los *ángulos obtenidos con el círculo de Mohr son el doble de los ángulos verdaderos*. La razón de esto es que las ecuaciones en las que está basado, las ecuaciones (10–9) y (10–10), son funciones de 2ϕ.

12. La orientación de elemento sometido a esfuerzo principal se determina calculando el ángulo que forma el eje x con el eje “σ_1”, designado 2ϕ en la figura 10–30. Con los datos que contiene el círculo se puede ver que

$$2\phi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

El argumento de esta función tangente inversa corresponde al valor absoluto del argumento mostrado en la ecuación (10–12). Los problemas que provocan los signos del ángulo resultante se evitan considerando la *dirección del eje x al eje σ_1* en el círculo, en el sentido de las manecillas del reloj en este ejemplo. Entonces el elemento sometido a esfuerzo principal se hace girar en la *misma dirección* a partir del eje x en una cantidad ϕ para localizar la cara en la cual actúa el esfuerzo principal máximo, σ_1.

13. Trace el elemento sometido a esfuerzo principal en su orientación apropiada determinada con el paso 12, con los dos esfuerzos principales σ_1 y σ_2 mostrados [vea la figura 10–31 (a) y (b)].
14. La orientación del elemento sometido a esfuerzo cortante máximo se determina con el ángulo del eje x al eje $\tau_{máx}$, designado $2\phi'$ en la figura 10–30. En este ejemplo,

$$2\phi' = 90° - 2\phi$$

Con trigonometría se puede demostrar que esto equivale a determinar la tangente inversa de *a/b*, el recíproco del argumento utilizado para determinar 2ϕ. Por tanto, es una evaluación efectiva de la ecuación (10–16) derivada para determinar el ángulo de orientación del elemento en el cual actúa el esfuerzo cortante máximo.

De nueva cuenta los problemas con signos para el ángulo resultante se evitan considerando la *dirección del eje x al eje* $\tau_{máx}$ en el círculo, en el sentido de las manecillas del reloj en este ejemplo. Entonces el elemento sometido a esfuerzo cortante máximo se hace girar *en la misma dirección* a partir del eje x en una cantidad ϕ' para localizar la cara en la cual actúa el esfuerzo cortante máximo.
15. Trace el elemento sometido a esfuerzo cortante máximo en su orientación apropiada, determinada con el paso 14, con los esfuerzos cortantes y el esfuerzo normal promedio en las cuatro caras [vea la figura 10–31(c)].

En general, la figura 10–31 es el resultado deseado de un análisis con el círculo de Mohr. Se muestra el elemento sometido a esfuerzo inicial que establece los ejes x y y, el elemento sometido a esfuerzo principal con su rotación apropiada con respecto al eje x, y el elemento sometido a esfuerzo cortante máximo también se traza con su orientación apropiada con respecto al eje x.

El problema de ejemplo 10–5 demuestra este procedimiento con datos específicos de los esfuerzos que actúan en el elemento sometido a esfuerzos iniciales.

Problema de ejemplo 10–5

Se determinó que un punto de un miembro de carga se encuentra sometido a la siguiente condición de esfuerzo:

$$\sigma_x = 400 \text{ Mpa} \qquad \sigma_y = -300 \text{ Mpa} \qquad \tau_{xy} = 200 \text{ MPa (SMR)}$$

Realice lo siguiente:

(a) Trace el elemento sometido a esfuerzo inicial.
(b) Trace el círculo de Mohr completo con los puntos críticos marcados.
(c) Trace el elemento sometido a esfuerzo principal.
(d) Trace el elemento sometido a esfuerzo cortante máximo.

Solución Se utilizará el *Procedimiento de 15 pasos para trazar el círculo de Mohr* para resolver el problema. Los resultados numéricos de los pasos 1–12 se resumen a continuación y se muestran en la figura 10–32.

Paso 1. El elemento sometido a esfuerzo inicial se muestra en la parte superior izquierda de la figura 10–32.

Paso 2. El punto 1 se marca en $\sigma_x = 400$ MPa y $\tau_{xy} = 200$ MPa en el cuadrante 1.

Paso 3. El punto 2 se marca en $\sigma_y = -300$ MPa y $\tau_{yx} = -200$ MPa en el cuadrante 3.

Paso 4. Se traza la línea del punto 1 al punto 2.

Paso 5. La línea del paso 4 cruza el eje σ por el punto correspondiente al esfuerzo normal promedio aplicado, llamado punto O en la figura 10–32, calculado con

$$\sigma_{\text{prom}} = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \tfrac{1}{2}[400 + (-300)] = 50\,\text{MPa}$$

Paso 6. El punto O es el centro del círculo. La línea del punto O que pasa por el punto 1 se designa como eje x para que corresponda al eje x en el elemento sometido a esfuerzo inicial.

Paso 7. Los valores de a, b y R se determinan con el triángulo formado por las líneas que van del punto O al punto 1 a $\sigma_x = 400$ MPa y de regreso al punto O. El lado inferior del triángulo es,

$$a = \tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) = \tfrac{1}{2}[400 - (-300)] = 350\,\text{MPa}$$

El lado vertical del triángulo, b, es:

$$b = \tau_{xy} = 200\,\text{MPa}$$

El radio del círculo, R, se calcula con:

$$R = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(350)^2 + (200)^2} = 403\,\text{MPa}$$

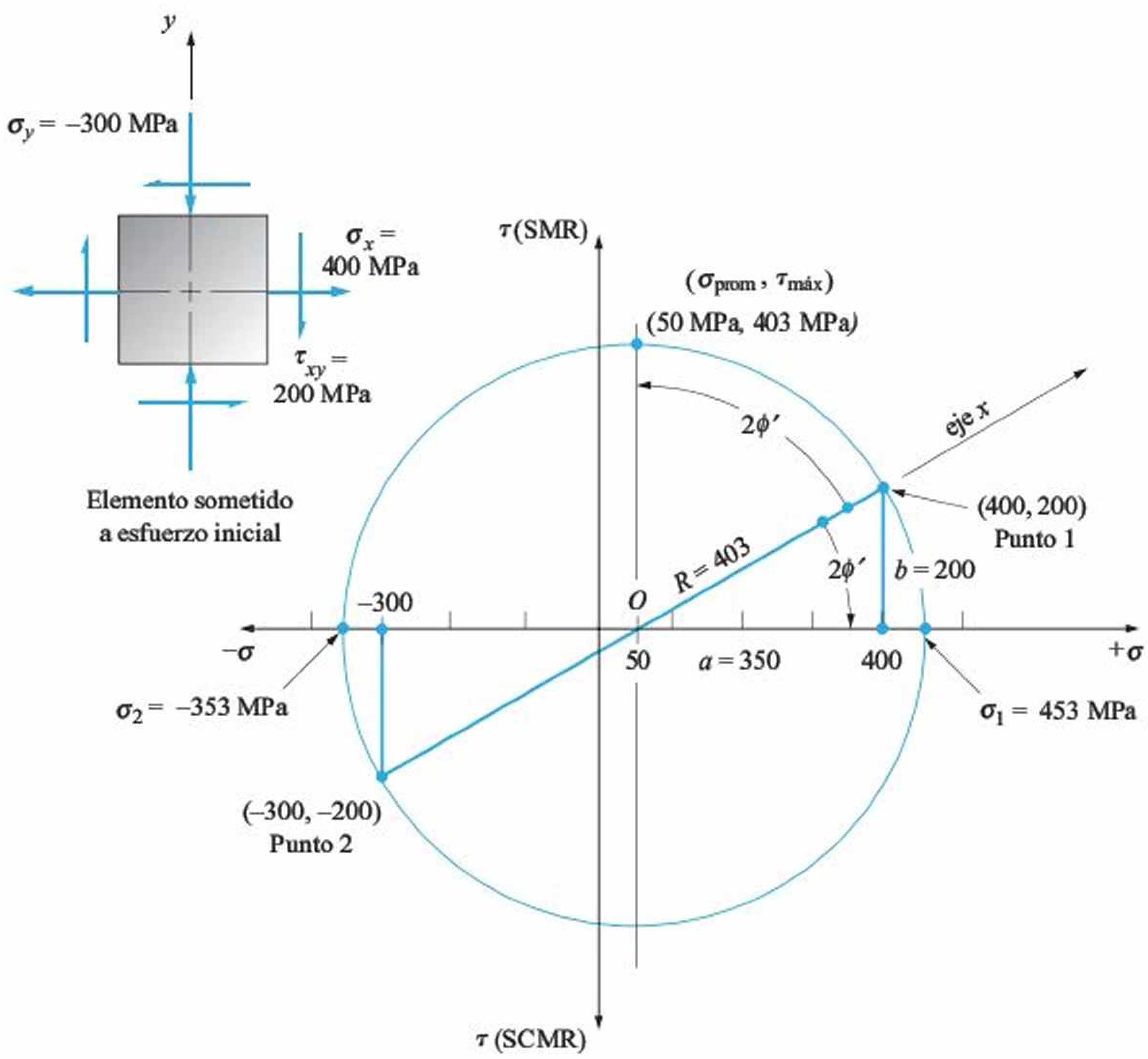


FIGURA 10–32 Círculo de Mohr completo del problema de ejemplo 10–15.

Paso 8. Este es el trazo del círculo con el punto O como centro en $\sigma_{prom} = 50$ MPa y radio $R = 403$ MPa.

Paso 9. El diámetro vertical del círculo se traza a través del punto O. La intersección de esta línea con el círculo en la parte superior señala el valor de $\tau_{máx} = 403$ MPa, el mismo valor de R.

Paso 10. El esfuerzo principal máximo, σ_1, se encuentra en el extremo derecho del diámetro horizontal del círculo y el esfuerzo principal mínimo, σ_2, en el extremo izquierdo.

Paso 11. Los valores de σ_1 y σ_2 son

$$\sigma_1 = O + R = 50 + 403 = 453 \text{ MPa}$$
$$\sigma_2 = O - R = 50 - 403 = -353 \text{ MPa}$$

Paso 12. El ángulo 2ϕ se muestra en el círculo como el ángulo del eje x al eje σ_1, una rotación en el sentido de las manecillas del reloj. El valor se calcula con

$$2\phi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{200}{350}\right) = 29.74°$$

Observe que 2ϕ es una rotación en sentido de las manecillas del reloj desde el eje x a σ_1 en el círculo.

$$\phi = \frac{29.74°}{2} = 14.87°$$

Paso 13. Con los resultados de los pasos 11 y 12, se traza el elemento sometido a esfuerzo principal, como se muestra en la figura 10–33(b). El elemento aparece con un giro de 14.87° en el sentido de las manecillas del reloj a partir del eje x original hacia la cara en la cual actúa el esfuerzo de tensión $\sigma_1 = 453$ MPa. El esfuerzo de compresión $\sigma_2 = -353$ MPa actúa en las caras perpendiculares a las caras σ_1.

Paso 14. El ángulo $2\phi'$ se muestra en la figura 10–32 trazado a partir del eje x en sentido contrario a las manecillas del reloj hacia el diámetro vertical que localiza $\tau_{máx}$ en la parte superior del círculo. Su valor se determina en cualquiera de dos maneras: Primero, utilizando la

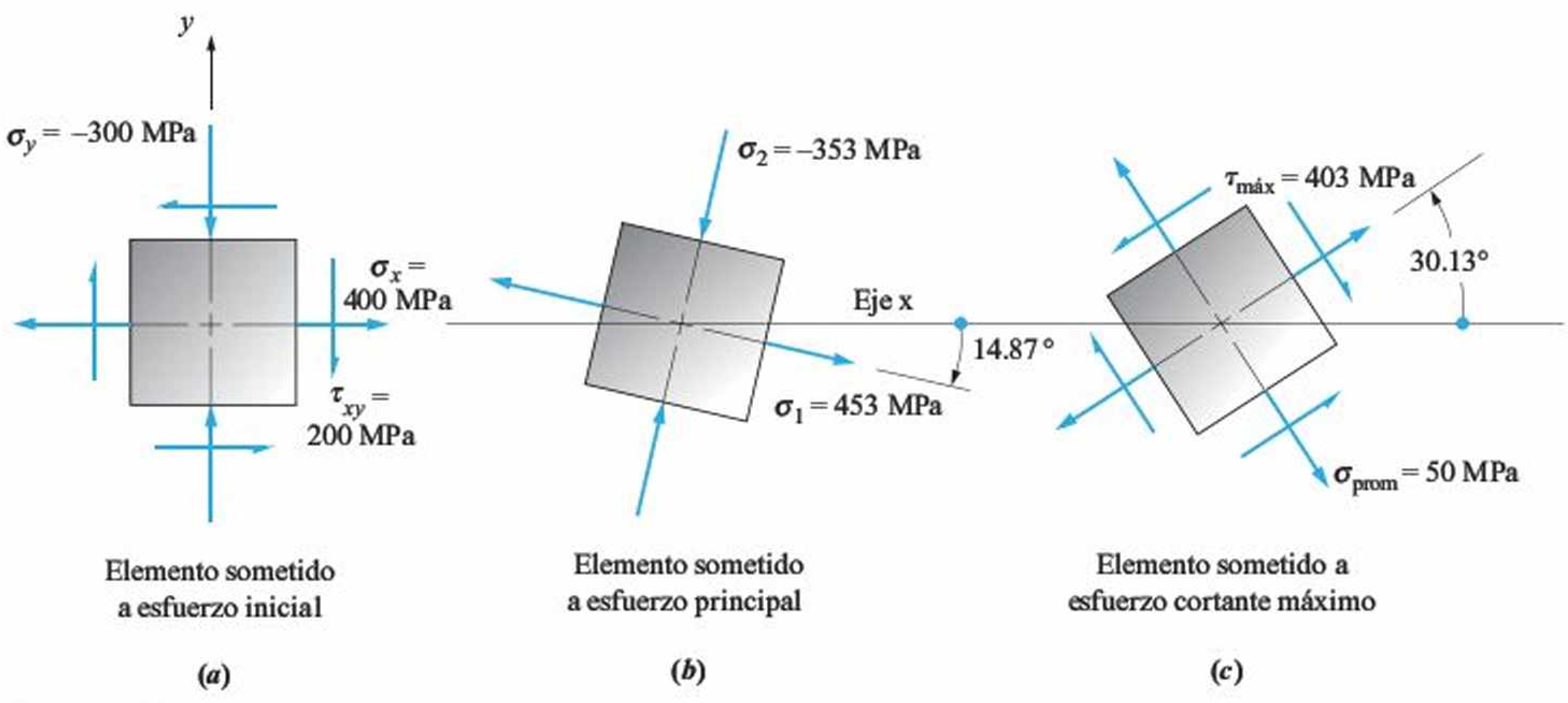


FIGURA 10–33 Resultados del problema de ejemplo 10–5.

ecuación (10–16), observe que el numerador es el valor de a y que el denominador es el valor de b obtenidos con la construcción del círculo. Entonces

$$2\phi' = \tan^{-1}(a/b) = \tan^{-1}(350/200) = 60.26° \text{ SCMR}$$

O, con la geometría del círculo, podemos calcular

$$2\phi' = 90° - 2\phi = 90° - 29.74° = 60.26° \text{ SCMR}$$

Por tanto el ángulo ϕ' es la mitad de $2\phi'$.

$$\phi' = \frac{60.26°}{2} = 30.13°$$

Paso 15. El elemento sometido a esfuerzo cortante máximo se traza en la figura 10–33(c), con un giro de 30.13° en sentido contrario a las manecillas del reloj a partir del eje x original hacia la cara en la cual actúa el $\tau_{máx}$ positivo. El esfuerzo cortante máximo de 403 Mpa se muestra en las cuatro caras con vectores que forman los dos pares opuestos característicos de los esfuerzos cortantes que actúan en un elemento sometido a esfuerzo. También se muestra el esfuerzo de tensión $\sigma_{máx}$ = 50 Mpa que actúa en las cuatro caras del elemento.

Resumen de los resultados del problema de ejemplo 10–5 Círculo de Mohr

Datos σ_x = 400 MPa σ_y = –300 Mpa τ_{xy} = 200 MPa SMR

Resultados Figuras 10–32 y 10–33.

$$\sigma_1 = 453 \text{ MPa} \qquad \sigma_2 = -353 \text{ MPa} \qquad \phi = 14.87° \text{ SMR hacia el eje } x$$
$$\tau_{máx} = 403 \text{ MPa} \qquad \sigma_{prom} = 50 \text{ MPa} \qquad \phi' = 30.13° \text{ SCMR hacia el eje } x$$

Comentario El eje x se encuentra en el primer cuadrante.

Ejemplos del uso del círculo de Mohr

Se seleccionaron los datos del ejemplo 10–5 de la sección precedente y de los problemas de ejemplo 10–6 a 10–11 siguientes para demostrar una amplia variedad de resultados. Una variable importante es el cuadrante donde se encuentra el eje x y la definición correspondiente de los ángulos de rotación del elemento sometido a esfuerzo principal y del elemento sometido a esfuerzo cortante.

Los problemas de ejemplo 10–9, 10–10 y 10–11 presentan casos especiales de esfuerzo biaxial sin cortante, tensión uniaxial sin cortante y cortante puro. Éstos le ayudarán a entender el comportamiento de miembros de carga sometidos a tales esfuerzos.

La solución de cada uno de los ejemplos siguientes es el círculo de Mohr mismo junto con los elementos sometidos a esfuerzo, apropiadamente marcados. En cada problema, los objetivos son:

a. Trazar el elemento sometido a esfuerzo inicial.
b. Trazar el círculo de Mohr completo con los puntos críticos marcados.
c. Trazar el elemento sometido a esfuerzo principal completo.
d. Trazar el elemento sometido a cortante completo

Problema de ejemplo 10–6 Círculo de Mohr

Datos $\sigma_x = 60\,\text{ksi} \qquad \sigma_y = -40\,\text{ksi} \qquad \tau_{xy} = 30\,\text{ksi SCMR}$

Resultados Figura 10–34.

$$\sigma_1 = 68.3\,\text{ksi} \qquad \sigma_2 = -48.3\,\text{ksi} \qquad \phi = 15.48^\circ\,\text{SCMR}$$
$$\tau_{\text{máx}} = 58.3\,\text{ksi} \qquad \sigma_{\text{prom}} = 10.0\,\text{ksi} \qquad \phi' = 60.48^\circ\,\text{SCMR}$$

Comentario El eje x se encuentra en el segundo cuadrante.

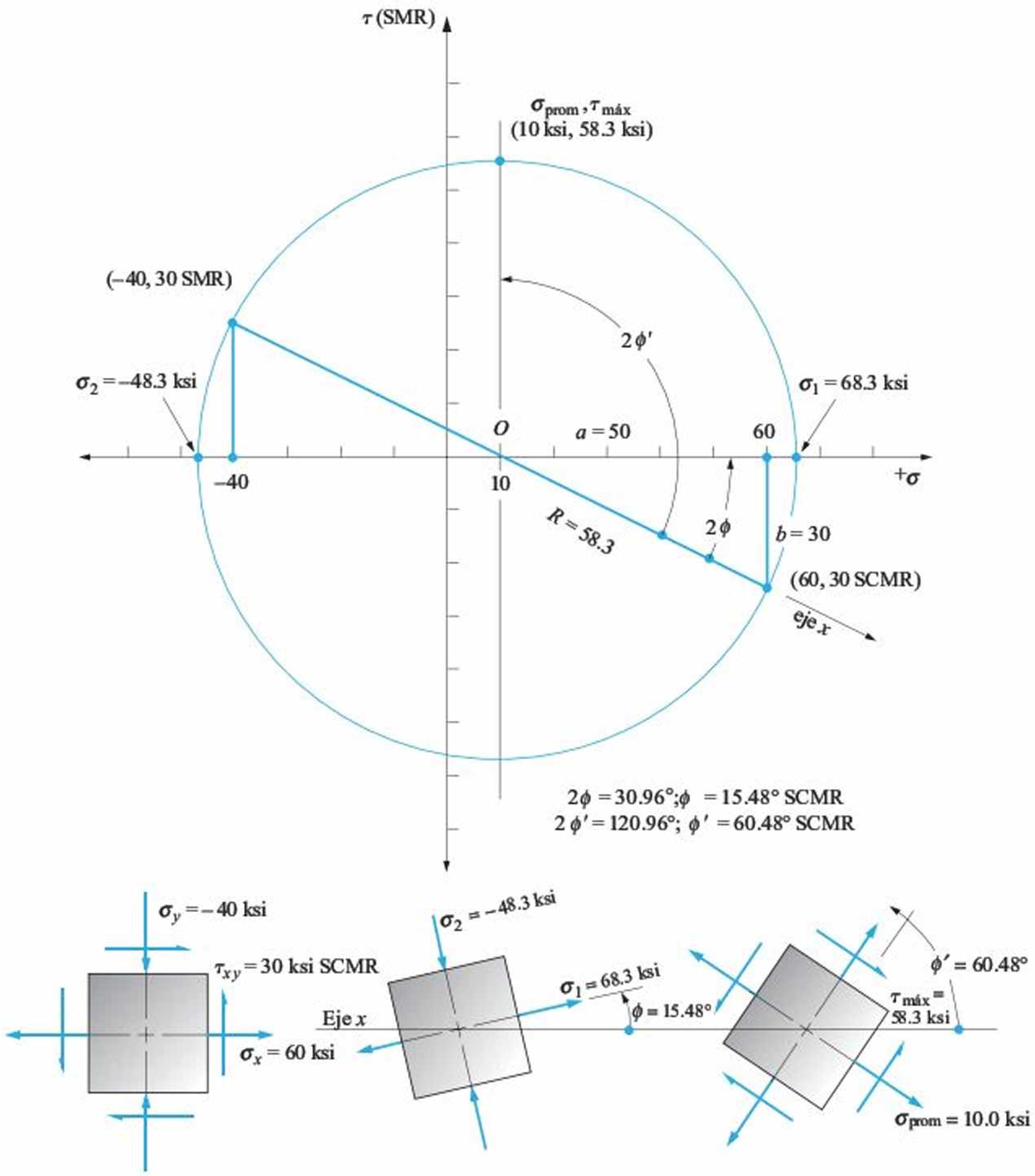


FIGURA 10–34 Resultados del problema de ejemplo 10–6. Eje X en el segundo cuadrante.

Problema de ejemplo 10–7 Círculo de Mohr

Datos $\sigma_x = -120\ \text{MPa} \quad \sigma_y = 180\ \text{MPa} \quad \tau_{xy} = 80\ \text{MPa SCMR}$

Resultados Figura 10–35.

$$\sigma_1 = 200\ \text{MPa} \quad \sigma_2 = -140\ \text{MPa} \quad \phi = 75.96°\ \text{SCMR}$$
$$\tau_{máx} = 170\ \text{MPa} \quad \sigma_{prom} = 30\ \text{MPa} \quad \phi' = 59.04°\ \text{SMR}$$

Comentario El eje x se encuentra en el tercer cuadrante.

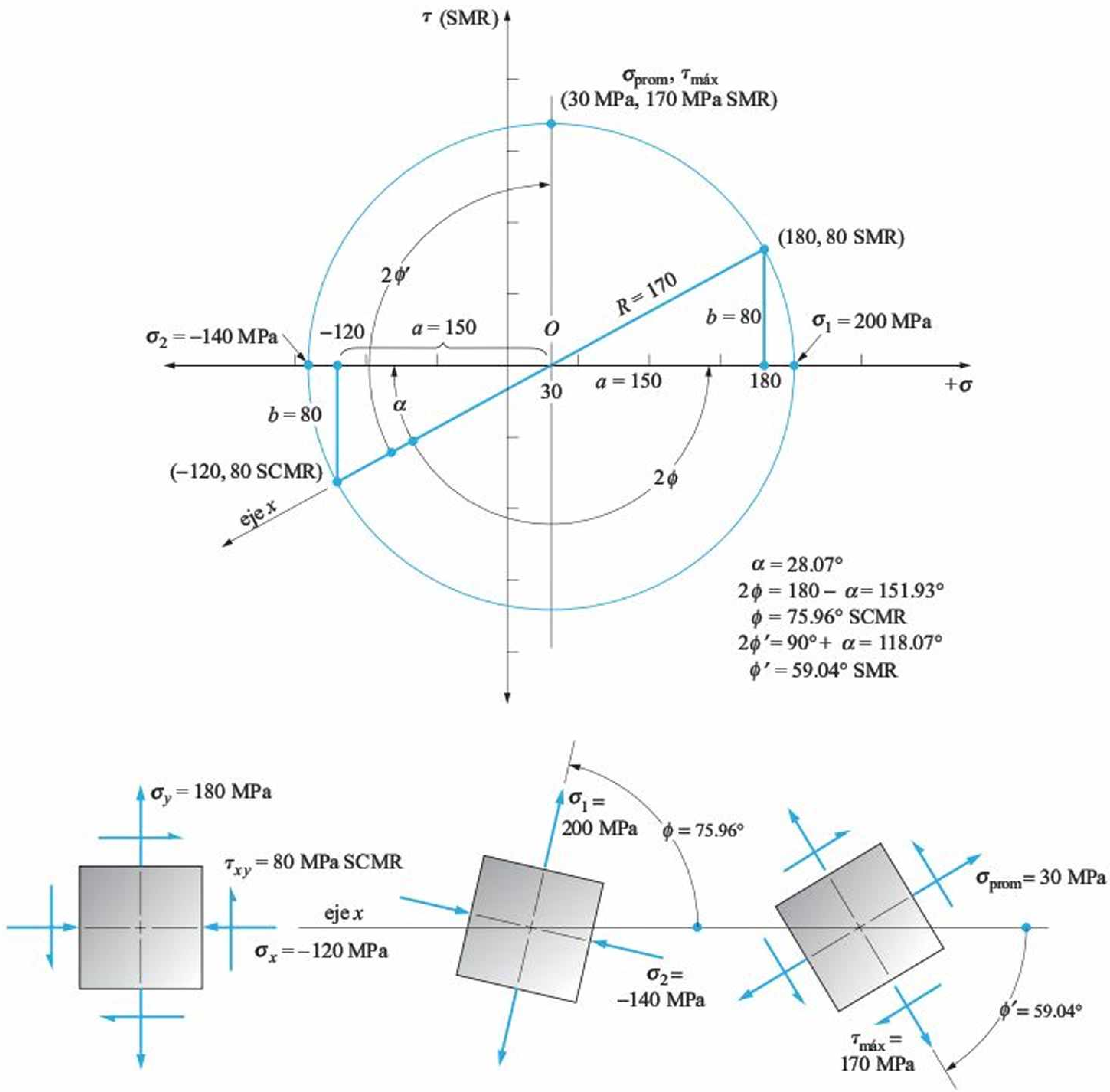


FIGURA 10–35 Resultados del problema de ejemplo 10–7. Eje X en el tercer cuadrante.

Problema de ejemplo 10–8 Círculo de Mohr

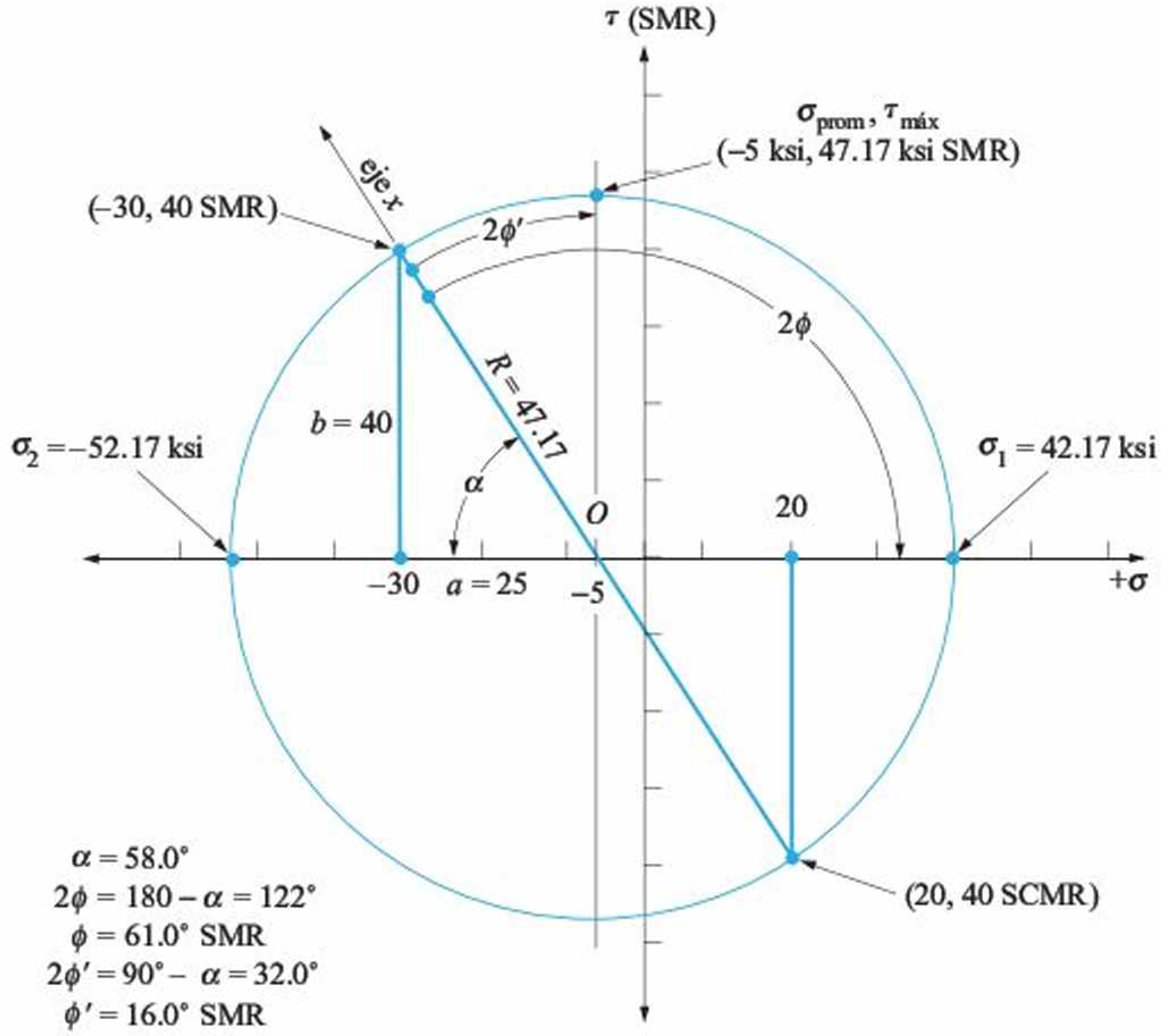
Datos $\sigma_x = -30$ ksi $\sigma_y = 20$ ksi $\tau_{xy} = 40$ ksi SMR

Resultados Figura 10–36.

$\sigma_1 = 42.17$ ksi $\sigma_2 = -52.17$ ksi $\phi = 61.0°$ SMR

$\tau_{máx} = 47.17$ ksi $\sigma_{prom} = -5.0$ ksi $\phi' = 16.0°$ SMR

Comentario El eje x se encuentra en el cuarto cuadrante.



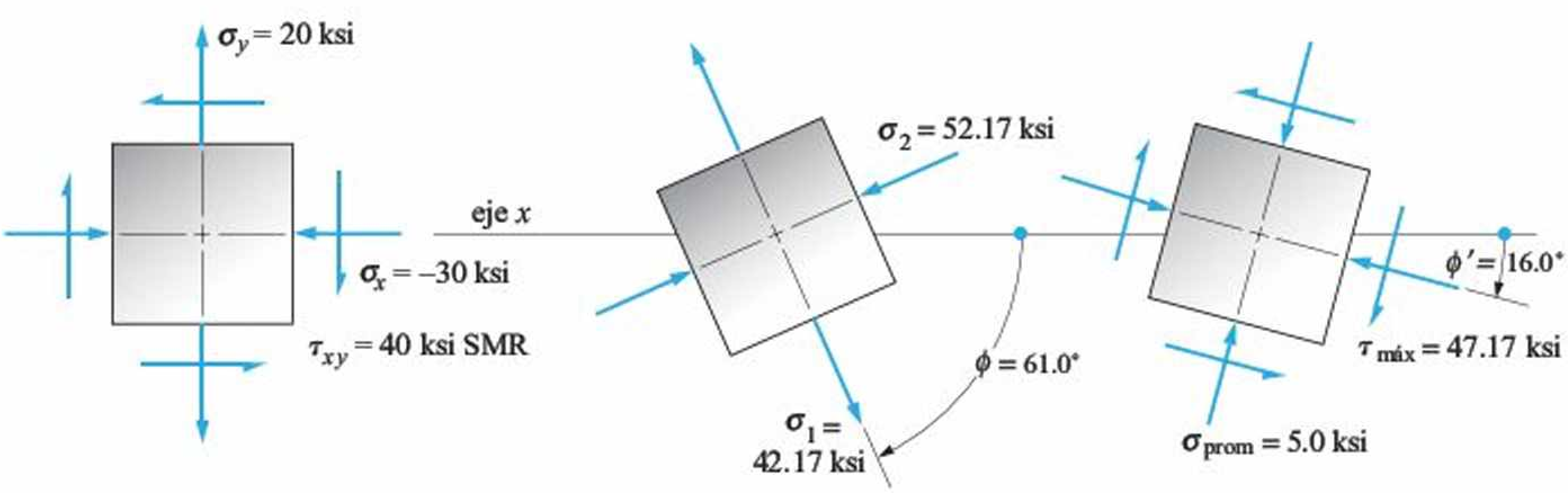


FIGURA 10–36 Resultados del problema de ejemplo 10–8. Eje X en el cuarto cuadrante.

Problema de ejemplo 10–9 Círculo de Mohr

Datos $\sigma_x = 220\,\text{MPa}$ $\sigma_y = -120\,\text{MPa}$ $\tau_{xy} = 0\,\text{MPa}$

Resultados Figura 10–38.

$\sigma_1 = 220\,\text{MPa}$ $\sigma_2 = -120\,\text{MPa}$ $\phi = 0°$

$\tau_{\text{máx}} = 170\,\text{MPa}$ $\sigma_{\text{prom}} = 50\,\text{MPa}$ $\phi' = 45.0°$ SCMR

Comentario Caso especial de esfuerzo biaxial sin cortante en el elemento dado.

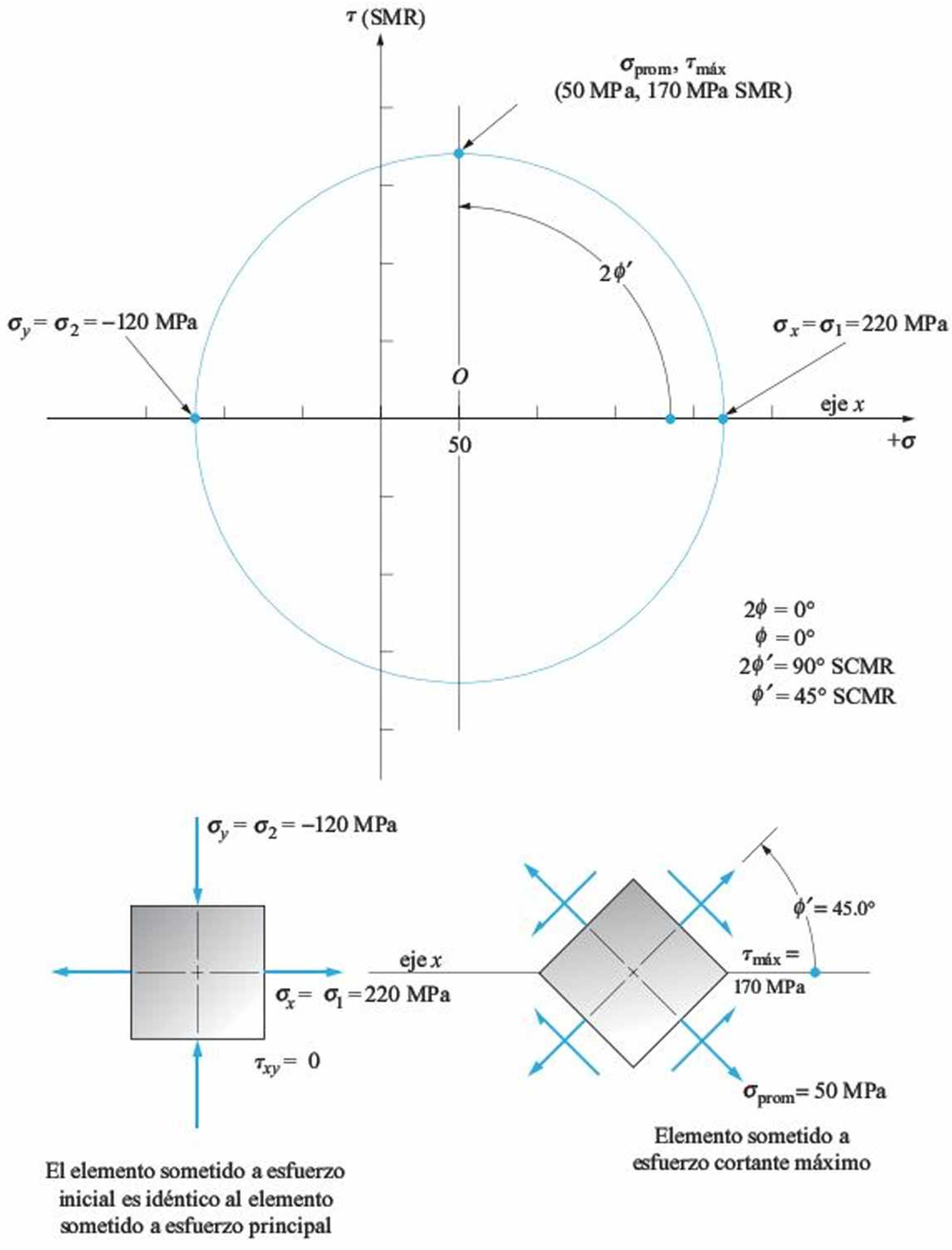


FIGURA 10–37 Resultados del problema de ejemplo 10–9. Caso especial de esfuerzo biaxial sin cortante.

Problema de ejemplo 10–10 Círculo de Mohr

Datos $\sigma_x = 40$ ksi $\quad \sigma_y = 0$ ksi $\quad \tau_{xy} = 0$ ksi

Resultados Figura 10–38.

$$\sigma_1 = 40 \text{ ksi} \qquad \sigma_2 = 0 \text{ ksi} \qquad \phi = 0°$$
$$\tau_{máx} = 20 \text{ ksi} \qquad \sigma_{prom} = 20 \text{ ksi} \qquad \phi' = 45.0° \text{ SCMR}$$

Comentario Caso especial de tensión uniaxial sin cortante.

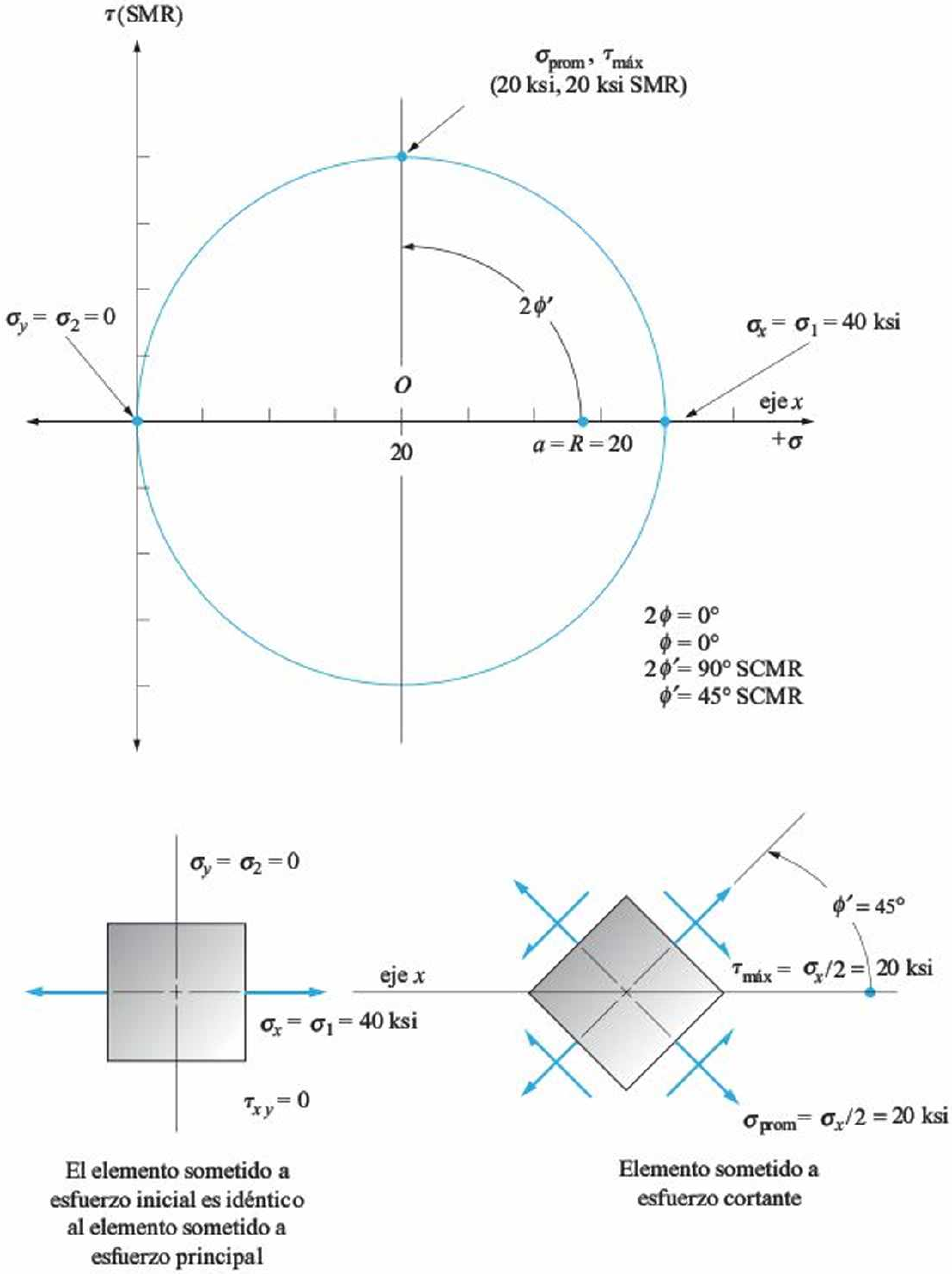


FIGURA 10–38 Resultados del problema de ejemplo 10–10. Caso especial de tensión uniaxial.

Problema de ejemplo 10–11 Círculo de Mohr

Datos $\sigma_x = 0\,\text{ksi}$ $\quad \sigma_y = 0\,\text{ksi}$ $\quad \tau_{xy} = 40\,\text{ksi SMR}$

Resultados Figura 10–39.

$\sigma_1 = 40\,\text{ksi}$ $\quad \sigma_2 = -40\,\text{ksi}$ $\quad \phi = 45°\,\text{SMR}$

$\tau_{\text{máx}} = 40\,\text{ksi}$ $\quad \sigma_{\text{prom}} = 0\,\text{ksi}$ $\quad \phi' = 0°$

Comentario Caso especial de cortante puro.

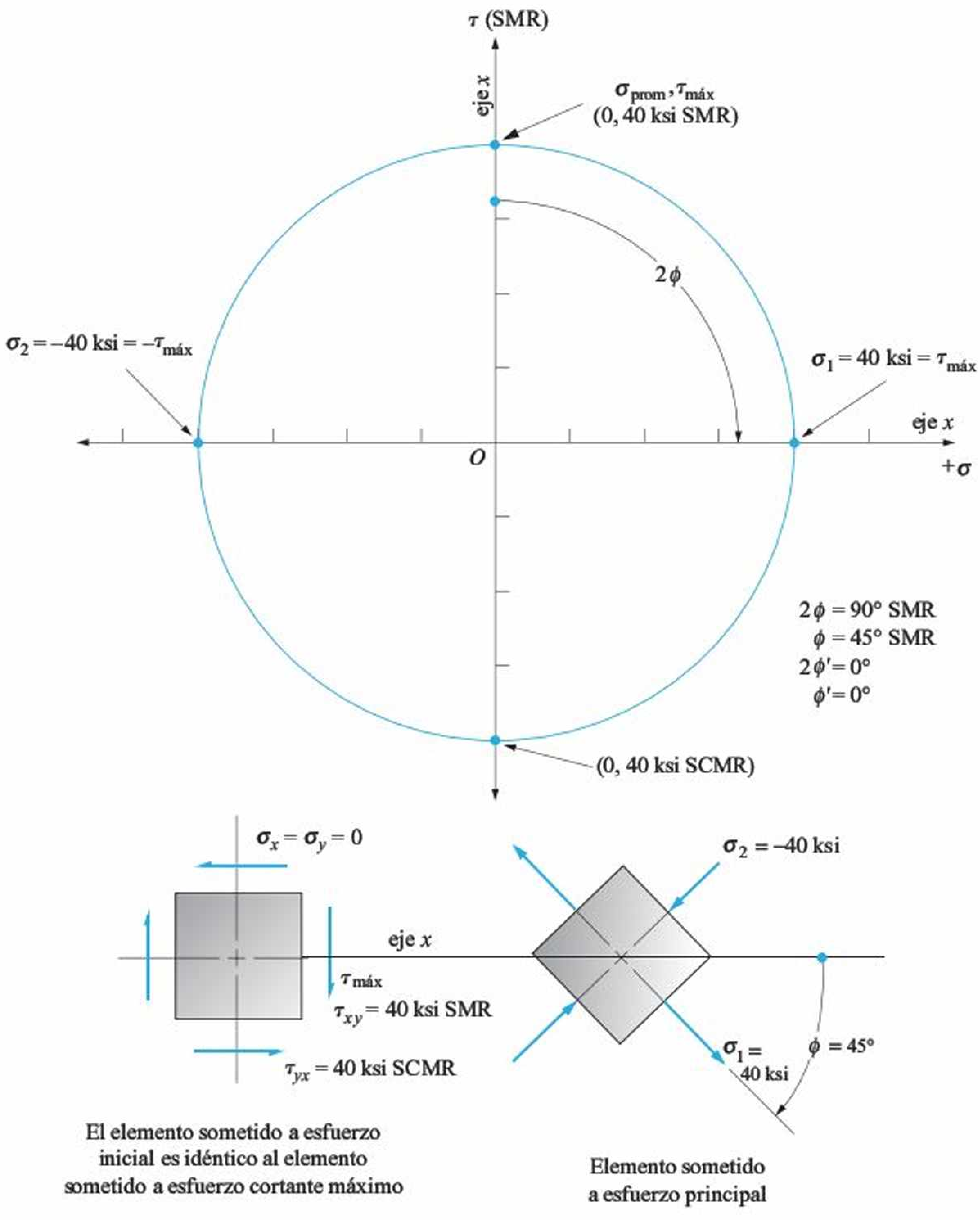


FIGURA 10–39 Resultados del problema de ejemplo 10–11. Caso especial de cortante puro.

Teoría de falla por esfuerzo cortante máximo

Uno de los principios de diseño más utilizados es la *teoría de falla por esfuerzo cortante máximo*, la cual establece que:

> Se puede esperar que un material dúctil falle cuando el esfuerzo cortante máximo al cual se somete el material excede la resistencia a la cedencia del material sometido a cortante.

Naturalmente, para aplicar esta teoría, es necesario ser capaz de calcular la magnitud del esfuerzo cortante máximo. Si el miembro se somete a cortante puro, tal como esfuerzo cortante torsional, o esfuerzo cortante en vigas sometidas a flexión, el esfuerzo cortante máximo se calcula directamente con fórmulas como las que se desarrollaron en este libro. Pero si existe una condición de esfuerzo combinado, se deberá usar la ecuación (10–17) o el círculo de Mohr para determinar el esfuerzo cortante máximo.

Un caso especial de esfuerzo combinado que se presenta con frecuencia es uno en el cual un esfuerzo normal que actúa en una sola dirección se combina con un esfuerzo cortante. Por ejemplo, una barra circular podría estar sometida a una tensión axial directa al mismo tiempo que está siendo torcida. En muchos tipos de transmisiones de potencia mecánica, las flechas se someten a flexión y torsión al mismo tiempo. Ciertos sujetadores pueden verse sometidos a tensión combinada con cortante directo.

Se puede desarrollar una fórmula simple para casos como ésos con el círculo de Mohr o la ecuación (10–17). Si existe sólo un esfuerzo normal en la dirección x, σ_x, combinado con un esfuerzo cortante, τ_{xy}, el esfuerzo cortante máximo es el que se dio con anterioridad como la ecuación (10–2).

$$\tau_{\text{máx}} = \sqrt{(\sigma_x/2)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{10–2}$$

Esta fórmula se desarrolla a partir de la ecuación (10–17) con $\sigma_y = 0$.

Problema de ejemplo 10–12

Una barra circular sólida de 45 mm de diámetro se somete a una fuerza de tensión axial de 120 kN junto con un par de torsión de 1150 N·m. Calcule el esfuerzo máximo en la barra.

Solución

Objetivo Calcular el esfuerzo cortante máximo en la barra.

Datos Diámetro = D = 45 mm.
Fuerza axial = F = 120 kN = 120000 N.
Par de torsión = T = 1150 N·m = 1150000 N·mm.

Análisis Use la ecuación (10–2) para calcular $\tau_{\text{máx}}$.

Resultados

1. En primer lugar, el esfuerzo normal aplicado se calcula con la fórmula de esfuerzo directo.

$$\sigma = F/A$$
$$A = \pi D^2/4 = \pi(45\text{ mm})^2/4 = 1590\text{ mm}^2$$
$$\sigma = (120\,000\text{ N})/(1590\text{ mm}^2) = 75.5\text{ N/mm}^2 = 75.5\text{ MPa}$$

2. A continuación, el esfuerzo cortante aplicado se calcula con la fórmula de esfuerzo cortante torsional.

$$\tau = T/Z_p$$
$$Z_p = \pi D^3/16 = \pi(45\text{ mm})^3/16 = 17\,892\text{ mm}^3$$
$$\tau = (1\,150\,000\text{ N}\cdot\text{mm})/(17\,892\text{ mm}^3) = 64.3\text{ N/mm}^2 = 64.3\text{ MPa}$$

3. Luego con la ecuación (10–2) se obtiene

$$\tau_{\text{máx}} = \sqrt{\left(\frac{75.5\text{ MPa}}{2}\right)^2 + (64.3\text{ MPa})^2} = 74.6\text{ MPa}$$

Comentario Este esfuerzo se deberá comparar con el esfuerzo cortante de diseño.

10–10 CONDICIÓN DE ESFUERZO EN PLANOS SELECCIONADOS

Existen algunos casos en los que conviene conocer la condición de esfuerzo que impera en un elemento a un cierto ángulo de orientación seleccionado con respecto a la dirección de referencia. Las figuras 10–40 y 10–41 muestran ejemplos.

El bloque de madera de la figura 10–40 muestra que la veta de la madera está inclinada 30° en sentido contrario a las manecillas del reloj con respecto al eje x dado. Como la madera es muy débil a cortante paralelo a la veta, conviene conocer los esfuerzos que actúan en esta dirección.

La figura 10–41 muestra un miembro fabricado con dos componentes soldados a lo largo de una junta inclinada a un cierto ángulo con respecto al eje x dado. La operación de soldadura podría debilitar el material cercano a la soldadura, sobre todo si las partes componentes fueran de acero térmicamente tratado antes de la soldadura. Lo mismo es cierto para muchas aleaciones de aluminio. En esos casos, los esfuerzos permisibles son un poco más bajos a lo largo de la soldadura.

Otros ejemplos:

- Un tanque de lados planos hecho de placas de acero soldadas donde algunas de las líneas de soldadura están inclinadas a un cierto ángulo con respecto a los ejes mayores a lo largo de los cuales se aplican las cargas. Éstas pueden ser producidas por la presión en el tanque, el peso de la estructura o por equipo accesorio montado en el tanque. Además, puede haber penetraciones en las paredes del tanque para instalar lumbreras utilizadas para llenar o vaciar el tanque, para ventanillas de observación o para instalar sensores. Estos elementos pueden ser soldados en el lugar a diferentes ángulos, por lo que se requiere conocer los niveles de esfuerzo a lo largo de dichos ángulos. Muchos materiales tales como aluminio o acero térmicamente tratados manifiestan una resistencia significativamente más baja cerca de las soldaduras en la zona afectada por el tratamiento térmico.
- Algunos tubos grandes hechos de láminas de acero planas enrolladas en forma de espiral en el perfil tubular deseado y que luego se sueldan de forma continua a lo largo de la junta. Conocer los esfuerzos alineados con la junta es importante.
- Los materiales compuestos son inherentemente no isotrópicos, ya que son más resistentes en las direcciones en que están colocadas las fibras de refuerzo rígidas y resistentes y por lo general son mucho más débiles en otras direcciones, según la forma en que estén colocadas las fibras. El análisis de esfuerzos en varias direcciones sería importante. Consulte la sección 2–12 del capítulo 2.
- Las condiciones ambientales a las que la parte se expone durante su operación también

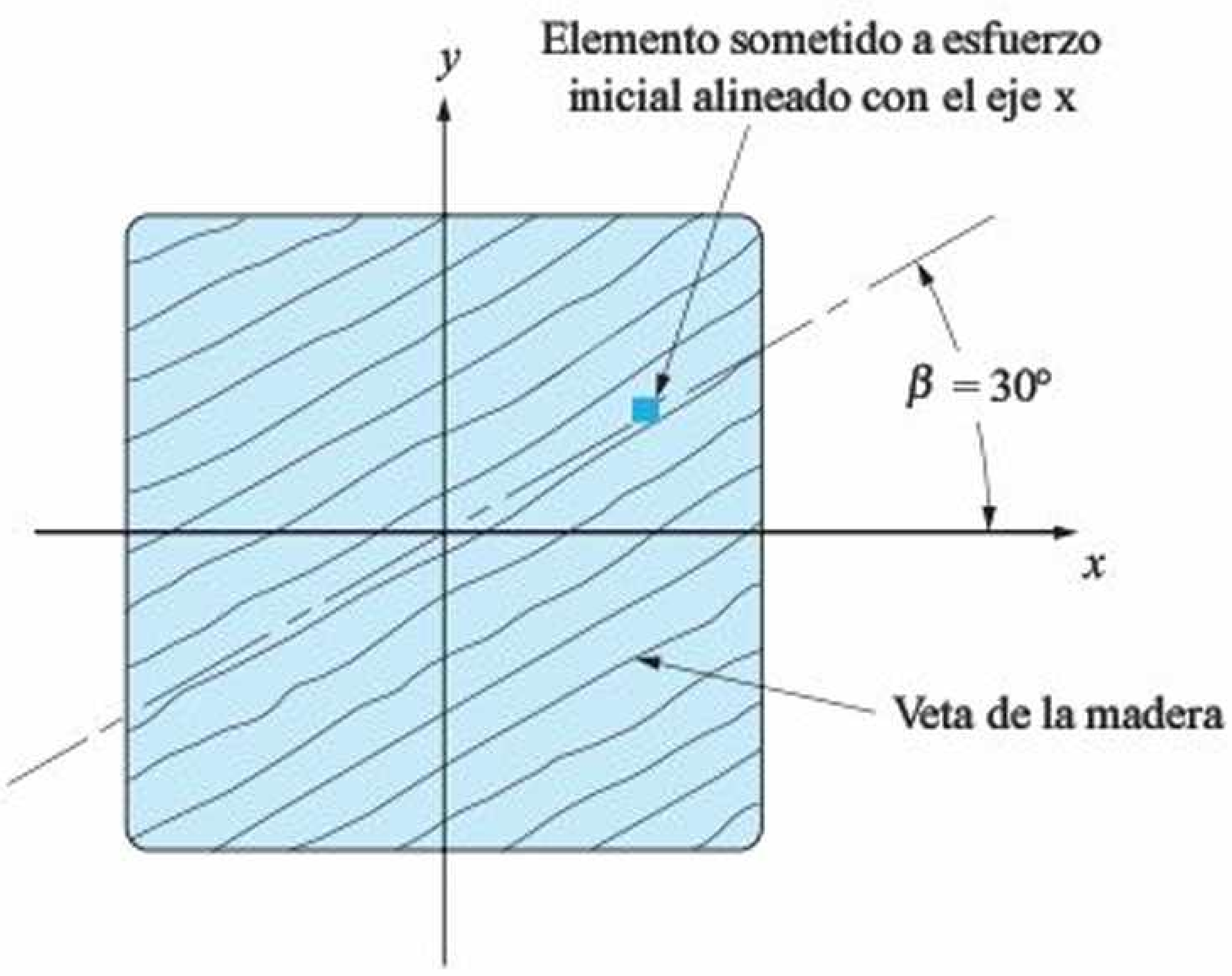


FIGURA 10–40 Sección transversal de un poste de madera con la veta a 30° con respecto al eje x.

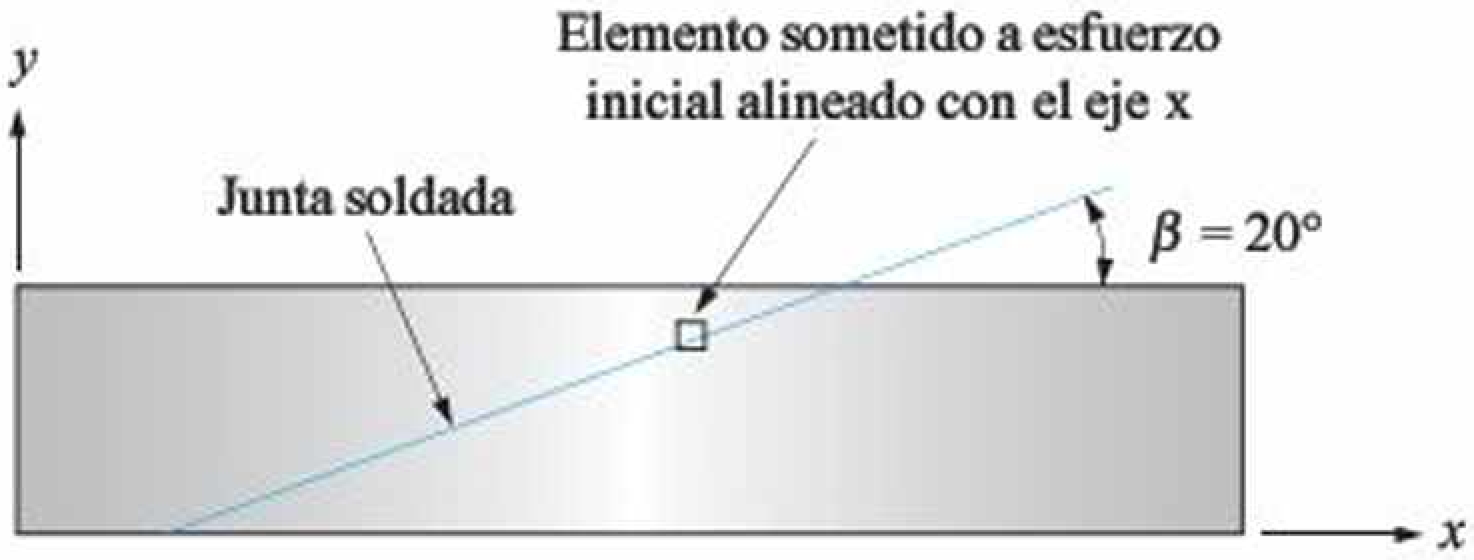


FIGURA 10–41 Barra plana soldada a lo largo de una junta inclinada a 20°.

pueden afectar las propiedades del material. Por ejemplo, una parte de un horno puede verse sometida a calentamiento local producido por energía radiante a lo largo de una línea particular. La resistencia del material calentado será menor que la del que permanece frío, y por lo tanto es conveniente conocer las condiciones de esfuerzo a lo largo del ángulo de la zona afectada por el calor.

Se puede usar el círculo de Mohr para determinar la condición de esfuerzo a ángulos de orientación especificados del elemento sometido a esfuerzo. El procedimiento se describe a continuación y se demuestra con el problema de ejemplo 10–13.

Procedimiento para determinar el esfuerzo a un ángulo específico

Datos: La condición de esfuerzo en el elemento dado alineado en las direcciones *x* y *y*.
Objetivo: Determinar los esfuerzos normal y cortante en el elemento a un ángulo específico, β, con respecto a la dirección *x* dada.

Paso 1: Trace el círculo de Mohr completo para el elemento.

Paso 2: Identifique la línea que representa el eje *x* en el círculo.

Paso 3: Mida el ángulo 2β a partir del eje *x* y trace una línea por el centro del círculo de Mohr y prolónguela hasta las dos intersecciones con el círculo. Esta línea representa el eje alineado con la dirección de interés.

Paso 4: Con la geometría del círculo, determine las coordenadas (σ y τ) del primer punto de intersección más cercano al eje *x*. El componente σ es el esfuerzo normal que actúa en el elemento en la dirección de β. El componente τ es el esfuerzo cortante que actúa en las caras del elemento. Las coordenadas del segundo punto representan los esfuerzos normal y cortante que actúan en las caras del elemento de interés paralelos al eje β.

Paso 5: Trace el elemento de interés que muestre los esfuerzos normal y cortante que actúan en él.

Problema de ejemplo 10–13

En la barra plana de la figura 10–41 soldada a lo largo de una junta que forma un ángulo de 20° en sentido con el eje *x*, el elemento alineado paralelo a los ejes *x* y *y* se somete a estos esfuerzos:

$$\sigma_x = 400 \text{ MPa} \qquad \sigma_y = -300 \text{ MPa} \qquad \tau_{xy} = 200 \text{ MPa SMR}$$

Determine la condición de esfuerzo en el elemento inclinado a un ángulo de 20°, alineado con la junta soldada.

Solución

Objetivo: Trazar el elemento sometido a esfuerzo alineado con la junta soldada a 20° con respecto al aje *x*.

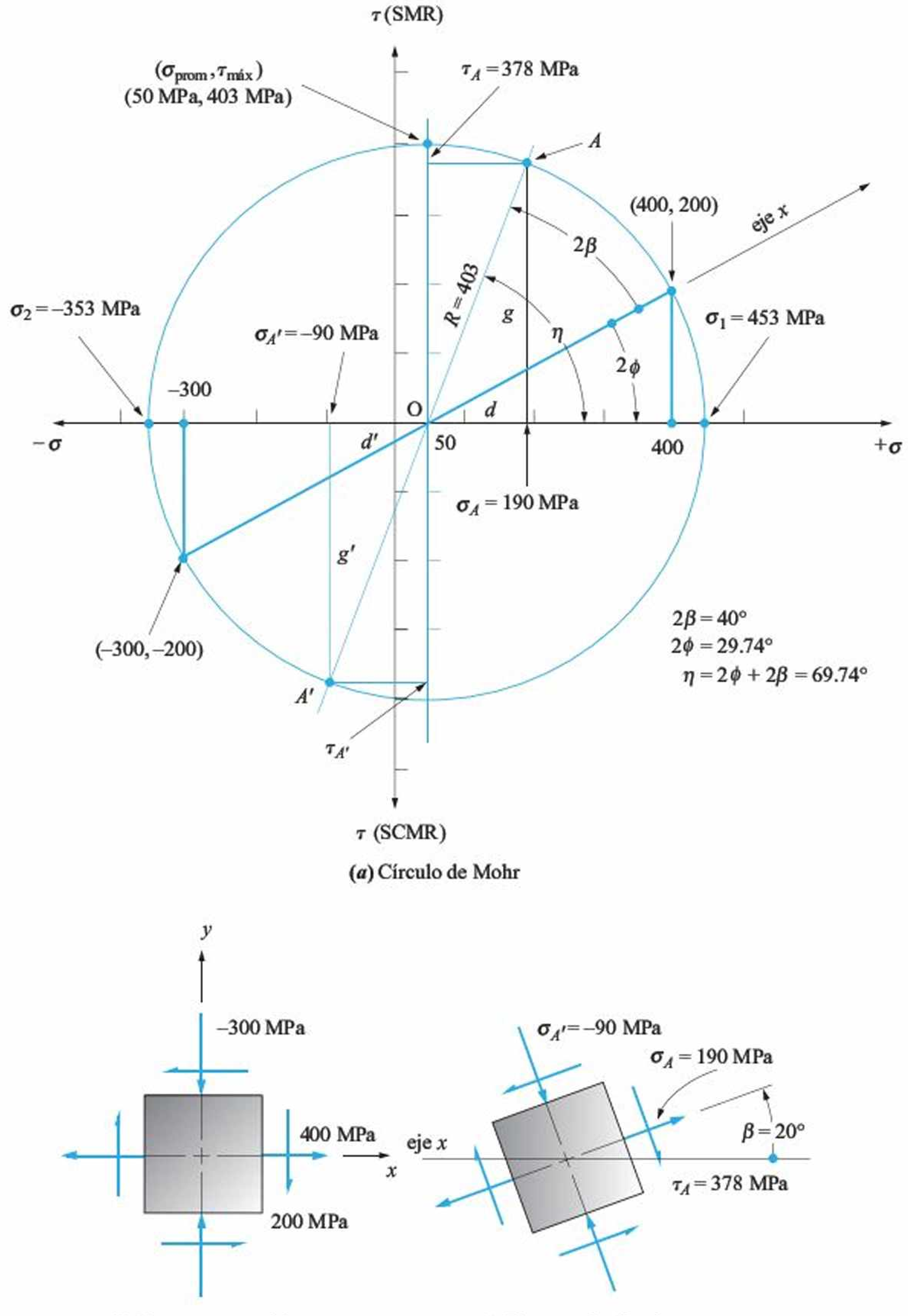
Datos: Observe que el elemento dado es el mismo del ejemplo 10–5. El círculo de Mohr básico de ese problema se muestra en la figura 10–32 y se reproduce en la figura 10–42 con construcciones adicionales descritas a continuación.

Análisis: Use el *Procedimiento para determinar el esfuerzo a un ángulo específico*.

Resultados: ***Pasos 1 y 2***. Se muestran en el círculo de Mohr original.

Paso 3. El eje deseado es uno inclinado a 20° en sentido contrario a las manecillas del reloj con respecto al eje *x*. Recordando que los ángulos en el círculo de Mohr son el *doble* de los reales, podemos trazar una línea por el centro del círculo a un ángulo de $2\beta = 40°$ en sentido contrario a las manecillas del reloj con respecto al eje *x*. La intersección de esta línea con el círculo, designada *A* en la figura, localiza el punto del círculo que define la condición de esfuerzo del elemento deseado. Las coordenadas de este punto (σ_A, τ_A) dan los esfuerzos normal y cortante que actúan en un juego de caras del elemento deseado.

FIGURA 10–42
Círculo de Mohr completo del problema de ejemplo 10–13 que muestra los esfuerzos en un elemento inclinado a 20° en sentido contrario a las manecillas del reloj con respecto al eje x.



(*a*) Círculo de Mohr

(*b*) Elemento sometido a un esfuerzo dado

(*c*) Elemento inclinado a 20° sometido a esfuerzo

Paso 4. Con trigonometría simple y la geometría básica del círculo se determinan σ_A y τ_A proyectando líneas vertical y horizontalmente desde el punto A hasta los ejes σ y τ, respectivamente. El ángulo total desde el eje σ hasta el eje que pasa por el punto A, llamando η (eta) en la figura, es la suma de 2ϕ y 2β. En el problema de ejemplo 10–5, se vio que $2\phi = 29.74°$. Entonces

$$\eta = 2\phi + 2\beta = 29.74° + 40° = 69.74°$$

En la figura 10–42 se identificó un triángulo con los lados d, g y R. Con este triángulo, podemos calcular

$$d = R\cos\eta = (403)\cos 69.74^\circ = 140$$
$$g = R\,\text{sen}\,\eta = (403)\,\text{sen}\,69.74^\circ = 378$$

Estos valores permiten calcular

$$\sigma_A = O + d = 50 + 140 = 190\,\text{MPa}$$
$$\tau_A = g = 378\,\text{MPa SMR}$$

donde O indica el valor del esfuerzo normal en el centro del círculo de Mohr.

Los esfuerzos en las caras restantes del elemento deseado son las coordenadas del punto A' localizado a 180° de A en el círculo y, por consiguiente, a 90° de las caras en las cuales (σ_A, τ_A) actúan. Proyectando líneas vertical y horizontalmente desde A' hasta los ejes σ y τ se localizan σ_A y τ_A. Como los triángulos son semejantes podemos decir que $d' = d$ y $g' = g$. Entonces

$$\sigma_{A'} = O - d' = 50 - 140 = -90\,\text{MPa}$$
$$\tau_{A'} = g' = 378\,\text{MPa SCMR}$$

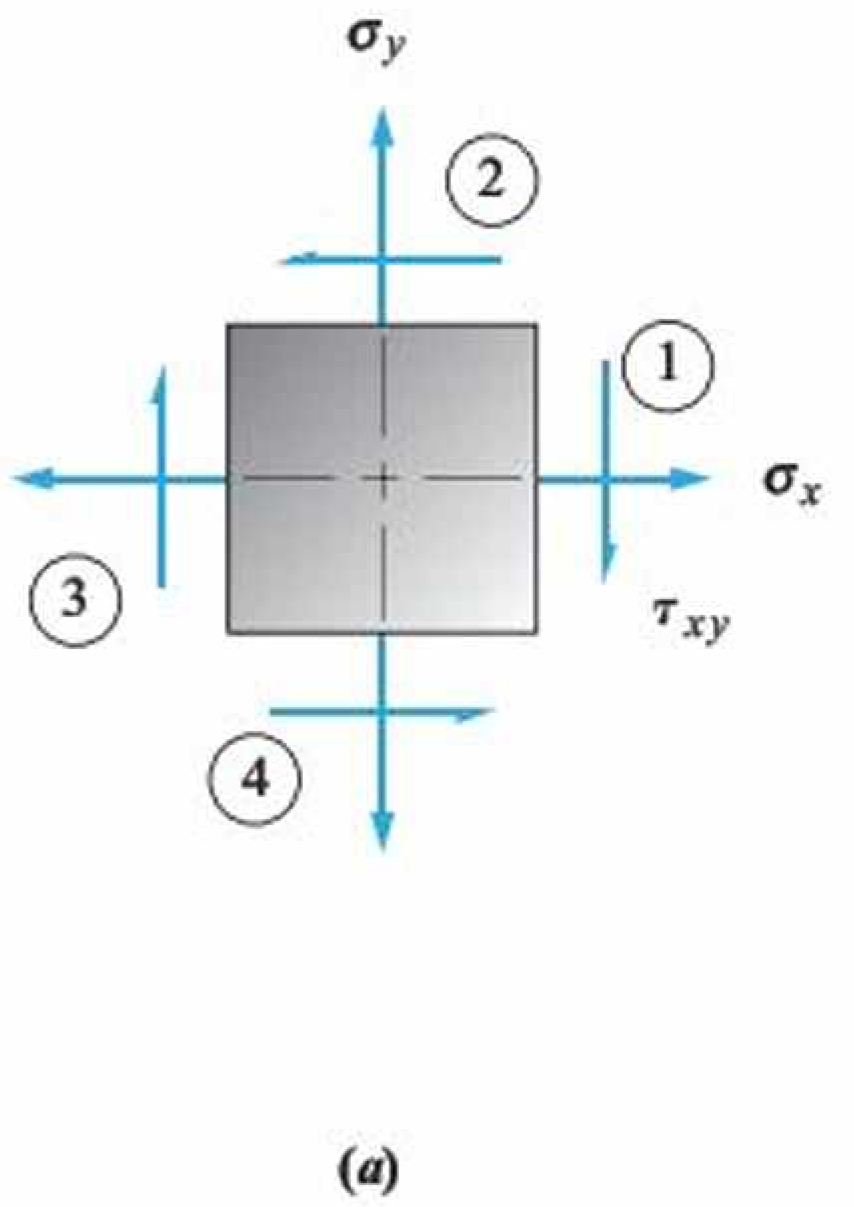
Comentario La figura 10–42 (c) muestra el elemento final inclinado a 20° con respecto al eje x. Ésta es la condición de esfuerzo experimentada por el material a lo largo de la línea de soldadura.

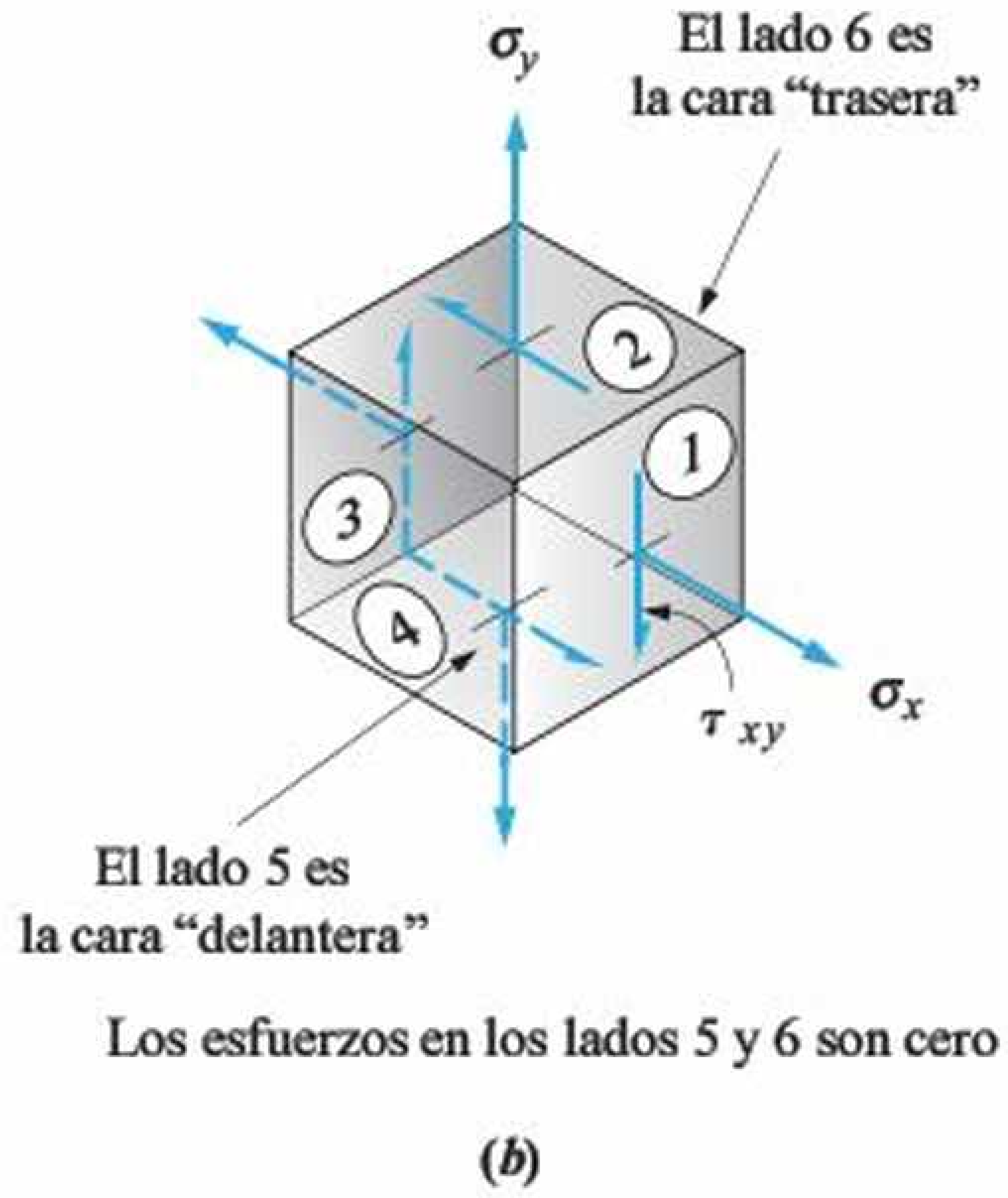
10–11 CASO ESPECIAL EN EL QUE LOS DOS ESFUERZOS PRINCIPALES TIENEN EL MISMO SIGNO

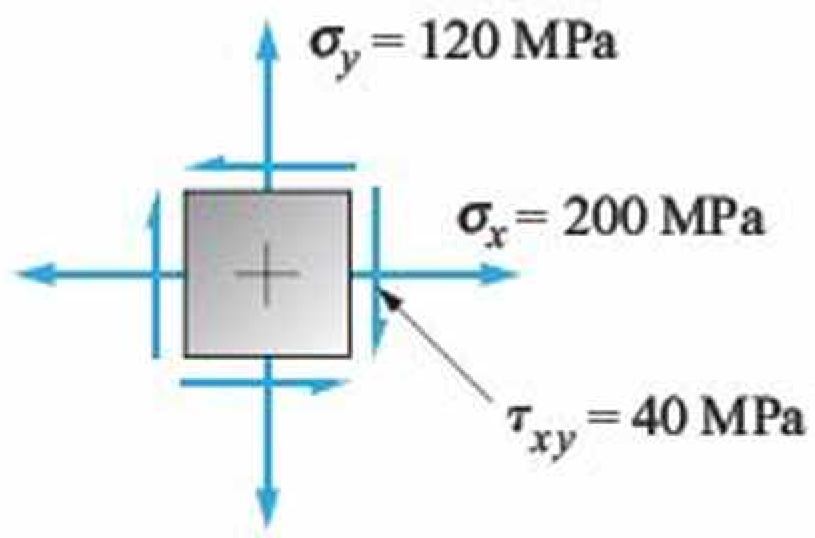
En las secciones precedentes que se ocuparon del círculo de Mohr, utilizamos la convención de que σ_1 es el esfuerzo principal máximo y σ_2 es el esfuerzo principal mínimo. Esto es cierto en los casos de esfuerzo plano (esfuerzos aplicados en un solo plano) cuando σ_1 y σ_2 tienen signos opuestos, es decir, cuando uno es de tensión y el otro de compresión. Además, en esos casos, el esfuerzo cortante determinado en la parte superior del círculo (igual al radio, R) es el esfuerzo cortante máximo real que actúa en el elemento.

Sin embargo, se debe tener cuidado especial cuando el círculo de Mohr indica que σ_1 y σ_2 tienen el mismo signo. Aun cuando se trata de esfuerzo plano, el elemento sometido al esfuerzo real es tridimensional y se representará como un cubo y no como un cuadrado, como se muestra en la figura 10–43. Las caras 1, 2, 3 y 4 corresponden a los lados del elemento cuadrado y las caras 5 y 6 son el "frente" y el "reverso". En el caso de esfuerzo plano los esfuerzos en las caras 5 y 6 son cero.

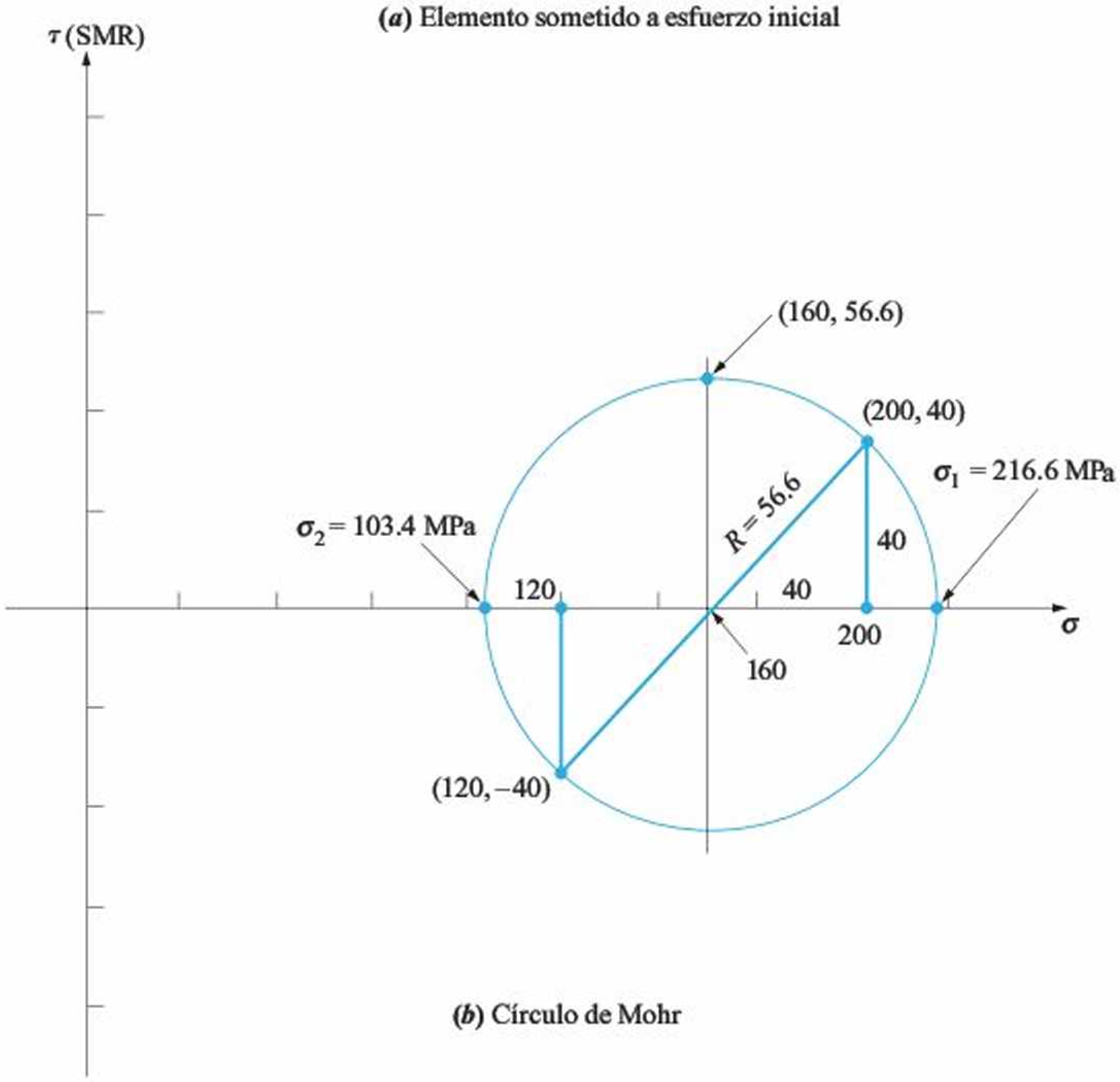
FIGURA 10–43 Esfuerzo plano mostrado como elementos bidimensionales y tridimensionales sometidos a esfuerzo. (a) Elemento bidimensional sometido a esfuerzo. (b) Elemento tridimensional sometido a esfuerzo.







(*a*) Elemento sometido a esfuerzo inicial



(*b*) Círculo de Mohr

FIGURA 10–44
Círculo de Mohr donde σ_1 y σ_2 son positivos.

En el elemento tridimensional existen tres esfuerzos principales, llamados σ_1, σ_2 y σ_3, que actúan en los lados mutuamente perpendiculares del elemento. La convención dicta el orden siguiente:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

Por tanto, σ_3 es el esfuerzo principal mínimo real y σ_1 es el esfuerzo principal máximo real. También se puede demostrar que el esfuerzo cortante máximo real se puede calcular con

$$\tau_{\text{máx}} = \tfrac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \qquad \textbf{(10–21)}$$

La figura 10–44 ilustra un caso en el que se debe considerar el elemento tridimensional. El elemento sometido a esfuerzo inicial, mostrado en la parte (a), soporta los esfuerzos siguientes:

$$\sigma_x = 200\,\text{MPa} \qquad \sigma_y = 120\,\text{MPa} \qquad \tau_{xy} = 40\,\text{MPa SMR}$$

La parte (b) de la figura muestra el círculo de Mohr tradicional, trazado de conformidad con el procedimiento descrito en la sección 10–9. Observe que σ_1 y σ_2 son positivos o de tensión. Entonces, considerando que el esfuerzo en las caras "frontal" y "posterior" es cero, éste es el esfuerzo principal mínimo real. Podemos decir entonces que

$$\sigma_1 = 216.6\,\text{MPa}$$
$$\sigma_2 = 103.4\,\text{MPa}$$
$$\sigma_3 = 0\,\text{MPa}$$

De acuerdo con la ecuación (10–21), el esfuerzo cortante máximo real es

$$\tau_{\text{máx}} = \tfrac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \tfrac{1}{2}(216.6 - 0) = 108.3\,\text{MPa}$$

Estos conceptos se visualizan gráficamente con un conjunto de tres círculos de Mohr en lugar de sólo uno. La figura 10–45 muestra el círculo obtenido con el elemento sometido a esfuerzo inicial, un segundo círculo que incluye σ_1 y σ_3 y un tercero que incluye σ_2 y σ_3. De este modo cada círculo representa el plano en el cual actúan dos de los tres esfuerzos principales. El punto en la parte superior del círculo indica el esfuerzo cortante máximo que ocurriría en ese plano. Entonces el círculo mayor, trazado para σ_1 y σ_3, produce el esfuerzo cortante máximo real y su valor concuerda con la ecuación (10–21).

FIGURA 10–45 Tres círculos de Mohr que muestran σ_1, σ_2, σ_3 y $\tau_{\text{máx}}$.

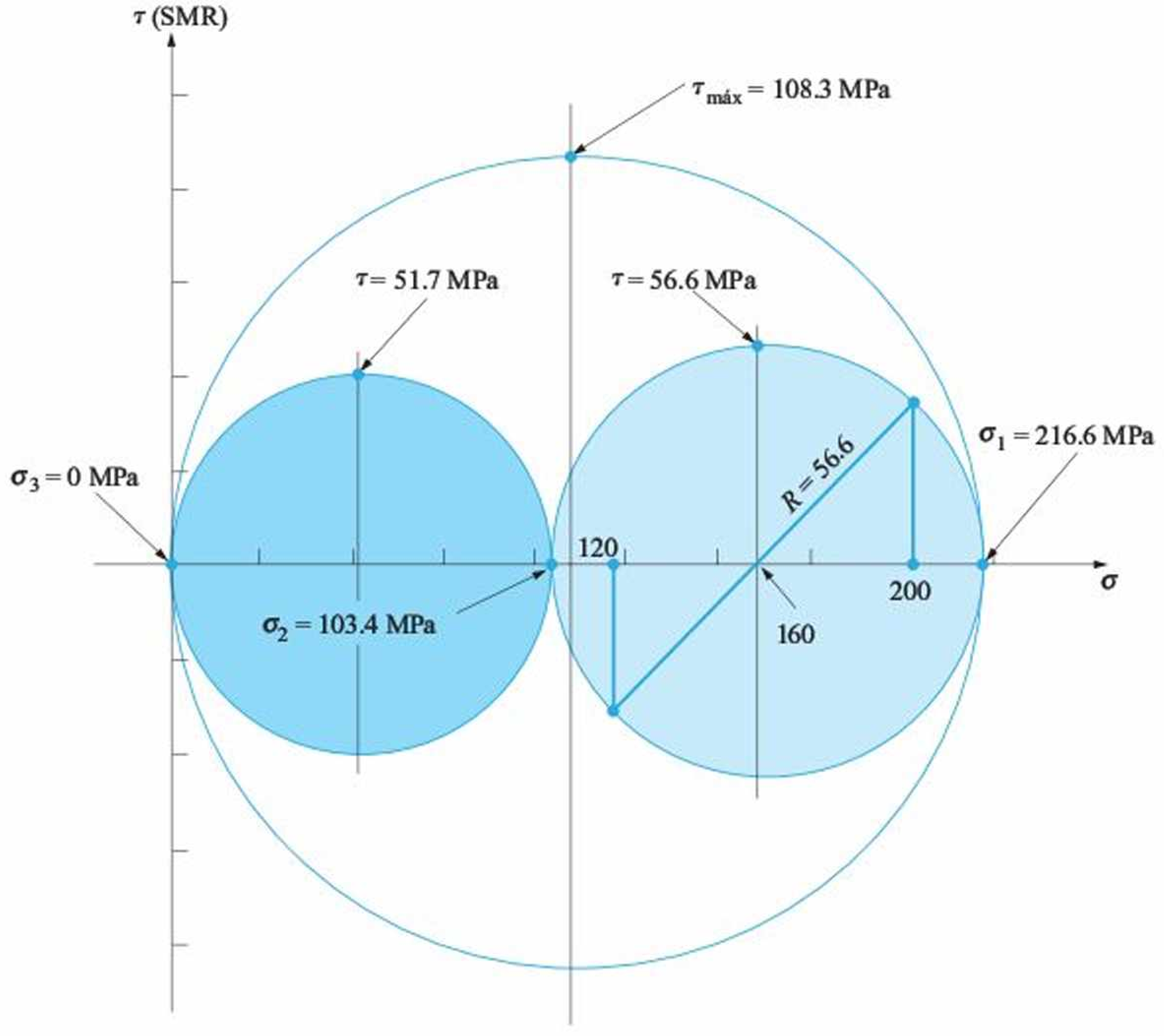
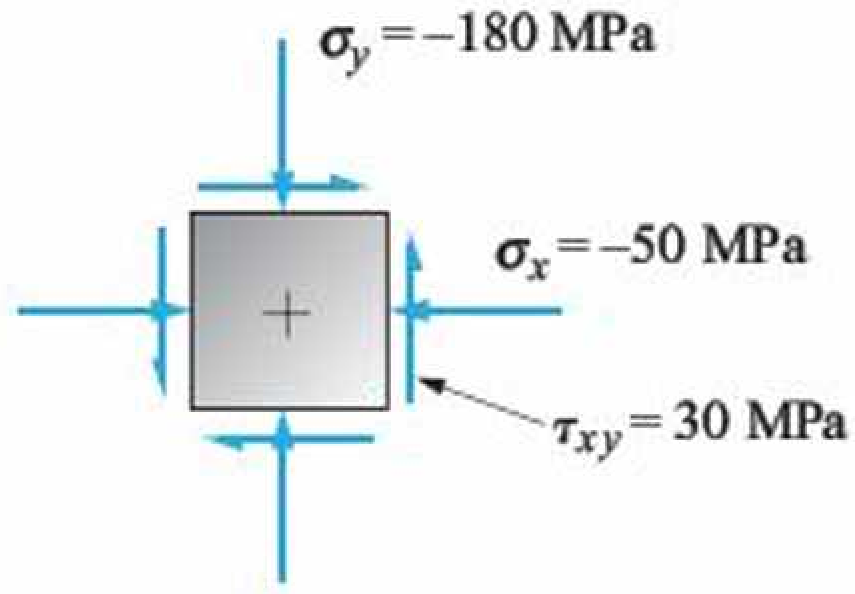
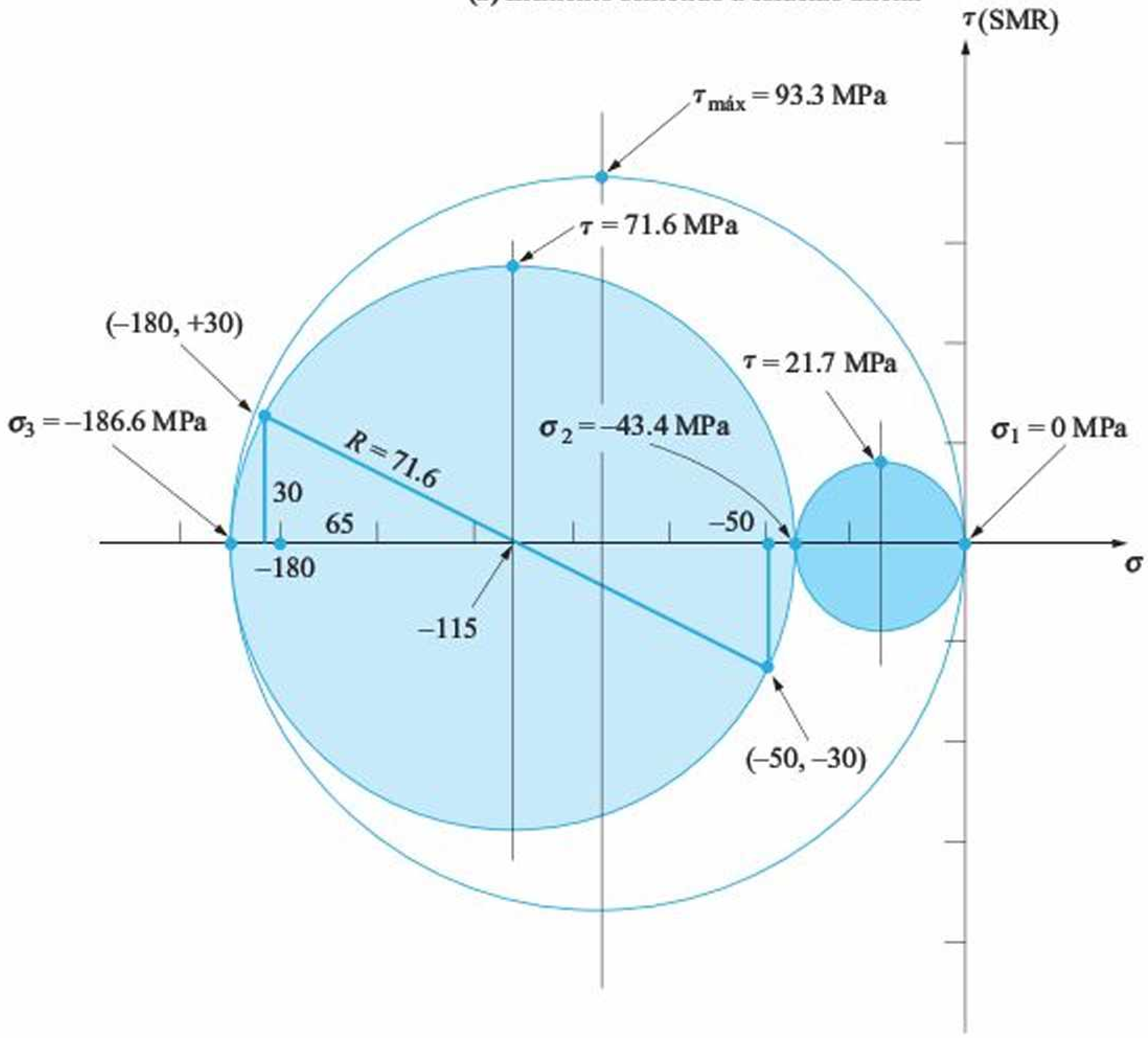


FIGURA 10–46
Tres círculos de Mohr relacionados que muestran σ_1, σ_2, σ_3 y $\tau_{máx}$.



(*a*) Elemento sometido a esfuerzo inicial



(*b*) Círculo de Mohr

La figura 10–46 ilustra otro caso en el que los esfuerzos principales del elemento sometido a esfuerzo inicial tienen el mismo signo, ambos negativos en este caso. Los esfuerzos iniciales son

$$\sigma_x = -50\,\text{MPa} \quad \sigma_y = -180\,\text{MPa} \quad \tau_{xy} = 30\,\text{MPa SCMR}$$

En éste, también, se debe trazar los círculos complementarios. Pero en este caso, el esfuerzo cero en las caras "frontal" y "posterior" del elemento se transforma en el esfuerzo principal *máximo* (σ_1). Es decir,

$$\sigma_1 = 0\,\text{MPa}$$
$$\sigma_2 = -43.4\,\text{MPa}$$
$$\sigma_3 = -186.6\,\text{MPa}$$

y el esfuerzo cortante máximo es

$$\tau_{máx} = \tfrac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \tfrac{1}{2}[0 - (-186.6)] = 93.3\,\text{MPa}$$

Resumen—Procedimientos para los casos en que los esfuerzos principales tienen el mismo signo

Este resumen concierne a la situación en la que el análisis con círculo de Mohr de un elemento sometido a esfuerzo plano (esfuerzos aplicados sólo en dos dimensiones) produce el resultado de que ambos esfuerzos principales (σ_1 y σ_2) son del mismo signo, es decir, ambos son de tensión o ambos son de compresión. En esos casos, se seguirán los pasos siguientes para tener una imagen real de la condición de esfuerzo que prevalece en el elemento tridimensional.

A. Trace el círculo de Mohr completo para la condición de esfuerzo plano, e identifique los esfuerzos principales σ_1 y σ_2.

B. Si los dos esfuerzos principales son de tensión (positivos) [vea el ejemplo ilustrado en la figura 10–45].

1. Considere que el *esfuerzo cero* que actúa en la dirección perpendicular al elemento sometido a esfuerzo inicial es el esfuerzo principal mínimo real. En ese caso es necesario definir los *tres* esfuerzos principales de modo que:

σ_1 = Esfuerzo principal máximo tomado del primer círculo de Mohr.

σ_2 = Esfuerzo principal mínimo tomado del primer círculo de Mohr.

σ_3 = Cero (esfuerzo principal mínimo real).

2. Trace un círculo de Mohr secundario cuyo diámetro se extienda desde σ_1 hasta σ_3 sobre el eje σ. El centro del circulo quedará en el promedio de σ_1 y σ_3 $(\sigma_1 + \sigma_3)/2$. Pero, como $\sigma_3 = 0$, el promedio es $\sigma_1/2$.
3. El esfuerzo cortante máximo se localiza en la parte superior del círculo secundario y su valor también es $\sigma_1/2$.

C. Si los dos esfuerzos principales son de compresión (negativos) [vea el ejemplo ilustrado en la figura 10–46].

1. Considere que el *esfuerzo cero* que actúa en la dirección perpendicular al elemento sometido a esfuerzo inicial es el esfuerzo principal máximo real. Entonces, es necesario definir los *tres* esfuerzos principales de modo que:

σ_1 = Cero (esfuerzo principal máximo real).

σ_2 = Esfuerzo principal máximo tomado del primer círculo de Mohr.

σ_3 = Esfuerzo principal mínimo tomado del primer círculo de Mohr.

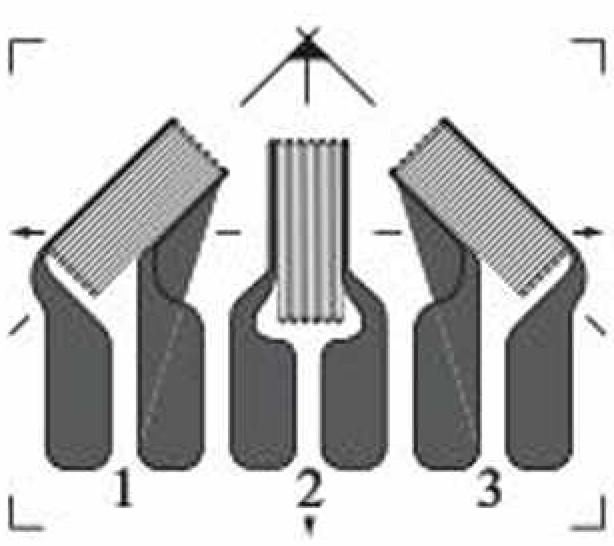
2. Trace un círculo de Mohr secundario cuyo diámetro se extienda desde σ_1 hasta σ_3 sobre el eje σ. El centro del círculo quedará en el promedio de σ_1 y σ_3 $(\sigma_1 + \sigma_3)/2$. Pero, como $\sigma_1 = 0$, el promedio es $\sigma_3/2$.
3. El esfuerzo cortante máximo se localiza en la parte superior del círculo secundario, y su magnitud también es $\sigma_3/2$.

10–12 USO DE LAS ROSETAS DE MEDICIÓN DE DEFORMACIÓN PARA DETERMINAR ESFUERZOS PRINCIPALES

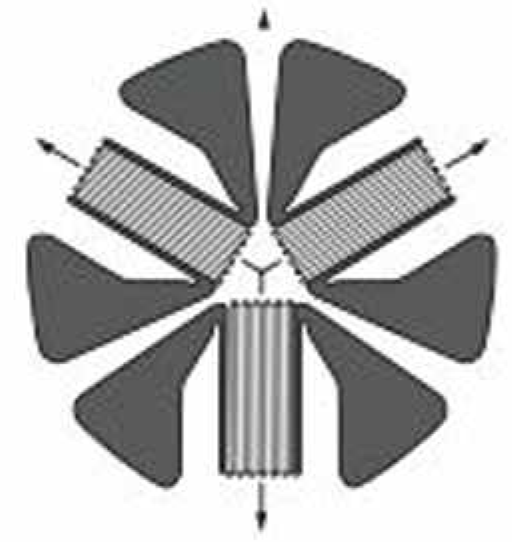
En las primeras secciones de este capítulo, se dieron datos en relación con la condición de esfuerzo biaxial inicial que existía en un elemento de un miembro de carga. Luego se calcularon los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo con las ecuaciones desarrolladas en las secciones 10–7 y 10–8 o por medio del círculo de Mohr, como se vio en la sección 10–9. Los esfuerzos que actuaban en el elemento sometido a esfuerzo inicial puede que haya sido determinados mediante cálculo directo o mediante principios de análisis de esfuerzo como se demostró en la sección 10–4.

Un método alterno de determinar la condición de esfuerzo inicial es utilizar técnicas de análisis de esfuerzo experimentales. Se podrían utilizar para analizar, por ejemplo, el caso complejo de la transmisión automática de un automóvil o la carcasa de un compresor de aire. Primero se pueden utilizar técnicas fotoelásticas para localizar las zonas de esfuerzo máximo. Entonces se pueden utilizar medidores de deformación en esas áreas para medir con más

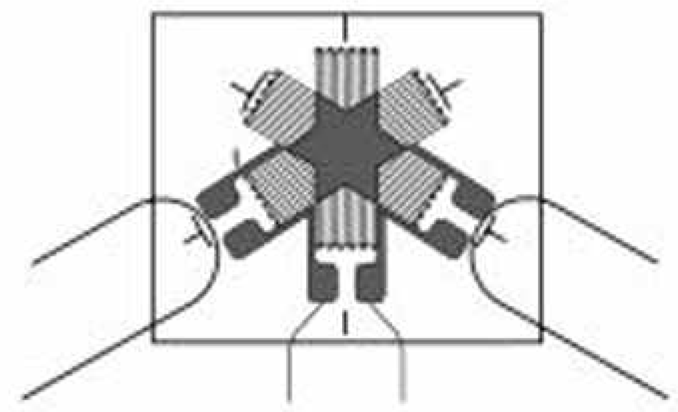
FIGURA 10–47
Rosetas de medición de deformación (Fuente: Measurements Group, Inc., Raleigh, NC)



(*a*) Roseta a 45 grados



(*b*) Roseta a 60 grados



(*c*) Roseta apilada

precisión la magnitud de las deformaciones en direcciones particulares. Si se conocen las direcciones, los medidores de deformación deberán alinearse tan precisamente como sea posible con las direcciones de los esfuerzos principales.

Sin embargo, en casos de geometría compleja y cargas complejas, se desconocen las direcciones de los esfuerzos principales. Entonces se recomienda utilizar una *roseta de medición de deformación* compuesta de tres medidores con una relación geométrica precisa entre ellos. La figura 10–47 muestra tres estilos diferentes y otros están disponibles. La parte (a) muestra una roseta a 45°, en ocasiones llamada *roseta rectangular* o roseta a 0°, 45°, 90° para indicar la orientación original de los tres medidores. Las partes (b) y (c) muestran dos estilos de rosetas a 60°, en ocasiones llamadas *rosetas delta* o rosetas a 0°, 60°, 120°. La roseta apilada en (c) se utiliza donde el espacio es limitado o donde existen grandes gradientes de esfuerzo. No obstante, existen posibles dificultades para montar los medidores por su espesor y porque los medidores superiores se apartan de la superficie donde se van a medir las deformaciones.

En general, el medidor marcado *número 1* se instala alineado con cuidado con algún eje de referencia de la parte que se va a medir. Una vez que se montan los medidores, el miembro se carga y se toman lecturas con los tres medidores y sus resultados en general se designan ϵ_1, ϵ_2 y ϵ_3. Con estas mediciones se puede demostrar que las deformaciones máximas y mínimas pueden calcularse con las siguientes ecuaciones. Observe que se utilizan ecuaciones diferentes con la roseta a 45° y con la roseta a 60° porque el ángulo entre los medidores entra en los cálculos. También, es necesario determinar la orientación de los ejes principales con respecto a la dirección del medidor número uno. El ángulo entre el medidor número uno y la deformación principal más cercana se conoce como β y se calcula con la ecuación dada después de las ecuaciones de deformación:

Roseta a 45°:

$$\epsilon_{\text{máx}} = \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_3)}{2} + \frac{\sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2}}{\sqrt{2}} \tag{10–22}$$

$$\epsilon_{\text{mín}} = \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_3)}{2} - \frac{\sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2}}{\sqrt{2}} \tag{10–23}$$

$$\beta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left[\frac{(\epsilon_2 - \epsilon_3) - (\epsilon_1 - \epsilon_2)}{(\epsilon_1 - \epsilon_3)}\right] \tag{10–24}$$

Roseta a 60°:

$$\epsilon_{\text{máx}} = \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_1 - \epsilon_3)^2} \tag{10–25}$$

$$\epsilon_{\text{mín}} = \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_1 - \epsilon_3)^2} \tag{10–26}$$

$$\beta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{3}(\epsilon_2 - \epsilon_3)}{(\epsilon_1 - \epsilon_2) + (\epsilon_1 - \epsilon_3)}\right] \tag{10–27}$$

En general, las deformaciones medidas son muy pequeñas. Por ejemplo, con unidades del sistema inglés, el orden de magnitud es general es de menos de 5000 $\times 10^{-6}$ in/in. Por comodidad, algunos analistas de esfuerzo experimentales escriben esta cantidad como 5000 $\mu\epsilon$, y se lee "5000 microdeformaciones". Los cálculos realizados con ecuaciones como las ecuaciones (10–22) a (10–27) se completan entonces utilizando sólo el número entero al mismo tiempo que se reconoce que se debe considerar el valor completo real.

Esfuerzos principales obtenidos con las deformaciones principales. El objetivo final es determinar los esfuerzos principales con estas mediciones de deformación hechas con la roseta de medición de deformación. Para alcanzar este objetivo necesitamos revisar algunos conceptos y relaciones analizadas en los capítulos 1–3.

Analizamos la relación entre esfuerzo y deformación definiendo el *módulo de elasticidad*, *E*. Recordará que, para *esfuerzo uniaxial*, tal como tensión o compresión directa.

$$\sigma = E\epsilon$$

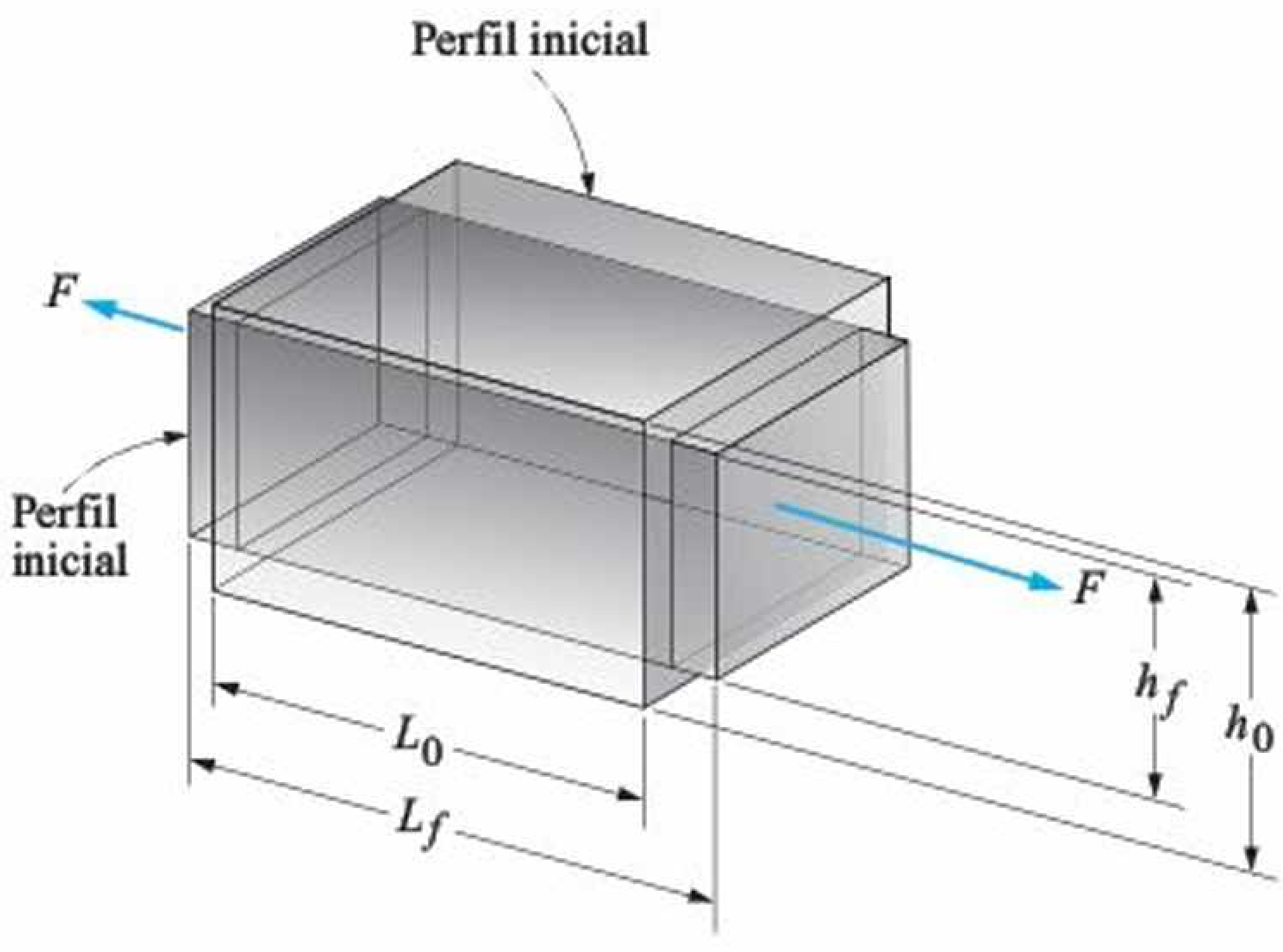
Es decir, el esfuerzo es el producto de la deformación por el módulo de elasticidad del material.

En este caso estamos considerando el caso más general de *esfuerzo biaxial*, donde los esfuerzos en dos direcciones ocurren al mismo tiempo. Ahora debemos recordar el hecho de que cuando un miembro de carga se deforma en una dirección, también lo hace en las direcciones perpendiculares. La figura 10–48 muestra este concepto como se definió en el capítulo 2. Utilizamos el término *relación de Poisson*, ν, para representar la relación de la deformación normal en la dirección del esfuerzo aplicado y la deformación lateral en las direcciones perpendiculares. La relación de Poisson es una propiedad del material y en la tabla 2–1 se dan valores representativos.

Ahora bien, si conocemos la deformación en una dirección, por ejemplo, ϵ_x, la deformación en la dirección y, perpendicular a x, es

$$\epsilon_y = \nu\epsilon_x$$

FIGURA 10–48 Ilustración de la relación de Poisson para un elemento sometido a tensión.



$$\text{Deformación axial} = \frac{L_f - L_0}{L_0} = E_a$$

$$\text{Deformación lateral} = \frac{h_f - h_0}{h_0} = E_L$$

$$\text{Relación de Poisson} = \frac{-E_L}{E_a} \quad \nu$$

Por la influencia de la deformación axial, la deformación en cada dirección afectará la deformación en la otra dirección. Por tanto, el cálculo de los esfuerzos máximos por medio de las deformaciones máximas es más complejo que $\sigma = E\epsilon$. El desarrollo de la relación no se demuestra aquí. El resultado final es

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{E}{1 - \nu^2}(\epsilon_{\text{máx}} + \nu\epsilon_{\text{mín}}) \tag{10–28}$$

$$\sigma_{\text{mín}} = \frac{E}{1 - \nu^2}(\epsilon_{\text{mín}} + \nu\epsilon_{\text{máx}}) \tag{10–29}$$

La deformación por cortante máxima en el plano del elemento original, $\gamma_{\text{máx}}$ también se puede determinar con el valor absoluto de la diferencia entre las deformaciones normales máxima y mínima en el plano.

$$\gamma_{\text{máx}} = |(\epsilon_{\text{máx}} - \epsilon_{\text{mín}})| \tag{10–30}$$

Las unidades de γ son radianes, aunque se considera sin unidades. Entonces el esfuerzo cortante máximo se calcula por medio de la definición de G, el módulo de elasticidad a cortante.

$$\tau_{\text{máx}} = G\gamma_{\text{máx}} \tag{10–31}$$

Las unidades de τ serán las mismas de G. Una forma alternativa de G se mostró en el capítulo 2. En ese caso la ecuación 10–31 también se puede escribir como

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{E\gamma_{\text{máx}}}{2(1 + \nu)} \tag{10–32}$$

Se toman las mismas precauciones cuando los esfuerzos principales máximo y mínimo tienen el mismo signo, como se vio en la sección 10–11.

Procedimiento para analizar los datos obtenidos con una roseta de medición de deformación

En suma, se pueden utilizar rosetas de medición de deformación para determinar los esfuerzos principales máximo y mínimo y el esfuerzo cortante máximo siguiendo el procedimiento:

1. Determine el área donde es probable que ocurran los esfuerzos máximos. Puede utilizar su criterio, un análisis de esfuerzo fotoelástico o un análisis de elemento finito.
2. Aplique la roseta de medición de deformación en el área del miembro de carga donde se van a tomar las mediciones, teniendo cuidado de alinear el medidor número 1 con un eje conocido de la parte.
3. Opere el equipo y aplique cargas representativas de la máxima esperada en servicio.
4. Anote las lecturas de deformación de cada medidor y dé valores a ϵ_1, ϵ_2 y ϵ_3.
5. Según el tipo de roseta, use las ecuaciones dadas, como (10–22) a (10–24) o (10–25) a (10–27), para determinar las deformaciones máxima y mínima en el punto de interés y su ángulo de orientación con respecto a la alineación del medidor número 1.
6. Use las ecuaciones (10–28) y (10–29) para calcular los esfuerzos principales máximo y mínimo. Las direcciones de éstos son las de las deformaciones principales.
7. Calcule la deformación por cortante máxima con la ecuación (10–30).

8. Calcule el esfuerzo cortante máximo con la ecuación (10–31) o (10–32).
9. Verifique para ver si los esfuerzos principales máximo y mínimo tienen el mismo signo, de ser así, complete el análisis adicional analizado en la sección 10–11.

Problema de ejemplo 10–14

Como parte del proceso de desarrollo de una bomba nueva, el diseñador ha instrumentado un área crítica de la carcasa con una roseta de medición de deformación como la mostrada en la figura 10–47(a). El medidor 1 está alineado con la línea central horizontal del conducto de entrada de la bomba. Durante la prueba en condiciones de operación de alta capacidad, se tomaron las siguientes lecturas de las deformaciones de los tres brazos del medidor: $\epsilon_1 = 950 \times 10^{-6}$ in/in, $\epsilon_2 = -375 \times 10^{-6}$ in/in, $\epsilon_3 = 525 \times 10^{-6}$ in/in. El material de la carcasa de la bomba es aluminio 2014–T6. Calcule el esfuerzo principal máximo, el esfuerzo principal mínimo y el esfuerzo cortante máximo en el lugar donde se montó la roseta.

Solución

Objetivo Calcular $\sigma_{\text{máx}}$, $\sigma_{\text{mín}}$ y $\tau_{\text{máx}}$.

Datos Lecturas de deformación tomadas con una roseta de medición de deformación a 0°, 45°, 90°.

$$\epsilon_1 = 950 \times 10^{-6}\ \text{in/in}, \epsilon_2 = -375 \times 10^{-6}\ \text{in/in}, \epsilon_3 = 525 \times 10^{-6}\ \text{in/in}.$$

Aluminio 2014–T6: $E = 10.6 \times 10^6$ psi, $s_y = 60\,000$ psi (apéndice A–18) $\nu = 0.33$ (tabla 2–1)

Análisis Use el *Procedimiento para analizar los datos obtenidos con una roseta de medición de deformación*.

Resultados ***Pasos 1–4***. Ya se completaron.

Paso 5. Cuando utilicemos las ecuaciones (10–22) a (10–24), mostraremos sólo la parte del número entero de los valores de deformación. La unidad es, por tanto, microdeformaciones, $\mu\epsilon$. La deformación principal máxima es

$$\epsilon_{\text{máx}} = \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_3)}{2} + \frac{\sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2}}{\sqrt{2}}$$

$$\epsilon_{\text{máx}} = \frac{(950 + 525)}{2} + \frac{\sqrt{[(950 - (-375)]^2 + (-375 - 525)^2}}{\sqrt{2}} = 1870\,\mu\epsilon$$

La deformación principal mínima es

$$\epsilon_{\text{mín}} = \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_3)}{2} - \frac{\sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2}}{\sqrt{2}}$$

$$\epsilon_{\text{mín}} = \frac{(950 + 525)}{2} - \frac{\sqrt{[(950 - (-375)]^2 + (-375 - 525)^2}}{\sqrt{2}} = -395\,\mu\epsilon$$

El ángulo que el medidor número 1 forma con el eje de la deformación principal más cercano es

$$\beta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left[\frac{(\epsilon_2 - \epsilon_3) - (\epsilon_1 - \epsilon_2)}{(\epsilon_1 - \epsilon_3)}\right]$$

$$\beta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left[\frac{(-375 - 525) - [950 - (-375)]}{(950 - 525)}\right] = -39.6°$$

Paso 6. El esfuerzo principal máximo se determina con la ecuación (10–28).

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{\text{máx}} + \nu\epsilon_{\text{mín}})$$

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{10.6 \times 10^6 \text{ psi}}{1-(0.33)^2}[1870 + 0.33(-395)](10^{-6}) = 20\,694 \text{ psi}$$

El esfuerzo principal mínimo se calcula con la ecuación (10–29).

$$\sigma_{\text{mín}} = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{\text{mín}} + \nu\epsilon_{\text{máx}})$$

$$\sigma_{\text{mín}} = \frac{10.6 \times 10^6 \text{ psi}}{1-(0.33)^2}[-395 + 0.33(1870)](10^{-6}) = 2642 \text{ psi}$$

Paso 7. La deformación por cortante máxima se calcula con la ecuación (10–30).

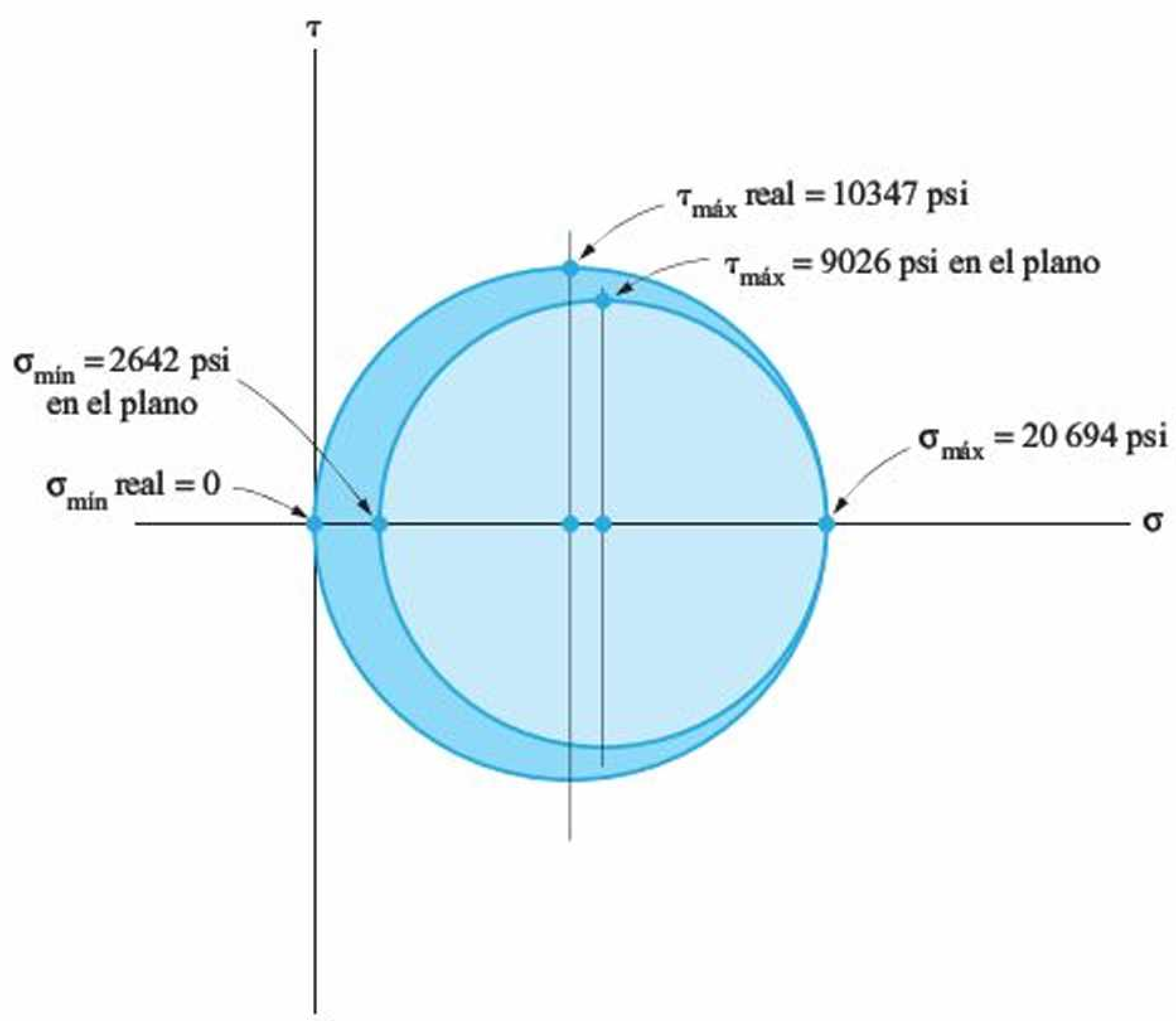
$$\gamma_{\text{máx}} = |(\epsilon_{\text{máx}} - \epsilon_{\text{mín}})| = |1870 - (-395)| = 2265 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

Paso 8. El esfuerzo cortante máximo en el plano del elemento inicial se calcula con la ecuación (10–32).

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{E\gamma_{\text{máx}}}{2(1+\nu)} = \frac{(10.6 \times 10^6 \text{ psi})(2265 \times 10^{-6})}{2(1 + 0.33)} = 9026 \text{ psi}$$

Paso 9. Observamos que los esfuerzos principales máximo y mínimo son positivos o de tensión. Por consiguiente, trazamos el círculo de Mohr complementario para determinar la deformación por cortante máxima. Vea la figura 10–49. El círculo simplemente se traza marcando

FIGURA 10–49
Círculos de Mohr del problema de ejemplo 10–14.



ambos esfuerzos principales sobre el eje horizontal y trazando el círculo para incluir a ambos. El círculo complementario se traza por $\sigma_{\text{máx}}$ y el origen de los ejes, porque eso representa un esfuerzo cero perpendicular al plano del elemento inicial sometido a esfuerzo. El esfuerzo cortante máximo real es igual al radio de este círculo, calculado con

$$\tau_{\text{máx}} = (\sigma_{\text{máx}} - 0)/2 = (20694\,\text{psi})/2 = 10347\,\text{psi}$$

Resumen Los resultados finales son

$\sigma_{\text{máx}} = 20694$ psi $\quad\sigma_{\text{mín}} = 2642$ psi en el plano del elemento inicial

$\sigma_{\text{mín}}$ real $= 0$ perpendicular al plano del elemento inicial

$\tau_{\text{máx}} = 10347$ psi

Solución con una hoja de cálculo basada en datos obtenidos con rosetas de medición de deformación. Los cálculos de esfuerzo y deformación determinados con rosetas son tediosos, requieren mucho tiempo y pueden llevar a cometer errores. Es muy conveniente utilizar una hoja de cálculo, una rutina de algebra computacional o una calculadora programable para realizar los cálculos. La figura 10–50 muestra una hoja de cálculo que logra este objetivo. He aquí algunas de sus características sobresalientes.

1. Se ejecuta el *Procedimiento para analizar los datos obtenidos con una roseta de medición de deformación*, de nueve pasos.
2. Se supone que la condición de esfuerzo es biaxial y que el esfuerzo perpendicular al plano de las deformaciones medidas es cero.
3. Incluye secciones tanto para rosetas rectangulares como de estilo delta.
4. Permite utilizar unidades del sistema inglés o métricas.
5. Los datos de entrada requeridos se resaltan sombreando las celdas apropiadas.
6. Introduzca los datos de propiedad de material tales como el módulo de elasticidad, E, y la relación de Poisson, ν. Por lo que se refiere a E, introduzca sólo los dígitos significativos como se muestra. Se supone que E está en millones de psi o GPa (10^9 Pa).
7. Ingrese las lecturas de deformación como números enteros de microdeformaciones. La hoja de cálculo utiliza este valor multiplicado por 10^{-6} in/in o 10^{-6} m/m). Naturalmente, las lecturas de deformación en realidad no tienen unidades.
8. El primer conjunto de datos mostrado en la parte superior izquierda de la hoja de cálculo es idéntico a los datos del problema de ejemplo 10–14.
9. Tenga cuidado al interpretar los resultados del esfuerzo cortante máximo. Se calculan dos valores: uno es el esfuerzo cortante máximo en el plano del elemento inicial sometido a esfuerzo. Éste es el esfuerzo cortante máximo sólo si los esfuerzos principales máximo y mínimo tienen signos diferentes. Si tienen los mismos signos, se utiliza el cálculo alternado designado “Esfuerzo cortante máximo real”. Éste reconoce que existe un esfuerzo cortante mayor en un plano que no es el plano del elemento inicial. Se traza un círculo de Mohr complementario, como se vio en la sección 10–11 y como se demostró en el problema de ejemplo 10–14 y en la figura 10–49.

FIGURA 10–50
Hoja de cálculo para calcular esfuerzos y deformaciones principales con los datos obtenidos con rosetas de medición de deformación.

HOJA DE CÁLCULO PARA CALCULAR ESFUERZOS Y DEFORMACIONES PRINCIPALES CON LOS DATOS OBTENIDOS CON ROSETAS DE MEDICIÓN DE DEFORMACIÓN			
Consulte la sección 10-12 para el método. Introduzca los datos en los elementos sombreados			
Propiedades de material	*Unidades del sistema inglés*		*Unidades métricas SI*
Módulo de elasticidad	10.6×10^6 psi		73.1×10^9 Pa
Relación de Poisson	0.33		0.33
Datos obtenidos con una roseta rectangular [a 0, 45, 90 grados] [Utilizar las ecuaciones 10-22 a 10-24]			
	Unidades del sistema inglés		*Unidades métricas*
Deformación con el medidor 1	950×10^{-6} in/in		950×10^{-6} m/m
Deformación con el medidor 2	-375×10^{-6} in/in		-375×10^{-6} m/m
Deformación con el medidor 3	525×10^{-6} in/in		525×10^{-6} m/m
	Resultados:		***Resultados:***
Deformación principal máx.	1870×10^{-6} in/in		1870×10^{-6} m/m
Deformación principal mín.	-395×10^{-6} in/in		-395×10^{-6} m/m
Ángulo β, entre el eje del calibrador 1 y el eje principal más cercano			
Ángulo β	−39.6 grados		−39.6 grados
Esfuerzo principal máx.	20695 psi		143 MPa
Esfuerzo principal mín.	2641 psi		18.2 MPa
Deformación por cortante máx.	2265×10^{-6} radianes [sin unidades]		2265×10^{-6} radianes
Esfuerzo cortante máx.	9027 psi [en el plano del elemento inicial]		62.3 MPa
****Sólo en el caso en que los esfuerzos principales máx. y mín. tienen el mismo signo****			
Esfuerzo cortante máx. real	10347 psi		71.4 MPa
[Suponiendo esfuerzo = 0 perpendicular al plano del elemento inicial]			
Datos obtenidos con un roseta delta [a 0, 60, 120 grados] [Utilizar las ecuaciones 10-25 a 10-27]			
	Unidades del sistema inglés		*Unidades métricas*
Deformación con el medidor 1	1250×10^{-6} in/in		1250×10^{-6} m/m
Deformación con el medidor 2	-235×10^{-6} in/in		-235×10^{-6} m/m
Deformación con el medidor 3	645×10^{-6} in/in		645×10^{-6} m/m
	Resultados:		***Resultados:***
Deformación principal máx.	1416×10^{-6} in/in		1416×10^{-6} m/m
Deformación principal mín.	-309×10^{-6} in/in		-309×10^{-6} m/m
Ángulo β, entre el eje del medidor 1 y el eje principal más cercano			
Ángulo β	−18.1 grados		−18.1 grados
Esfuerzo principal máx.	15626 psi		108 MPa
Esfuerzo principal mín.	1882 psi		13.0 MPa
Deformación por cortante máx.	1725×10^{-6} radianes [sin unidades]		1725×10^{-6} radianes
Esfuerzo cortante máx.	6872 psi [en el plano del elemento inicial]		47.4 MPa
****Sólo en el caso en que los esfuerzos principales máx. y mín. tienen el mismo signo****			
Esfuerzo cortante máx. real	7813 psi		53.9 MPa
[Suponiendo esfuerzo = 0 perpendicular al plano del elemento inicial]			

REFERENCIAS

1. Aluminum Association, *Aluminum Design Manual*, Washington, DC, 2005.
2. American Institute of Steel Construction, *Steel Construction Manual*, 13ª ed., Chicago, 2005.
3. Budynas, R. G. y J. K. Nisbett, *Shigley's Mechanical Engineering Design*, 8ª ed., McGraw–Hill, Nueva York, 2007.
4. Dally, James W. y W. F. Riley, *Experimental Stress Analysis*, 4ª ed., Collage House Enterprises, Knoxville, TN, 2005.
5. Doyle, James F., *Modern Experimental Stress Analisis*, John Wiley & Sons, Nueva York, 2004.
6. Doyle, James F. y J. W. Phillips, eds., *Manual on Experimental Stress Analysis*, 5ª ed., Society for Experimental Stress Analysis, Westport, CT, 1989.
7. Mott, Robert L., *Machine Elements in Mechanical Design*, 4ª ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2004.
8. Young, W. C. y R. D. Cook, *Advanced Mechanics of Materials*, 2ª ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1999.

SITIOS DE INTERNET

1. Vishay Micro–Measurements www.vishay.com Por conducto de su Measurement Group, Vishay produce medidores de deformación y equipo asociado, dispositivos y materiales de medición de esfuerzo fotoelásticos, y sistemas de prueba y medición y accesorios. De la lista completa de productos, seleccione *strain gages*, *PhotoStress®Plus*, o *Test and measurements*.
2. Vishay–Experimental Stress Analysis Notebook www.vishay.com/company/brands/measurements–group/schools/nbindex.htm Una colección de 30 temas del cuaderno que incluye detalles de la tecnología de medición de deformaciones, y muchas aplicaciones prácticas y proyectos estudiantiles que utilizan medidores de deformación.
3. HBM www.hbm.com Un miembro del grupo de controles electrónicos e instrumentación Spectris plc, HBM produce medidores de deformación y una amplia variedad de sensores, transductores y sistemas de instrumentación electrónicos.
4. Society for Experimental Mechanics (SEM) http://sem.org SEM promueve la investigación y aplicación de la medición de ingeniería mediante métodos experimentales de prueba de materiales y de las fuerza que los afectan. Algunas áreas de interés son la de materiales, modelado y análisis, medición de deformaciones y pruebas estructurales.
5. Stress Photonics, Inc. www.stressphotonics.com Proveedores de sistemas de medición de esfuerzo y deformación y sistemas de inspección y evaluación no destructiva (NDE, por sus siglas en inglés) en tiempo real, incluidos el Grey–field Polariscope Photoelastic Strain Measurement System y el DeltaTherm Thermoelastic Stress Measurement System.
6. Omega.com www.omega.com/literature–transactions/volume3/strain.htm. Una introducción en línea a la tecnología de medición de deformaciones, diseños de sensores, circuitos de medición, aplicaciones e instalación.
7. Geokon, Incorporated www.geokon.com Diseñadores y fabricantes de instrumentación geotécnica para la industria de la construcción, incluidos medidores de deformación de inserción, medidores de deformación soldables, medidores de deformación de varillas de refuerzo, medidores de juntas, medidores de torsión para cables y muchos otros dispositivos. Seleccione *Product Information*.

PROBLEMAS

10.1.E Un tubo de acero cédula 40 de 2 ½ in se utiliza como soporte de un tablero de básquetbol, como se muestra en la figura P–10–1. Está firmemente fijo en el suelo. Calcule el esfuerzo que se desarrollaría en el tubo cuando un jugador de 230 lb se cuelga del aro de la canasta.

10.2.M La sección transversal de la ménsula mostrada en la figura P10–2 es rectangular de 18 mm de ancho por 75 mm de altura. Está firmemente unida a la pared. Calcule el esfuerzo máximo en la ménsula.

10–3.E La viga mostrada en la figura P10–3 soporta una carga de 6000 lb unida a una ménsula colocada debajo de la viga. Calcule el esfuerzo en los puntos M y N, donde está unida a la columna.

10–4.E Para la viga mostrada en la figura P10–3, calcule el esfuerzo en los puntos M y N cuando la carga de 6000 lb actúa verticalmente hacia abajo en lugar de a un ángulo.

10–5.E Para la viga mostrada en la figura P10–3, calcule el esfuerzo en los puntos M y N cuando la carga de 6000 lb actúa hacia la columna a un ángulo de 40 grados por debajo de la horizontal en lugar de como se muestra.

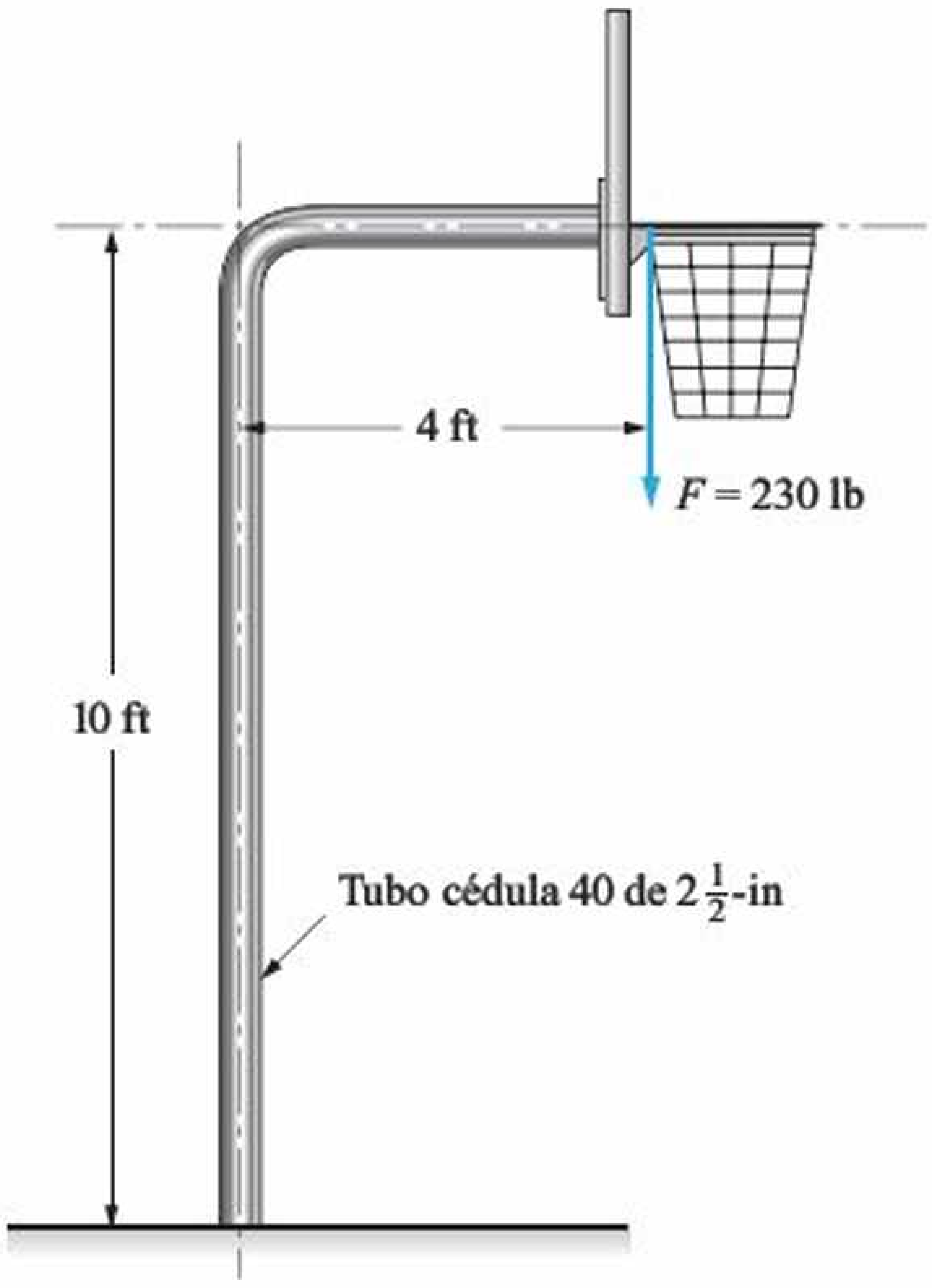


FIGURA P10–1 Tablero de básquetbol del problema 10–1.

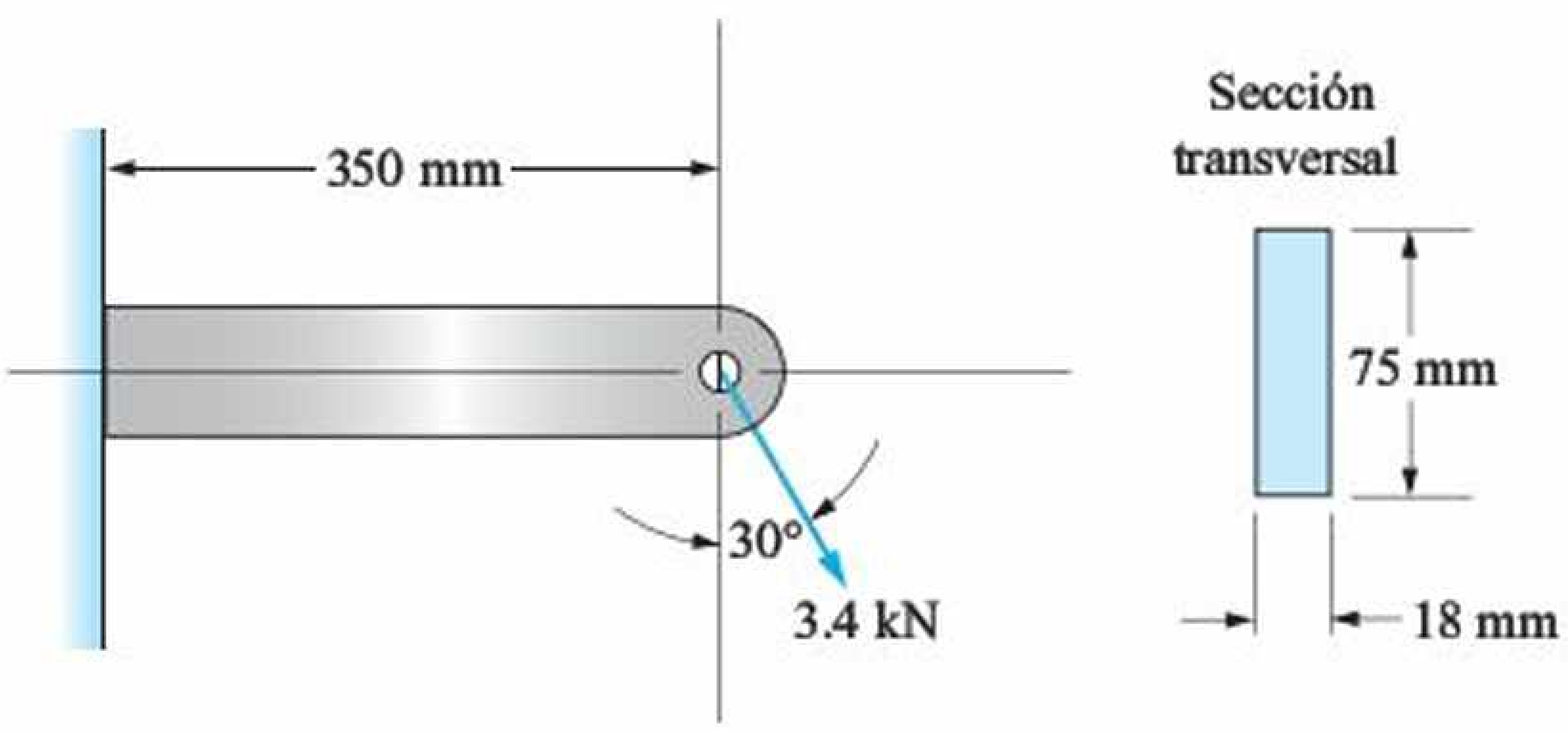


FIGURA P10–2 Ménsula del problema 10–2.

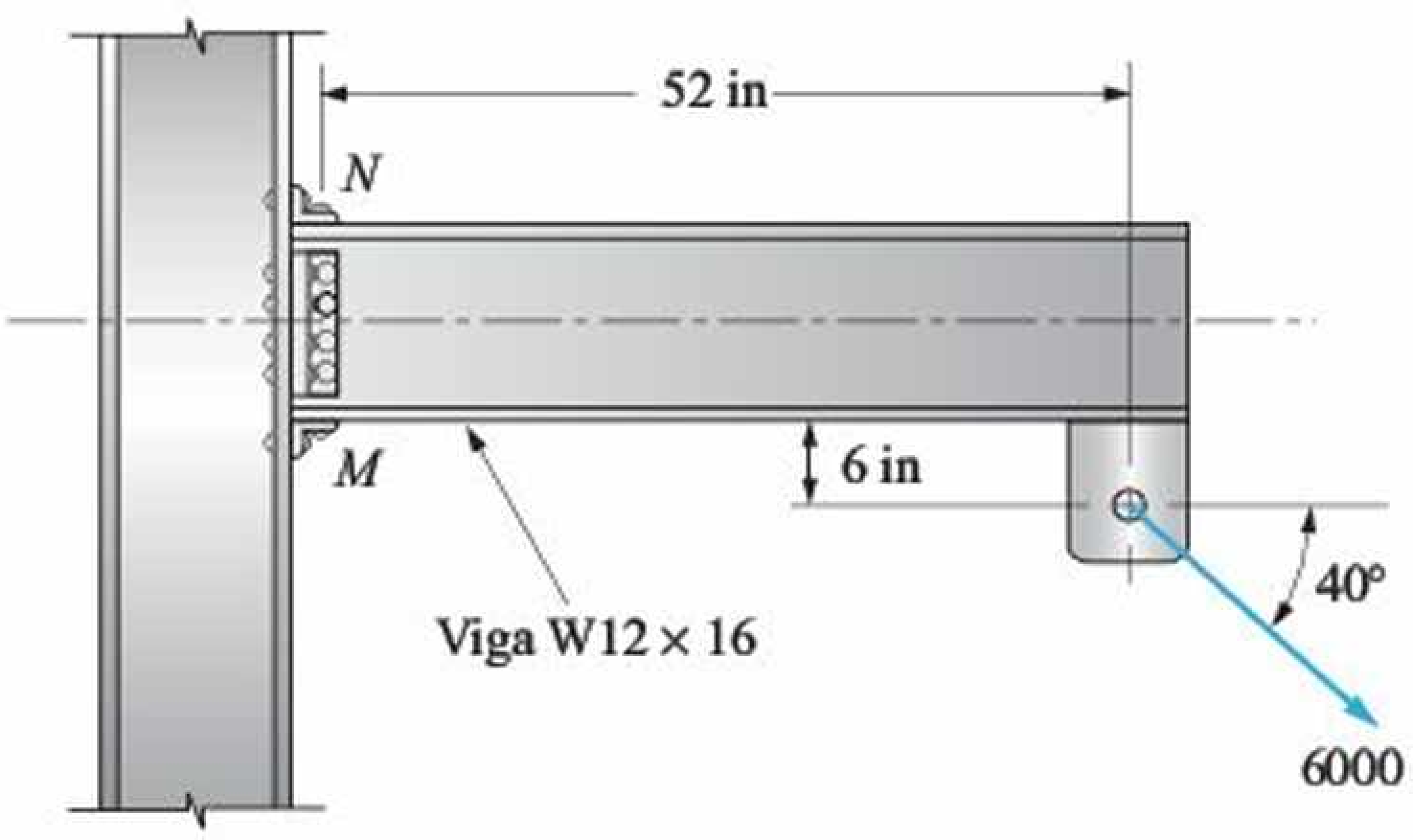


FIGURA P10–3 Viga de los problemas 10–3, 10–4 y 10–5.

10–6.M Calcule el esfuerzo máximo en la parte superior del arco de la sierra caladora mostrada en la figura P10–6 si la tensión en la hoja es de 125 N.

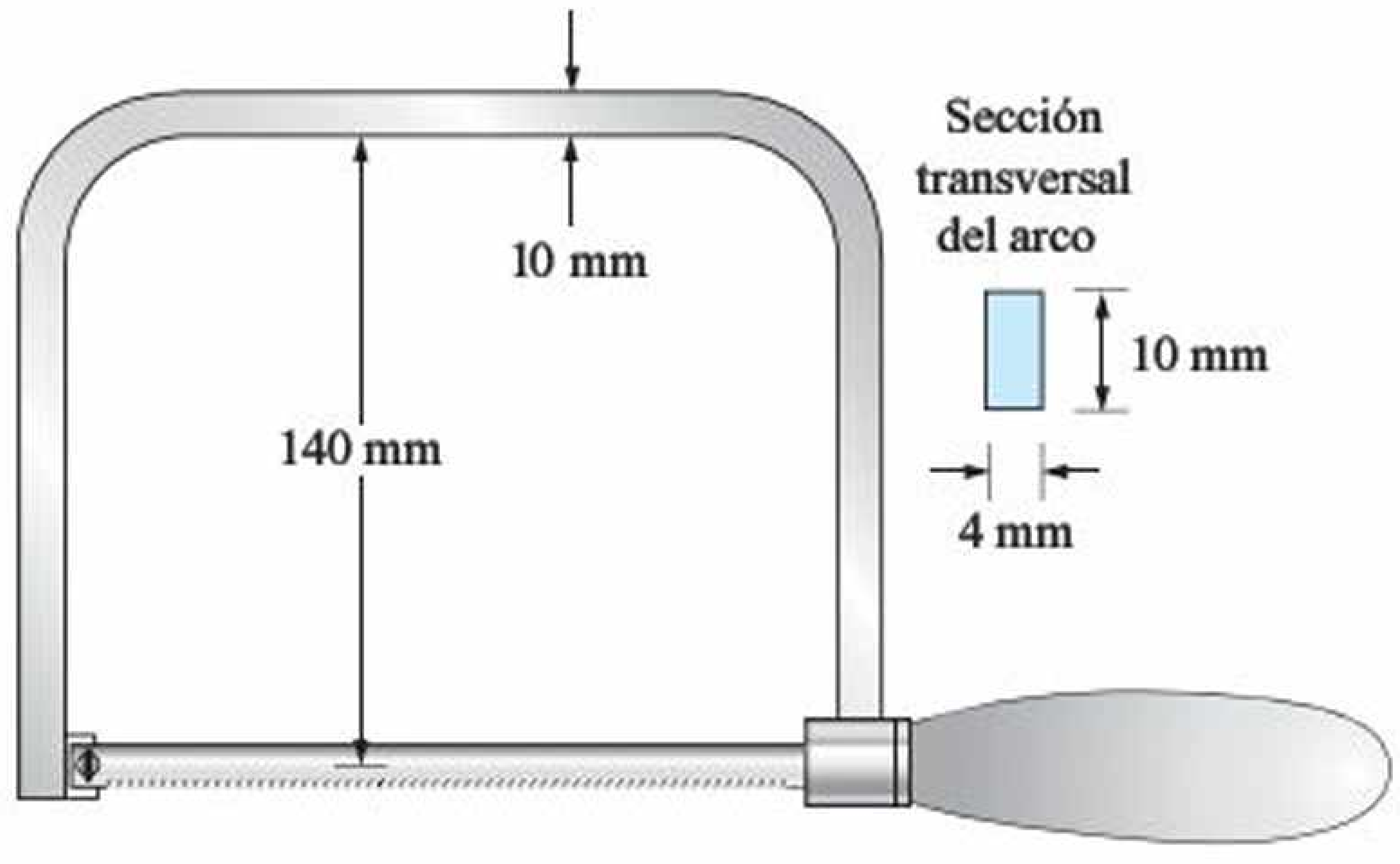


FIGURA P10–6 Arco de la sierra caladora del problema 10–6.

10–7.M Calcule el esfuerzo máximo en la viga de la grúa mostrada en la figura P10–7 cuando se aplica una carga de 12 kN a la mitad de la viga.

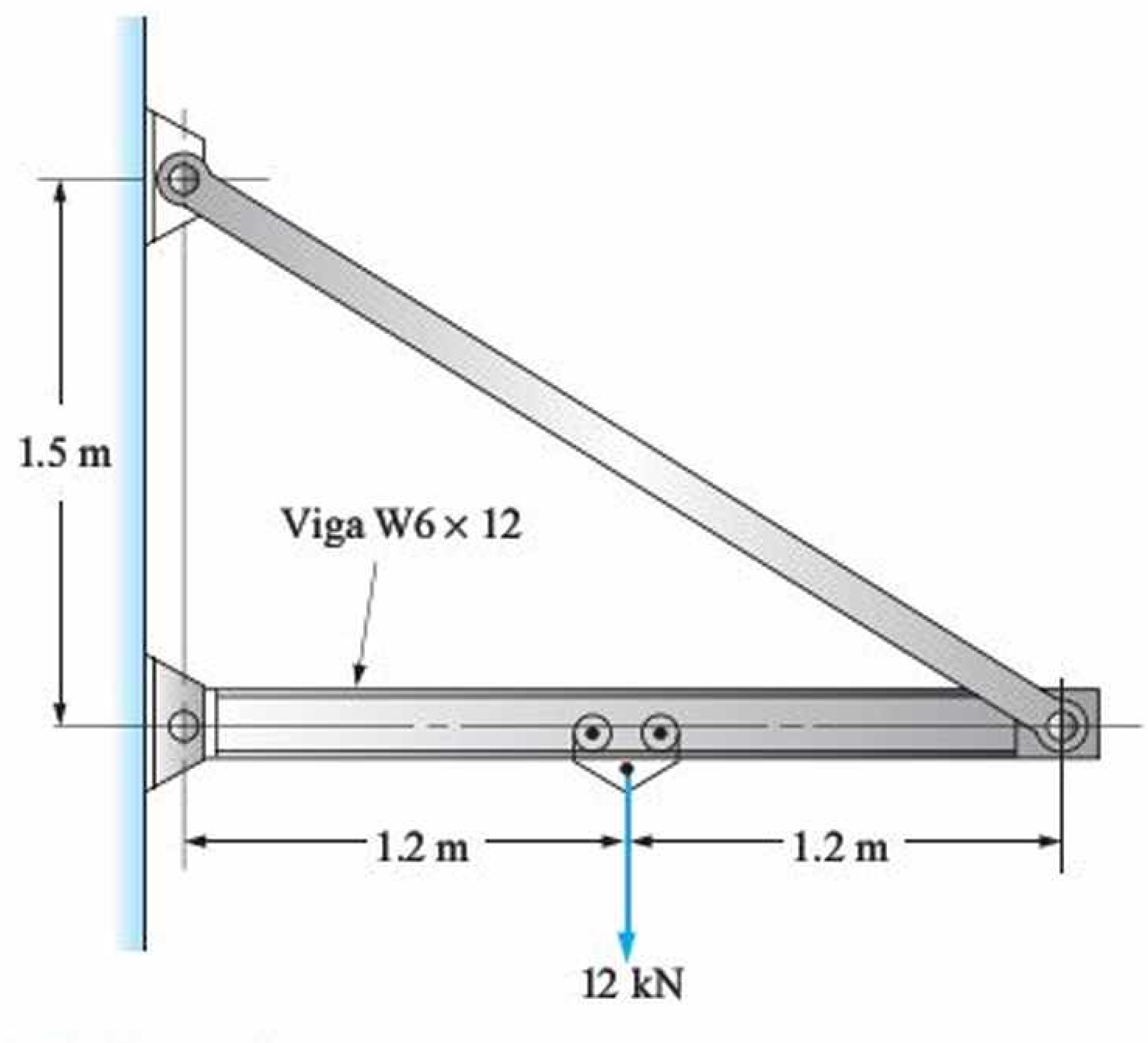


FIGURA P10–7 Viga de la grúa del problema 10–7.

10–8.M La figura P10–8 muestra una segueta cortametales. Su arco es un tubo hueco de 12 mm de diámetro externo y 1.0 mm de espesor de pared. La hoja se tensa por medio de la tuerca de mariposa de modo que se aplique una fuerza de tensión de 160 N a la hoja. Calcule el esfuerzo máximo en la sección superior del arco tubular.

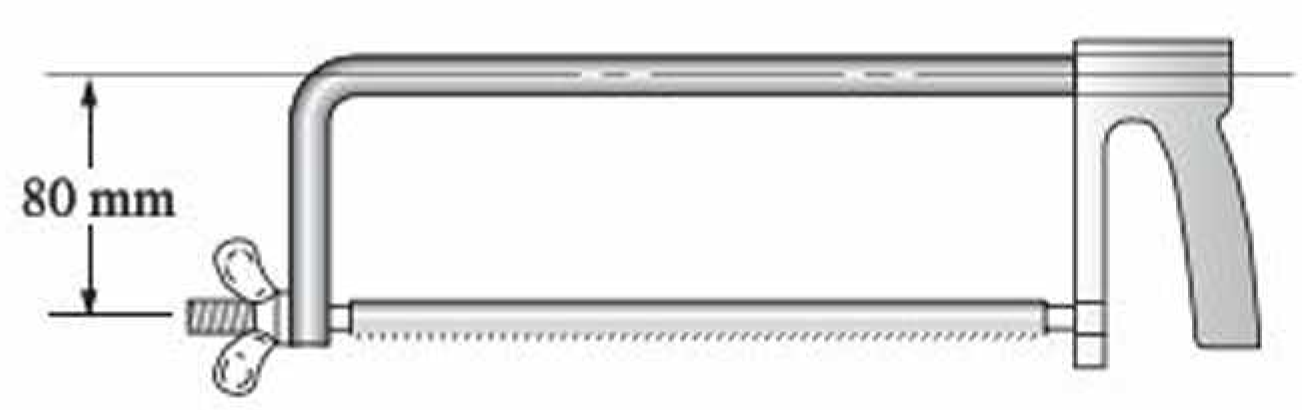


FIGURA P10–8 Arco de la segueta del problema 10–8.

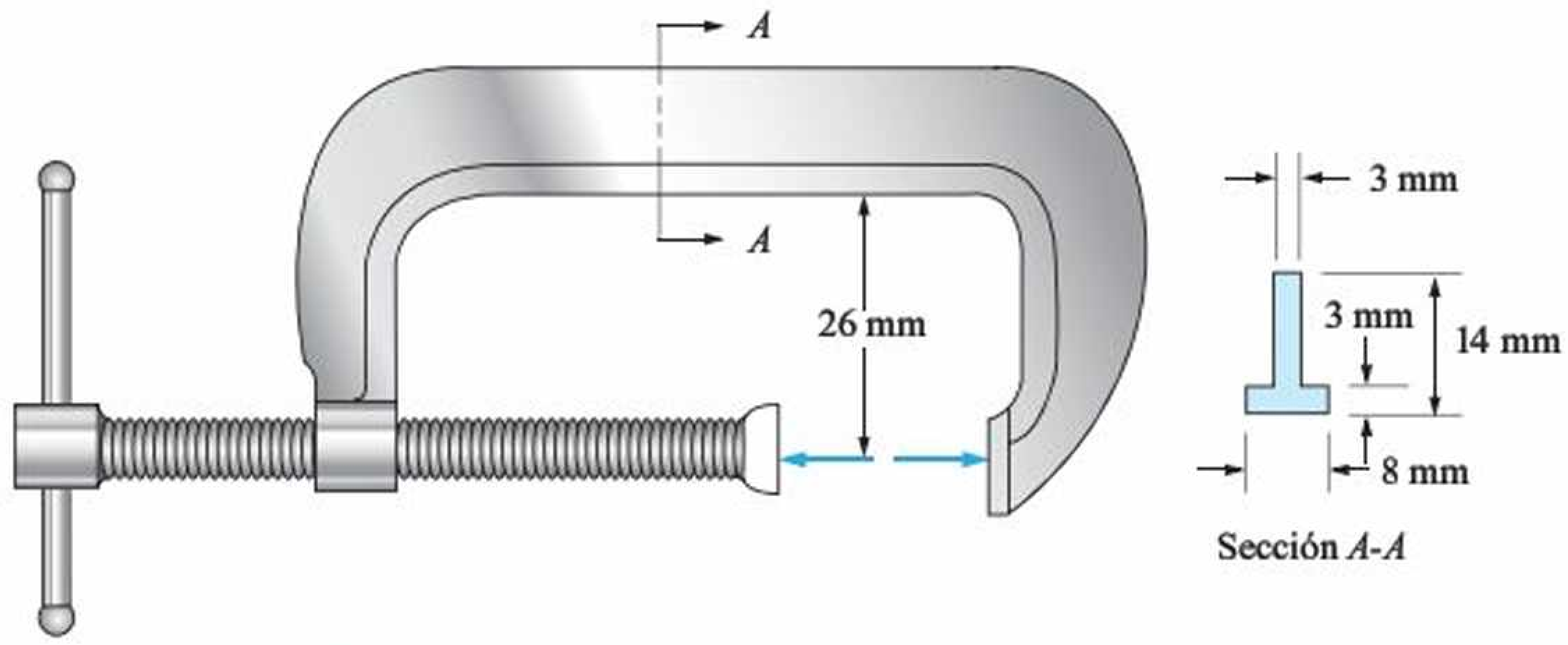


FIGURA P10–9 Prensa en C del problema 10–9.

10–9.M La prensa en C ilustrada en la figura P10–9 es de zinc fundido, ZA12. Determine la fuerza de sujeción permisible que la prensa puede ejercer si se desea que tenga un factor de diseño de 4 basado en la resistencia máxima a tensión o a compresión.

10–10.M La prensa en C ilustrada en la figura P10–10 es de hierro maleable fundido, ASTM A220 grado 45008. Determine la fuerza de sujeción permisible que la prensa puede ejercer si se desea que tenga un factor de diseño de 4 basado en la resistencia máxima a tensión o a compresión.

10–11.M En la figura P10–11 se muestra una herramienta utilizada para comprimir un resorte helicoidal de modo que pueda ser instalado en un automóvil. Se aplica una fuerza de 1200 N cerca de los extremos de las orejas extendidas, como se muestra. Calcule el esfuerzo de tensión máximo en la varilla roscada. Suponga un factor de concentración de

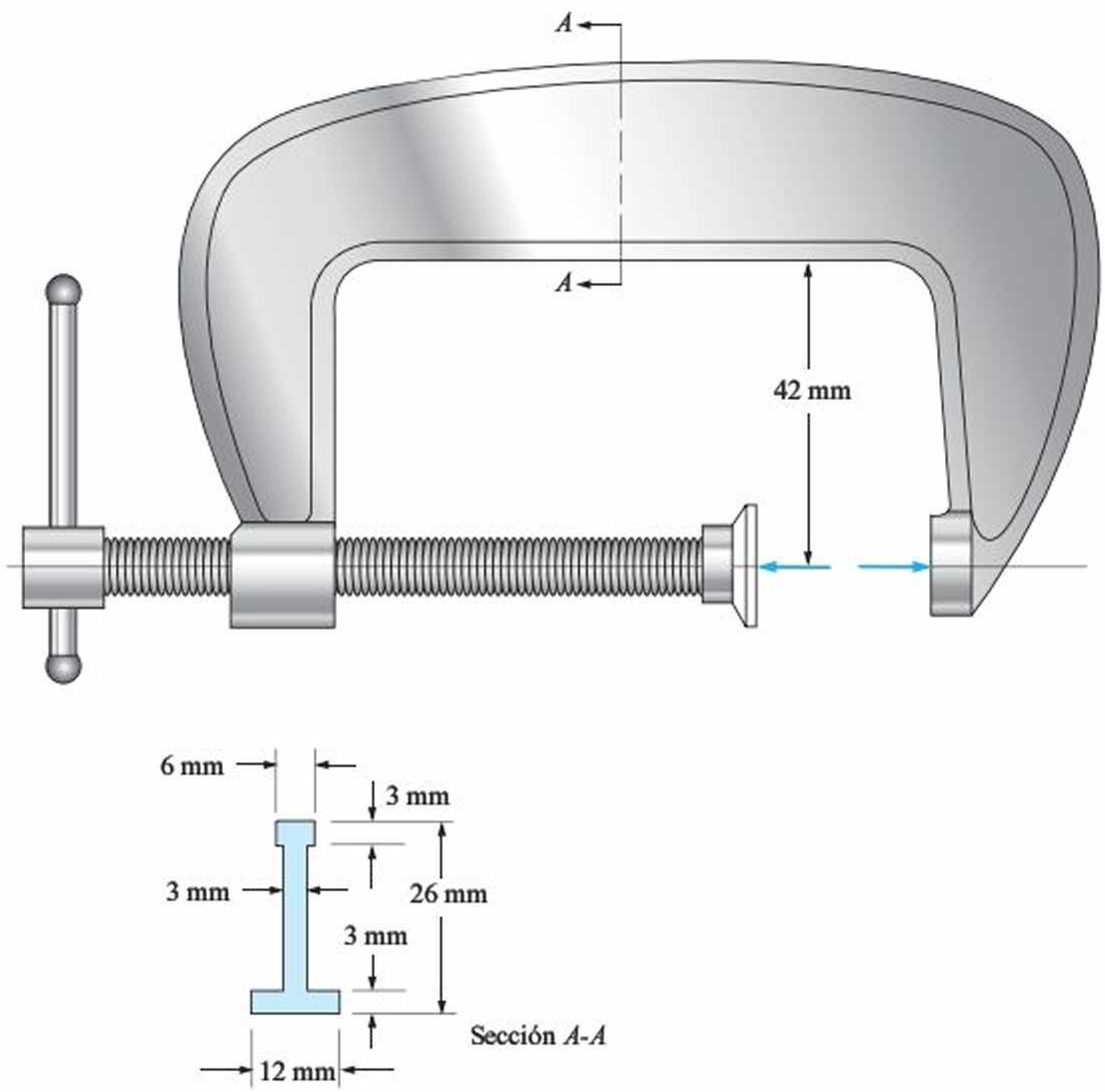


FIGURA P10–10 Prensa en C del problema 10–10.

esfuerzo de 3.0 en la raíz de la rosca tanto para esfuerzos flexionantes como para esfuerzos de tensión. En seguida, con un factor de diseño de 2 basado en la resistencia a la cedencia, especifique un material adecuado para la varilla.

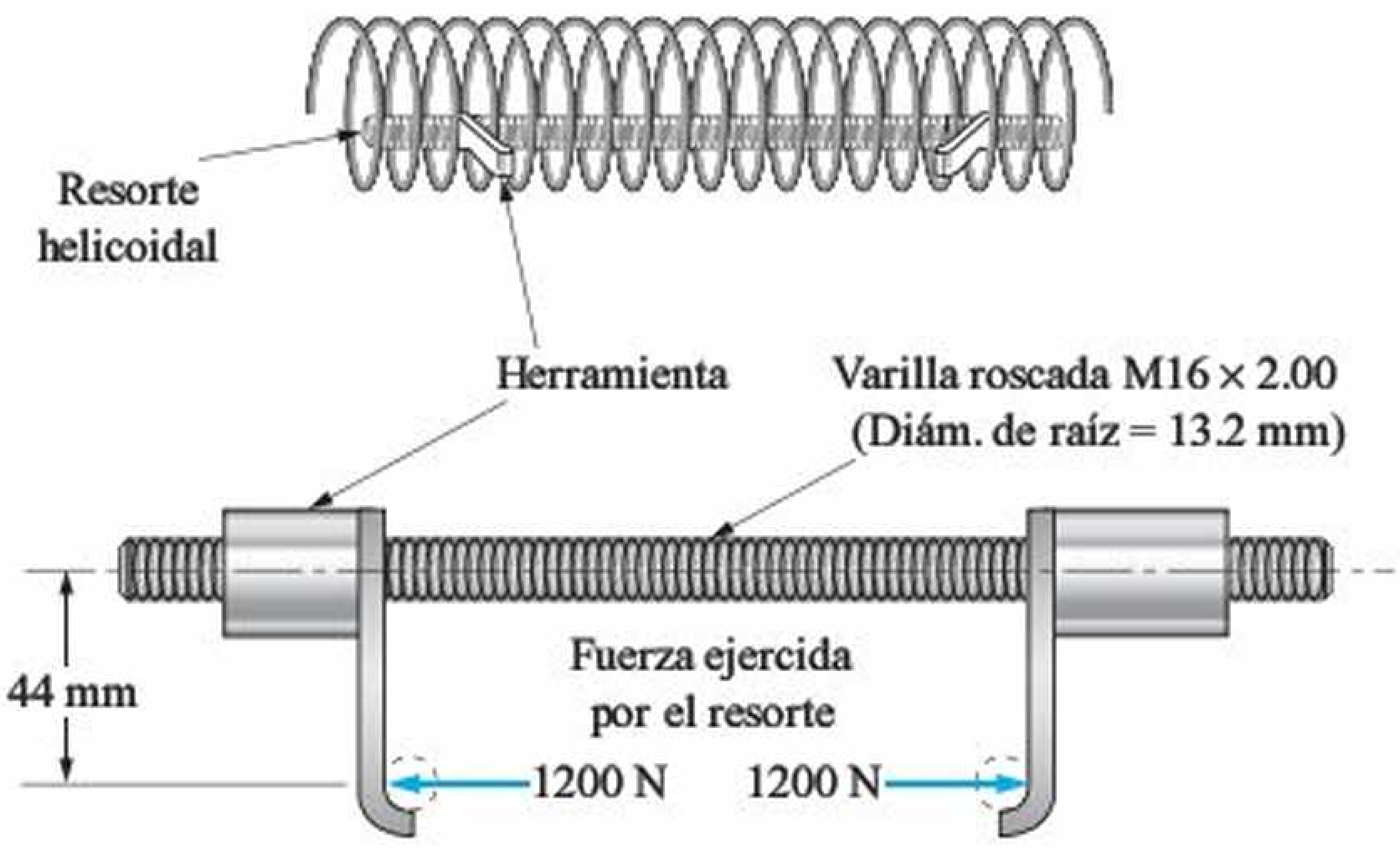


FIGURA P10–11 Herramienta para comprimir los resortes del problema 10–11.

10–12.M La figura P10–12 muestra una parte del mecanismo de dirección de un automóvil. Se muestra el diseño detallado del brazo de dirección. Observe que el espesor del brazo es constante de 10 mm, de modo que todas las secciones entre las orejas extremas son rectangulares. La fuerza de 225 N se aplica al brazo a un ángulo de 60 grados. Calcule el esfuerzo en las secciones *A* y *B* del brazo. Luego, si el brazo es de hierro dúctil, ASTMA536, grado 80–55–6 calcule el factor de diseño mínimo en estos dos puntos basado en la resistencia máxima.

10–13.E Una viga I American Standard S3 × 5.7 se somete a las fuerzas mostradas en la figura P10–13. La fuerza de 4600 lb actúa directamente en línea con el eje de la viga. La fuerza de 500 lb dirigida hacia abajo en *A* produce la reacción mostrada en los apoyos *B* y *C*. Calcule los esfuerzos de tensión y compresión máximos en la viga.

10–14.M La pluma de la grúa horizontal mostrada en la figura P10–14 es un tubo rectangular hueco de acero. Calcule el esfuerzo en la pluma justo a la izquierda del punto *B* cuando una masa de 1000 kg se suspende del extremo.

10–15.M Para la grúa mostrada en la figura P10–14, calcule la carga que podría soportar si se desea una factor de diseño de 3 basado en la resistencia a la cedencia. La pluma es de acero AISI 1040 laminado en caliente. Analice sólo las secciones donde la sección rectangular completa soporta la carga, suponiendo que las secciones en las conexiones están adecuadamente reforzadas.

10–16.E El miembro *EF* de la armadura mostrada en la figura P10–16 soporta una carga de tensión axial de 54000 lb, aparte de las dos cargas de 1200 lb mostradas. Se pretende utilizar dos ángulos para formar el miembro, dispuestos dorso con dorso. Especifique un tamaño adecuado para los ángulos si tienen que ser de acero estructural ASTM A36 con un esfuerzo permisible de 0.6 veces la resistencia a la cedencia.

En los problemas 10–17 a 10–20:

Especifique un tamaño adecuado para la parte horizontal del miembro que mantendrá el esfuerzo de tensión o tensión combinado a 6000 psi si se usa el sistema inglés de unidades y a 42 MPa si se utiliza el métrico (SI). La sección transversal tiene que ser cuadrada.

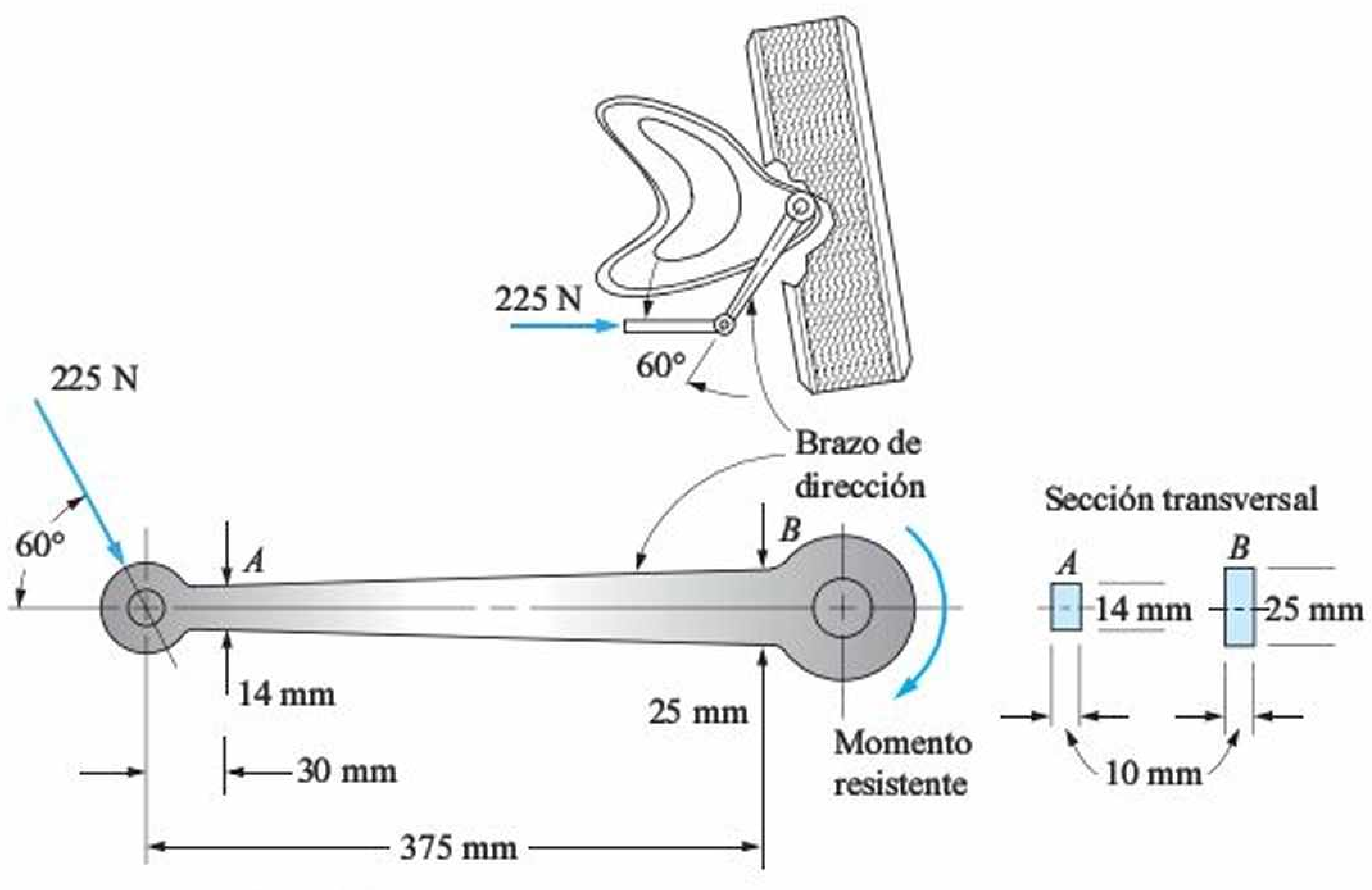


FIGURA P10–12 Brazo de dirección del problema 10–12.

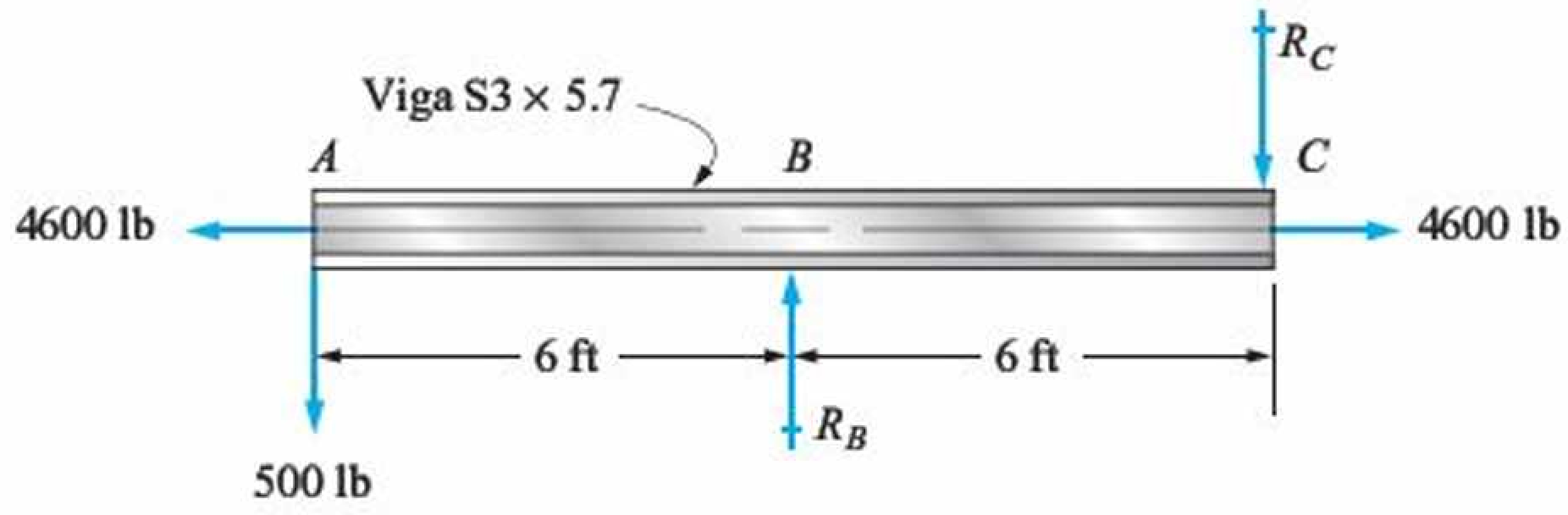


FIGURA P10–13 Viga del problema 10–13.

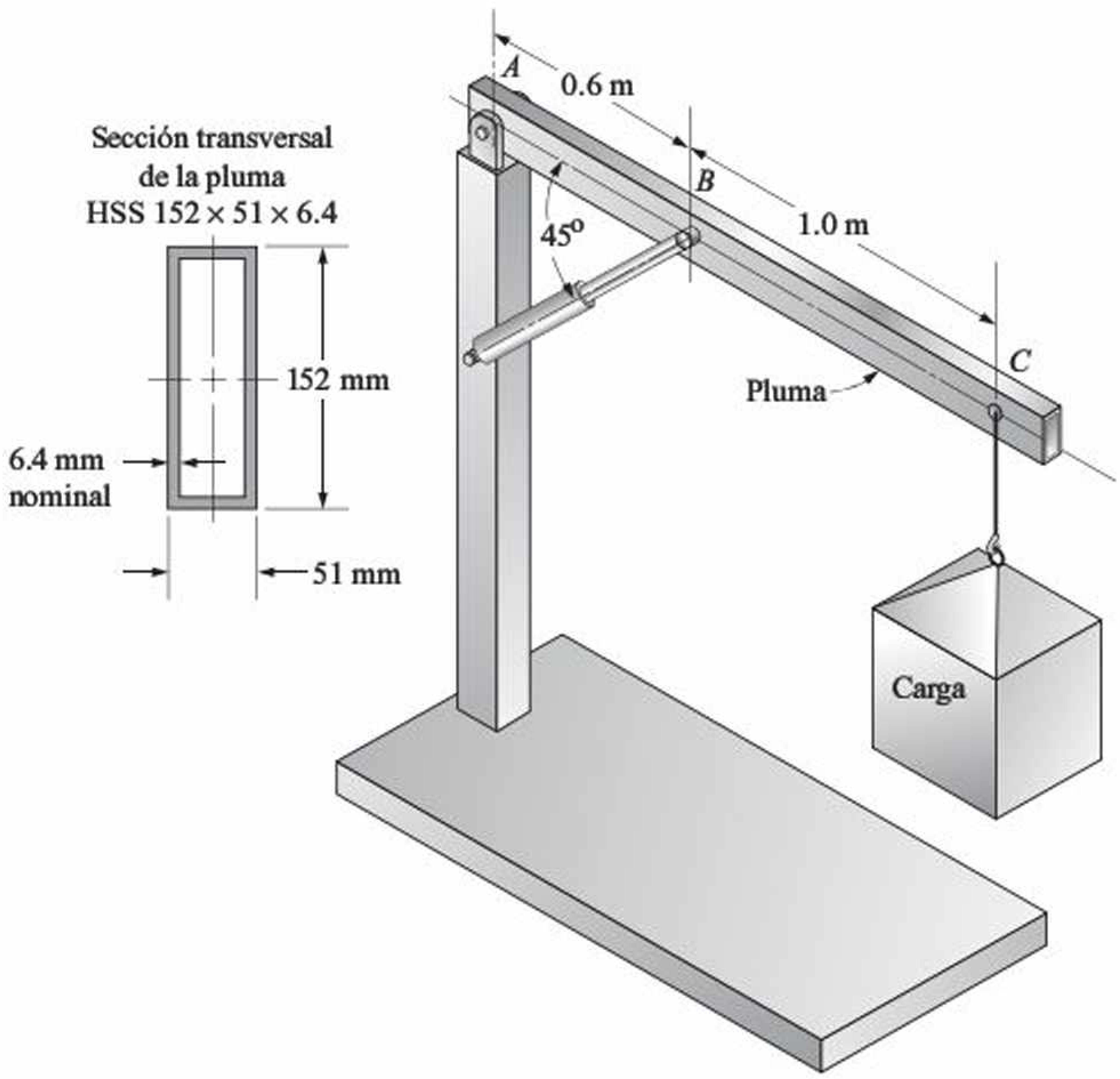


FIGURA P10–14 Pluma de la grúa del problema 10–14.

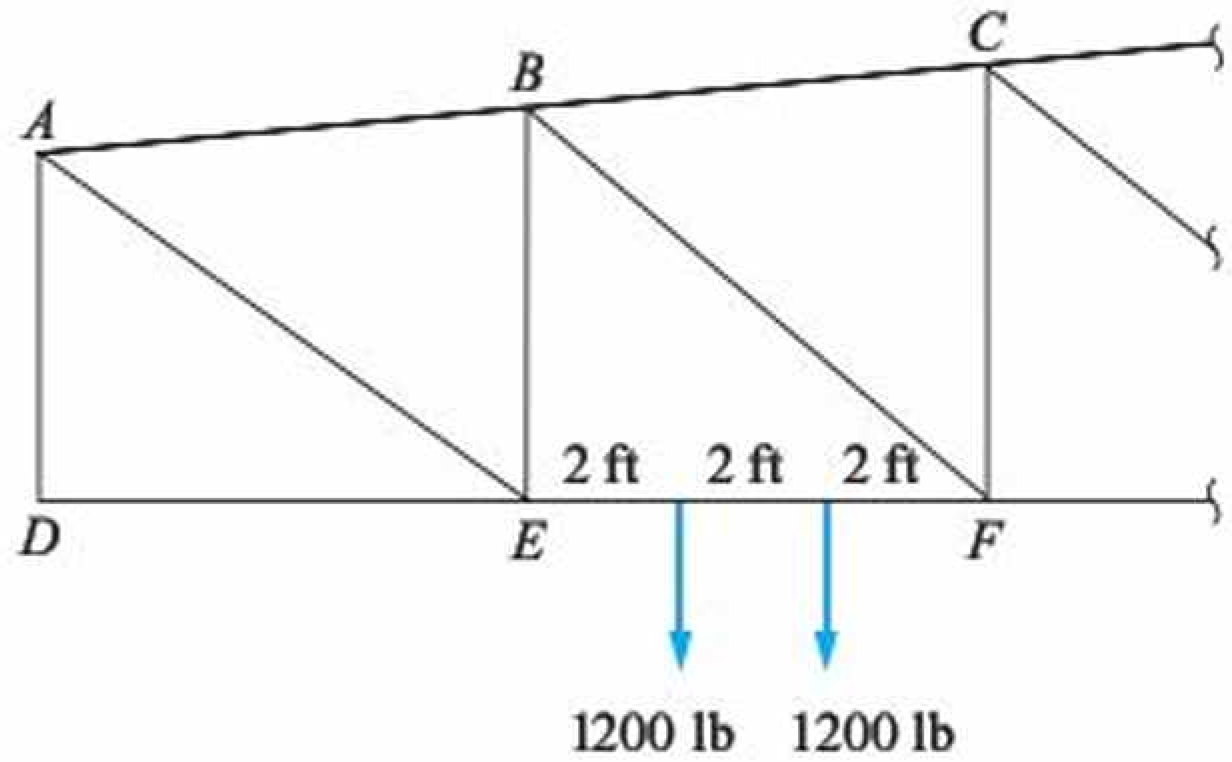


FIGURA P10–16 Armadura del problema 10–16.

10–17.M Use la figura P10–17

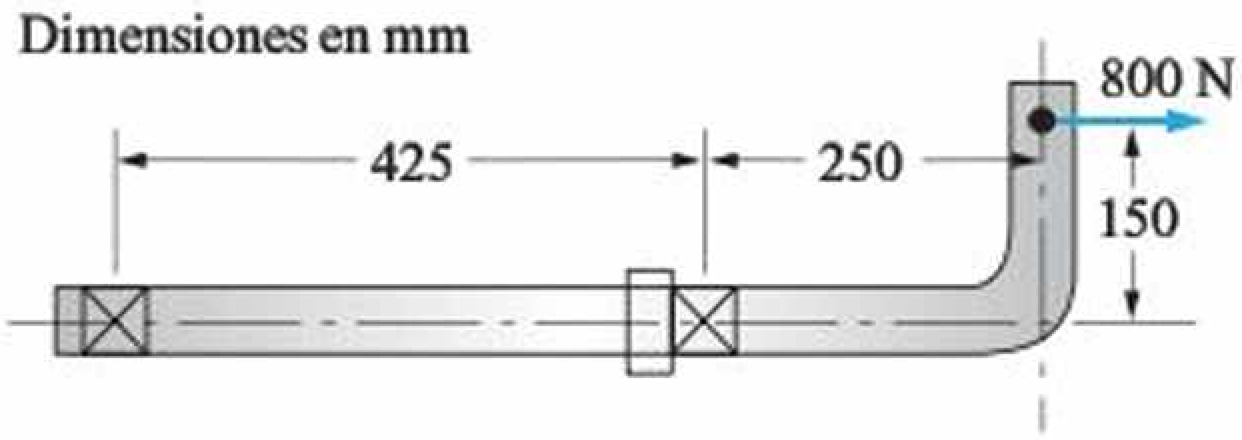


FIGURA P10–17

10–18.E Use la figura P10–18

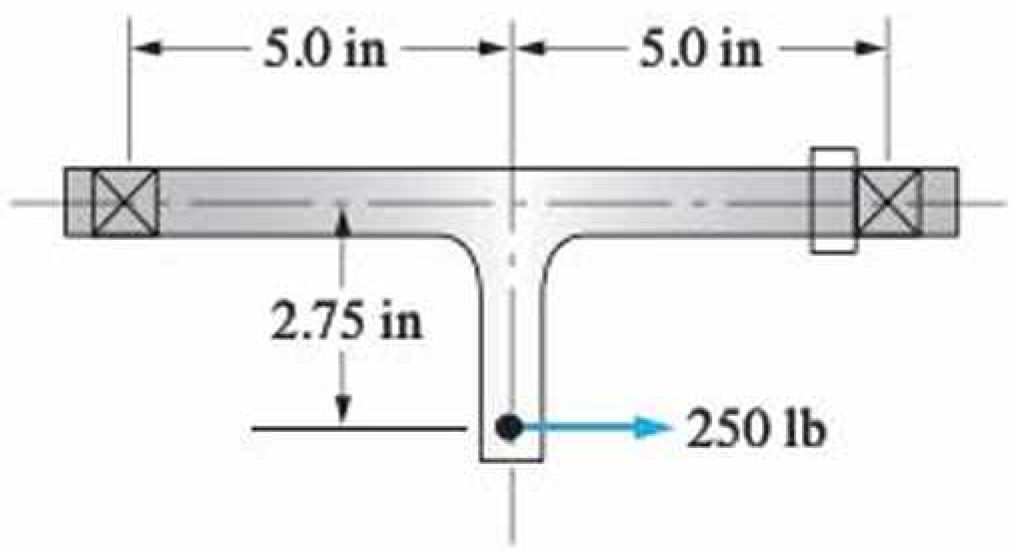


FIGURA P10–18

10–19.M Use la figura P10–19

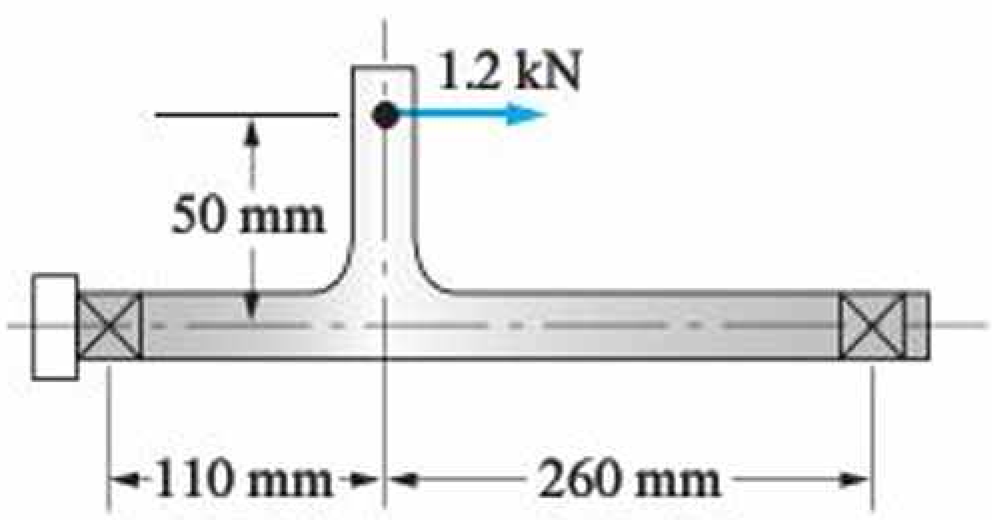


FIGURA P10–19

10–20.E Use la figura P10–20

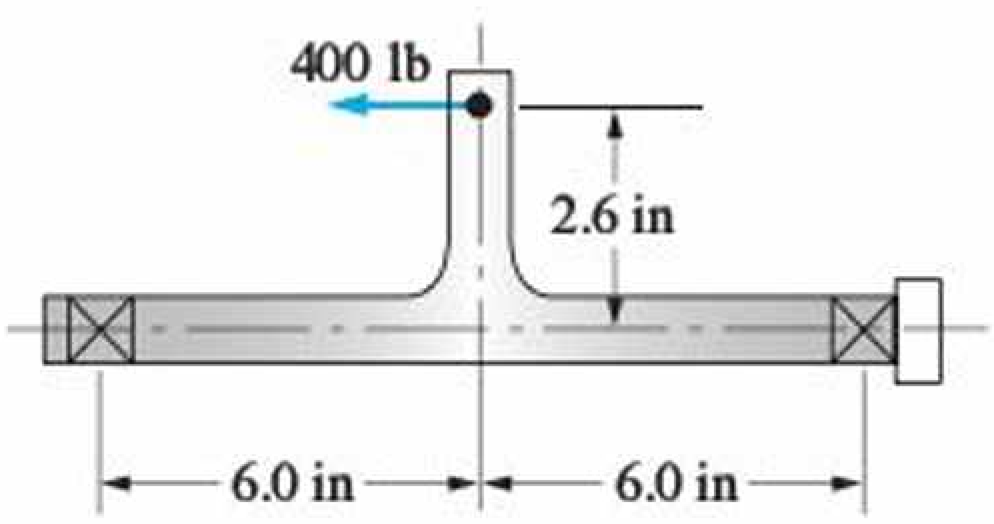


FIGURA P10–20

Esfuerzos normales y cortantes combinados

10–21.M Una barra circular sólida de 40 mm de diámetro se somete a una fuerza de tensión axial de 150 kN junto con par de torsión de 500 N·m. Calcule el esfuerzo cortante máximo en la barra.

10–22.E Una barra circular sólida de 2,25 in de diámetro se somete a una fuerza de tensión axial de 47000 lb junto con par de torsión de 8500 lb·in. Calcule el esfuerzo cortante máximo en la barra.

10–23.E Una barra circular sólida de 4.00 in de diámetro se somete a una fuerza de compresión axial de 40000 lb junto con par de torsión de 25000 lb·in. Calcule el esfuerzo cortante máximo en la barra.

10–24.E Un poste circular hueco corto se hace con un tubo de acero cédula 40 de 12 in para que soporte una carga de compresión axial de 250000 lb junto con un par de torsión de 180000 lb·in. Calcule el esfuerzo cortante máximo en el poste.

10–25.E Un soporte circular hueco corto se hace con un tubo de acero cédula 40 de 3 in para que soporte una carga de compresión axial de 25000 lb junto con un par de torsión de 15500 lb·in. Calcule el esfuerzo cortante máximo en el soporte.

10–26.E Una antena de televisión se monta en un tubo hueco de aluminio, como se ilustra en la figura P10–26. Durante su instalación se aplica una fuerza de 20 lb al extremo de la antena, como se muestra. Calcule el esfuerzo cortante torsional en el tubo y el esfuerzo producido por flexión. Considere que el tubo está simplemente apoyado a prueba de flexión en las abrazaderas, pero suponga que no se permite la rotación. Si el tubo es de aluminio 6061–T6, ¿sería seguro cuando se somete a esta carga? El diámetro externo del tubo es de 1.50 in y su espesor de pared de 1/16 in.

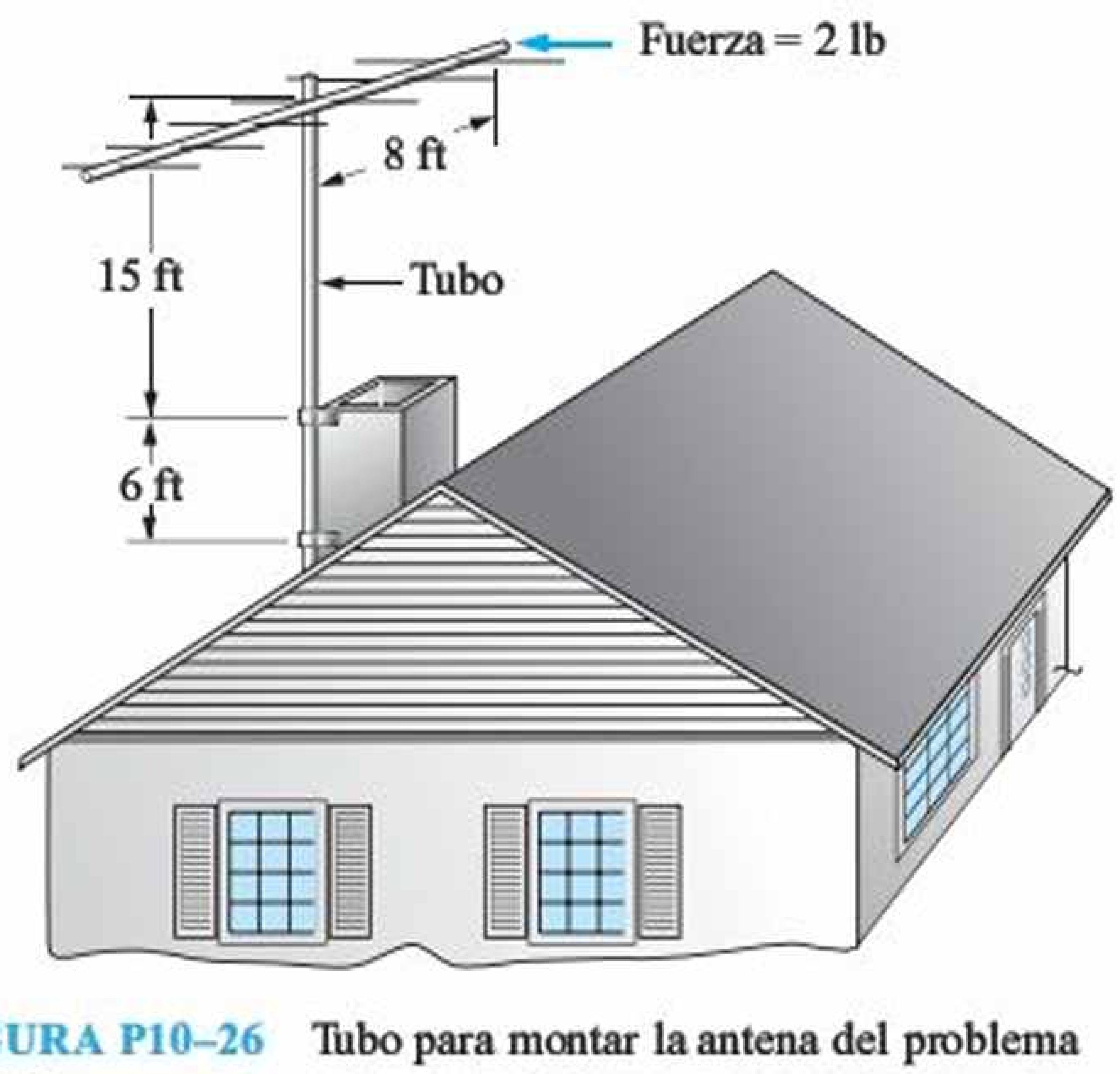


FIGURA P10–26 Tubo para montar la antena del problema 10–26.

10–27.M La figura P10–27 muestra una manivela a la que se le aplica una fuerza F de 1200 N. Calcule el esfuerzo máximo en la parte circular de la manivela.

10–28.E Se tiene que usar un tubo de acero estándar para soportar una barra sometida a cuatro cargas, como se muestra en la figura P10–28. Especifique un tubo adecuado que mantenga el esfuerzo cortante máximo a 8000 psi.

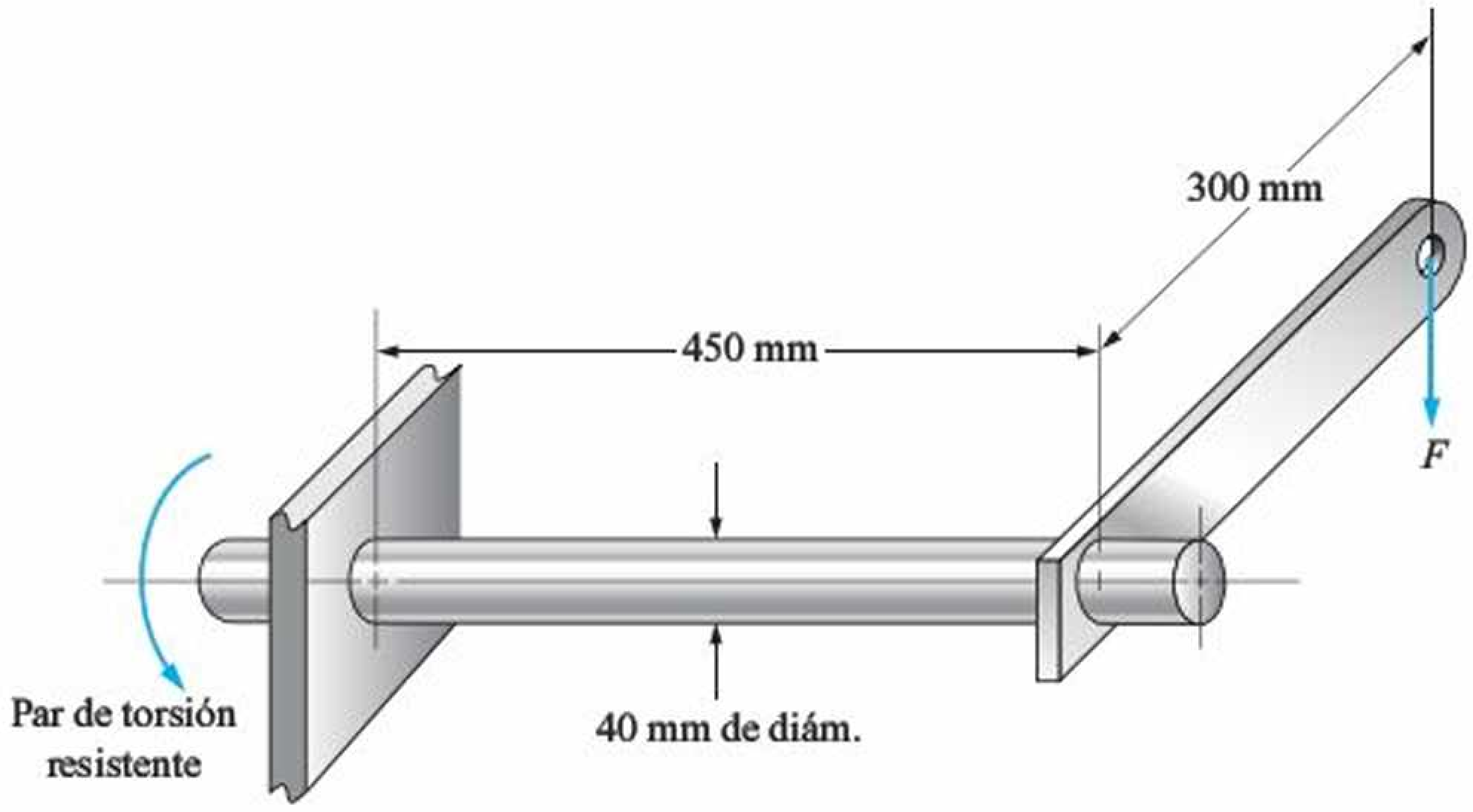


FIGURA P10–27 Manivela del problema 10–27.

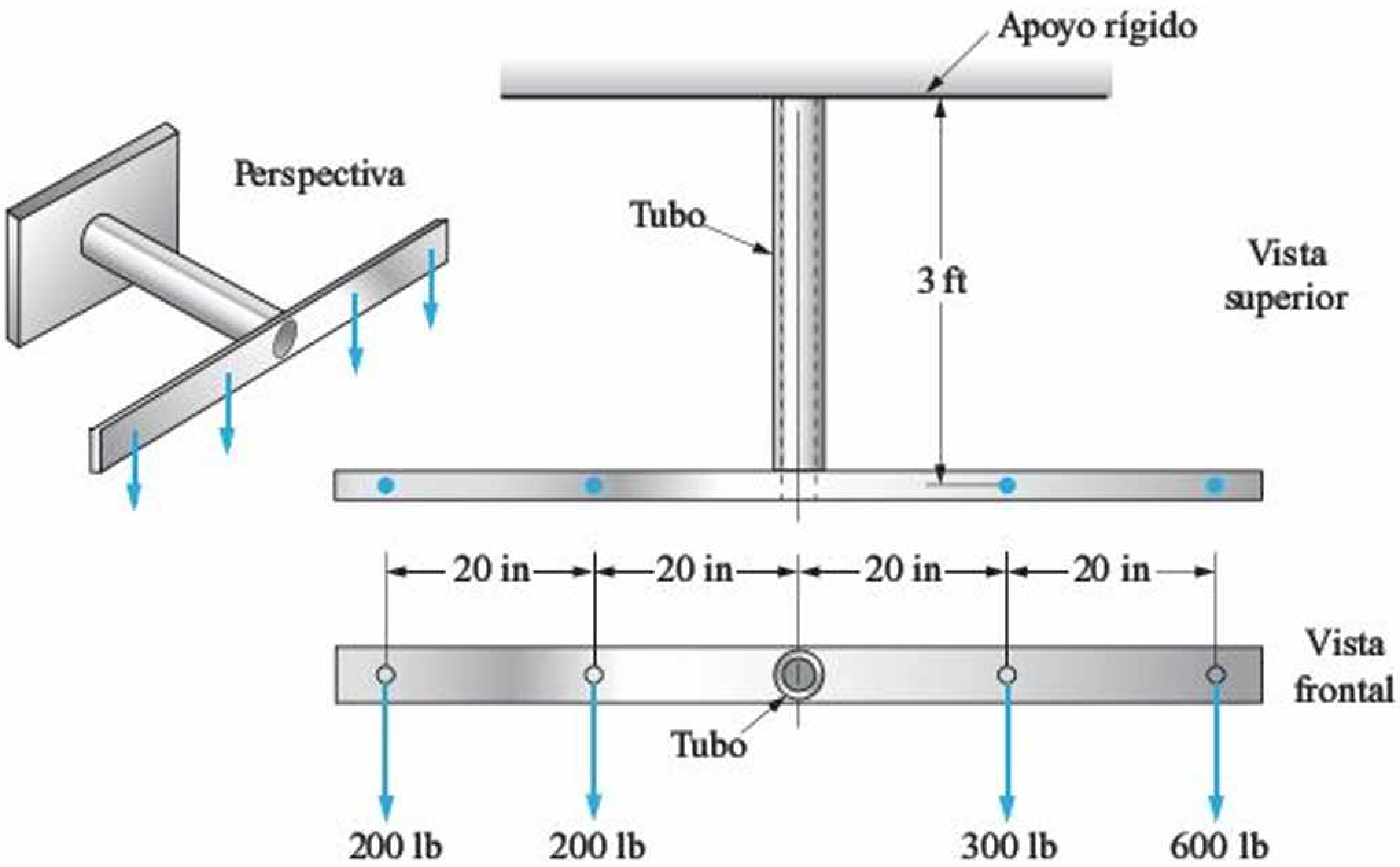


FIGURA P10–28 Ménsula del problema 10–28.

Flechas rotatorias–esfuerzos flexionantes y cortantes torsionales combinados

10–29.M Una flecha circular soporta la carga mostrada en la figura P10–29 y un par de torsión de 1500 N·m entre las secciones *B* y *C*. Calcule el esfuerzo cortante máximo cerca de la sección *B* de la flecha.

10–30.M Una flecha circular soporta la carga mostrada en la figura P10–30 y un par de torsión de 4500 N·m entre las secciones *B* y *C*. Calcule el esfuerzo cortante máximo cerca de la sección *B* de la flecha.

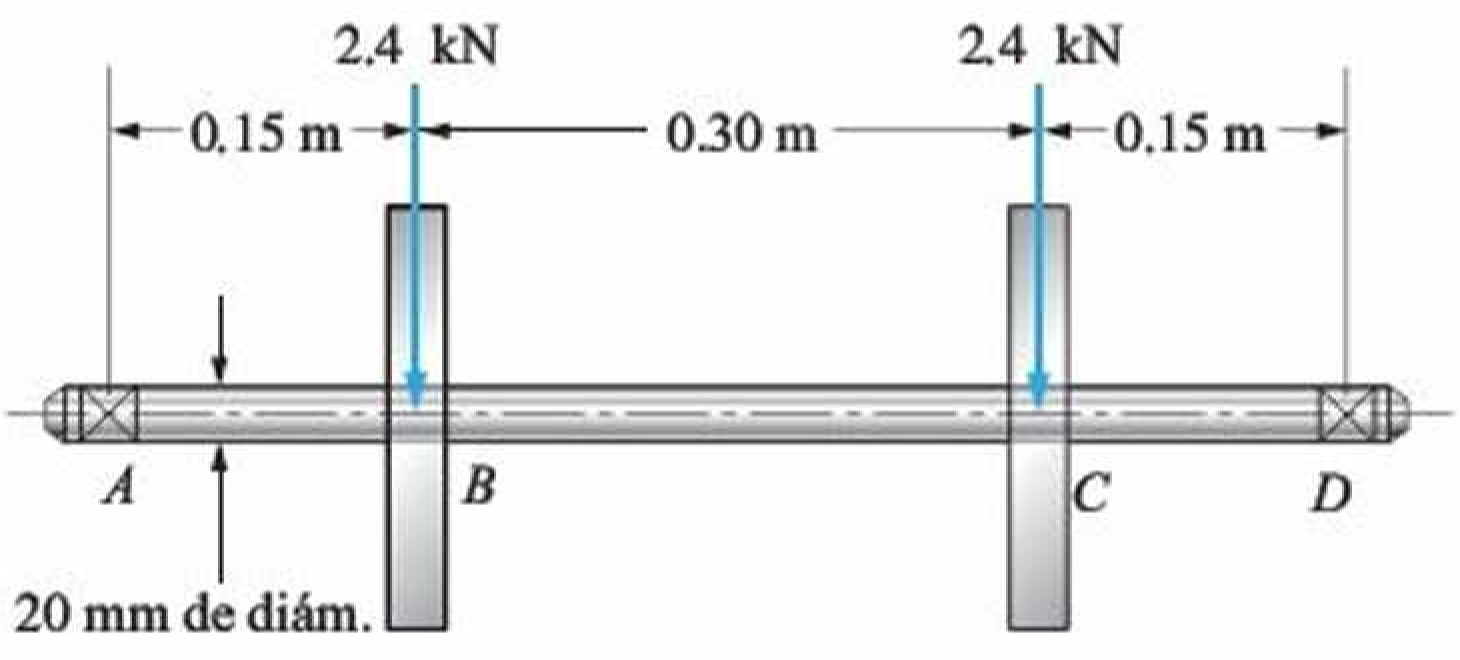


FIGURA P10–29 Flecha del problema 10–29.

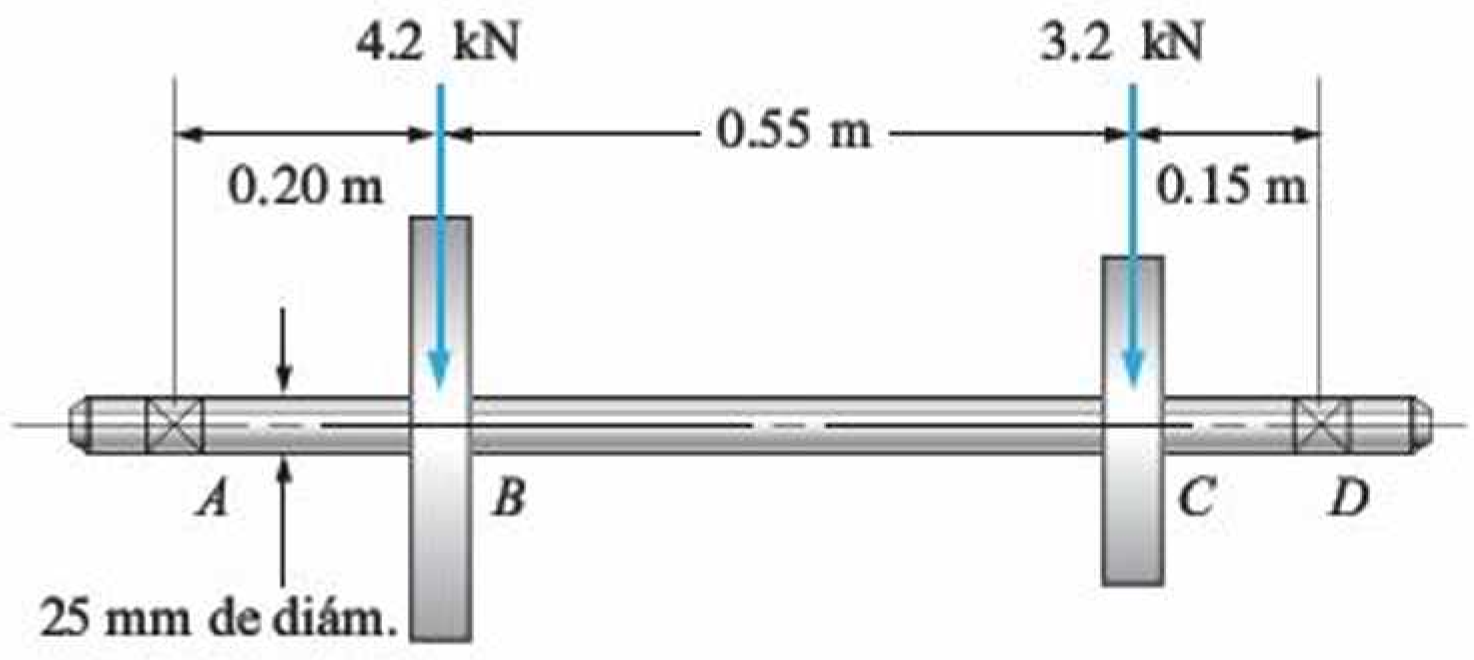


FIGURA P10–30 Flecha del problema 10–30.

10–31.E Una flecha circular sólida de 1.0 in de diámetro soportará una carga de 25 hp mientras gira a 1150 rpm dispuesta, como se muestra en la figura P10–31. Se muestran las cargas de flexión totales en que actúan en los cojinetes *A* y *C* junto con las reacciones en los cojinetes *B* y *D*. Use un factor de diseño de 6 para la teoría de falla por esfuerzo cortante máximo y determine un acero adecuado para la flecha.

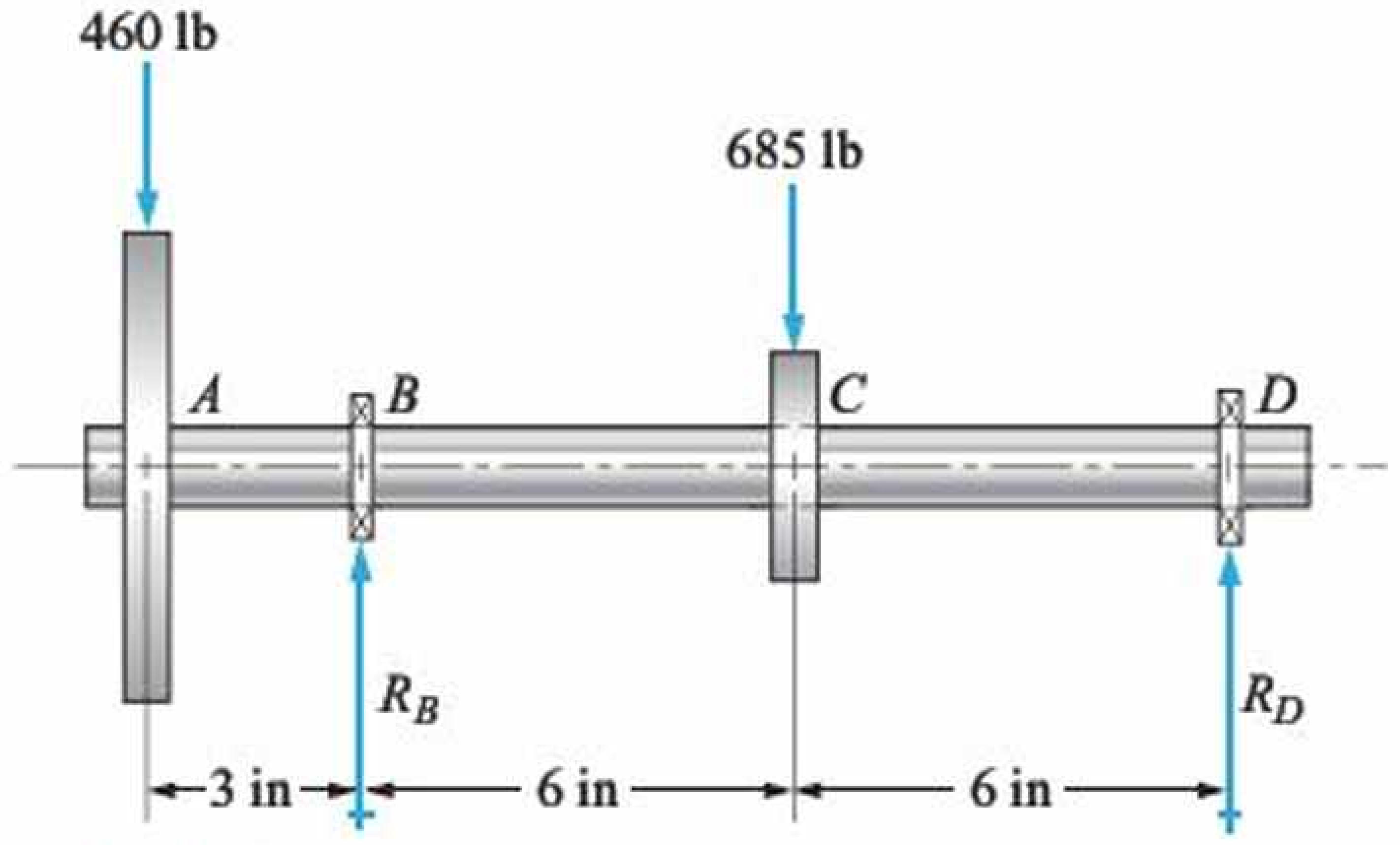


FIGURA P10–31 Flecha del problema 10–31.

10–32.E Se montan tres poleas en una flecha giratoria, como se muestra en la figura P10–32. Las tensiones en las correas se muestran en la vista de extremo. La flecha recibe toda la potencia a través de la polea *C* desde abajo. Las poleas *A* y *E* suministran potencia a las poleas acopladas de arriba.

(a) Calcule el par de torsión en todos los puntos de la flecha.

(b) Calcule el esfuerzo flexionante y el esfuerzo cortante torsional en el punto de la flecha donde ocurre el momento flexionante máximo si el diámetro de la flecha es de 1.75 in.

(c) Calcule el esfuerzo cortante máximo en el punto utilizado en el paso (b). Luego especifique un material adecuado para la flecha.

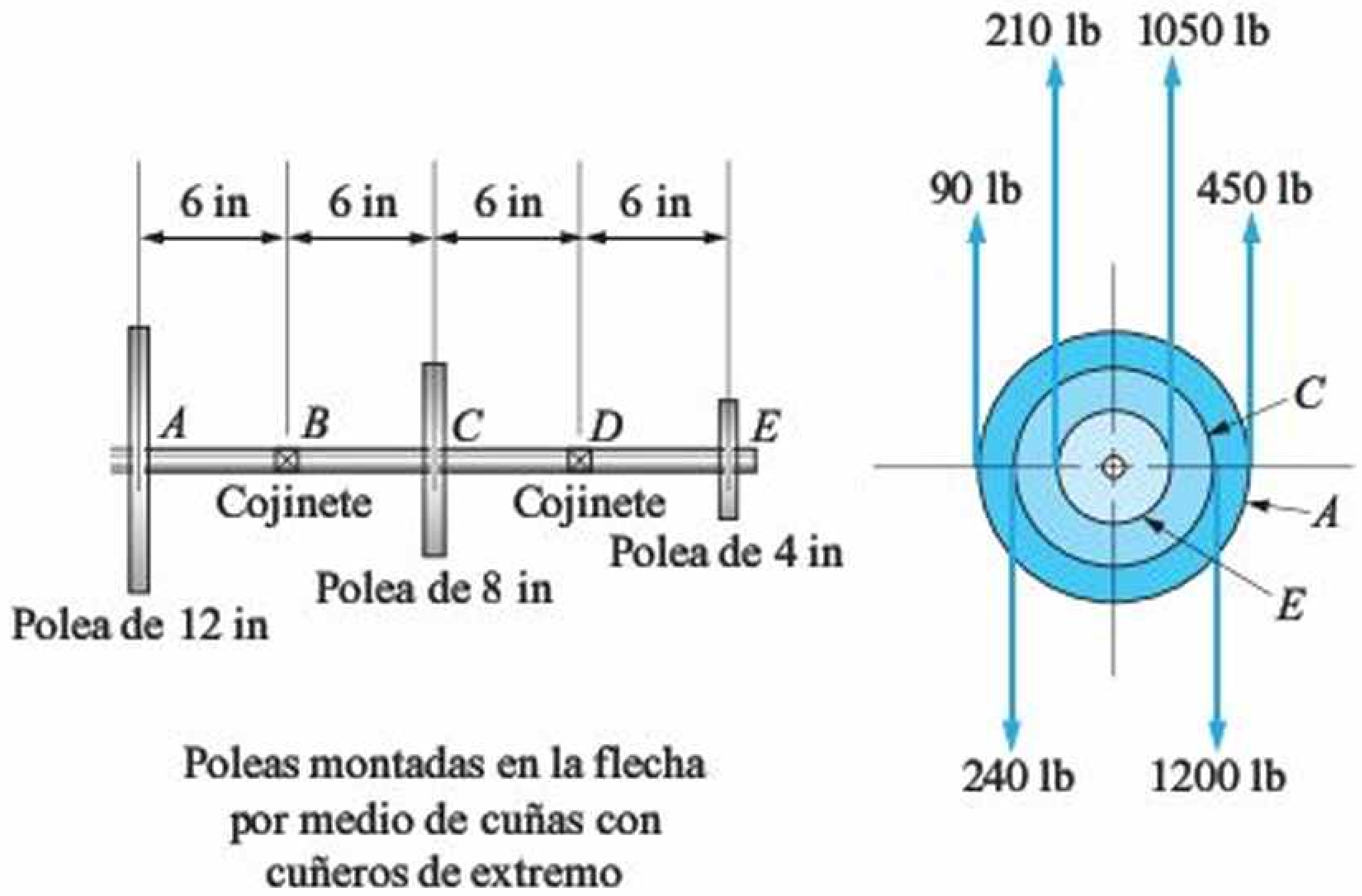


FIGURA P10–32 Flecha del problema 10–32.

10–33.M La flecha vertical mostrada en la figura P10–33 dispone de dos poleas impulsadas por bandas. Se muestran las fuerzas de tensión en las bandas en condiciones de operación. Además, la flecha soporta una carga de compresión axial de 6.2 kN. Considerando esfuerzos de torsión, flexión y de compresión axial, calcule al esfuerzo cortante máximo con la ecuación (10–2).

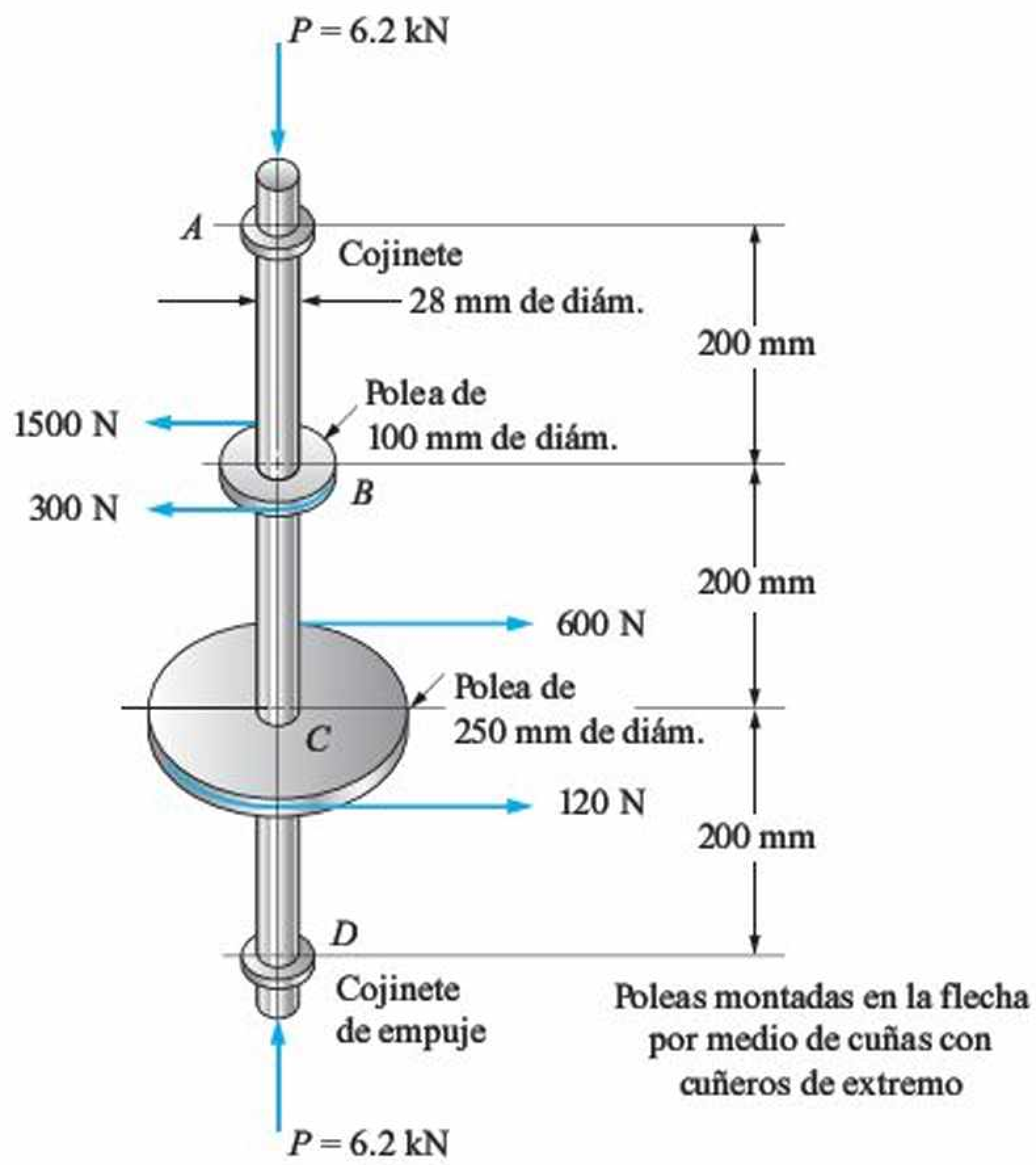


FIGURA P10–33 Flecha del problema 10–33.

10–34.M Para la flecha del problema 10–33, especifique un acero adecuado que produzca un factor de diseño de 4 basado en la resistencia a la cedencia a cortante.

Esfuerzos de tensión axial y cortante directo combinados

10–35.E Las roscas de un tornillo de máquina son UNC American Standard número 8–32 (consulte el apéndice A–3). El tornillo se somete a una fuerza de tensión axial que produce un esfuerzo de tensión directa en las roscas de 15000 psi basada en el área sometida a esfuerzo de tensión. Existe una sección debajo de la cabeza sin roscas cuyo diámetro es igual al diámetro mayor de las roscas. Esta sección también se somete a una fuerza cortante directa de 120 lb. Calcule el esfuerzo cortante máximo en esta sección.

10–36.E Repita el problema 10–35 excepto que las roscas del tornillo son UNC American Standard de ¼–20 y la fuerza cortante es de 775 lb.

10–37.E Repita el problema 10–35 excepto que las roscas del tornillo son UNF American Standard número 4–48 y la fuerza cortante es de 50 lb.

10–38.E Repita el problema 10–35 excepto que la roscas del tornillo son UNF de 1¼–12 y la fuerza cortante es de 2500 lb.

10–39.M Las roscas de un tornillo de máquina son métricas de 16 mm de diámetro y 2.0 mm de paso (consulte el apéndice A–3). El tornillo se somete a una fuerza axial que produce un esfuerzo de tensión directa en las roscas de 120 MPa basado en el área sometida al esfuerzo de tensión. Existe una sección debajo de la cabeza sin roscas cuyo diámetro es igual al diámetro mayor de las roscas. Esta sección también se somete a una fuerza cortante directa de 8.0 kN. Calcule el esfuerzo cortante máximo en esta sección.

10–40.M Las roscas de un tornillo de máquina son métricas con diámetro mayor de 48 mm y paso de 5.0 mm (consulte el apéndice A–3). El tornillo se somete a una fuerza de tensión axial que produce un esfuerzo de tensión directa en las roscas de 120 MPa basado en el área sometida al esfuerzo de tensión. Existe una sección debajo de la cabeza sin roscas cuyo diámetro es igual al diámetro mayor de las roscas. Esta sección también se somete a una fuerza cortante directa de 80 kN. Calcule el esfuerzo cortante máximo en esta sección.

Esfuerzos flexionante y cortante vertical combinados

10–41.E Se utiliza una barra rectangular como viga sometida a una carga concentrada de 5500 lb a la mitad de su longitud de 60 in. La sección transversal es de 2.00 in de ancho por 6.00 in de altura con la dimensión de 6.00 in orientada verticalmente. Calcule el esfuerzo cortante máximo que ocurre en la barra cerca de la carga en los siguientes puntos de la sección:

(a) En la cara inferior de la barra.

(b) En la cara superior de la barra.

(c) En el eje neutro.

(d) En un punto a 1.0 in sobre la cara inferior de la barra.

(e) En un punto a 2.0 in sobre la cara inferior de la barra.

10–42.E Repita el problema 10–41 excepto que la viga es una viga I de aluminio, 16 × 4.692.

10–43.E Repita el problema 10–41 excepto que la carga es una carga uniformemente distribuida de 100 lb/in a todo lo largo. Considere secciones transversales cerca de la mitad de la viga, cerca de los apoyos y a 15 in del apoyo izquierdo.

Secciones no circulares–esfuerzos normal y cortante torsional combinados

10–44.M Una barra cuadrada de 25 mm por lado soporta una carga de tensión de 75 kN junto con par de torsión de 245 N·m. Calcule el esfuerzo cortante máximo en la barra (*Nota*: Consulte la sección 4–11 y la figura 4–27.)

10–45.M Una barra rectangular con sección transversal de 30 mm por 50 mm se somete a una fuerza de tensión axial de 175 kN junto con par de torsión de 525 N·m. Calcule el esfuerzo cortante máximo en la barra. (*Nota*: Consulte la sección 4–11 y la figura 4–27.)

10–46.M La sección transversal de una barra tiene la forma de un triángulo equilátero, de 50 mm por lado. Soporta una fuerza de tensión axial de 115 kN junto con un par de torsión de 775 N·m. Calcule el esfuerzo cortante máximo en la barra (*Nota*: Consulte la sección 4–11 y la figura 4–27.)

10–47.E El eslabón de un gran mecanismo se hizo con un tubo estructural cuadrado HSS3 × 3 × 1/4 (vea el apéndice A–9). Originalmente se diseñó para que soportara una carga de tensión axial que produce un factor de diseño de 3 basado en la resistencia a la cedencia del acero estructural ASTM A500 formado en frío, grado C.

(a) Determine esta carga y el esfuerzo cortante máximo que produce en el tubo.

(b) En operación, el tubo experimenta un par de torsión de 959 lb–pie además de la carga axial. Calcule el esfuerzo cortante máximo producido por esta carga combinada y calcule el factor de diseño resultante basado en la resistencia a la cedencia del acero a cortante (vea la sección 4–11 y la figura 4–27.)

PROBLEMAS ADICIONALES DE REPASO Y PRÁCTICA

10–48. Calcule los esfuerzos de tensión y compresión máximos en la parte horizontal de la ménsula mostrada en la figura P10–48.

10–49. Repita el problema 10–48 con la carga aplicada hacia abajo y hacia la izquierda a un ángulo de 35° con respecto a la horizontal.

10–50. Repita el problema 10–48 con la carga aplicada hacia la derecha en lugar de hacia la izquierda.

10–51. Repita el problema 10–48 con la carga aplicada hacia arriba y hacia la derecha a un ángulo de 65° con respecto a la horizontal.

10–52. La ménsula mostrada en la figura P10–52 es un tubo de acero estructural, HSS3 × 3 × 1/4. Está rígidamente unido al techo. Calcule los esfuerzos de tensión y compresión en la ménsula y establezca dónde ocurren.

10–53. La figura P10–53 muestra una pequeña grúa. La carga es de 34.0 kN. La conexión en cada punto entre *A* y *F* es un pasador de 30 mm de diámetro insertado en una horquilla. Determine los esfuerzos normales máximos en los miembros horizontal y vertical de la grúa.

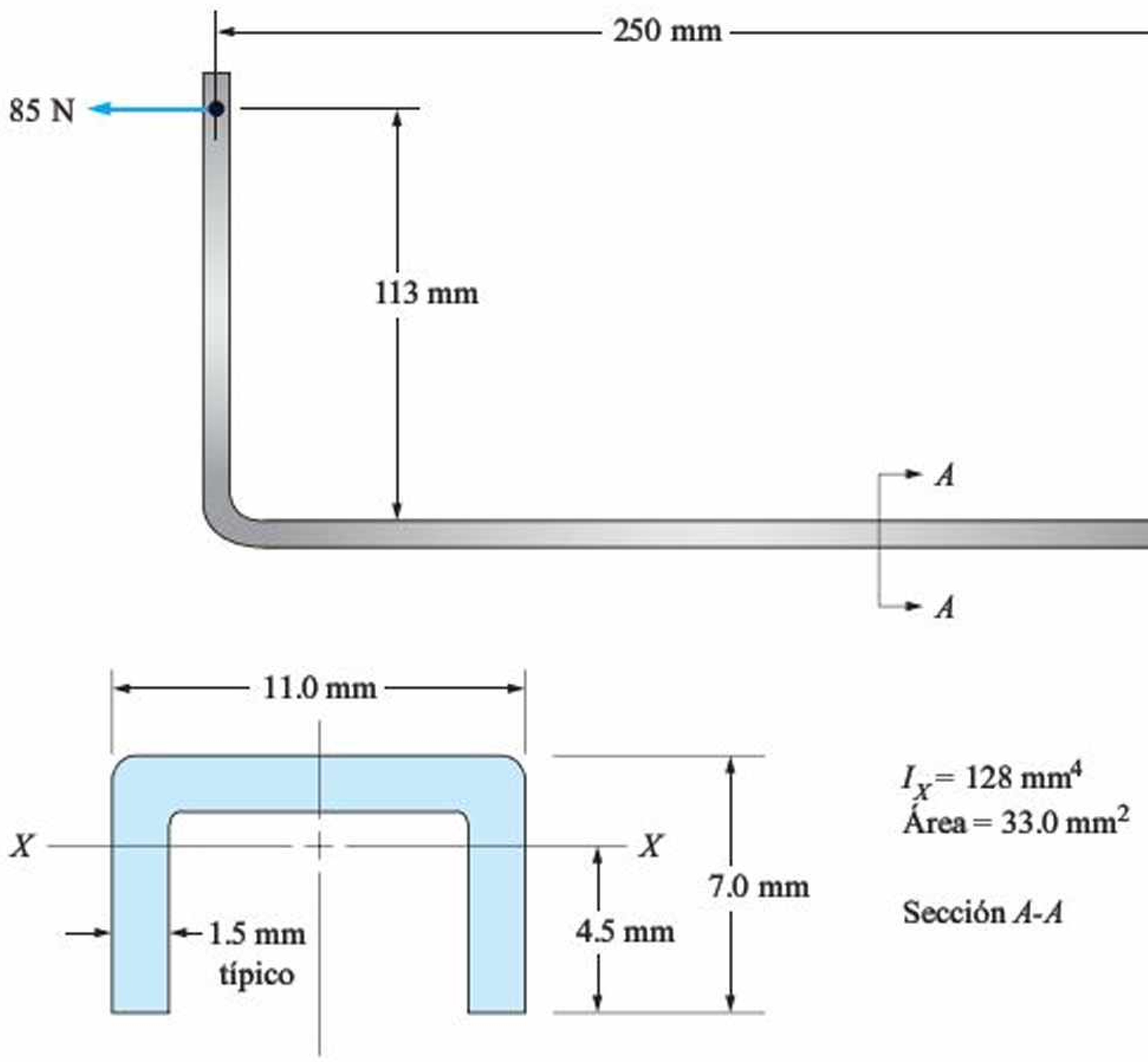


FIGURA P10–48

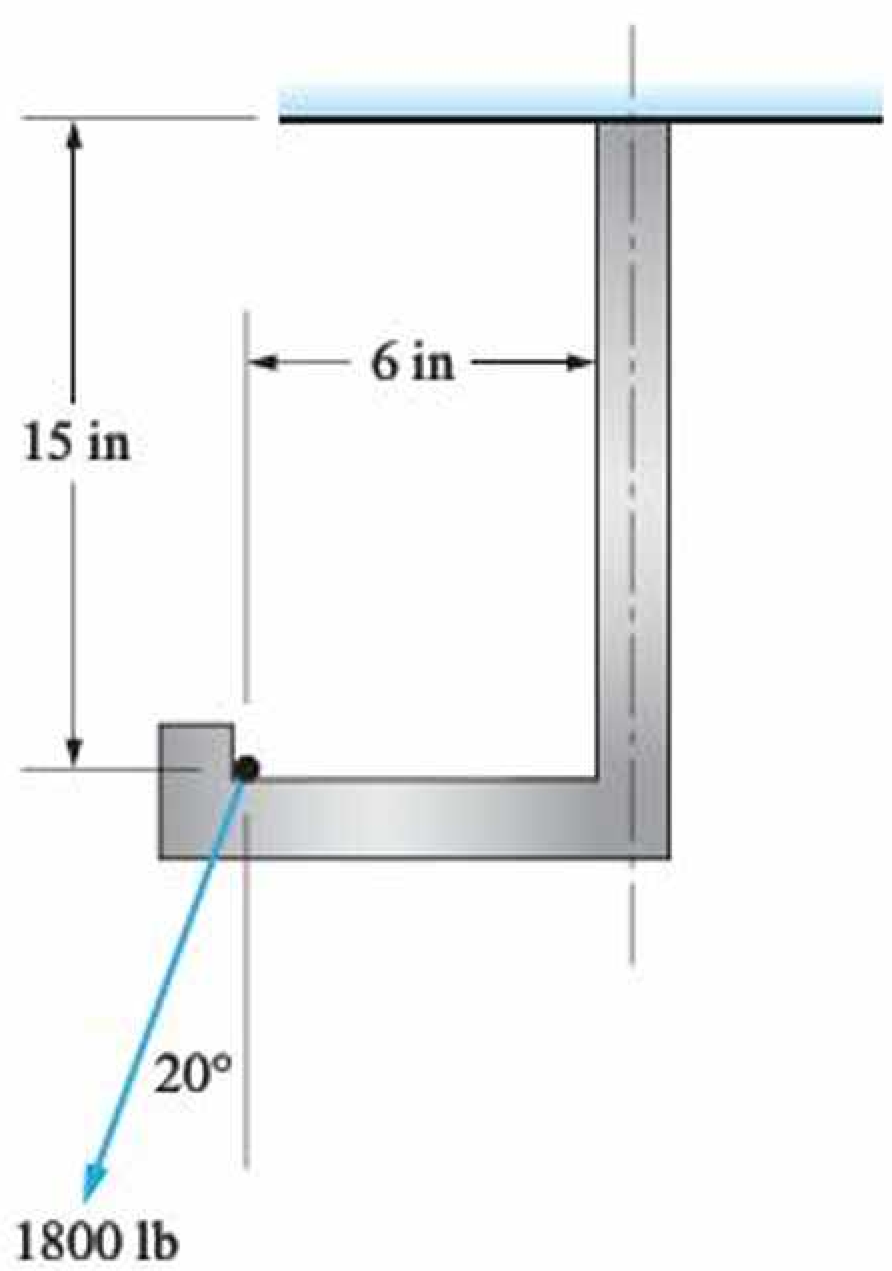


FIGURA P10–52

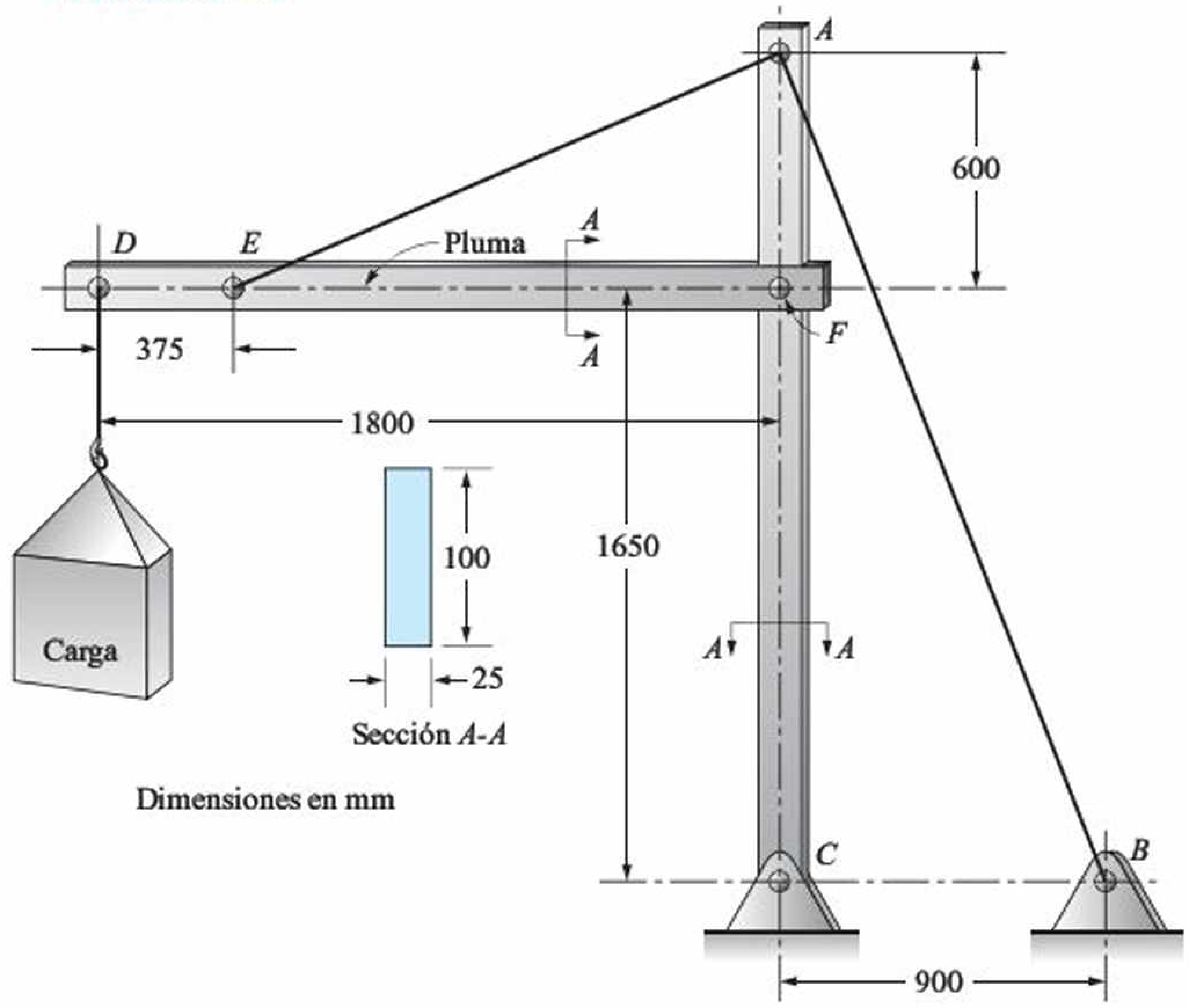


FIGURA P10–53

10–54. La figura P10–54 muestra una flecha giratoria que soporta cargas transversales. Una gran polea plana produce la carga distribuida entre los cojinetes. La carga en el extremo voladizo es aplicada por una transmisión de cadena. La flecha transmite 30.5 hp mientras gira a 320 rpm. Calcule el esfuerzo cortante máximo en la flecha y especifique un material adecuado.

10–55. La viga en voladizo mostrada en la figura P10–55 soporta una carga descentrada como se muestra. Determine la condición de esfuerzo que ocurre en los elementos *M* y *N*.

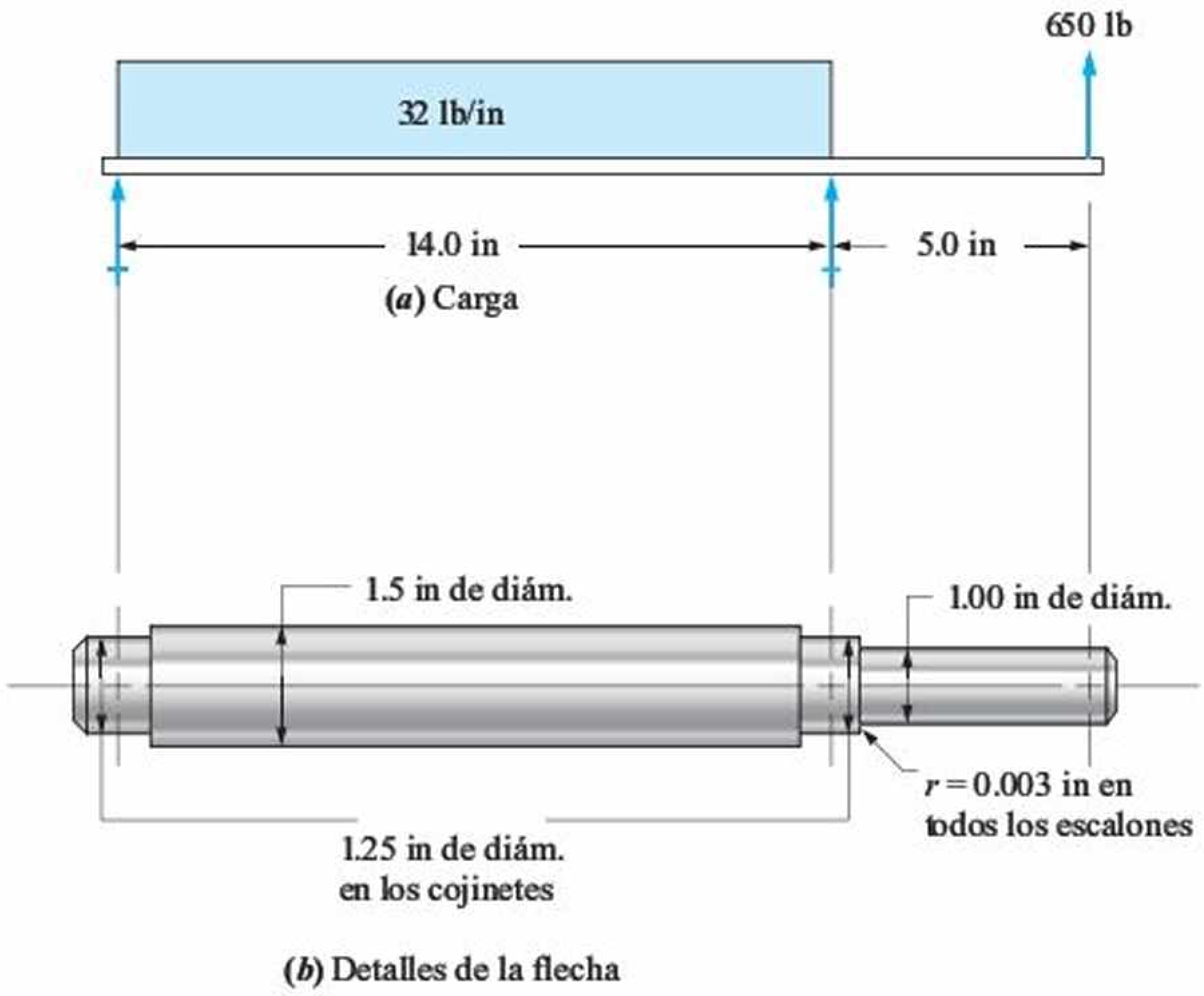


FIGURA P10–54

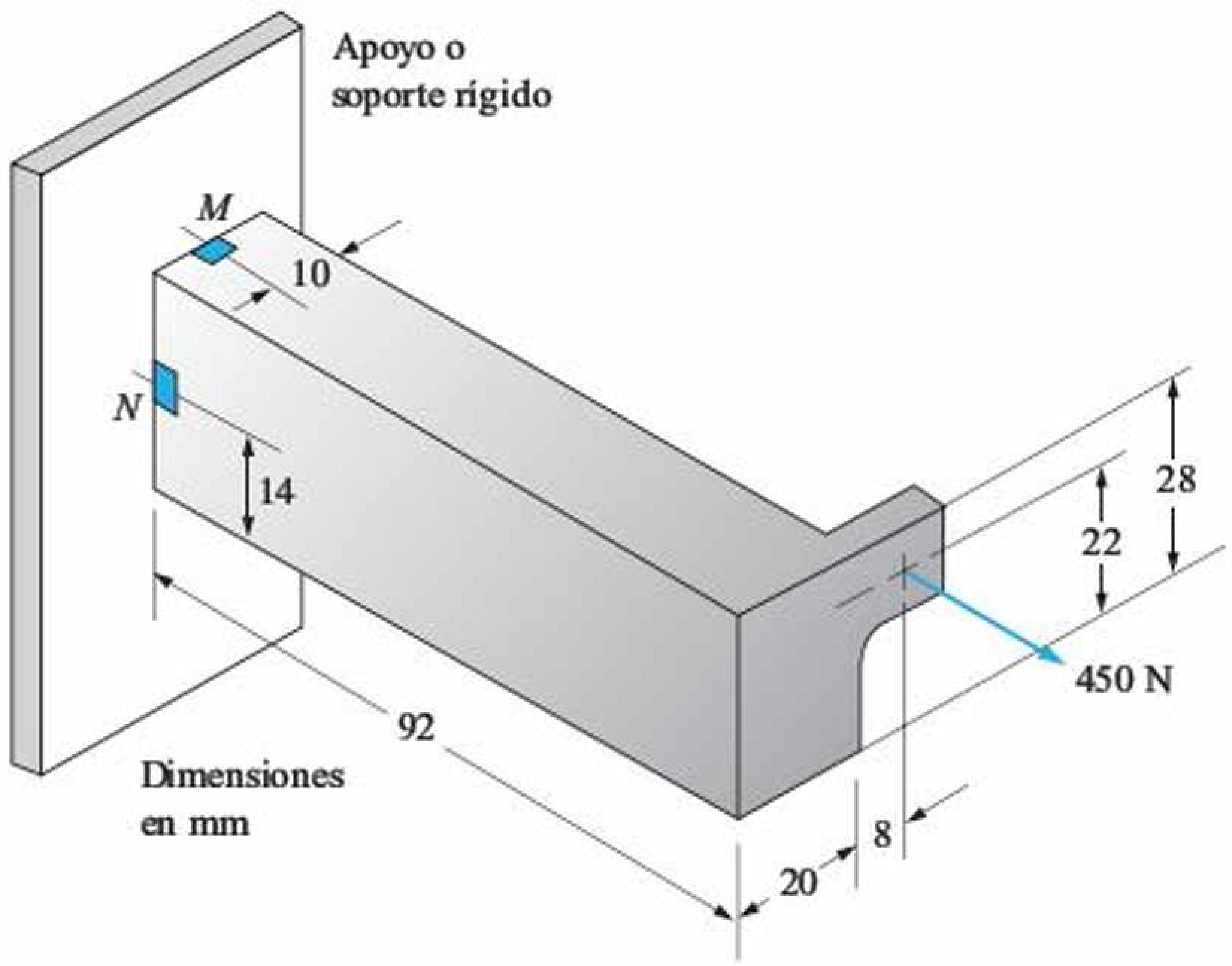


FIGURA P10–55

Círculo de Mohr

A. En los problemas 10–56 a 10–83 determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo con el círculo de Mohr. Los siguientes conjuntos de datos dan los esfuerzos que actúan en el elemento inicial. Realice las siguientes operaciones.

(a) Trace el círculo de Mohr completo y marque los puntos críticos incluidos σ_1, σ_2, $\tau_{máx}$ y σ_{prom}.

(b) En el círculo de Mohr, indique cuál línea representa el eje x en el elemento inicial sometido a esfuerzo.

(c) En el círculo de Mohr, indique los ángulos entre la línea que representa el eje x y los ejes σ_1 y $\tau_{máx}$.

(d) Trace el elemento sometido al esfuerzo principal y el elemento sometido al esfuerzo cortante máximo en su orientación apropiada con respecto al elemento inicial sometido a esfuerzo.

Problema	s_x	s_y	τ_{xy}
10–56	300 MPa	−100 MPa	80 MPa SMR
10–57	250 MPa	−50 MPa	40 MPa SMR
10–58	80 MPa	−10 MPa	60 MPa SMR
10–59	150 MPa	10 MPa	100 MPa SMR
10–60	20 ksi	−5 ksi	10 ksi SCMR
10–61	38 ksi	−25 ksi	18 ksi SCMR
10–62	55 ksi	15 ksi	40 ksi SCMR
10–63	32 ksi	−50 ksi	20 ksi SCMR
10–64	−900 kPa	600 kPa	350 kPa SCMR
10–65	−580 kPa	130 kPa	75 kPa SCMR

Problema	σ_x	σ_y	τ_{xy}
10–66	−840 kPa	−35 kPa	650 kPa SCMR
10–67	−325 kPa	50 kPa	110 kPa SCMR
10–68	−1800 psi	300 psi	800 psi SMR
10–69	−6500 psi	1500 psi	1200 psi SMR
10–70	−4250 psi	3250 psi	2800 psi SMR
10–71	−150 psi	8600 psi	80 psi SMR
10–72	260 MPa	0 MPa	190 MPa SCMR
10–73	1450 kPa	0 kPa	830 kPa SMR
10–74	22 ksi	0 ksi	6.8 ksi SMR
10–75	6750 psi	0 psi	3120 psi SCMR
10–76	0 ksi	−28 ksi	12 ksi SMR
10–77	0 MPa	440 MPa	215 MPa SMR
10–78	0 MPa	260 MPa	140 MPa SCMR
10–79	0 kPa	−1560 kPa	810 kPa SCMR
10–80	225 MPa	−85 MPa	0 MPa
10–81	6250 psi	−875 psi	0 psi
10–82	775 kPa	−145 kPa	0 kPa
10–83	38.6 ksi	−13.4 ksi	0 ksi

B. En los problemas 10–48 a 10–95 en los que los esfuerzos principales determinados con el círculo de Mohr resultaron con el mismo signo, use los procedimientos de la sección 10–11 para trazar círculos complementarios y determine lo siguiente:

(a) Los tres esfuerzos principales: σ_1, σ_2 y σ_3.

(b) El esfuerzo cortante máximo real.

Problema	σ_x	σ_y	τ_{xy}
10–84	300 MPa	100 MPa	80 MPa SMR
10–85	250 MPa	150 MPa	40 MPa SMR
10–86	180 MPa	110 MPa	60 MPa SMR
10–87	150 MPa	80 MPa	30 MPa SMR
10–88	30 ksi	15 ksi	10 ksi SCMR
10–89	38 ksi	25 ksi	8 ksi SCMR
10–90	55 ksi	15 ksi	5 ksi SCMR
10–91	32 ksi	50 ksi	20 ksi SCMR
10–92	−840 kPa	−335 kPa	120 kPa SCMR
10–93	−325 kPa	−50 kPa	60 kPa SCMR
10–94	−1800 psi	−300 psi	80 psi SMR
10–95	−6500 psi	−2500 psi	1200 psi SMR

C. En los problemas 10–96 a 10–105, use los datos del problema indicado relacionados con el elemento inicial sometido a esfuerzo para trazar el círculo de Mohr. En seguida determine la condición de esfuerzo en el elemento al ángulo de rotación especificado con respecto al eje x dado. Trace el elemento girado en su relación apropiada con elemento inicial e indique los esfuerzos normal y cortante que actúan en él.

Problema	Problema con los datos de esfuerzo inicial	Ángulo de rotación con con respecto al eje x
10–96	10–56	30 grados SCMR
10–97	10–56	30 grados SMR
10–98	10–59	70 grados SCMR
10–99	10–61	20 grados SMR
10–100	10–63	50 grados SCMR
10–101	10–65	45 grados SMR
10–102	10–68	10 grados SCMR
10–103	10–70	25 grados SMR
10–104	10–71	80 grados SMR
10–105	10–73	65 grados SMR

Cálculo del esfuerzo cortante máximo

D. En los problemas siguientes, use la ecuación (10–2) para calcular la magnitud del esfuerzo cortante máximo con los datos del problema indicado.

10–106. Use los datos del problema 10–72.

10–107. Use los datos del problema 10–73.

10–108. Use los datos del problema 10–74.

10–109. Use los datos del problema 10–75.

Rosetas de medición de deformación–rectangulares

E. Los datos siguientes se obtuvieron con pruebas en las que se aplicó una roseta de medición de deformación [0°, 45°, 90°] rectangular a un producto hecho del material dado. Localice los datos de propiedades de material en el apéndice y en la tabla 2–1. Use el procedimiento descrito en la sección 10–12 para calcular lo siguiente:

(a) deformación principal máxima

(b) deformación principal mínima

(c) ángulo de orientación de las deformaciones principales con respecto al eje del medidor 1

(d) esfuerzo principal máximo

(e) esfuerzo principal mínimo

(f) deformación por cortante máxima

(g) esfuerzo cortante máximo

10–110. $\epsilon_1 = 1480\ \mu\epsilon$, $\epsilon_2 = 165\ \mu\epsilon$, $\epsilon_3 = 428\ \mu\epsilon$. Aluminio 6061–T6. Unidades métricas SI

10–111. $\epsilon_1 = 853\ \mu\epsilon$, $\epsilon_2 = 406\ \mu\epsilon$, $\epsilon_3 = 641\ \mu\epsilon$. Aluminio 7075–T6. Unidades métricas SI

10–112. $\epsilon_1 = 389\ \mu\epsilon$, $\epsilon_2 = 737\ \mu\epsilon$, $\epsilon_3 = -290\ \mu\epsilon$. Acero AISI 1040 estirado en frío. Unidades métricas SI

10–113. $\epsilon_1 = 925$, $\epsilon_2 = -631$ $\epsilon_3 = 552$. Acero AISI 4140 OQT 900. Unidades métricas SI

10–114. $\epsilon_1 = 169\ \mu\epsilon$, $\epsilon_2 = -266\ \mu\epsilon$, $\epsilon_3 = 543\ \mu\epsilon$. Cobre duro C14500. Unidades del sistema inglés.

10–115. $\epsilon_1 = 775\ \mu\epsilon$, $\epsilon_2 = 369\ \mu\epsilon$, $\epsilon_3 = -318\ \mu\epsilon$. Titanio Ti–6A1–4V, añejado. Unidades del sistema inglés.

10–116. $\epsilon_1 = 389\ \mu\epsilon$, $\epsilon_2 = 737\ \mu\epsilon$, $\epsilon_3 = -290\ \mu\epsilon$. Hierro dúctil, ASTM A536, 80–55–6. Unidades del sistema inglés.

10–117. $\epsilon_1 = 1532\ \mu\epsilon$, $\epsilon_2 = -228\ \mu\epsilon$, $\epsilon_3 = 893\ \mu\epsilon$. Acero inoxidable AISI 501 OQT 1000. Unidades del sistema inglés.

Rosetas de medición de deformación–delta

Repita los problemas de la sección E, pero ahora las lecturas se tomaron con una roseta de medición de deformación delta [0°, 60° y 120°].

10–118. Use los datos del problema 10–110.

10–119. Use los datos del problema 10–111.

10–120. Use los datos del problema 10–112.

10–121. Use los datos del problema 10–113.

10–122. Use los datos del problema 10–114.

10–123. Use los datos del problema 10–115.

10–124. Use los datos del problema 10–116.

10–125. Use los datos del problema 10–117.

TAREAS PARA RESOLVERSE CON COMPUTADORA

1. Escriba un programa de computadora o utilice una hoja de cálculo o una calculadora programable para trazar el círculo de Mohr. Ingrese los esfuerzos iniciales, σ_x, σ_y y τ_{xy}. Haga que el programa calcule el radio del círculo, los esfuerzos principales máximo y mínimo, el esfuerzo cortante máximo y el esfuerzo promedio. Use el programa junto con el trazo a mano alzada del círculo con los datos de los problemas 10–56 a 10–79.
2. Extienda el programa de la tarea 1 calculando el ángulo de orientación del elemento sometido al esfuerzo principal y el ángulo de orientación del elemento sometido al esfuerzo cortante máximo.
3. Extienda el programa de la tarea 1 calculando los esfuerzos normal y cortante que actúan en el elemento girado a cualquier ángulo específico con respecto al eje x original.
4. Extienda el programa de la tarea 1 haciendo que detecte si los esfuerzos principales tomados del círculo de Mohr son del mismo signo, y en esos casos, imprima los tres esfuerzos principales en el orden apropiado, σ_1, σ_2, σ_3. También haga que el programa calcule el esfuerzo cortante máximo real con la ecuación (10–21).
5. Produzca una hoja de cálculo similar a la mostrada en la figura 10–50 para analizar los datos obtenidos con la roseta de medición de deformación, rectangular o delta. Los resultados deben incluir los elementos identificados en el conjunto de problemas E.

11

Columnas

La imagen completa y actividad
11–1 Objetivos de este capítulo
11–2 Relación de esbeltez
11–3 Relación de esbeltez de transición
11–4 Fórmula de Euler para columnas largas
11–5 Fórmula de J. B. Johnson para columnas cortas
11–6 Resumen - Fórmulas de pandeo
11–7 Factores de diseño para columnas y carga permisible
11–8 Resumen - Método de análisis de columnas
11–9 Hoja de cálculo para analizar columnas
11–10 Perfiles eficientes para secciones transversales de columnas
11–11 Especificaciones del AISC
11–12 Especificaciones de la Aluminum Association
11–13 Columnas con cargas no centradas

La imagen completa

Columnas

Mapa de análisis

Una columna es un miembro relativamente largo esbelto cargado a compresión

El modo de falla de una columna se llama *pandeo*, un término común para la condición de *inestabilidad elástica*, cuando la carga sobre una columna inicialmente recta hace que se flexione significativamente. Si la carga se incrementa a una pequeña cantidad a partir de la carga de pandeo, la columna se colapsaría de inmediato, lo que constituye una situación muy peligrosa.

- ¿Cómo determinamos cuando un miembro sometido a compresión es largo y esbelto?
- ¿Cómo determinamos la magnitud de la carga a la que ocurriría el pandeo?
- ¿Qué clase de perfiles de sección transversal se prefieren para columnas?
- ¿Qué influencia tiene la forma de sujeción de los extremos de una columna en la carga de pandeo?
- ¿Qué estándares de la industria se aplican a columnas?

Éstos y otros detalles sobre el análisis y diseño de columnas se presentan en este capítulo.

Actividad

Exploremos el concepto de columna. Busque algunos ejemplos a su alrededor que se ajusten a esta definición; luego describa cada uno de ellos, dando su longitud, el perfil y dimensiones de su sección transversal y el material del que esté hecho. He aquí algunos ejemplos para comenzar.

Una regla de un metro, por lo general fabricada de madera o aluminio. Obviamente su longitud es de 1.0 m. La sección transversal es por lo general de aproximadamente 30 mm de ancho por 4 mm de espesor, lo que la hace ver larga y esbelta.

Una regla de acero de 6 in (152 mm). Puede que haya utilizado una donde operaba máquinas–herramienta cortametales o tornos de madera. Nuevamente su longitud es obviamente de 6.00 in (152 mm). Se hace con una solera plana de acero, de 0.75 in de ancho y 0.020 in de espesor (19 mm × 0.50 mm). Aun cuando es mucho más corta que la regla de un metro, es más delgada, es decir, más esbelta. Tanto la longitud como la esbeltez importan.

Una espiga de madera que puede adquirir en una ferretería. Tal vez de 36 in de largo y 3/8 in de diámetro (914 mm × 9.5 mm).

¿Qué ejemplos ha encontrado?

Ahora tratemos de cargar uno de estos elementos con una carga de compresión axial directa. Esto significa que la línea de acción de la carga estará en línea con el eje mayor de la columna. Simplemente apóyela en la mesa o el piso y empújela hacia abajo con su mano. Trate de empujarla recta, hacia abajo, y no lateralmente pero no la sujete firmemente con los dedos. ¡Tenga cuidado de no empujarla con demasiada fuerza o se romperá!

¿Qué sucedió?

A continuación describimos el comportamiento de la regla de un metro de madera. Al cargarla lentamente, observamos que es capaz de soportar una carga muy pequeña mientras permanece recta. Pero sin mucho esfuerzo, podemos hacer que la vara se flexione notablemente. Este fenómeno se llama *pandeo*. ¡Tenga cuidado! Con sólo un modesto incremento de la carga después de que ocurre el pandeo, la vara se rompería con facilidad. Observe que la regla de un metro se pandea con respecto a la dimensión delgada de su sección transversal. La figura 11–1 ilustra lo que sucedió. La figura 11–2(a) muestra una vista lateral. Probablemente hubiera pronosticado lo que sucedió basado en su propia experiencia. Más adelante, cuantificaremos por qué sucedió eso.

FIGURA 11–1
Ilustración del pandeo de una vara de un metro.

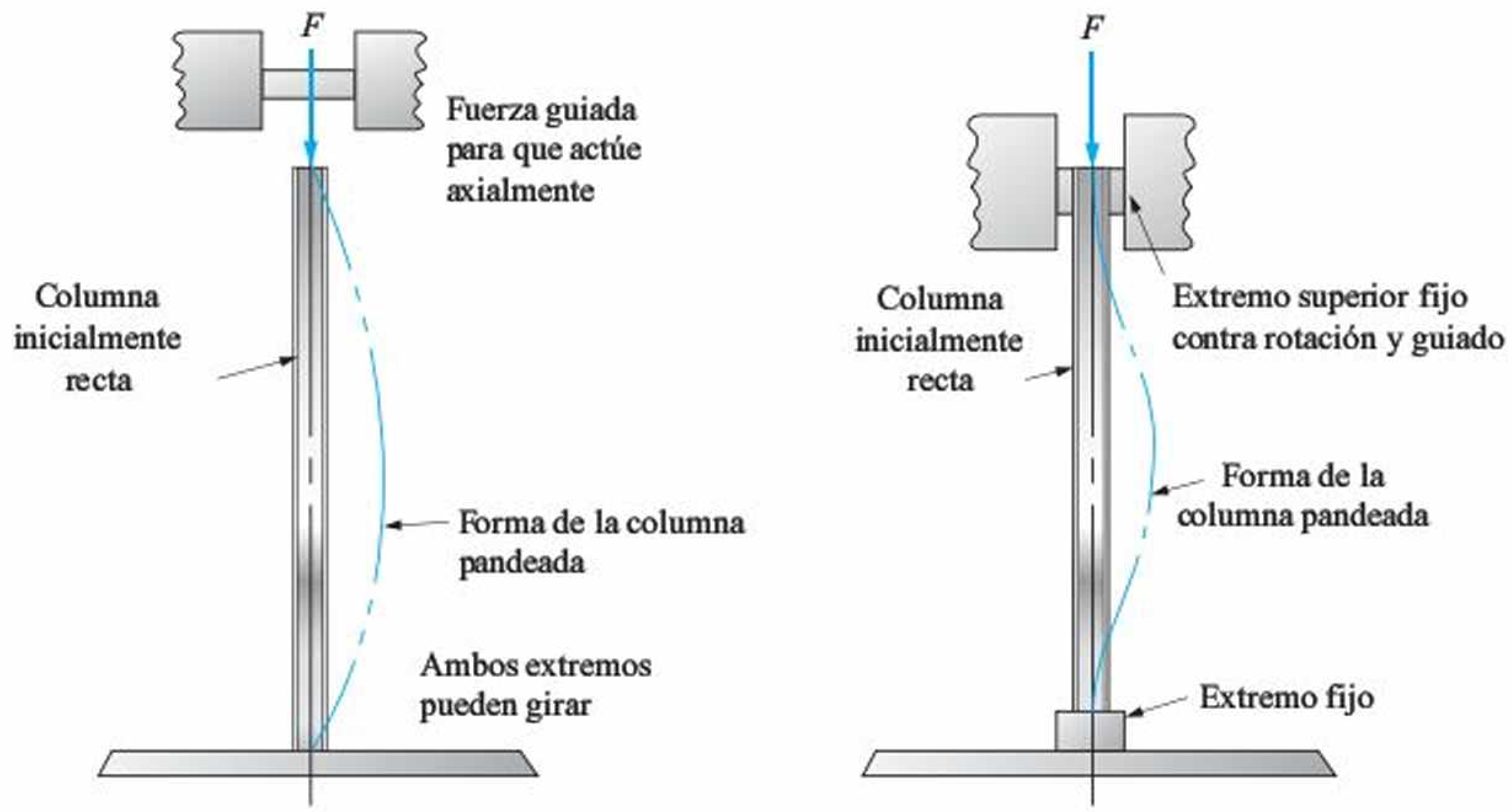


Ahora cambiemos el procedimiento un poco. Parece que la regla de un metro tiende a pandearse cerca de su punto medio, es decir, en el punto situado a 0.50 m. ¿Qué pasaría si utilizamos algún soporte lateral a ambos lados de dicho punto? Trate de hacerlo si dispone de una regla de un metro. Coloque sus dedos a ambos lados para limitar la tendencia a pandearse hacia fuera. Ahora empújela de nuevo hacia abajo como ya lo había hecho antes.

¿Qué sucedió?

Ahora podemos aplicar una carga mucho más pesada a la vara sin que se pandee. Pero existe un punto en el que la carga es suficientemente elevada como para ver una forma de pandeo bastante diferente. La mitad inferior y la mitad superior de la vara se pandean una en un sentido y la otra en el opuesto. En realidad, parece que la vara adoptará la forma de una onda seno completa. Analizaremos esta observación más adelante.

FIGURA 11–2
Comparación de las formas que adoptan las columnas pandeadas.



(*a*) Forma pandeada de la columna con extremos no restringidos

(*b*) Forma pandeada de la columna con extremos fijos

Cambiemos el procedimiento de nuevo. Sujete ambos extremos de la vara con firmeza y trate con toda su fuerza de que no gire al mismo tiempo que aplica una carga axial que producirá el pandeo.

¿Qué sucedió?

En primera, habrá notado que se requiere una fuerza mucho más grande para pandearla. Además, habrá notado que la forma de la vara pandeada es diferente de la que se produjo cuando no sujetó los extremos. Dos factores intervienen en este caso. La sujeción de la vara con sus puños acorta efectivamente la columna en aproximadamente 90 mm (3.5 in) en cada extremo. Como la columna es más corta, se requiere una carga más elevada para pandearla. Pero además, su esfuerzo para evitar que los extremos giren produjo la forma pandeada similar a la mostrada en la figura 11–2(b). En esencia *fijó los extremos*. Más adelante también examinaremos este fenómeno.

¿Son todas las columnas que encontró perfectamente rectas?

Probablemente no. De todas las que se sometieron a prueba aquí, la mayoría tendió a pandearse en una dirección particular porque inicialmente ya estaban combadas. Al empujarlas hacia abajo se produjo el efecto adicional de flexionar la sección encorvada aún más en la misma dirección. También exploraremos ese fenómeno más adelante.

Los elementos que describimos aquí no están hechos para soportar cargas de compresión axial. Simplemente sirvieron para demostrar el pandeo.

¿Qué ejemplos de columnas puede encontrar que sean más sustanciales y que fueron diseñados para ser suficientemente resistentes y estables para soportar cargas de compresión axial cuantificables?

Es posible que no pueda llevar todos estos ejemplos al salón de clases, laboratorio u oficina, pero he aquí algunos.

- Las columnas verticales de la estructura de acero de un edificio. Las columnas inferiores de un edificio de varios pisos deben ser resistentes y rígidas para sostener todo el peso arriba de ellas. Aun en un edificio de un piso, deben sostener la estructura de techo y, posiblemente, una carga de nieve encima de ella.
- Los postes de acero que sostienen una viga de un lado a otro del sótano de una casa. La viga soporta las viguetas del piso de arriba y todo el peso de los muebles y las personas que habitan la casa. Los postes transfieren esa carga al piso del sótano o a los cimientos. Es probable que los postes estén hechos de tubos de acero o de secciones estructurales huecas (HSS). Éstas son perfiles eficientes para una columna, como veremos más adelante en este capítulo.
- La varilla cilíndrica de un actuador hidráulico: Es posible que lo haya visto en un equipo de construcción, en una máquina agrícola o en un sistema automático industrial. Algunas de estas varillas cilíndricas empujan con gran fuerza y deben ser diseñadas para que no se pandeen al salir del cilindro.

¿Qué otros ejemplos ha encontrado?

Ahora resumamos las observaciones que hicimos hasta este punto:

- Demostramos que un miembro largo esbelto tiende a pandearse cuando se somete a una carga de compresión axial. Pero ¿cuándo un miembro se considera largo y esbelto? Más adelante definimos el término *relación de esbeltez* para cuantificar esa situación. Es una función de la longitud de la columna, del método de sujeción de sus extremos y del perfil y tamaño de la sección transversal de la columna.
- Demostramos que una columna es capaz de soportar una cierta magnitud de carga axial antes de que comience a pandearse. Luego, el inicio del pandeo es bastante repentino. ¿Con qué carga se pandeará? Mostramos varios métodos de predecir este suceso en este capítulo.

- Demostramos que la forma de sujeción de los extremos de una columna afecta la carga de pandeo. Más adelante daremos más detalles sobre lo anterior cuando utilicemos el término *fijación de los extremos*.
- Las columnas que encontramos posiblemente estaban hecha de diferentes materiales, tales como acero, aluminio, madera o plástico. ¿Qué efecto tiene el material en su tendencia a pandearse? En este capítulo demostramos que el módulo de elasticidad, E, del material, tiene un efecto importante en la tendencia de una columna larga a pandearse. En el caso de columnas más cortas, la resistencia a la cedencia es un factor.
- Algunas de las columnas que encontramos inicialmente estaban encorvadas. Aparentemente se pandearon con una carga menor que las rectas y siempre en la dirección de la encorvadura inicial. ¿Podemos cuantificar eso? Sí, se presentarán métodos adicionales de analizar columnas encorvadas y aquellas en las que la carga se aplica fuera del eje (llamadas *columnas excéntricamente cargadas*).

11–1 OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

Al término de este capítulo, usted podrá:

1. Definir *columna*.
2. Diferenciar entre columna y miembro corto sometido a compresión.
3. Describir el fenómeno de *pandeo*, también llamado *inestabilidad elástica*.
4. Definir *radio de giro* de la sección transversal de una columna y ser capaz de calcular su magnitud.
5. Entender que se espera que una columna se pandee con respecto al eje para el cual el radio de giro es mínimo.
6. Definir *factor de fijación de los extremos*, K, y especificar el valor apropiado según la forma de soportar los extremos de una columna.
7. Definir *longitud efectiva*, L_e, *relación de esbeltez* y *relación de esbeltez de transición* (también llamada *constante de columna*, C_c) y calcular sus valores.
8. Utilizar los valores de la relación de esbeltez y la constante de columna para determinar cuándo una columna es *larga* o *corta*.
9. Utilizar la *fórmula de Euler* para calcular la carga de pandeo crítica para columnas largas y la *fórmula de J. B. Johnson* para columnas cortas.
10. Aplicar un factor de diseño a la carga de pandeo crítica para determinar la *carga permisible* en una columna.
11. Reconocer perfiles eficientes para secciones transversales de columna.
12. Diseñar columnas para que soporten con seguridad cargas de compresión axiales dadas.
13. Aplicar las especificaciones del American Institute of Steel Construction (AISC) y de la Aluminum Association al análisis de columnas.
14. Analizar columnas que inicialmente están encorvadas para determinar la carga de pandeo crítica.
15. Analizar columnas en las cuales la carga aplicada actúa excéntrica con respecto a su eje.

11–2 RELACIÓN DE ESBELTEZ

Se ha definido una columna como un miembro esbelto relativamente largo cargado a compresión. Esta descripción se planea en términos relativos y no es muy útil para el análisis.

La medida de esbeltez de una columna debe tener en cuenta la longitud, el perfil de la sección transversal y las dimensiones de la columna, además de la forma de sujetar los extremos de la columna en las estructuras que generan las cargas y reacciones en la columna. La medida de esbeltez comúnmente utilizada es la *relación de esbeltez*, definida como

Relación de esbeltez

$$SR = \frac{KL}{r} = \frac{L_e}{r} \tag{11–1}$$

donde L = *longitud real* de la columna entre los puntos de apoyo o de restricción lateral.

K = *factor de fijación de los extremos*.

L_e = *longitud efectiva*, teniendo en cuenta la manera de fijar los extremos (observe que $L_e = KL$)

r = *radio de giro mínimo* de la sección transversal de la columna.

Cada uno de estos términos se analiza a continuación.

Longitud real, *L*. En una columna simple con la carga aplicada en uno de sus extremos y la reacción que se genera en el otro, la longitud real es, obviamente, la longitud entre sus extremos. Pero en el caso de componentes de estructuras cargados a compresión que disponen de medios de restringir el miembro lateralmente para evitar que se pandee, la longitud real se considera entre los puntos de restricción. Cada una de las partes, entonces, se considera una columna aparte.

Factor de fijación de los extremos, *K*. El factor de fijación de los extremos mide el grado al cual cada extremo de la columna está limitado contra rotación. En general se consideran tres tipos clásicos de conexiones de los extremos: el extremo de pasador, el extremo fijo y el extremo libre. La figura 11–3 muestra estos tipos de extremo en varias combinaciones junto con los valores correspondientes de K. Observe que se dan dos valores de K. Uno es el valor teórico y el otro es el que por lo general se utiliza en situaciones prácticas, aunque hay que reconocer que es difícil lograr el extremo verdaderamente fijo, como se verá más adelante. Vea también la sección 11–6.

La figura 11–3(a) muestra un dispositivo de demostración comercialmente disponible que ilustra la rigidez y resistencia relativas al pandeo de cuatro condiciones de fijación de los extremos. Los tamaños de las pilas de pesas colocadas sobre el extremo superior de los primeros tres indican la carga aproximada a la cual se inicia el pandeo. La carga muy pequeña en el extremo derecho de la columna (la condición de fijo–libre) no representa la carga de pandeo verdadera porque la columna es inestable por sí misma y se flexiona hacia un lado con facilidad si hay algún grado de desalineación de la carga con respecto al eje de la columna.

Los extremos de pasador de columnas en esencia están imposibilitados contra rotación. Cuando una columna con dos extremos de pasador se pandea, asume la forma de una curva uniforme entre sus extremos, como se muestra en la figura 11–3(b). Éste es el caso básico de pandeo de una columna, y el valor de $K = 1.0$ se aplica a columnas con dos extremos de pasador. Un tipo ideal de extremo de pasador es la articulación de rótula libre de fricción que permite que una columna gire en cualquier dirección con respecto a cualquier eje. En el caso de una junta de pasador cilíndrico, se permite la rotación libre con respecto al eje del pasador, pero se limita en cierto grado en el plano perpendicular al eje. Por esta razón se debe tener cuidado al aplicar factores de fijación a pasadores cilíndricos. Se supone que se guía al extremo de pasador de modo que la línea de acción de la carga axial no cambie.

La combinación de un extremo fijo y una de pasador se muestra en la figura 11–3(c). Observe que la forma pandeada se aproxima al extremo fijo con una pendiente cero mientras que el extremo de pasador gira libremente. El valor teórico de $K = 0.7$ se aplica a ese tipo de fijación de los extremos en tanto que $K = 0.80$ se recomienda para usos prácticos.

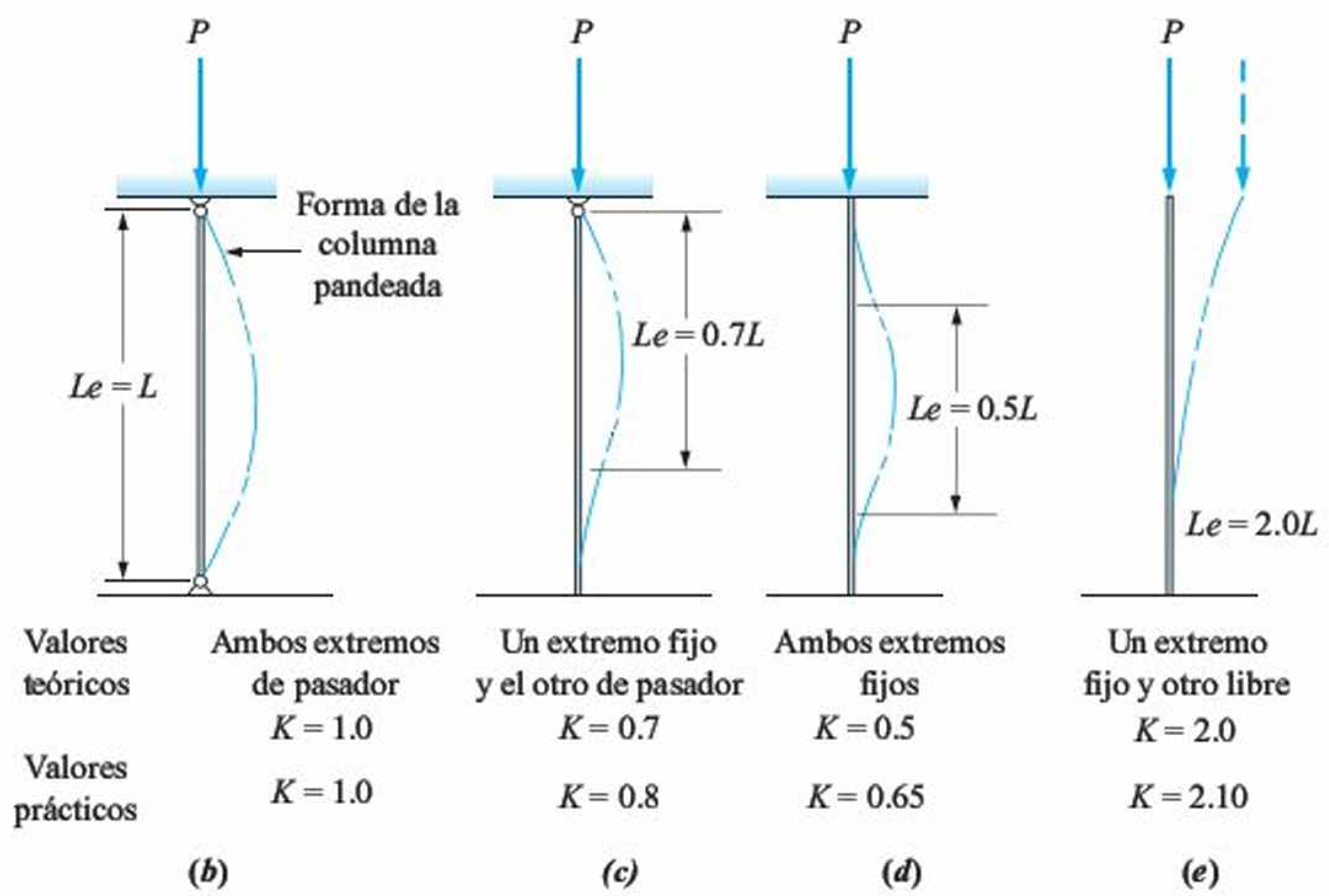
En teoría, los extremos fijos impiden perfectamente la rotación de la columna en sus extremos. A medida que la columna tiende a pandearse, la curva de flexión del eje de la columna debe aproximarse al extremo fijo con una pendiente cero, como se ilustra en la figura 11–3(d). La columna se arquea hacia fuera a la mitad pero exhibe dos puntos de inflexión donde se invierte la dirección de la curvatura cerca de los extremos. El valor teórico del factor de

FIGURA 11–3
Valores de K para la longitud efectiva, $L_e = KL$, con cuatro fijaciones de extremo diferentes.



(*a*)

(a) Demostrador de fijación de extremos comercialmente disponible
(Fuente: P.A. Milton Ltd, Hi-Tech, Hampshire, Inglaterra)



fijación de los extremos es $K = 0.5$, el cual indica que la columna actúa como si fuera sólo la mitad de larga de lo que realmente es. Las columnas con extremos fijos son mucho más rígidas que las columnas con extremos de pasador y por consiguiente son capaces de soportar cargas mayores antes de pandearse. Se debe entender que es muy difícil fijar perfectamente los extremos de una columna. Se requiere que la conexión a la columna sea rígida y que la estructura a la que se transfieren las cargas también sea rígida. Por esta razón, en la práctica se recomienda el valor más alto de $K = 0.65$.

El extremo libre de una columna gira y también se traslada. Como puede moverse en cualquier dirección, éste es el peor caso de fijación de los extremos de una columna. El único modo práctico de utilizar una columna con una extremo libre es fijar el extremo opuesto, como se ilustra en la figura 11–3(e). Una columna como ésa en ocasiones se conoce como *asta de bandera*, porque el extremo fijo se comporta como un asta de bandera profundamente insertada en un orificio de ajuste forzado, mientras que el extremo libre puede moverse en cualquier dirección. Citada como condición de extremos fijo y libre, el valor teórico de K es 2.0. Un valor práctico es $K = 2.10$.

Longitud efectiva, L_e. La longitud efectiva combina la longitud real con el factor de fijación de los extremos; $L_e = KL$. En los problemas incluidos en este libro utilizamos los valores prácticos recomendados de factor de fijación de los extremos, como se muestra en la figura 11–3. En resumen, se utilizarán las siguientes relaciones para calcular la longitud efectiva:

Longitud efectiva

1. Columnas con extremos de pasador: $L_e = KL = 1.0(L) = L$
2. Columnas con extremos de pasador y fijo: $L_e = KL = 0.80(L)$
3. Columnas con extremos fijos: $L_e = KL = 0.65(L)$
4. Columnas con extremos fijos: $L_e = KL = 2.10(L)$

Radio de giro, r. La medida de la esbeltez de la sección transversal de una columna es su radio de giro, r, definido como

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} \tag{11–2}$$

donde I = momento de inercia de la sección transversal de la columna con respecto a uno de los ejes principales

A = área de la sección transversal.

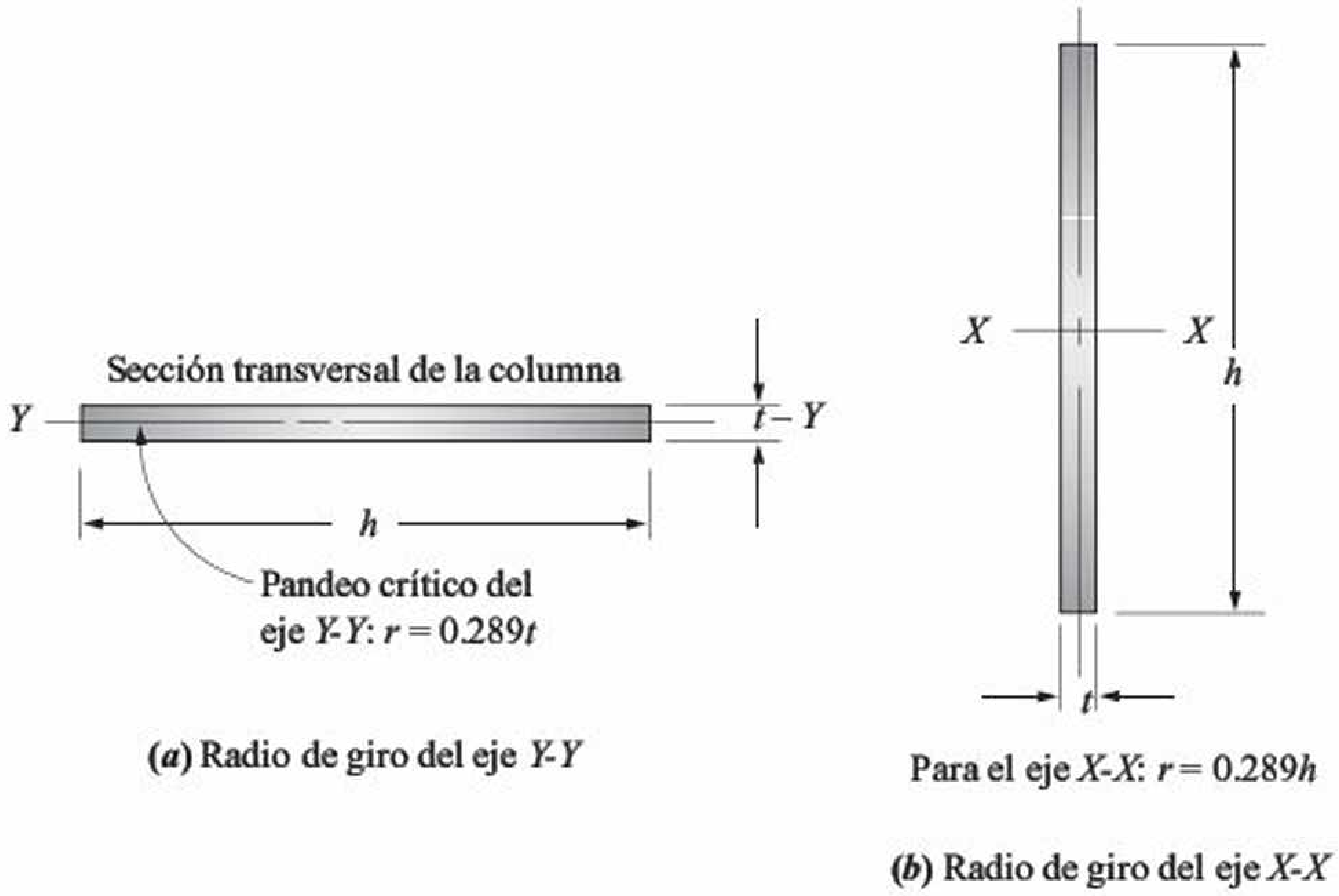
En virtud de que tanto I como A son propiedades geométricas de la sección transversal, el radio de giro, r, también lo es. En el apéndice A–1 se dan fórmulas para calcular el radio de giro, r, de varios perfiles comunes. Además, se da r junto con otras propiedades de algunos de los perfiles estándar que aparecen en el apéndice. Para aquellos para los que no se da r, los valores de I y A están disponibles y se puede utilizar la ecuación (11–2) para calcular r de manera muy simple. La sección 6–10 del capítulo 6 incluye una exposición adicional del radio de giro con ejemplos y problemas prácticos.

Observe que el valor del radio de giro, r, depende del eje con respecto al cual se tiene que calcular. En la mayoría de los casos, se debe determinar el eje con respecto al cual el *radio de giro es mínimo*, porque es el eje con respecto al cual la columna se pandearía. Considere, por ejemplo, una columna de sección rectangular cuyo ancho es mucho mayor que su espesor, como se ilustra en la figura 11–1. La regla de un metro demuestra que cuando se carga a compresión axial con poca o ninguna restricción en los extremos, siempre se pandeará con respecto al eje que pasa por la dimensión mínima.

Consulte la figura 11–4 para ilustrar este punto. En ella se muestran ilustraciones de la sección transversal rectangular esbelta de la regla de un metro ilustrada en la figura 11–1. La parte (a) la muestra con respecto al eje centroidal Y–Y. El espesor de rectángulo es t y su ancho es h. Por consiguiente, el momento de inercia del rectángulo con respecto al eje Y–Y es

$$I_Y = ht^3/12$$

FIGURA 11–4
Radio de giro de la sección transversal de una columna rectangular esbelta.



El área es simplemente

$$A = th$$

Ahora, con la ecuación (11–2) calculamos la relación del radio de giro, r_Y.

$$r_Y = \sqrt{\frac{I_Y}{A}} = \sqrt{\frac{ht^3/12}{th}} = \sqrt{\frac{t^2}{12}} = \frac{t}{\sqrt{12}} = 0.289\,t$$

Asimismo, si utilizamos la figura 11–4(b), podemos obtener una ecuación para r_X.

$$I_X = th^3/12$$
$$A = th$$
$$r_X = \sqrt{\frac{I_X}{A}} = \sqrt{\frac{th^3/12}{th}} = \sqrt{\frac{h^2}{12}} = \frac{h}{\sqrt{12}} = 0.289\,h$$

Observe que como $h > t$, $r_X > r_Y$ y por ende r_Y es el radio de giro mínimo de la sección.

Para las vigas de patín ancho (apéndice A–7) y las vigas American Standard (apéndice A–8), el valor mínimo de r es el calculado con respecto al eje Y–Y; es decir,

$$r_{\text{mín}} = r_Y = \sqrt{\frac{I_Y}{A}}$$

Asimismo, para secciones estructurales rectangulares huecas (HSS) (apéndice A–9), el radio de giro mínimo es el calculado con respecto al eje Y–Y. Los valores de r se dan en la tabla.

Para ángulos estructurales de acero, llamados perfiles L, ni el eje X–X ni el eje Y–Y proporcionan el radio de giro mínimo. Como se ilustra en el apéndice A–5, el $r_{\text{mín}}$ se calcula con respecto al eje Z–Z, con los valores dados en la tabla.

Para secciones simétricas, el valor de r es el mismo con respecto a cualquier eje principal. Tales perfiles son o las secciones circulares sólidas o huecas y las secciones cuadradas sólidas o huecas.

Resumen del método para calcular la relación de esbeltez

1. Determine la longitud real de la columna, L, entre sus puntos extremos o entre puntos de restricción lateral.
2. Determine el factor de fijación de los extremos con base en el tipo de apoyo de los extremos o mediante la figura 11–3.
3. Calcule la longitud efectiva, $L_e = KL$.
4. Calcule el radio de giro *mínimo* de la sección transversal de la columna.
5. Calcule la relación de esbeltez con

$$SR = \frac{L_e}{r_{\text{mín}}}$$

11–3 RELACIÓN DE ESBELTEZ DE TRANSICIÓN

¿Cuándo se considera larga una columna? La respuesta a esta pregunta requiere la determinación de la *relación de esbeltez de transición*, o constante de columna C_c.

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{s_y}} \tag{11–3}$$

Relación de esbeltez de transición

Para determinar si una columna dada es larga o corta, se aplican las reglas siguientes.

Si la relación de esbeltez efectiva real L_e/r es mayor que C_c, entonces la columna es larga y para analizarla se deberá utilizar la fórmula de Euler, definida en la siguiente sección.

Si la relación real L_e/r es menor que C_c, entonces la columna es corta. En este caso, se deberá utilizar o la fórmula de J. B. Johnson, reglamentos especiales o la fórmula de esfuerzo de compresión directa, como se verá en secciones posteriores.

En los casos en que se analiza una columna para determinar la carga que soportará, deberá calcularse el valor de C_c y la relación real L_e/r para determinar qué método de análisis se debe utilizar. Observe que C_c depende de la resistencia a la cedencia s_Y y del módulo de elasticidad E del material. Cuando se trabaja con acero, por lo general se considera que E es de 207 GPa (30×10^6 psi). Con este valor y suponiendo un intervalo de valores de resistencia a la cedencia, obtenemos los valores de C_c mostrados en la figura 11–5. Tenga en cuenta que en general se considera que el valor de E para aceros estructurales es de 200 GPa (29×10^6 psi), con la curva desplazada hacia abajo un poco.

Para aluminio, E es aproximadamente de 69 GPa (10×10^6 psi). Los valores correspondientes de C_c se muestran en la figura 11–6.

FIGURA 11–5
Relación de esbeltez de transición C_c contra la resistencia a la cedencia de acero.

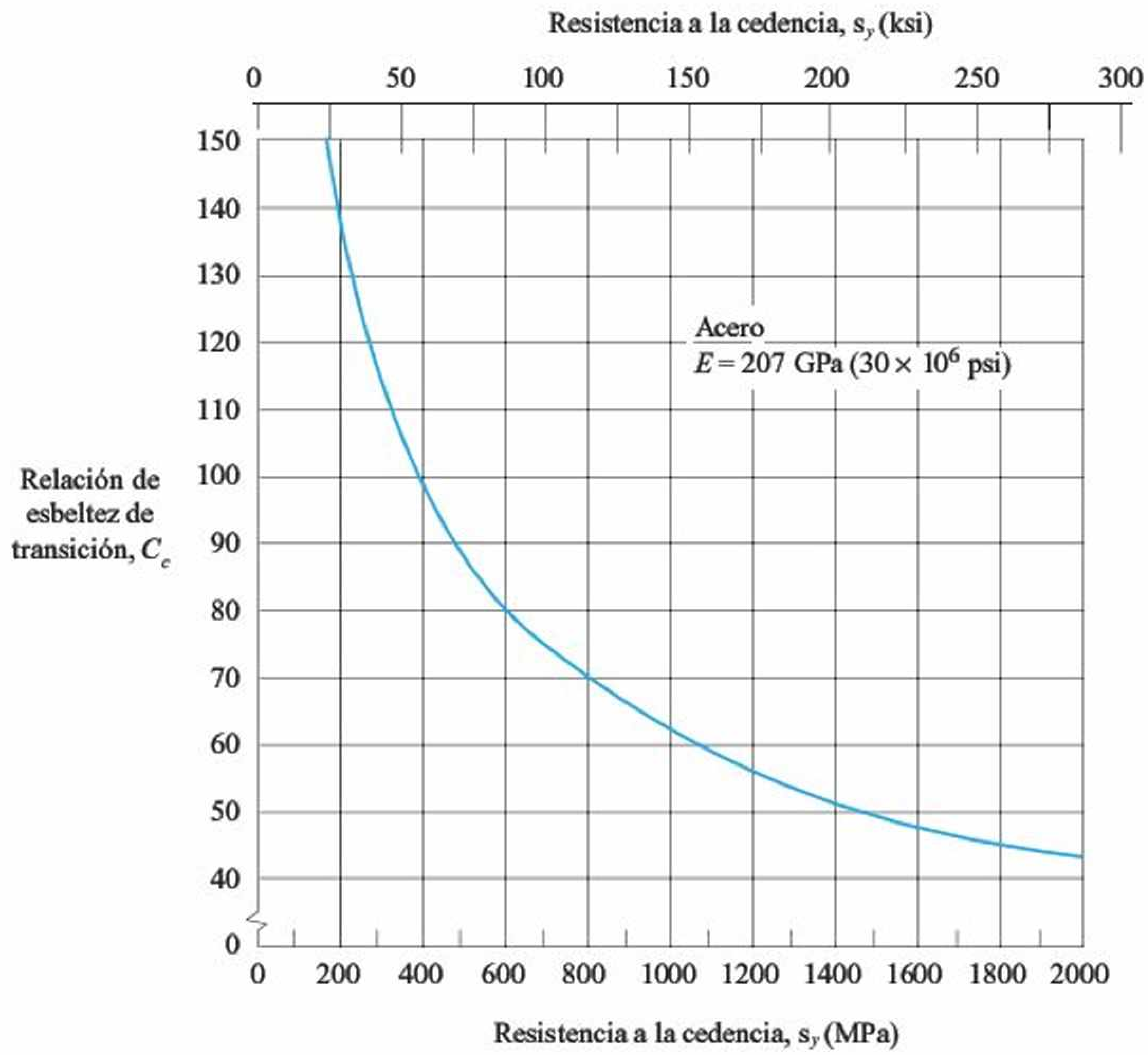
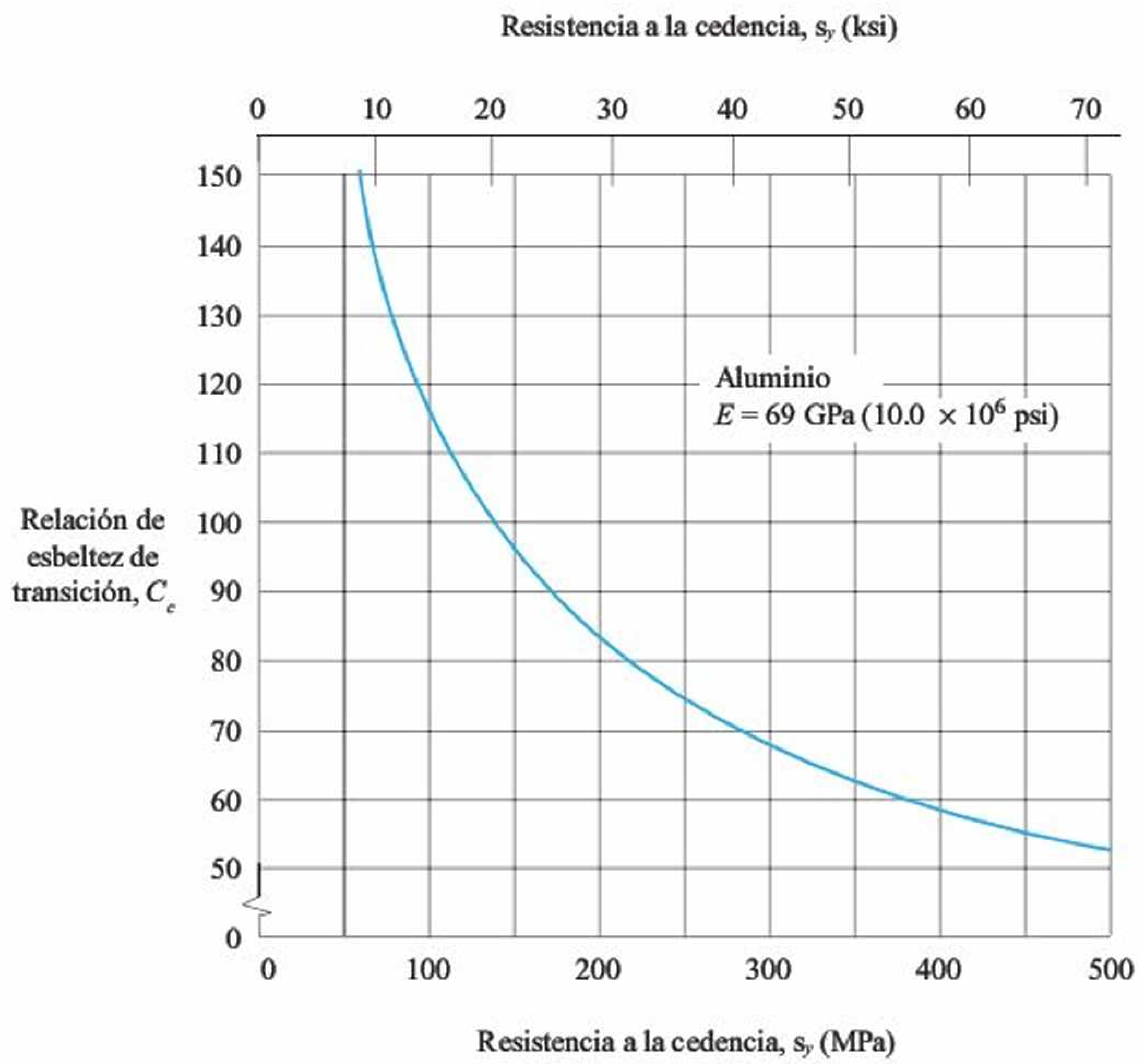


FIGURA 11–6
Relación de esbeltez de transición C_c contra la resistencia a la cedencia de aluminio.



11–4 FÓRMULA DE EULER PARA COLUMNAS LARGAS

Para columnas largas cuya relación de esbeltez es mayor que el valor de transición C_c, se puede utilizar la fórmula de Euler para predecir la carga crítica con la que se espera que la columna se pandee. La fórmula es

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EA}{(L_e/r)^2} \quad \textbf{(11–4)}$$

Fórmula de Euler para columnas largas

donde A es el área de la sección transversal de la columna. Otra forma de expresar esta fórmula está en función del momento de inercia teniendo en cuenta que $r^2 = I/A$. Entonces, la fórmula se escribe como

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \quad \textbf{(11–5)}$$

11–5 FÓRMULA DE J. B. JOHNSON PARA COLUMNAS CORTAS

Si la relación de esbeltez efectiva real, L_e/r es menor que el valor de transición C_c, la fórmula de Euler predice una carga crítica exorbitante. Una fórmula recomendada para el diseño de máquinas en el intervalo de L_e/R menor que C_c es la fórmula de J. B. Johnson.

$$P_{cr} = As_y\left[1 - \frac{s_y\,(L_e/r)^2}{4\pi^2 E}\right] \quad \textbf{(11–6)}$$

Fórmula de J. B. Johnson para columnas cortas

Ésta es una forma de un conjunto de ecuaciones llamadas fórmulas parabólicas y concuerda perfectamente con el comportamiento de las columnas de acero de maquinaría típica.

La fórmula de Johnson da el mismo resultado que la fórmula de Euler de la carga crítica con la relación de esbeltez de transición C_c. Entonces, en el caso de columnas muy cortas, la carga crítica se aproxima a la pronosticada por la ecuación del esfuerzo de compresión directa, $\sigma = P/A$. Por consiguiente, se podría decir que la fórmula de Johnson se aplica mejor a columnas de mediana longitud.

11–6 RESUMEN – FÓRMULAS DE PANDEO

Esta sección resume el fundamento de las fórmulas de Euler y Johnson para el análisis de columnas y da más detalles sobre el comportamiento de columnas hechas de varios materiales y relaciones de esbeltez.

El fenómeno de pandeo no es una falla del material del cual está hecha la columna; es una falla de la columna en su conjunto para conservar su forma. Este tipo de falla se llama *inestabilidad elástica*.

Recuerde el ejercicio que realizó en la sección de la imagen completa de este capítulo. A medida que cargaba una columna larga esbelta, tal como la regla de un metro, observó que se pandeaba con una carga moderada. Si se retiraba la carga después de la ocurrencia del pandeo, se observaba que la columna no sufría daños. No había cedencia o fractura del material.

Para diseñar una columna segura, debe asegurarse de que permanezca elásticamente estable. El fundamento de las fórmulas de Euler y Johnson se desarrolla a partir del análisis de esfuerzo conocido como *elasticidad*. La referencia 6 es una fuente útil para este desarrollo.

El principio de estabilidad elástica establece que una columna es estable si conserva su forma recta a medida que se incrementa la carga. No obstante, existe un nivel de carga al cual la columna es incapaz de conservar su forma. Entonces se pandea. La carga a la cual ocurre el pandeo se conoce como *carga de pandeo crítica*, P_{cr}. Obviamente, como diseñador de la columna, debe asegurarse de que la carga real aplicada a la columna sea mucho menor que P_{cr}.

Cuando la carga axial sobre una columna sea menor que la carga de pandeo crítica, la rigidez de la columna es suficiente para resistir la tendencia a desviarse de la orientación de línea recta de su eje neutro. Incluso cuando la carga está un poco desviada del eje, la columna es capaz de conservar su forma. Podemos visualizar lo anterior si recurrimos a la figura 11–2.

La parte (a) muestra una columna recta con un extremo de pasador que soporta una carga de compresión axial. También se muestra, de una manera exagerada, que en el punto de pandeo incipiente, la columna adopta la forma de una media onda seno. Cualquier desviación del eje neutro con respecto a una línea recta introduce flexión en la columna. Cuando la fuerza aplicada es menor que P_{cr}, la rigidez de la columna es suficiente para resistir esta deformación y mantener la rectitud de la columna. Actúa como si fuera un resorte, en ocasiones conocido como *muelle*, para que la columna recupere su forma recta siempre que exista la tendencia a desviarse. El matemático suizo Leonhard Euler (1707–1783) utilizó las técnicas matemáticas de ecuaciones diferenciales para analizar esta condición y producir lo que ahora se conoce como *fórmula de Euler* en su honor [ecuación 11–4)].

Reconocer que la columna con extremo de pasador deformada pandeada adopta la forma de una media onda seno puede ayudarnos a visualizar por qué las diferentes condiciones de fijación de los extremos afectan la magnitud de la carga de pandeo crítica. Consulte la figura 11–3, que muestra la forma pandeada de cuatro columnas con diferentes modos de fijación de los extremos. La explicación del valor teórico de K, el factor de fijación de los extremos, se da a continuación.

a. La parte (b) es el diseño con extremos de pasador y toda la longitud se ajusta a la forma onda seno después de que se inicia el pandeo. Ésta es la razón de que $L_e = L$.

b. La parte (d) muestra el diseño con extremos fijos, y la forma de onda seno se presenta sólo a lo largo de la mitad de la columna. Por consiguiente, la longitud efectiva teórica es $L_e = 0.5L$.

c. La parte (e) muestra el diseño con extremos libres y la forma deformada de la columna es de sólo un cuarto de la onda seno. Para completar la media onda seno que caracteriza a la forma pandeada, se tendría que extender la línea curva del eje neutro deformado a una distancia igual *por debajo* del extremo inferior, el extremo fijo de la columna. Por consiguiente, la longitud efectiva es $L = 2.0L$.

d. La parte (c) muestra el diseño con extremos fijos y de pasador. Lógicamente se ve que este diseño es un término medio entre los mostrados en las partes (b) y (d). En realidad, la forma de onda seno se presenta en aproximadamente los dos tercios superiores de la columna. Por consiguiente, la longitud efectiva teórica es $L_e = 0.7L$.

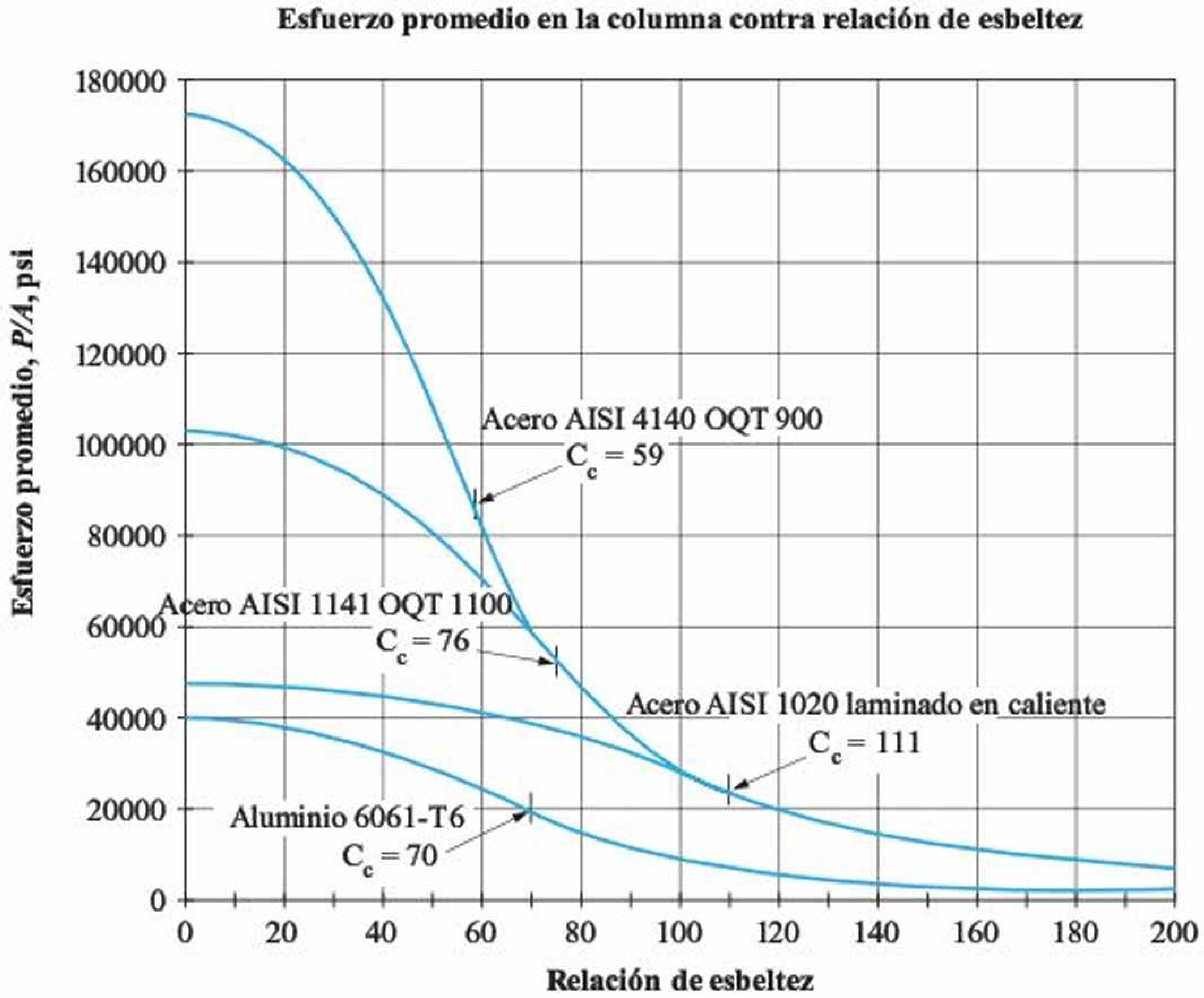
De nueva cuenta, como es muy difícil producir un extremo perfectamente fijo para una columna, se utilizan los valores de diseño del factor de fijación de los extremos, K, en problemas prácticos como los incluidos en este libro.

Comparación de las fórmulas de Euler y Johnson. Observamos que la fórmula de Euler es válida sólo para columnas cuya relación de esbeltez es mayor que la relación de esbeltez de transición, C_c. Cuando la relación L_e/r es menor que C_c, se recomienda la fórmula de Johnson. Entonces, con valores muy pequeños de L_e/r, el resultado obtenido con la fórmula de Johnson se aproxima a la carga a la cual el material de la columna fallaría por cedencia bajo la compresión axial directa.

Otra forma de examinar estos conceptos es dividir tanto la fórmula de Euler [ecuación (11–4)] como la fórmula de Johnson [ecuación (11–6)] entre el área de la sección transversal, A. En ese caso, el lado izquierdo de la fórmula es P/A y representa un esfuerzo promedio que actúa en la sección transversal de la columna.

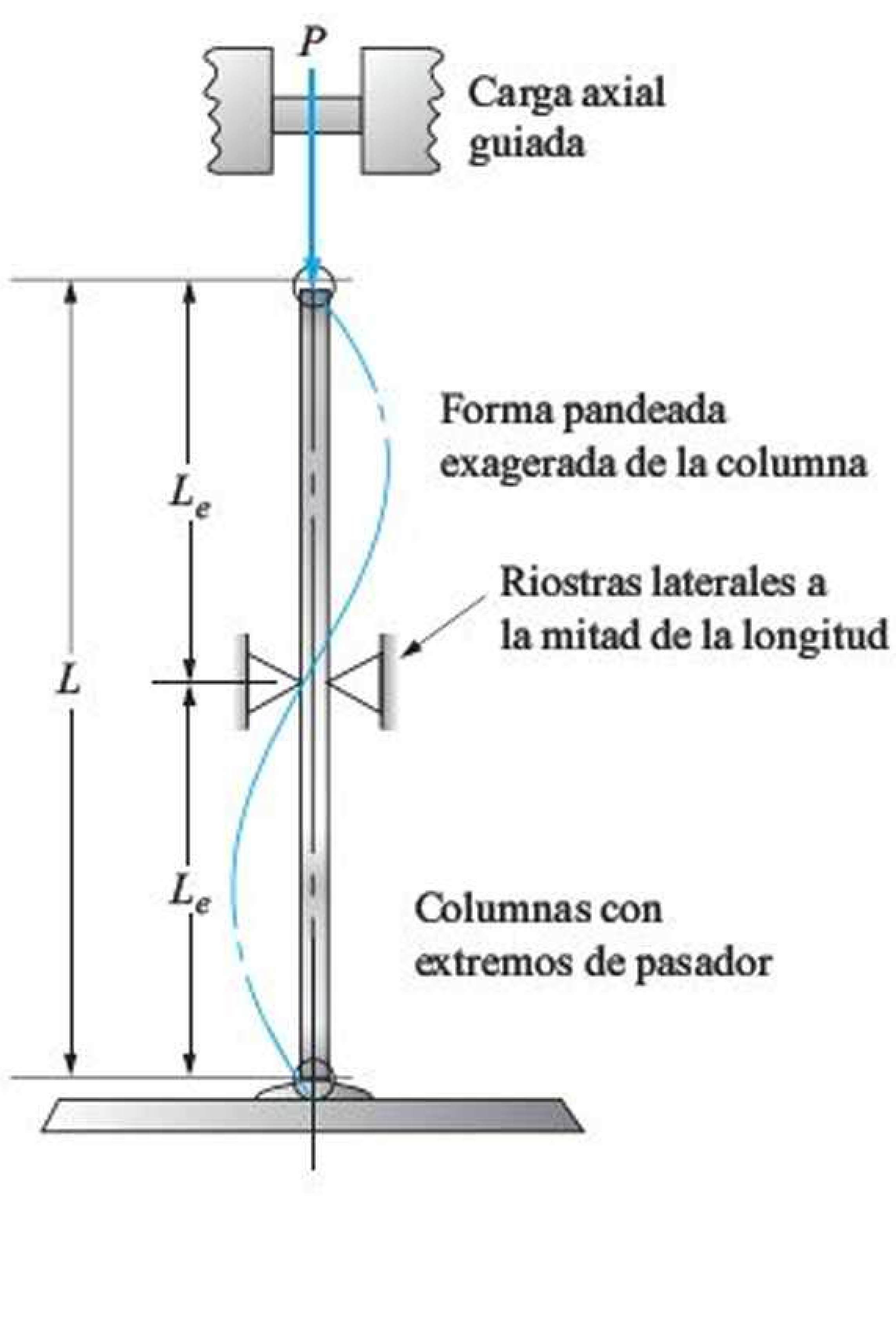
La figura 11–7 ilustra estos conceptos en forma gráfica. El eje vertical es el esfuerzo promedio en la columna cuando la carga axial es igual a la carga de pandeo crítica. El eje horizontal es la relación de esbeltez, L_e/r. El módulo de elasticidad, E, y la resistencia a la cedencia, s_y, del material afectan la carga de pandeo crítica y, por lo tanto, la gráfica presenta una familia de curvas representativas de diferentes materiales. Para un material dado, la parte más a la derecha es para valores grandes de $L_e/r > C_c$. En esta región, el comportamiento de una columna hecha de cualquier aleación del material se ajusta a la fórmula de Euler. Con $L_e/r = C_c$, las fórmulas de Euler y Johnson son tangentes. Entonces, con $L_e/r > C_c$, se aplica la fórmula de Johnson. Por último, en el caso de columnas muy cortas, el esfuerzo promedio tiende a la resistencia a la cedencia del material que representa la falla por compresión directa sin ningún efecto de pandeo.

FIGURA 11–7
Esfuerzo promedio en la columna *vs*. la relación de esbeltez.



Columnas lateralmente apuntaladas. Recuerde el ejercicio descrito en la sección de La imagen completa. Cuando la regla de un metro larga y esbelta se mantenía más o menos a la mitad de su longitud, era capaz de soportar una carga mucho mayor antes de que se pandeara. El apuntalamiento lateral divide efectivamente la columna en dos columnas distintas, de la mitad de la longitud de la columna completa. La carga de pandeo crítica se incrementa entonces dramáticamente. Cuando ocurre el pandeo, cada una de las mitades de la columna se deforma y adopta la forma de una media onda seno como se muestra en la figura 11–8. La columna completa adopta entonces la forma de una onda seno completa. Más adelante se ilustra este resultado con un ejemplo.

FIGURA 11–8
Columna lateralmente arriostrada.



11–7 FACTORES DE DISEÑO PARA COLUMNAS Y CARGA PERMISIBLE

Carga permisible sobre una columna

Cuando una columna falla por pandeo y no por cedencia o por falla máxima del material, los métodos antes utilizados para calcular el esfuerzo de diseño no se aplican a columnas.

En vez de eso se calcula una *carga permisible* dividiendo la carga de pandeo crítica calculada con la fórmula de Euler [ecuación (11.4)] o la fórmula de Johnson [ecuación (11–6)] entre un factor de diseño, N. Es decir,

$$P_a = \frac{P_{cr}}{N} \tag{11–7}$$

donde P_a = carga permisible, segura
P_c = carga de pandeo crítica
N = factor de diseño

La selección del factor de diseño es la responsabilidad del diseñador a menos que el proyecto esté clasificado dentro de la categoría de un reglamento. Los factores a considerar en la selección de un factor de diseño son similares a los utilizados para determinar factores de diseño aplicados a esfuerzos. Un factor común utilizado en el diseño mecánico es $N = 3.0$, seleccionado por la incertidumbre de las propiedades del material, la fijación de los extremos, la rectitud de la columna o la posibilidad de que la carga se aplique con algo de excentricidad y no a lo largo de la columna. En ocasiones se utilizan factores mayores en situaciones críticas y para columnas muy largas.

En la construcción de edificios, donde las especificaciones del American Institute of Steel Construction, AISC, rigen el diseño, se recomienda un factor de 1.92 para columnas largas. La Aluminum Association requiere $N = 1.95$ para columnas largas. Consulte las secciones 11–12 y 11–13.

11–8 RESUMEN – MÉTODO DE ANÁLISIS DE COLUMNAS

El objetivo de esta sección es resumir los conceptos presentados en las secciones 11–3 a 11–7 en un procedimiento que pueda ser utilizado para analizar columnas. Se puede aplicar a una columna recta de sección transversal uniforme a lo largo de ella, en la que la carga de compresión se aplica en línea con su eje centroidal.

Método de análisis de columnas

En principio, se supone que se conocen los siguientes factores:

1. La longitud real, L
2. La forma de conectar la columna a sus apoyos
3. La forma de la sección transversal de la columna y sus dimensiones
4. El material del cual está hecha la columna

Entonces el procedimiento es:

1. Determine el factor de fijación de los extremos, K, comparando la forma de conectar la columna a sus apoyos con la información de la figura 11–3.
2. Calcule la longitud efectiva, $L_e = KL$.
3. Calcule el valor mínimo del radio de giro de la sección transversal con $r_{mín} = \sqrt{I_{mín}/A}$; o determine rmín en las tablas de datos.
4. Calcule la relación de esbeltez máxima con.

$$SR_{máx} = \frac{L_e}{r_{min}}$$

5. Con el módulo de elasticidad, E, y la resistencia a la cedencia, sY, del material, calcule la constante de columna,

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{s_y}}$$

6. Compare el valor de SR con C_c.
   a. Si $SR > C_c$, la columna es larga. Use la fórmula de Euler para calcular la carga de pandeo crítica,

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EA}{(SR)^2} \tag{11–4}$$

   b. Si $SR < C_c$, la columna es corta. Use la fórmula de Johnson para calcular la carga de pandeo crítica,

$$P_{cr} = As_y\left[1 - \frac{s_y(SR)^2}{4\pi^2 E}\right] \tag{11–6}$$

7. Especifique el factor de diseño, N.
8. Calcule la carga permisible, P_a,

$$P_a = \frac{P_{cr}}{N}$$

Problema de ejemplo 11–1 Se tiene que utilizar en una máquina un miembro circular de acero AISI 1020 estirado en frío con ambos extremos de pasador. Su diámetro es de 25 mm y su longitud de 950 mm. ¿Qué carga máxima puede soportar el miembro antes de pandearse? También calcule la carga permisible en la columna con un factor de diseño de $N = 3$.

Solución

Objetivo: Calcular la carga de pandeo crítica para la columna y carga permisible con un factor de diseño de $N = 3$.

Datos: $L = 950$ mm. La sección transversal es circular, $D = 25$ mm. Extremos de pasador.
La columna es de acero: AISI 1020 estirado en frío.
En el apéndice A–14: $s_Y = 441$ MPa; $E = 207$ GPa $= 207 \times 10^9$ N/m²

Análisis: Use el *Método de analizar columnas.*

Resultados: ***Paso 1.*** Determine el factor de fijación de los extremos. Para la columna con extremos de pasador, $K = 1.0$.

Paso 2. Calcule la longitud efectiva.

$$L_e = KL = 1.0((L) = 950 \text{ mm}$$

Paso 3. Calcule el valor mínimo del radio de giro. En el apéndice A–1, para cualquier eje de una sección circular, $r = D/4$. Entonces,

$$r = \frac{D}{4} = \frac{25 \text{ mm}}{4} = 6.25 \text{ mm}$$

Paso 4. Calcule la relación de esbeltez, $SR = L_e/r$.

$$SR = \frac{L_e}{r} = \frac{950\text{ mm}}{6.25\text{ mm}} = 152$$

Paso 5. Calcule la constante de columna, C_c.

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{s_y}} = \sqrt{\frac{2\pi^2(207 \times 10^9\text{ N/m}^2)}{441 \times 10^6\text{ N/m}^2}} = 96.3$$

Paso 6. Compare C_c con SR y decida si la columna es larga o corta. Luego utilice la formula apropiada para calcular la carga de pandeo crítica. Como SR es mayor que C_c, se aplica la fórmula de Euler.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EA}{(SR)^2}$$

El área es

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi(25\text{ mm})2}{4} = 491\text{ mm}^2$$

Entonces

$$P_{cr} = \frac{\pi^2(207 \times 10^9\text{ N/m}^2)(491\text{ mm}^2)}{(152)^2} \times \frac{1\text{ m}^2}{(10^3\text{ mm})^2} = 43.4\text{ kN}$$

Paso 7. Se especifica un factor de diseño de $N = 3$.

Paso 8. La carga permisible, P_a es

$$P_a = \frac{P_{cr}}{N} = \frac{43.4\text{ kN}}{3} = 14.5\text{ kN}$$

Problema de ejemplo 11–2 Determine la carga crítica en una columna de acero de sección transversal cuadrada de 12 mm por lado y 300 mm de longitud. La columna es de acero AISI 1040, laminado en caliente. Uno de sus extremos se soldará rígidamente a un apoyo firme y el otro se conectará por medio de una junta de pasador. También calcule la carga permisible en la columna con un factor de diseño de $N = 3$.

Solución

Objetivo: Calcular la carga de pandeo crítica para la columna y la carga permisible con un factor de diseño de $N = 3$.

Datos: $L = 300$ mm. La sección transversal es cuadrada; cada lado es $b = 12$ mm.
Un extremo de pasador; un extremo fijo. La columna es de acero; AISI 1040 laminado en caliente.
En el apéndice A–14: $s_Y = 414$ MPa; $E = 207\text{ GPa} = 207 \times 10^9\text{ N/m}^2$

Análisis: Use el *Método de analizar columnas*.

Resultados: ***Paso 1.*** Determine el factor de fijación de los extremos. Para la columna con un extremo pasador y otro fijo, $K = 0.80$ es un valor práctico (figura 11–3).

Paso 2. Calcule la longitud efectiva.

$$L_e = KL = 0.80(L) = 0.80(300 \text{ mm}) = 240 \text{ mm}$$

Paso 3. Calcule el valor mínimo del radio de giro. En el apéndice A–1, para una sección transversal cuadrada, $r = b/\sqrt{12}$. Entonces,

$$r = \frac{b}{\sqrt{12}} = \frac{12 \text{ mm}}{\sqrt{12}} = 3.46 \text{ mm}$$

Paso 4. Calcule la relación de esbeltez, $SR = L_e/r$.

$$SR = \frac{L_e}{r} = \frac{KL}{r} = \frac{(0.8)\,(300 \text{ mm})}{3.46 \text{ mm}} = 69.4$$

Paso 5. Normalmente se calcularía el valor de la constante de columna, C_c. Pero, en este caso, utilizamos la figura 11–5. Para un acero con resistencia a la cedencia de 414 MPa, $C_c =$ 96, aproximadamente.

Paso 6. Compare C_c con SR y decida si la columna es larga o corta. Luego utilice la fórmula apropiada para calcular la carga de pandeo crítica. Como SR es menor que C_c, se utilizará la fórmula de Johnson (ecuación 11–6).

$$P_{cr} = As_y\left[1 - \frac{s_y(SR)^2}{4\pi^2 E}\right]$$

El área de la sección cuadrada es

$$A = b^2 = (12 \text{ mm})^2 = 144 \text{ mm}^2$$

Entonces,

$$P_{cr} = (144 \text{ mm}^2)\left(\frac{414 \text{ N}}{\text{mm}^2}\right)\left[1 - \frac{(414 \times 10^6 \text{ N/m}^2)\,(69.4)^2}{4\pi^2(207 \times 10^9 \text{ N/m}^2)}\right]$$

$$P_{cr} = 45.1 \text{ kN}$$

Paso 7. Se especifica un factor de diseño de $N = 3$.

Paso 8. La carga permisible, P_a es

$$P_a = \frac{P_{cr}}{N} = \frac{45.1 \text{ kN}}{3} = 15.0 \text{ kN}$$

Problema de ejemplo 11–3

Recurra a los resultados del problema de ejemplo 11–1 donde se analizó una columna de acero de 25 mm de diámetro y 950 mm de longitud para determinar la carga de pandeo crítica. La columna era de acero AISI 1020 estirado en frío. Se encontró que $P_{cr} = 43.4$ kN. Ahora rediseñe la estructura de la cual forma parte esta columna. Se decidió utilizar arriostramiento lateral en todas las direcciones a la mitad de la columna. Determine la carga de pandeo crítica para la columna rediseñada.

Solución

Objetivo: Calcular la carga de pandeo crítica para la columna arriostrada.

Datos: Los datos del problema de ejemplo 11–1. Sección transversal circular, $D = 25$ mm, $L = 950$ mm. Extremos de pasador. Acero AISI 1020 estirado en frío; $E = 207$ GPa, $s_Y = 441$ MPa. Columna arriostrada a 450 mm de cada extremo.

Análisis: Use el *Método de analizar columnas.*

Resultados

Paso 1. Factor de fijación de los extremos, $K = 1.0$ con extremos de pasador.

Paso 2. Longitud efectiva. La longitud no arriostrada ahora es de 450 mm. Entonces $L_e = KL = 1.0(450 \text{ mm}) = 450 \text{ mm}$

Paso 3. Radio de giro $= r = 6.25$ ([del Problema de ejemplo 11–1]

Paso 4. Relación de esbeltez $= SR = L_e/R = (450 \text{ mm})/(6.25 \text{ mm}) = 72$

Paso 5. Constante de columna $= C_c = 96.2$ [del Problema de ejemplo 11–1]

Paso 6. Como $SR < C_c$, use la fórmula de Johnson. $A = 491 \text{ mm}^2$

$$P_{cr} = As_y\left[1 - \frac{s_y(SR)^2}{4\pi^2 E}\right]$$

$$P_{cr} = (491 \text{ mm}^2)\left(\frac{441 \text{ N}}{\text{mm}^2}\right)\left[1 - \frac{(441 \times 10^6 \text{ N/m}^2)(72)^2}{4\pi^2(207 \times 10^9 \text{ N/m}^2)}\right] = 156 \text{ kN}$$

Comentario

La carga de pandeo crítica se incrementó de 43.4 kN a 156 kN, más de 3½ veces. Ésa es una mejora significativa. La columna se comporta como si fuera de la mitad de larga.

11–9 HOJA DE CÁLCULO PARA ANALIZAR COLUMNAS

Completar el proceso descrito en la sección 11–8 con una calculadora, lápiz y papel es tedioso. Una hoja de cálculo automatiza los cálculos después de que ha ingresado los datos pertinentes para la columna particular que se va a analizar. La figura 11–9 muestra los resultados de salida de una hoja de cálculo utilizada para resolver el problema 11–1. La elaboración de la hoja de cálculo podría hacerse de muchas maneras y se le pide desarrollar su propio estilo. Los siguientes comentarios describen las características de la hoja de cálculo dada.

1. En la parte superior de hoja, se dan instrucciones para el usuario sobre cómo ingresar los datos y unidades. Esta hoja es sólo para unidades métricas SI. Se utilizaría una hoja diferente si se utilizaran unidades del sistema inglés.

2. En el lado izquierdo de la hoja aparecen los diversos datos que deben ser provistos por el usuario para ejecutar los cálculos. A la derecha se dan los valores de salida. Las fórmulas para calcular L_e, C_c, KL/r y la carga permisible se escriben directamente en la celda donde aparecen los valores calculados. Los resultados correspondientes al mensaje de salida "Column is: *larga*" y la carga de pandeo crítica son producidos por *funciones* establecidas en *macros* escritas en Visual Basic y colocadas en una hoja aparte de la hoja de cálculo. La figura 11–10 muestra las dos macros utilizadas.La primera (*LorS*) realiza el proceso de decisión para probar si la columna es larga o corta comparando la relación de esbeltez con la constante de columna. La segunda (*Pcr*) calcula la carga de pandeo crítica por medio de la fórmula de Euler o la fórmula de J. B. Johnson según el resultado de la macro *LorS*. Estas funciones son invocadas por instrucciones en las celdas donde se localizan "larga" y el valor calculado de la carga de pandeo crítica (43.42 kN).

3. Con una hoja de cálculo como ésa usted puede analizar varias opciones de diseño. Por ejemplo, el enunciado del problema dado indicaba que los extremos eran de pasador y el resultado fue un valor de fijación de los extremos de $K = 1$. ¿Qué pasaría si ambos extremos fueran fijos? Simplemente con cambiar el valor de dicha celda a $K = 0.65$ toda la hoja sería recalculada y el valor revisado de la carga de pandeo crítica estaría disponible casi al instante. El resultado es que $P_{cr} = 102.76$ kN, un incremento de

FIGURA 11–9
Hoja de cálculo para el análisis de columnas con datos del Problema de ejemplo 11-1 [datos SI].

PROGRAMNA DE ANÁLISIS DE COLUMNAS	*Datos del:* Problema de ejemplo 11-1
Consulte en la sección 11-8 el procedimiento de análisis	
Ingrese los valores de las variables en *cursivas en los cuadros de texto sombreados*	Use unidades métricas SI compatibles.
Valores a ser ingresados:	**Valores calculados:**
Longitud y fijación de los extremos: *Longitud de la columna, L = 950 mm* *Fijación de los extremos, K = 1.00*	Ec. de longitud, L_e = KL = 950.0 mm
Propiedades del material: *Resistencia a la cedencia, s_y = 441 Mpa* *Módulo de elasticidad, E = 207 GPa*	Constante de columna, C_c = 96.3
Propiedades de la sección transversal: [Nota: Ingrese *r* o calcule *r* = sqrt(*I/A*)] [Siempre ingrese el área] [Ingrese cero para *I* o *r* si no se utiliza] *Área A, = 491 mm²* *Momento de inercia, I = 0 mm⁴* *o* *Radio de giro, r = 6.25 mm*	Relación de esbeltez, *KL*/*r* = 152.0
	La columna es: larga
	Carga de pandeo crítica = *43.42 kN*
Factor de diseño *Factor de diseño con la carga, N = 3*	**Carga permisible = *14.47 kN***

FIGURA 11–10
Macros utilizadas en la hoja de cálculo de análisis de columnas.

```
'Macro LorS
'Determinar si la columna es larga o corta.
Function LorS(SR, CC)
   If SR> CC Then
      LorS= "larga"
   Else
      LorS= "corta"
   End If
End Function

'Macro de carga crítica
'Utilice la fórmula de Euler para columnas largas.
'Utilice la fórmula de Johnson para columnas cortas.
Function Pcr(LorS, SR, E, A, Sy)
Const Pi = 3.1415926
   If LorS = "long" Then
      Pcr= Pi ^ 2 * E * A / SR ^ 2
      'Euler Equation; Eq. (11-4)
   Else
      Pcr = A * Sy(1-(Sy * SR ^ 2 / (4* Pi ^ 2 * E))
      'Ecuación de Johnson; Eq. (11-7)
   End If
End Function
```

2.37 veces el valor original. Con esa clase de mejora, usted, el diseñador, podría verse tentado a cambiar el diseño para producir extremos fijos.

11–10 PERFILES EFICIENTES PARA SECCIONES TRANSVERSALES DE COLUMNAS

Cuando se diseña una columna para que soporte una carga especificada, el diseñador tiene la responsabilidad de seleccionar el perfil general de su sección transversal y determinar entonces las dimensiones requeridas. Los principios siguientes pueden ayudar en la selección inicial del perfil.

Un perfil eficiente es uno que utiliza una pequeña cantidad de material para realizar una función dada. Para columnas, el objetivo es incrementar al máximo el radio de giro para reducir la relación de esbeltez. Observe también que como $r = \sqrt{I/A}$, el incremento al máximo del momento de inercia de un área dada tiene el mismo efecto.

Cuando se analizó en el momento de inercia en los capítulos 6 y 7, se observó que es deseable colocar tanta área de la sección transversal tan lejos del centroide como sea posible. Para vigas (analizadas en el capítulo 7) por lo general hubo sólo un eje importante, el eje con respecto al cual ocurría la flexión. En columnas, el pandeo, en general, puede ocurrir en cualquier dirección. Por consiguiente, es deseable disponer de propiedades uniformes con respecto a cualquier eje. La sección circular hueca, comúnmente llamado tubo, es entonces un perfil muy eficiente para usarse como columna. Le sigue de cerca el tubo cuadrado hueco. También se pueden utilizar secciones compuestas de secciones estructurales estándar, como se muestra en la figura 11–11.

Las columnas de edificios a menudo se arman con perfiles especiales de patín ancho llamados *secciones para columna*. Son relativamente anchos y gruesos en comparación con los perfiles seleccionados, por lo general, para vigas. Esto hace que el momento de inercia con respecto al eje Y–Y sea casi igual a aquel con respecto al eje X–X. EL resultado es que los radios de giro con respecto a los dos ejes también son casi iguales. La figura 11–12 muestra una comparación de perfiles de patín ancho de 12 in: una sección de columna y un perfil de viga típico. Observe que se deberá utilizar el radio de giro menor para calcular la relación de esbeltez.

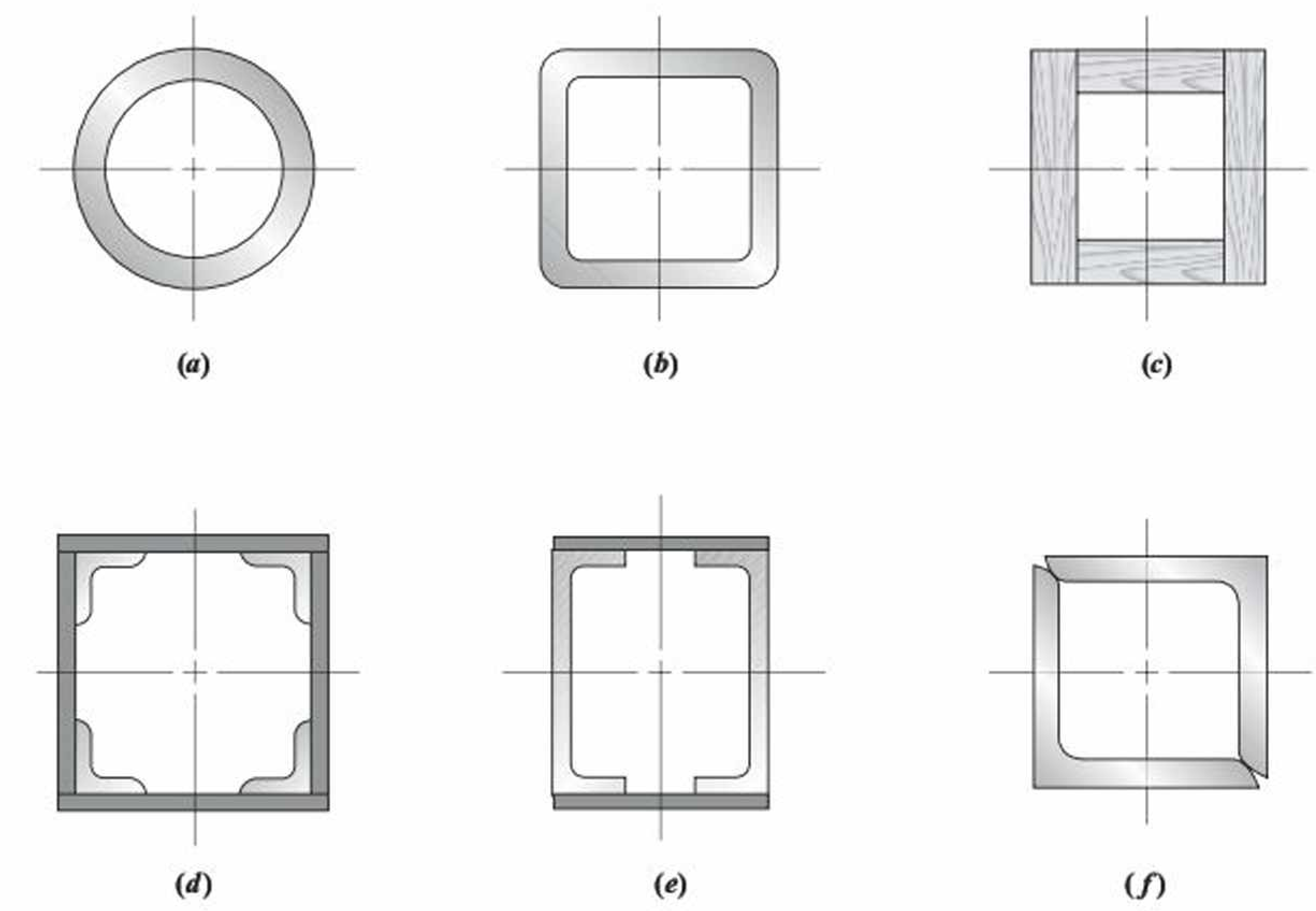
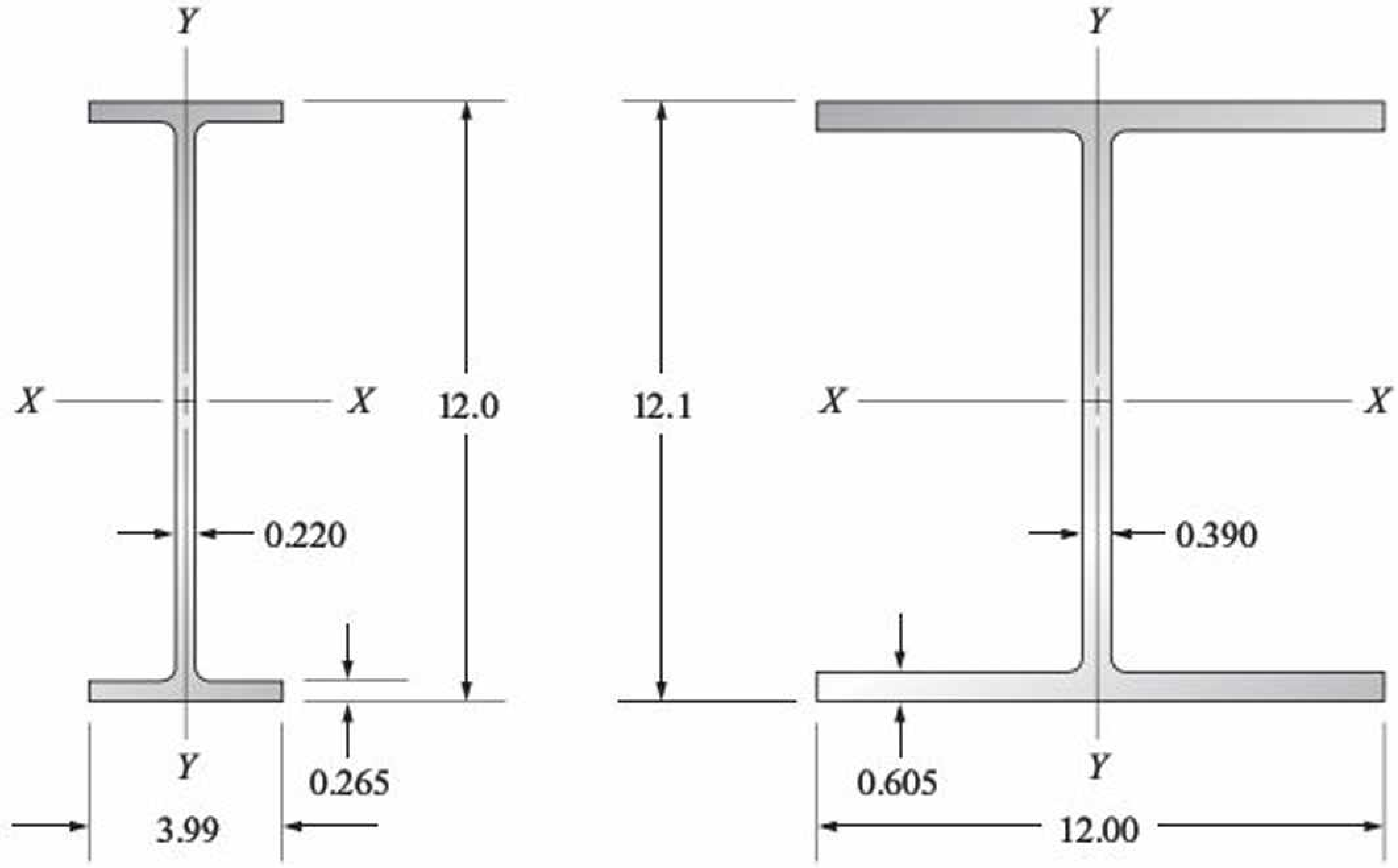


FIGURA 11–11 Ejemplos de perfiles de columna eficientes. (a) Sección circular hueca, tubo. (b) Tubo cuadrado hueco. (*c*) Sección de caja formada con vigas de madera. (d) Ángulos de patas iguales con placas. (e) Canales de aluminio con placas. (f) Dos ángulos de patas iguales.

FIGURA 11–12 Comparación de un perfil de viga de patín ancho con una sección de columna.



(*a*) Perfil de viga W12 × 16

Área = 4.71 in^2
I_x = 103 in^4
I_y = 2.82 in^4
r_x = 4.68 in
r_y = 0.77 in
r_x/r_y = 6.08

(*b*) Sección de columna W12 × 65

Área = 19.1 in^2
I_x = 533 in^4
I_y = 174 in^4
r_x = 5.28 in
r_y = 3.02 in
r_x/r_y = 1.75
r_y casi igual a r_y

11–11 ESPECIFICACIONES DEL AISC

Las columnas son elementos esenciales de muchas estructuras. El diseño y análisis de columnas en aplicaciones de construcción están regidos por las especificaciones del AISC, el American Institute of Steel Construction (referencia 2), brevemente resumidas aquí para secciones de columna cargadas a través de sus ejes centroidales y que no presentan pandeo local de sus patines esbeltos alargados. El método implica las siguientes variables. Observe que los símbolos utilizados aquí son similares a los utilizados en secciones anteriores de este capítulo y no necesariamente son las mismas del manual AISC.

$$\textit{Relación de esbeltez de transición} = SR_t = 4.71\sqrt{E/s_y} \qquad (11\text{–}8)$$

(SR_t = es aproximadamente 6% mayor que C_c)

$$\textit{Esfuerzo de pandeo crítico elástico} = s_e = \pi^2 E/(SR)^2 \qquad (11\text{–}9)$$

(en ocasiones llamado *esfuerzo de Euler*)

Esfuerzo de pandeo flexionante = s_{cr} cuyo valor depende de la SR

Si $SR \leq SR_t$, entonces la columna es corta y

$$s_{cr} = [0.658^d]\, s_y \qquad \text{y el exponente } d = s_y/s_e \qquad (11\text{–}10)$$

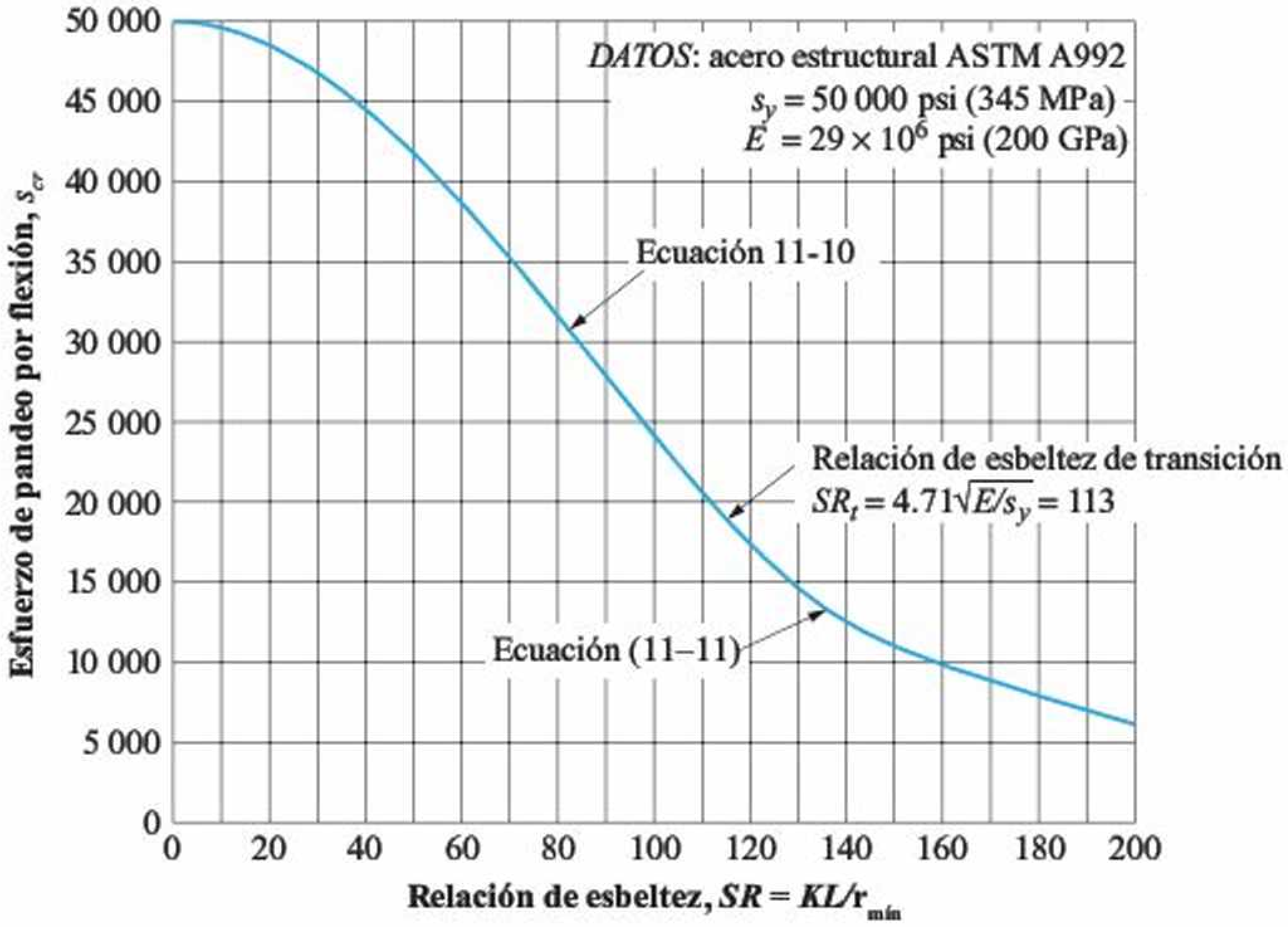


FIGURA 11–13 Esfuerzo de pandeo por flexión contra relación de esbeltez – método AISC.

Si $SR > SR_t$, entonces la columna es larga y,

$$s_{cr} = 0.877\ s_e \quad \textbf{(11–11)}$$

Entonces la *resistencia al pandeo nominal* $= P_a = s_{cr} A_g$ **(11–12)**

(A_g es el área bruta de la columna)

Por último, la *resistencia a la compresión permisible* $= P_a = P_n/1.67$ **(11–13)**

Es de hacerse notar que estas fórmulas son más simples y un poco diferentes de las reportadas en ediciones previas del manual AISC. Sin embargo, los valores resultantes de P_a se encuentran dentro de aproximadamente el 2% de los resultados previos.

La figura 11–13 muestra una gráfica del *esfuerzo de pandeo flexionante*, s_{cr} contra la relación de esbeltez real de una columna. Los datos son para acero estructural ASTM A992, el acero más común para vigas W y secciones de columna. Observe que las ecuaciones (11–10) y (11–11) son tangentes en el punto correspondiente al valor de la relación de esbeltez de transición y que el esfuerzo de pandeo tiende a la resistencia a la cedencia en el caso de columnas muy cortas. El AISC recomienda que la relación de esbeltez utilizable máxima sea de 200.

Problema de ejemplo 11–4

Calcule la resistencia a la compresión permisible, P_a para una columna hecha de tubería estructural rectangular de acero, HSS102 × 51 × 6.4. El material es acero estructural ASTM A500, grado B. La longitud de la columna es de 3050 mm y sus extremos son articulados.

Solución

Utilizaremos la ecuaciones (11–8) a (11–13) con E = 200 GPa = 200 000 MPa y s_y = 290 MPa. Se espera que el tubo se pandee con respecto al eje Y–Y de modo que $r_{mín} = r_y$ = 19.8 mm [(apéndice A–9(SI)] y A_g = 1570 mm².

Relación de esbeltez real: $SR = KL/r = 1.00(3050\text{ mm}/19.8\text{ mm}) = 154$

Relación de esbeltez de transición $= SR_t = 4.71\sqrt{E/S_y} = 4.71\sqrt{(200\,000/290)} = 123.7$

Esfuerzo de pandeo crítico elástico $= s_e = \pi^2 E/(SR)^2 = \pi^2\,(200\,000\text{ MPa})/(154)^2$

$s_e = 83.23\text{ MPa}$

Como $SR > SR_t$, la columna es larga y utilizamos la ecuación (11–11):

$$s_{cr} = 0.877 s_e = 0.877(83.23\text{ MPa}) = 73.0\text{ MPa}$$

Ahora, si utilizamos la ecuación (11–12),
la *resistencia nominal al pandeo* $= P_n = s_{cr} A_g = (73.0\text{ N/mm}^2)(1570\text{ mm}^2) = 114.6\text{ kN}$

Con la ecuación (11–13),
la *resistencia a la compresión permisible* $= P_a = P_n/1.67 = 114.6\text{ kN}/1.67 = 68.6\text{ kN}$

Problema de ejemplo 11–5 Calcule la resistencia a la compresión permisible, P_a, para la columna descrita en el problema de ejemplo 11–4 excepto que se instalará con ambos extremos fijos en lugar de articulados.

Solución Calcular el peso de una masa de concreto.

Relación de esbeltez real $= SR = KL/r = (0.65)(3050\text{ mm}/19.8\text{ mm}) = 100$
Del Problema de ejemplo 11–4, *relación de esbeltez de transición* $= SR_t = 123.7$
Esfuerzo de pandeo crítico elástico $= s_e = \pi^2 E/(SR)^2 = \pi^2(200\,000\text{ MPa})/(100)^2$

$$s_e = 197.4\text{ Mpa}$$

Entonces la columna es corta y la ecuación (11–10) se aplica a continuación.
El exponente $d = s_y/s_e = 290\text{ MPa}/197.4\text{ MPa} = 1.469$ y

$$s_{cr} = [0.658^d]\,s_y = [0.658^{1.469}](290\text{ MPa}) = 156.8\text{ MPa}$$

La *resistencia al pandeo nominal* $= P_n = s_{cr} A_g = (156.8\text{ N/mm}^2)(1570\text{ mm}^2 = 246.2\text{ kN}$
Con la ecuación (11–13),
la *resistencia a la compresión permisible* $= P_a = P_n/1.67 = 246.2\text{ kN}/1.67 = 147.4\text{ kN}$

Comentario La resistencia a la compresión permisible resultante para la columnas con extremos fijos es 2.15 veces mayor que el diseño de columna con extremos de pasador.

11–12 ESPECIFICACIONES DE LA ALUMINUM ASSOCIATION

La publicación de la Aluminum Association, *Aluminum Design Manual* (vea la referencia 1), define esfuerzos permisibles para columnas para cada una de varias aleaciones y sus tratamientos térmicos. Se dan tres ecuaciones diferentes para columnas cortas, intermedias y largas definidas con respecto a límites de esbeltez. Las ecuaciones son de la forma

$$\frac{P_a}{A} = \frac{s_y}{FS} \quad \text{(columnas cortas)} \tag{11–11}$$

$$\frac{P_a}{A} = \frac{B_c - D_c(L_e/r)}{FS} \quad \text{(columnas intermedias)} \tag{11–11}$$

$$\frac{P_a}{A} = \frac{\pi^2 E}{FS(L_e/r)^2} \quad \text{(columnas largas)} \tag{11–11}$$

En los tres casos, se recomienda $FS = 1.95$ para edificios y estructuras similares. El análisis de columnas cortas asume que no se pandearan y que la seguridad depende de la resistencia a

la cedencia del material. La ecuación (11–16) para columnas largas es la fórmula de Euler con un factor de seguridad aplicado. La fórmula para columnas intermedias [ecuación (11–15)] depende de las constantes de pandeo B_c y D_c, las cuales son funciones de la resistencia a la cedencia de la aleación de aluminio y del módulo de elasticidad. La división entre columnas largas e intermedias es similar a la constante C_c previamente utilizada en este capítulo.

Las siguientes son ecuaciones específicas para la aleación 6061–T6 utilizada en estructuras de edificios en las formas de lámina, placa, extrusiones, perfiles estructurales, varilla, barras, tubería y tubos.

Columnas cortas y columnas intermedias: $0 < L_e/r < 66$

$$\frac{P_a}{A} = \left(20.2 - 0.126\frac{L_e}{r}\right)\text{ksi} \qquad \textbf{(11–17a)}$$

$$\frac{P_a}{A} = \left(139 - 0.869\frac{L_e}{r}\right)\text{MPa} \qquad \textbf{(11–17b)}$$

Columnas largas: $L_e/r > 66$

$$\frac{P_a}{A} = \frac{51\,000}{(L_e/r)^2}\text{ ksi} \qquad \textbf{(11–18a)}$$

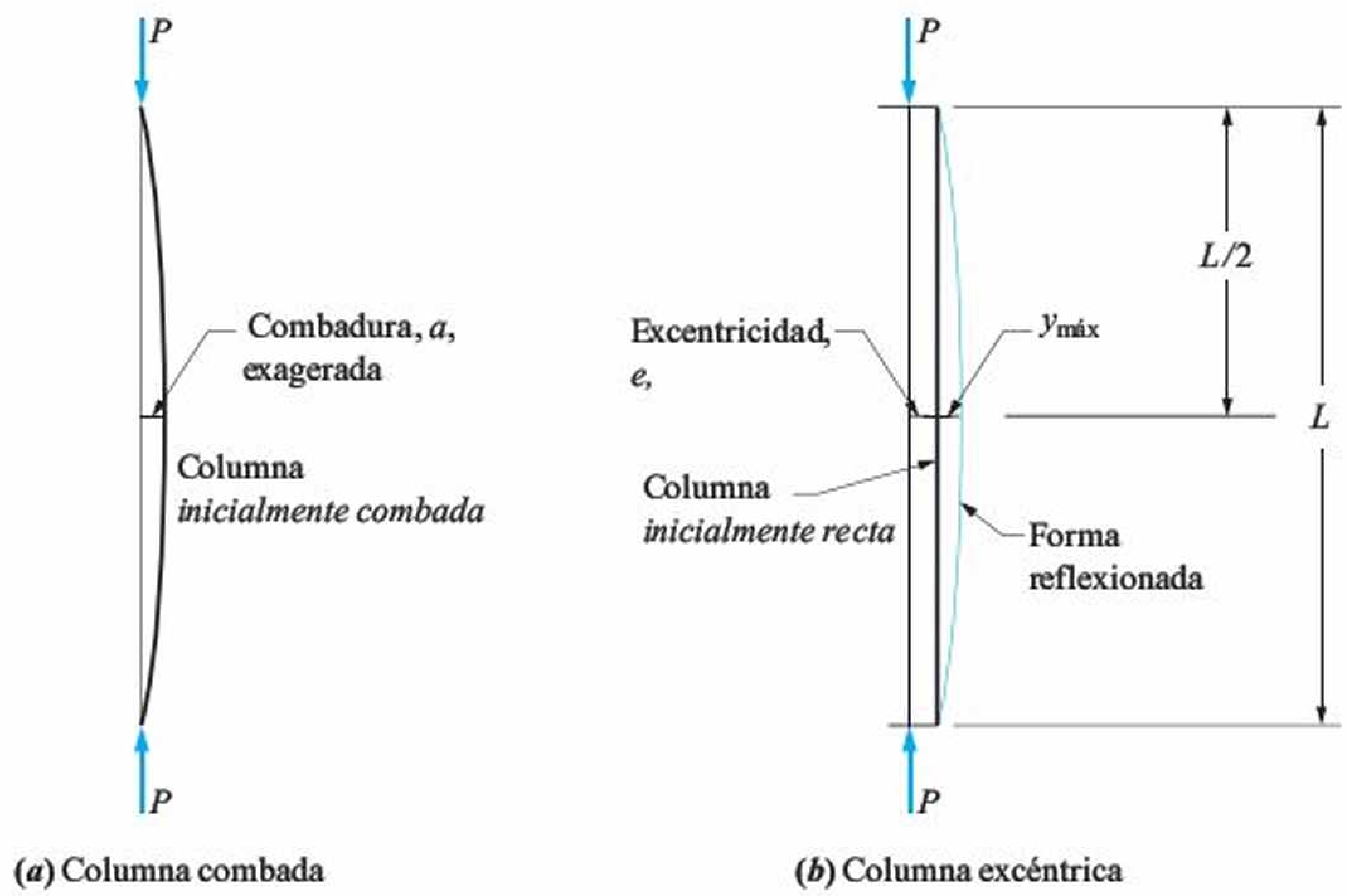
$$\frac{P_a}{A} = \frac{352\,000}{(L_e/r)^2}\text{ MPa} \qquad \textbf{(11–18b)}$$

Consulte la referencia 1 por lo que se refiere a esfuerzos de diseño para otras aleaciones de aluminio.

11–13 COLUMNAS CON CARGAS NO CENTRADAS

Todos los métodos de análisis estudiados hasta ahora en este capítulo se han limitado a cargas de compresión que actúan alineadas con el eje centroidal de la sección transversal de la columna. También, se supuso que el eje de la columna está perfectamente recto antes de la aplicación de las cargas. Utilizamos el término *columna centralmente cargada recta* para describir un caso como ése.

FIGURA 11–14 Ilustración de columnas combadas y excéntricas.



Muchas columnas reales violan estas suposiciones hasta cierto grado. La figura 11–14 muestra dos condiciones como ésas. Si una columna inicialmente está *arqueada*, la fuerza de compresión aplicada en la columna tiende a flexionarla además de pandearla y la falla ocurre con una carga menor que la pronosticada por la ecuación utilizada hasta ahora en este capítulo. Una *columna excéntricamente cargada* es una en la que existe una desviación premeditada de la línea de acción de la carga de compresión con respecto a su eje centroidal. En este caso, de nuevo existe un cierto esfuerzo de flexión además del esfuerzo de compresión axial que tiende a provocar pandeo.

Columnas combadas. La fórmula para columnas combadas permite una combadura inicial, a, que se tiene que considerar (consulte las referencias 4, 5 y 6):

Fórmula para columnas combadas

$$P_a^2 - \frac{1}{N}\left[s_y A + \left(1 + \frac{ac}{r^2}\right)P_{cr}\right]P_a + \frac{s_y A P_{cr}}{N^2} = 0 \qquad \textbf{(11–19)}$$

donde c = distancia del eje neutro de la sección transversal con respecto al cual ocurre la flexión a su borde externo

P_{cr} se define como la carga crítica calculada con la *fórmula de Euler*.

Aun cuando esta fórmula puede volverse cada vez más imprecisa para columnas cortas, no es apropiado cambiar a la fórmula de Johnson como lo es para columnas rectas.

La fórmula para columnas combadas es cuadrática con respecto a la carga permisible P_a. La evaluación de todos los términos constantes de la ecuación (11–19) produce una ecuación de la forma

$$P_a^2 + C_1 P_a + C_2 = 0$$

Entonces, la solución de la ecuación cuadrática es

$$P_a = 0.5\left[-C_1 - \sqrt{C_1^2 - 4C_2}\right]$$

Se selecciona la menor de las dos soluciones posibles.

Problema de ejemplo 11–6 Una columna de 32 in de longitud tiene ambos extremos de pasador. Su sección transversal es circular de 0.75 in de diámetro y su combadura inicial es de 0.125 in. El material es acero AISI 1040 laminado en caliente. Calcule la carga permisible para un factor de diseño de 3.

Solución

Objetivo: Especificar la carga permisible para la columna.

Datos: Sección transversal sólida: $D = 0.75$ in; $L = 32$ in; use $N = 3$.
Ambos extremos son de pasador. Combadura inicial = $a = 0.125$ in.
Material: acero AISI 1040 laminado en caliente.

Análisis: Use la ecuación (11–19). Evalúe primero C_1 y C_2. Luego resuelva la ecuación cuadrática para P_a.

Resultados

$$s_y = 60\,000 \text{ psi}$$
$$A = \pi D^2/4 = (\pi)(0.75)^2/4 = 0.442 \text{ in}^2$$
$$r = D/4 = 0.75/4 = 0.188 \text{ in}$$

$$c = D/2 = 0.75/2 = 0.375 \text{ in}$$

$$KL/r = [(1.0)(32)]/0.188 = 171$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EA}{(KL/r)^2} = \frac{\pi^2(30\,000\,000)(0.442)}{(171)^2} = 4476 \text{ lb}$$

$$C_1 = \frac{-1}{N}\left[s_y A + \left(1 + \frac{ac}{r^2}\right)P_{cr}\right] = -12\,311$$

$$C_2 = \frac{s_y A P_{cr}}{N^2} = 1.319 \times 10^7$$

La ecuación cuadrática es, por consiguiente,

$$P_a^2 - 12\,311 P_a + 1.319 \times 10^7 = 0$$

Comentario Con ésta, $P_a = 1186$ lb es la carga permisible.

La figura 11–15 muestra la solución del problema de ejemplo 11–6 con una hoja de cálculo. Si bien su apariencia es similar a la de la hoja de cálculo de análisis de columna anterior, los detalles van después de los cálculos necesarios para resolver la ecuación (11–19). Abajo a la izquierda, se requieren dos valores especiales: (1) la combadura a y (2) la distancia c del eje neutro a la cara externa de la sección transversal. A la mitad de la parte del lado derecho se dan algunos valores intermedios utilizados en la ecuación (11–19): C_1 y C_2 tal como se definieron en la solución del problema de ejemplo 11–6. El resultado, la carga permisible, P_a, aparece abajo a la derecha de la hoja de cálculo. Arriba de ella, para propósitos de comparación, se da el valor calculado de la carga de pandeo crítica para una columna recta del mismo

FIGURA 11–15
Hoja de cálculo para el análisis de columnas combadas – unidades del sistema inglés.

ANÁLISIS DE COLUMNAS COMBADAS	*Datos del:* Problema de ejemplo 11-6
Resuelva la ecuación 11-19 para la carga permisible	
Ingreselos valores de las variables en *cursivas en los cuadros de texto sombreados*	Unidades del sistema inglés compatibles
Valores a ser ingresados:	**Valores calculados:**
Longitud y fijación de los extremos	
Longitud de la columna, L = 32 *in*	
Fijación de los extremos, K = 1	Ec. de longitud, L_e = *KL* = 32.0 in
Propiedades del material:	
Resistencia a la cedencia, s_y *60000 psi*	
Módulo de elasticidad, E = *3.00E+07 psi*	Constante de columna, C_c = 99.3
Propiedades de la sección transversal:	Carga de pandeo de Euler = 4476 lb
[Nota: Ingrese *r* o calcule *r* = sqrt(*I*/*A*)]	
[Siempre ingrese el área]	C_1 en la ec. 11-19 = –12311
[Ingrese cero para *I* o *r* si no se utiliza]	C_2 en la ec. 11-19 = 1.319×10^7
Área, A = *0.442 in*^{2}	
Momento de inercia, I = *0 in*^{4}	
O	
Radio de giro, r = *0.188 in*	Relación de esbeltez, *KL*/*r* = 170.7
Valores para la ecuación 11-19:	La columna es: **larga**
Combadura inicial = a = *0.125 in*	***Columna recta***
Dist. del eje neutro a cara externa = c = *0.375 in*	**Carga de pandeo crítica =** ***4476 lb***
Factor de diseño	***Columna combada***
Factor de diseño con la carga, N = 3	**Carga permisible =** ***1186 lb***

diseño. Observe que este procedimiento de solución es más preciso para columnas largas. Si el análisis indica que la columna es *corta* y no *larga*, el diseñador deberá tomar nota de cuán corta es comparando la relación de esbeltez, KL/r, con la constante de columna, C_c. Si la columna es bastante corta, el diseñador no deberá confiar en la precisión del resultado obtenido con la ecuación (11–19).

Columnas excéntricamente cargadas. Una carga *excéntrica* es una que se aplica lejos del eje centroidal de la sección transversal de la columna, como se muestra en la figura 11–14(b). Tal carga produce flexión, además de acción de columna, que produce la forma reflexionada mostrada en la figura. El esfuerzo máximo en la columna reflexionada ocurre en las fibras más externas de la sección transversal, a la mitad de la columna, donde ocurre la deflexión máxima, $y_{máx}$. Denotemos el esfuerzo en este punto como $\sigma_{L/2}$. Entonces, con cualquier carga aplicada, P,

Fórmula de la secante para columnas excéntricamente cargadas

$$\sigma_{L/2} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{KL}{2r}\sqrt{\frac{P}{AE}}\right)\right] \tag{11–20}$$

(consulte la referencia 6). Observe que este esfuerzo *no es* directamente proporcional a la carga. Cuando evalúe la secante en esta fórmula, observe que su argumento entre paréntesis está en *radianes*. También, como la mayoría de las calculadoras no cuentan con la función secante, recuerde que ésta es igual a 1/coseno.

Para propósitos de diseño, nos gustaría especificar un factor de diseño N, que se pueda aplicar a la *carga de falla* similar a la definida para columnas rectas centralmente cargadas. Sin embargo, en este caso, se pronostica que la falla ocurre cuando el esfuerzo máximo en la columna excede la resistencia a la cedencia del material. Definamos ahora un nuevo término, P_y, la carga aplicada a la columna excéntricamente cargada cuando el esfuerzo máximo es igual a la resistencia a la cedencia. La ecuación (11–20) se vuelve entonces

$$s_y = \frac{P_y}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{KL}{2r}\sqrt{\frac{P_y}{AE}}\right)\right]$$

Ahora, si definimos la *carga permisible* como

$$P_a = P_y/N$$

o

$$P_y = NP_a$$

Ecuación de diseño de columnas excéntricamente cargadas

esta ecuación se transforma en

$$\text{Requerida}\qquad s_y = \frac{NP_a}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{KL}{2r}\sqrt{\frac{NP_a}{AE}}\right)\right] \tag{11–21}$$

Flexión máxima en una columna excéntricamente cargada

Esta ecuación no puede resolverse para N o P_a. Por consiguiente, se requiere una solución iterativa, como se verá en el problema de ejemplo 11–7.

Otro factor crítico puede ser la cantidad de flexión del eje de la columna a causa de la carga excéntrica:

$$y_{máx} = e\left[\sec\left(\frac{KL}{R}\sqrt{\frac{P}{AE}}\right) - 1\right] \tag{11–22}$$

Observe que el argumento de la secante es el mismo que se utilizó en la ecuación (11–20).

Problema de ejemplo 11–7

Para la columna del Problema de ejemplo 11–6, calcule el esfuerzo y flexión máximos si se aplica una carga de 1075 lb con una excentricidad de 0.75 in.

Solución

Objetivo: Calcular el esfuerzo y la flexión para la columna excéntricamente cargada.

Datos: Los datos del problema de ejemplo 11–6, pero con excentricidad $= e = 0.75$ in.
Sección transversal circular sólida: $D = 0.75$ in; $L = 32$ in.
Ambos extremos son de pasador: $KL = 32$ in; $r = 0.188$ in; $c = D/2 = 0.375$ in.
Material: acero AISI 1040 laminado en caliente; $E = 30 \times 10^6$ psi, $s_y = 60\,000$ psi

Análisis: Use la ecuación (11–20) para calcular el esfuerzo máximo. En seguida utilice la ecuación (11–22) para calcular la flexión máxima.

Resultados: Todos los términos se evaluaron con anterioridad. Entonces el esfuerzo máximo se calcula con la ecuación (11–20):

$$\sigma_{L/2} = \frac{1075}{0.422}\left[1 + \frac{(0.75)(0.375)}{(0.188)^2}\sec\left(\frac{32}{2(0.188)}\sqrt{\frac{1075}{(0.422)(30 \times 10^6)}}\right)\right]$$

$$\sigma_{L/2} = 29\,300 \text{ psi}$$

La flexión máxima se calcula con la ecuación (11–22):

$$y_{máx} = 0.75\left[\sec\left(\frac{32}{2(0.188)}\sqrt{\frac{1075}{(0.442)(30 \times 10^6)}}\right) - 1\right] = 0.293 \text{ in}$$

Comentario: El esfuerzo máximo es de 29 300 psi a la mitad de la columna. La flexión allí es de 0.293 in.

Problema de ejemplo 11–8

El esfuerzo en la columna calculado en el problema de ejemplo 11–7 parece elevado para el acero AISI 1040 laminado en caliente. Rediseñe la columna para lograr un factor de diseño de por lo menos 3. Use sólo los tamaños preferidos dados en el apéndice A–2.

Solución

Objetivo: Rediseñar la columna excéntricamente cargada del problema de ejemplo 11–7 para reducir el esfuerzo y lograr un factor de diseño de por lo menos 3.

Datos: Datos de los problemas de ejemplo 11–6 y 11–7.

Análisis: Use un diámetro mayor. Use la ecuación (11–21) para calcular la resistencia requerida. Luego compárela con la resistencia del acero AISI 1040 laminado en caliente. Itere hasta que el esfuerzo sea satisfactorio.

Resultados: El apéndice 3 da el valor de la resistencia a la cedencia del acero AISI 1040 laminado en caliente como 60 000 psi. Si decidimos conservar el mismo material, deberemos incrementar las dimensiones de la sección transversal de la columna para reducir el esfuerzo. Se puede utilizar la ecuación (11–21) para evaluar una alternativa de diseño.

El objetivo es determinar valores adecuados de A, c y r para la sección transversal de modo que $P_a = 1075$ lb; $N = 3$; L_e 0 32 in; $e = 0.75$ in; y el valor de todo el lado derecho la ecuación es menor que 60 000 psi. El diseño original tenía una sección transversal circular de 0.75 in de diámetro. Tratemos de incrementar el diámetro a $D = 1.00$ in. Entonces

$$A = \pi D^2/4 = \pi(1.00 \text{ in})^2/4 = 0.785 \text{ in}^2$$
$$r = D/4 = (1.00 \text{ in})/4 = 0.250 \text{ in}$$
$$r^2 = (0.250 \text{ in})^2 = 0.0625 \text{ in}^2$$
$$c = D/2 = (1.00 \text{ in})/2 = 0.50 \text{ in}$$

Ahora llamemos S'_y al lado derecho de la ecuación (11–21). Entonces

$$s'_y = \frac{3(1075)}{0.785}\left[1 + \frac{(0.75)(0.50)}{(0.0625)}\sec\left(\frac{32}{2(0.250)}\sqrt{\frac{(3)(1075)}{(0.785)(30 \times 10^6)}}\right)\right]$$

$$s'_y = 37\,740 \text{ psi} = \text{valor requerido de } s_y$$

Este valor es mucho menor que el valor de $s_Y = 60\,000$ psi para el acero dado y da el factor de diseño de 3.0 o mayor. Si probamos el único tamaño preferido menor del apéndice A–2 (7/8 in = 0.875 in), el s_y requerido es de 65 825 psi, y es un valor demasiado elevado. Por consiguiente, especifique $D = 1.00$ in.

Ahora podemos evaluar la flexión máxima esperada con el nuevo diseño con la ecuación (11–22):

$$y_{\text{máx}} = 0.75\left[\sec\left(\frac{32}{2(0.250)}\sqrt{\frac{1075}{(0.785(30 \times 10^6)}}\right) - 1\right]$$

$$y_{\text{máx}} = 0.076 \text{ in}$$

Comentario El diámetro de 1.00 in es satisfactorio. La flexión máxima de la columna es de 0.076 in.

La figura 11–16 muestra la solución del problema de la columna excéntrica del problema de ejemplo 11–8 con una hoja de cálculo para evaluar las ecuaciones (11–21) y (11–22). Es un auxiliar de diseño que facilita la iteración requerida para determinar una geometría aceptable para una columna que soporta una carga especificada con factor de diseño deseado. Observe que los datos están en unidades del sistema inglés. Abajo a la izquierda de la hoja de datos, el diseñador ingresa los datos requeridos para las ecuaciones (11–21) y (11–22, junto con los

FIGURA 11–16 Hoja de cálculo para el análisis de columnas excéntricas – unidades del sistema inglés.

ANÁLISIS DE COLUMNAS EXCÉNTRICAS	*Datos del:* Problema de ejemplo 11-8
Resuelva la ecuación 11-21 para el esfuerzo de diseño y la ecuación 11-22 para la flexión máxima	
Ingrese los valores de las variables en *cursivas* en *los cuadros de texto sombreados*	Unidades del sistema inglés compatibles
Valores a ser ingresados:	**Valores calculados:**
Longitud y fijación de los extremos: *Longitud de la columna, L = 32 in* *Fijación de los extremos, K = 1*	Ec. de longitud, L_e = *KL* = 32.0 in
Propiedades del material: *Resistencia a la cedencia, s_y = 60000 psi* *Módulo de elasticidad, E = 3.00E+07 psi*	Constante de columna, C_c = 99.3
Propiedades de la sección transversal: [Nota: Ingrese *r* o calcule *r* = sqrt(*I/A*)] [Siempre ingrese el área] [Ingrese cero para *I* o *r* si no se utiliza] *Área, A = 0.785 in²* *Momento de inercia, I = 0 in⁴* **O**	**Argumento de sec =** 0.79 para resistencia **Valor de la secante =** 1,3654 **Argumento de sec =** 0.432 para flexión **Valores de la sec =** 1,1014
Radio de giro, r = 0.250 in	Relación de esbeltez, *KL/r* = 128.0
Valores para las ecuaciones 11-21 y 11-22: *Excentricidad, e = 0.75 in* *Dist. del eje neutro a cara externa, c = 0.5 in* *Carga permisible, P_a = 1075 lb*	La columna es: ***larga*** **RESULTADOS FINALES** **Resistencia a la cedencia requerida = *37,764 psi*** ***Debe ser menor que la resistencia a la cedencia real:*** ***S_y = 60,000 psi***
Factor de diseño *Factor de diseño con la carga, N = 3*	***Flexión máxima, $y_{máx}$ = 0.076 in***

demás datos mencionados para hojas de cálculo de análisis de columnas anteriores. La sección **"FINAL RESULTS"**, abajo a la derecha, muestra el valor calculado de la resistencia a la cedencia requerida del material para la columna y lo compara con el valor ingresado por el diseñador cerca de la parte superior izquierda. El diseñador debe asegurarse de que el valor real es mayor que el valor calculado probando diferentes valores del diámetro. La máxima parte del lado derecho de la hoja de cálculo da la flexión máxima calculada que ocurre a la mitad de la columna.

REFERENCIAS

1. Aluminum Association, *Aluminum Design Manual*, Washington, DC., 2005.
2. American Institute of Steel Construction, *Steel Construction Manual*, 9ª ed., Chicago, IL, 2005.
3. Mott, Robert L., *Machine Elements in Mechanical Design*, 4ª ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2004.
4. Spotts, M. F., T. E. Skoup y L. E. Hornberger, *Design of Machine Elements*, 8ª ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2004.
5. Timoshenko, S. *Strenght of Materials*, Vol. 2, 2ª ed., Van Nostrand Reinhold, Nueva York, 1941.
6. Timoshenko, S. y J. M. Gere. *Theory of Elastic* Stability, 2ª ed., McGraw–Hill, Nueva York, 1961.

PROBLEMAS

11–1.M Determine la carga crítica para una columna con extremos artiuculados hecha con una barra circular de acero AISI 1020 laminado en caliente. El diámetro de la barra es de 20 mm y su longitud de 800 mm.

11–2.M Repita el problema 11–1 con la longitud de 350 mm.

11–3.M Repita el problema 11–1 con la barra hecha de aluminio 6061–T6 en lugar de acero.

11–4.M Repita el problema 11–1 con los extremos fijos en lugar de extremos de pasador.

11–5.M Repita el problema 11–1 con una barra cuadrada de acero con la misma área de sección transversal que la barra circular.

11–6.M Para un tubo de acero PIPE 25STD (cédula 40 de 1 in) utilizado como columna, determine la carga critica si tiene que ser 2.05 m de longitud. El material es similar al acero AISI 1020 laminado en caliente. Calcule la carga crítica para cada una de las cuatro condiciones de apoyo descritas en la figura 11–3.

11–7.M La sección transversal de una barra rectangular de acero de 210 mm de longitud es de 12 mm por 25 mm. Suponiendo que los extremos de la barra son articulados y que es de acero AISI 1141 OQT 1300, calcule la carga crítica cuando la barra se somete a una carga de compresión axial.

11–8.M Calcule la carga permisible sobre una viga S150 × 18.6 (S6 × 12.5) utilizada como columna de 5.45 m de longitud con extremos fijos. El material es acero ASTM A36. Use la fórmula del AISC.

11–9.E Se va a diseñar una plataforma elevada de 20 ft por 40 ft para que soporte una carga uniforme de 75 libras por pie cuadrado. Se propone se utilice un tubo de acero cédula 40 de 3 in estándar como columna para soportar la plataforma a 8 ft sobre el nivel del suelo con la base fija y la parte superior libre. ¿Cuántas columnas se requerirían si se desea un factor de diseño de 3.0? Use $s_y = 30\,000$ psi.

11–10.M Una viga I de aluminio 6061–T6, I254 × 12.87(I10 × 8.646), se utiliza como columna con dos extremos de pasador. Es de 2.80 m de longitud. Con las ecuaciones (11.17b) y (11–18b), calcule la carga permisible sobre la columna.

11–11.M Calcule la carga permisible para la columna descrita en el problema 11–10 si la longitud es de sólo 1.40 m.

11–12.E Se utiliza como columna una viga W8 × 10 de acero ASTM A992 de 12.50 ft de longitud. Sus extremos están afianzados de tal modo que L_e es aproximadamente de $0.80L$. Con las fórmulas del AISC, determine la carga permisible sobre la columna.

11–13.E Una columna se compone de cuatro ángulos, como se muestra en la figura P11–13. Los ángulos se mantienen unidos con barras de sujeción, las cuales pueden ser ignoradas en el análisis de las propiedades geométricas. Utilizando la ecuación de Euler o la ecuación de Johnson con $L_e = L$ y un factor de diseño de 3.0, calcule la carga permisible sobre la columna si es de 18.4 ft de longitud. Los ángulos son de acero ASTM A36.

11–14.E Calcule la carga permisible sobre una columna compuesta que tiene la sección transversal mostrada en la figura P11–14. Use $L_e = L$ y aluminio 6061–T6. La columna es de 10.5 ft de longitud. Use las fórmulas de la Aluminum Association.

11–15.C La figura P11–15 muestra una viga apoyada en sus extremos por juntas de pasador. La barra inclinada en la parte superior soporta el extremo derecho de la viga, pero también aplica una fuerza de compresión en la viga. ¿Sería satisfactoria una viga S150 × 18.6 (S6 × 12.5) estándar en esta aplicación si soporta 1320 kg en su extremo? La viga es de acero ASTM A36.

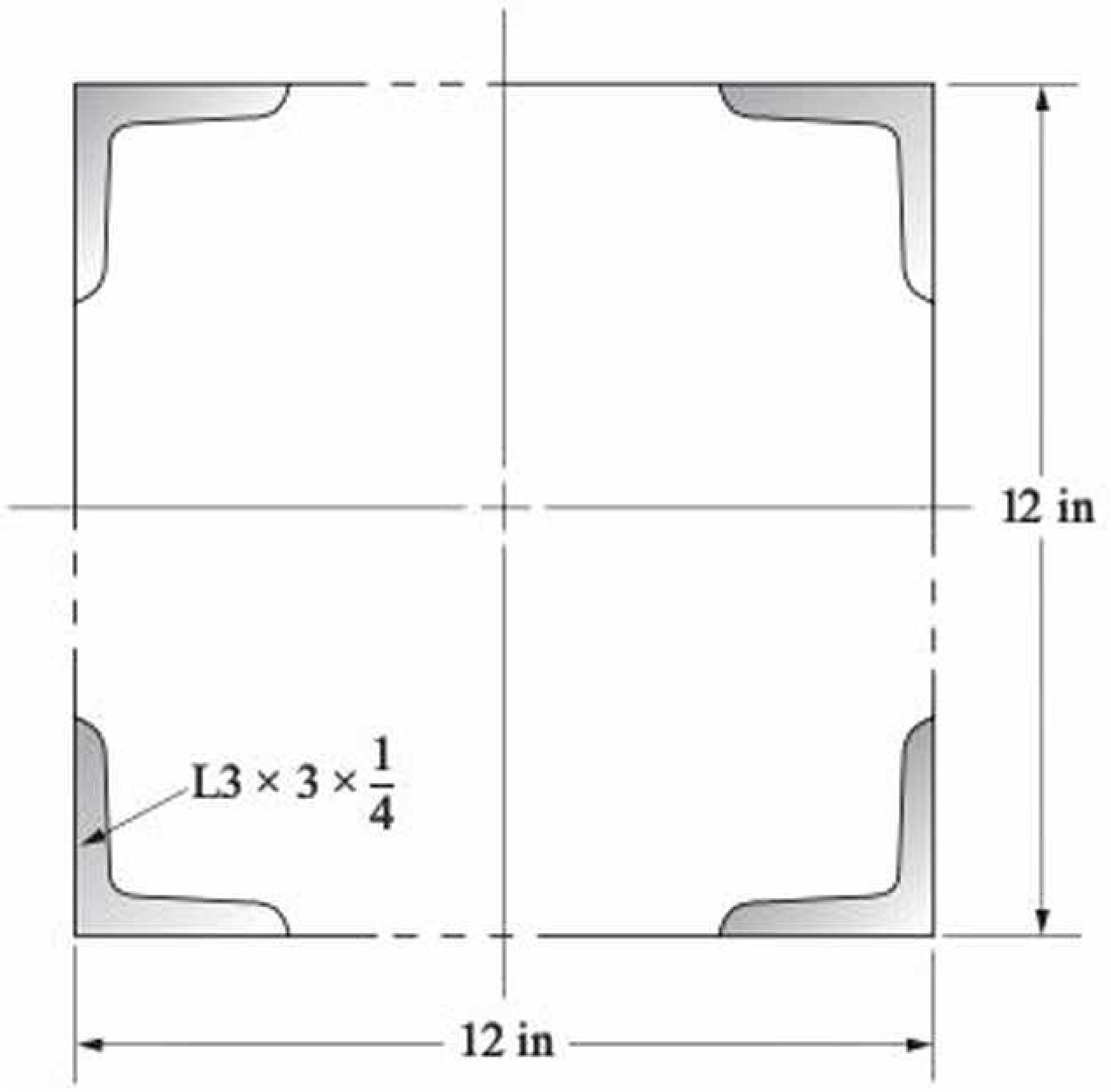


FIGURA P11–13 Sección de columna compuesta del Problema de ejemplo 11–13.

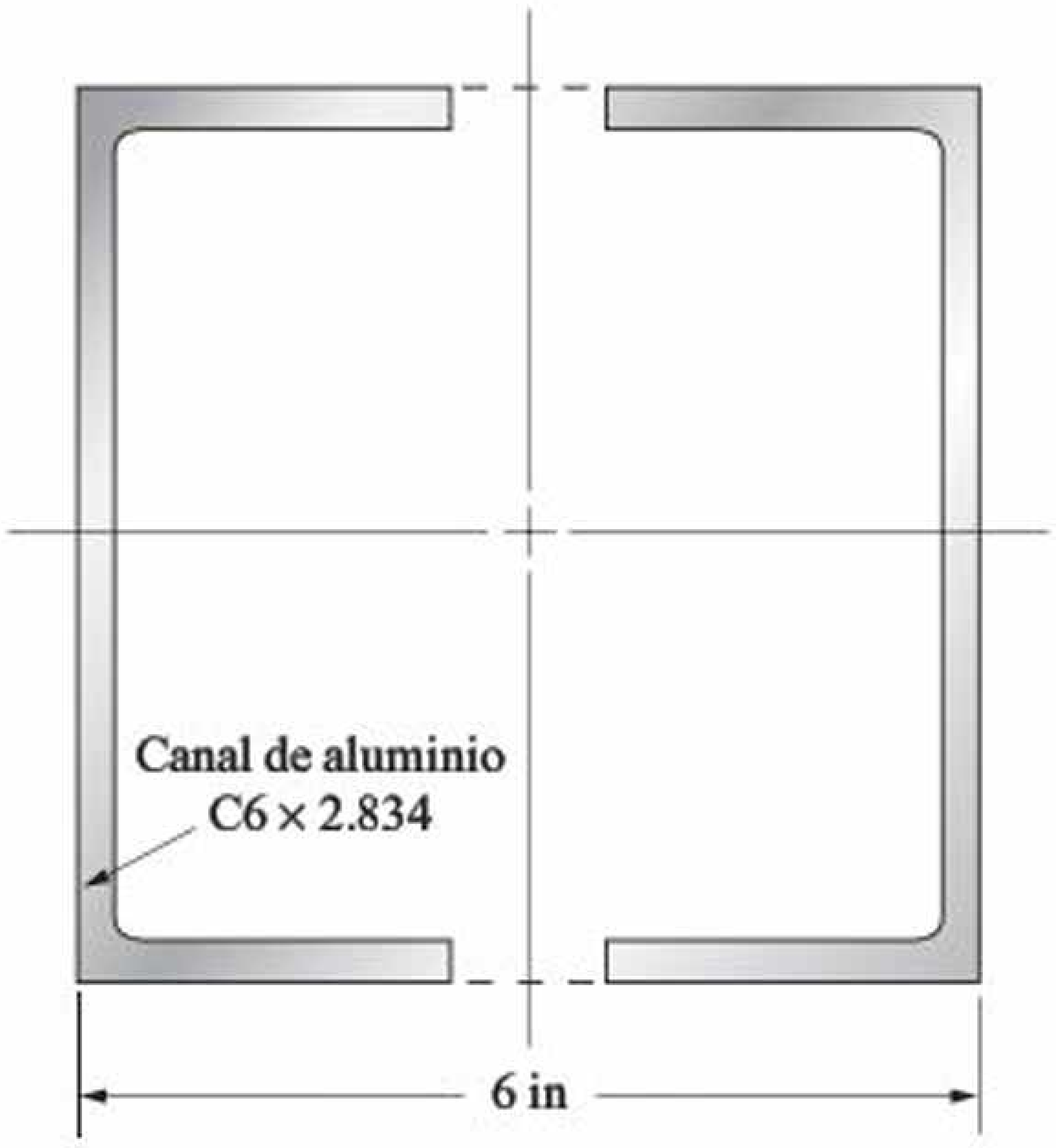


FIGURA P11–14 Sección transversal de columna compuesta del problema 11–14.

11–16.E El eslabón de un mecanismo de 8.40 de largo, tiene una sección transversal rectangular de ¼ in × ⅛ in y se somete a una carga de compresión de 50 lb. Si los extremos del eslabón son de pasador, ¿es seguro contra pandeo? Se utiliza acero AISI 1040 en el eslabón?

11–17.M El pistón de un amortiguador es de 12 mm de diámetro y su longitud máxima afuera del cuerpo del amortiguador es de 190 mm. La biela es de acero AISI 1141 OQT. Considere que un extremo es de pasador y el otro fijo. ¿Qué carga sobre la biela sería de un tercio de la carga de pandeo crítica?

11–18.E Una barra estabilizadora circular de un sistema de suspensión automotriz se carga a compresión. Se somete a una carga axial de 1375 lb y está soportada en sus extremos por conexiones de pasador, a 28.5 in uno de otro. ¿Sería satisfactoria una barra de acero AISI 1020 laminado en caliente de 0.800 in de diámetro para esta aplicación?

11–19.E Se va a diseñar una estructura para que soporte una tolva de grandes dimensiones sobre una máquina de extrusión de plástico, como se ilustra en la figura P11–19. La tolva tiene que ser soportada por cuatro columnas las que comparten la carga por igual. La estructura se refuerza con riostras cruzadas. Se propone que las columnas sean de tubo cédula 40 estándar de 2 in. Se empotrarán en el suelo. Debido al arriostramiento en cruz, el extremo superior de cada columna se comporta como si estuviera redondeado o fuera de pasador. El material del tubo es acero AISI 1020 laminado en caliente. La tolva se diseña para que contenga 20 000 lb de plástico en polvo. ¿Son adecuadas las columnas propuestas para esta carga?

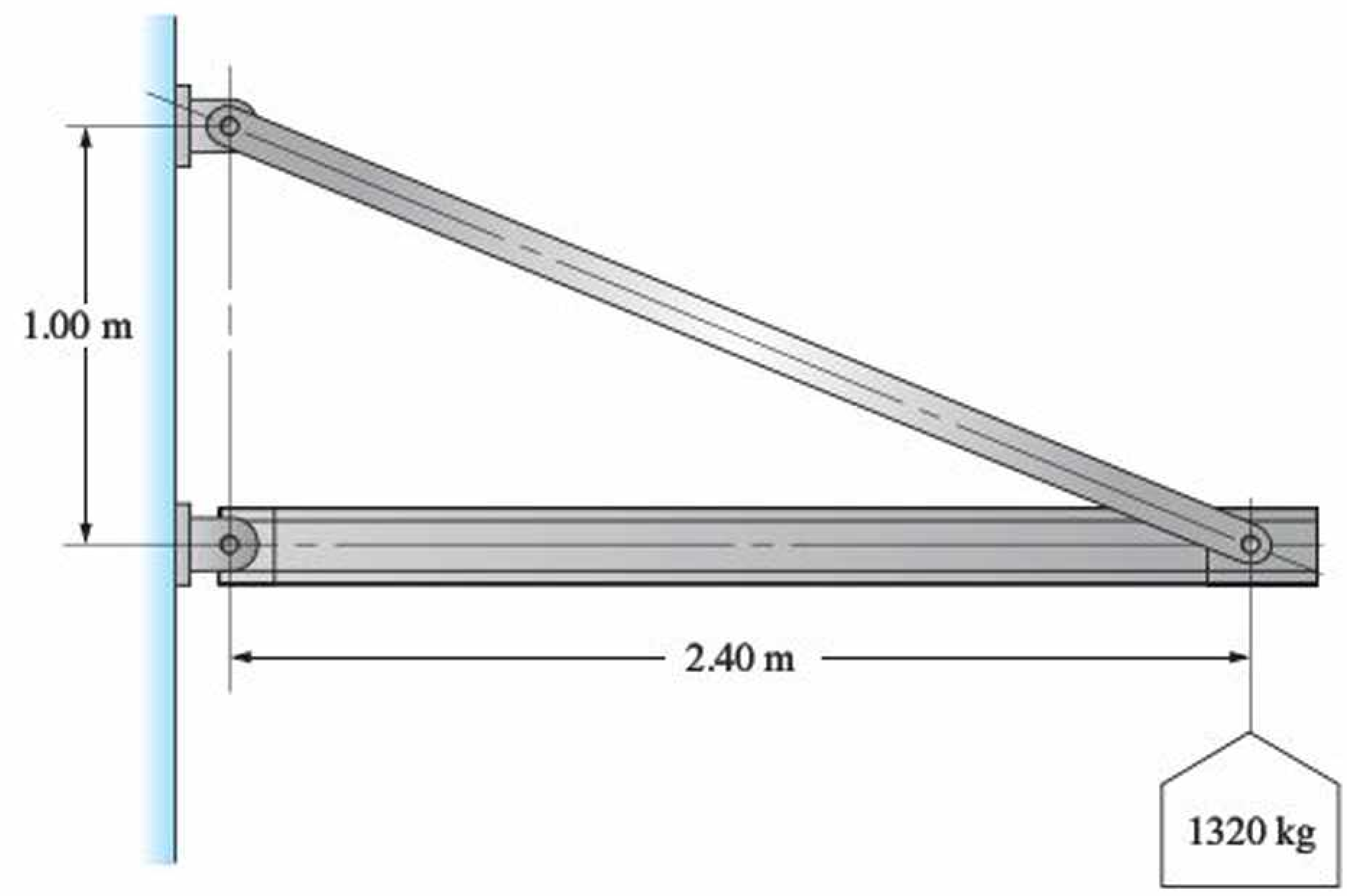


FIGURA P11–15 Estructura del problema 11–15.

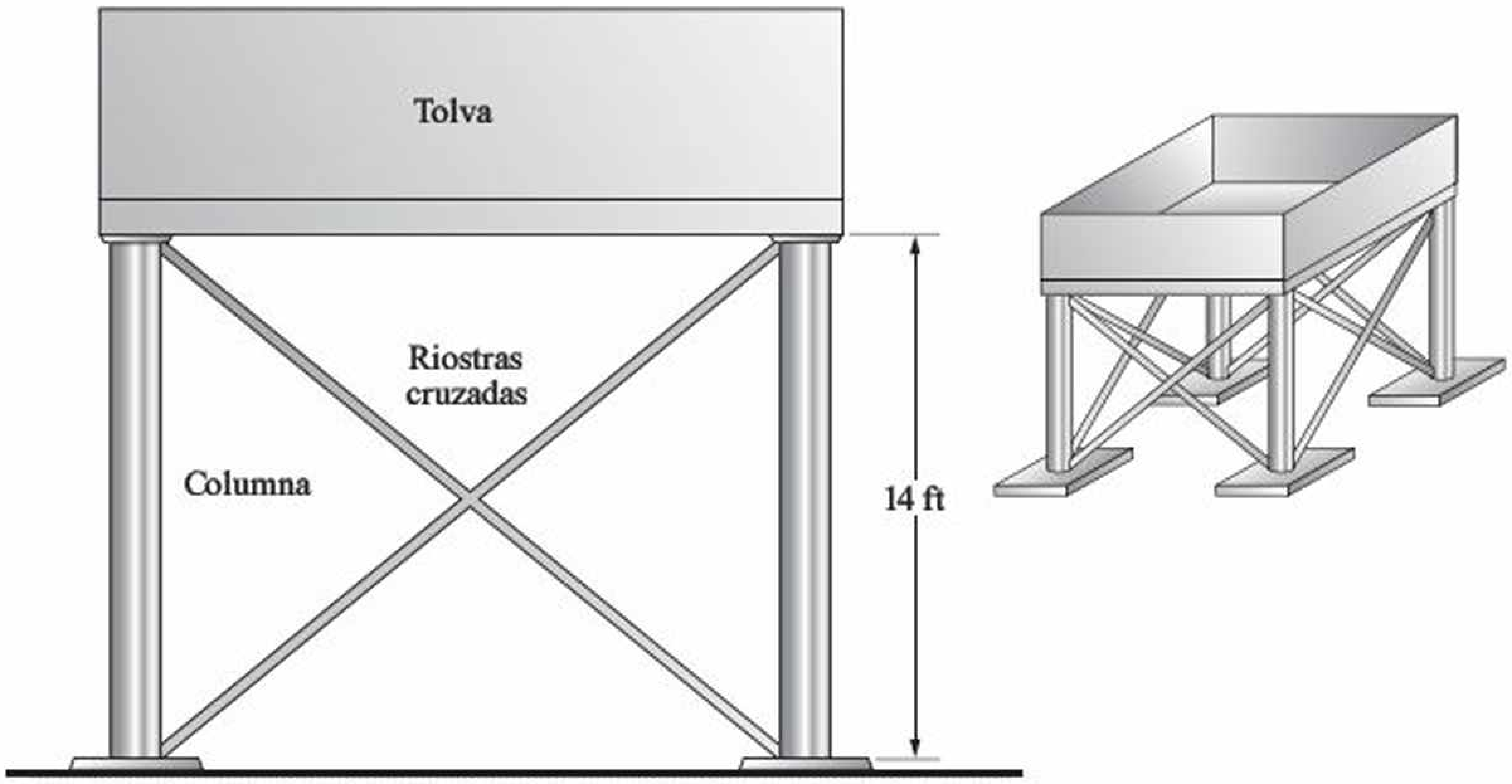
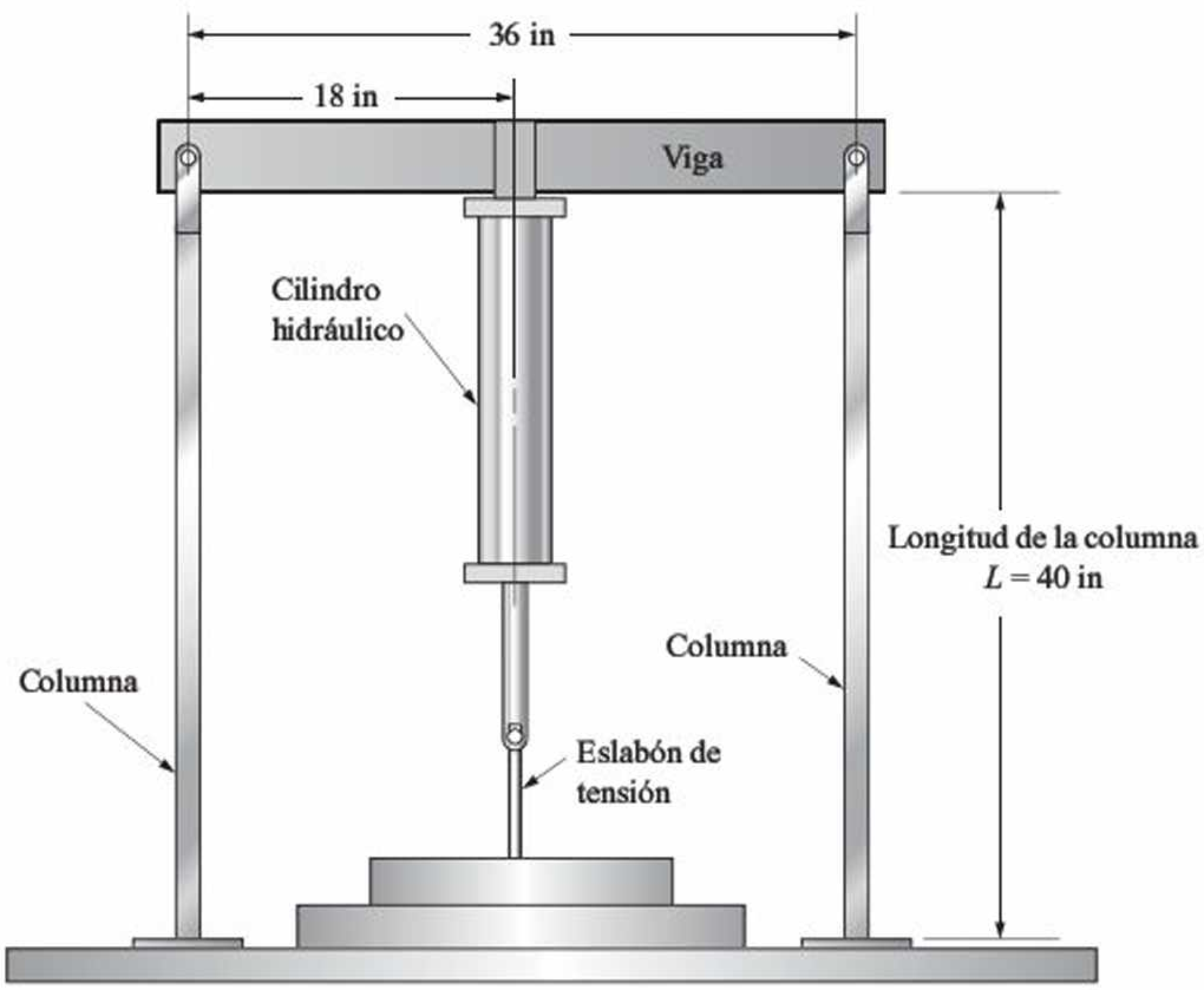


FIGURA P11–19 Tolva de los problemas 11–19 y 11–20.

11–20.E Analice cómo se vería afectado el diseño de la columna del problema 11–19 si un descuidado conductor de un montacargas embiste las riostras cruzadas y las rompe.

11–21.E El ensamble mostrado en la figura P11–21 se utiliza para probar piezas jalándolas repetidamente con el cilindro hidráulico, el cual es capaz de ejercer una fuerza máxima de 3000 lb. Las piezas del ensamble de interés en este caso son las columnas. Se propone que las dos columnas sean barras cuadradas de ¼ in por lado, de aleación de aluminio 6061–T6. Las columnas tienen su base empotrada y su extremo superior libre. Determine la aceptabilidad de la propuesta.

11–22.E La figura P11–22 muestra el diseño propuesto de una prensa hidráulica utilizada para compactar desechos sólidos. El pistón de la derecha ejerce una fuerza de 12 500 lb por conducto de la biela al ariete. La biela es recta y está centralmente cargada. Es de acero AISI 1040 WQT 1100. Calcule el factor de diseño resultante para este diseño.



Nota: El cilindro jala hacia arriba el eslabón de tensión y hacia abajo la viga con una fuerza de 3000 lb.

FIGURA P11–21 Dispositivo de prueba del problema 11–21.

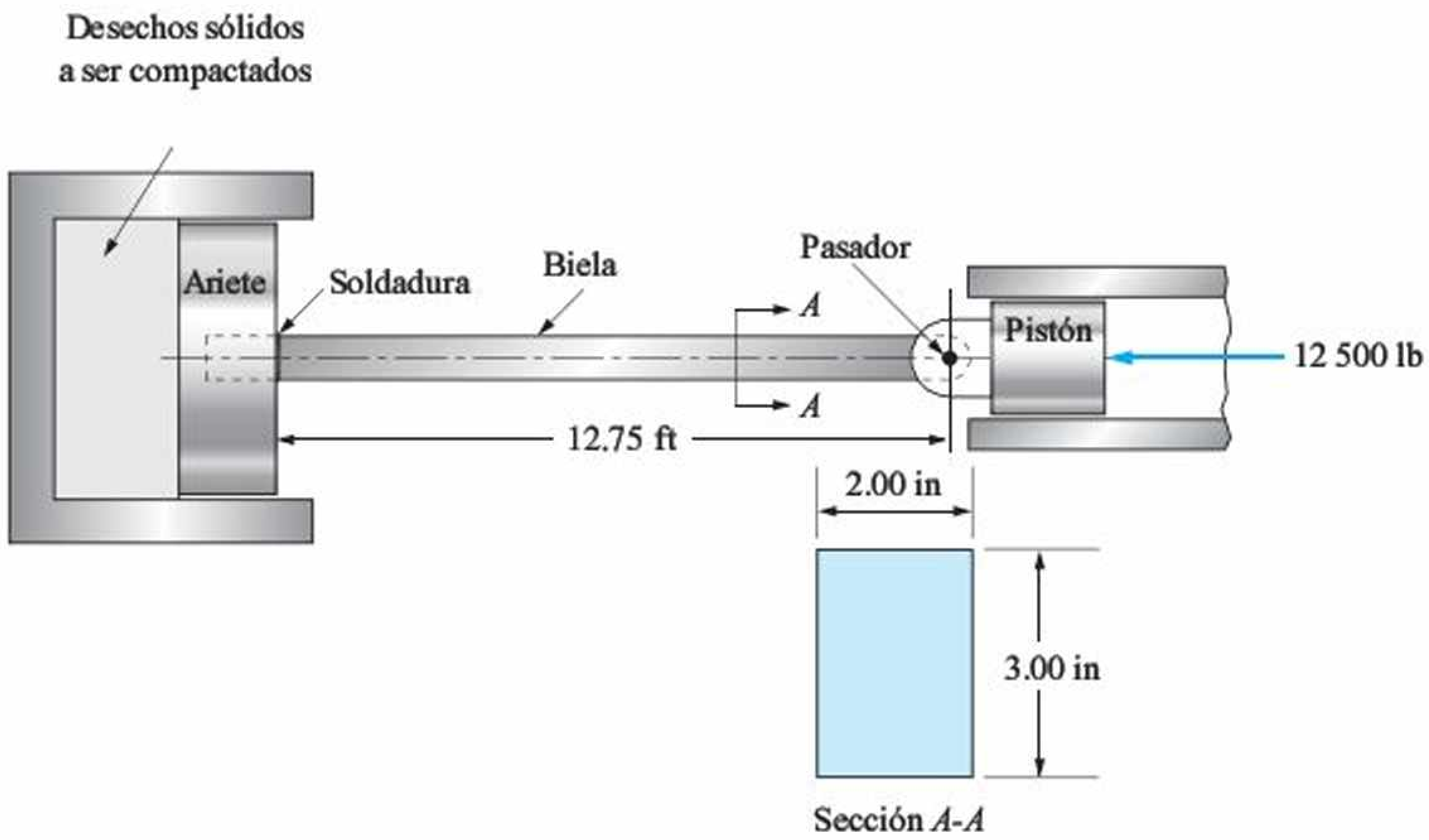


FIGURA P11–22 Compactador de desechos sólidos de los problemas 11–22, 11–23, 11–24 y 11–25.

11–23.E Para las condiciones descritas en el problema 11–22, especifique un tubo de acero estándar adecuado para usarse como biela de sección transversal circular sólida. Use un factor de diseño de 4.0.

11–24.E Para las condiciones descritas en el problema 11–22, especifique un tubo de acero estándar adecuado para usarse como biela de sección transversal circular sólida. Use un factor de diseño de 4.0. El tubo tiene que ser de acero estructural ASTM A501.

11–25.E Para las condiciones descritas en el problema 11–22, especifique una viga I estándar adecuada para usarse como biela. Use un factor de diseño de 4.0. La viga I es de aleación de aluminio 6061–T6. La conexión entre la biela y el pistón es como se muestra en la figura P11–25.

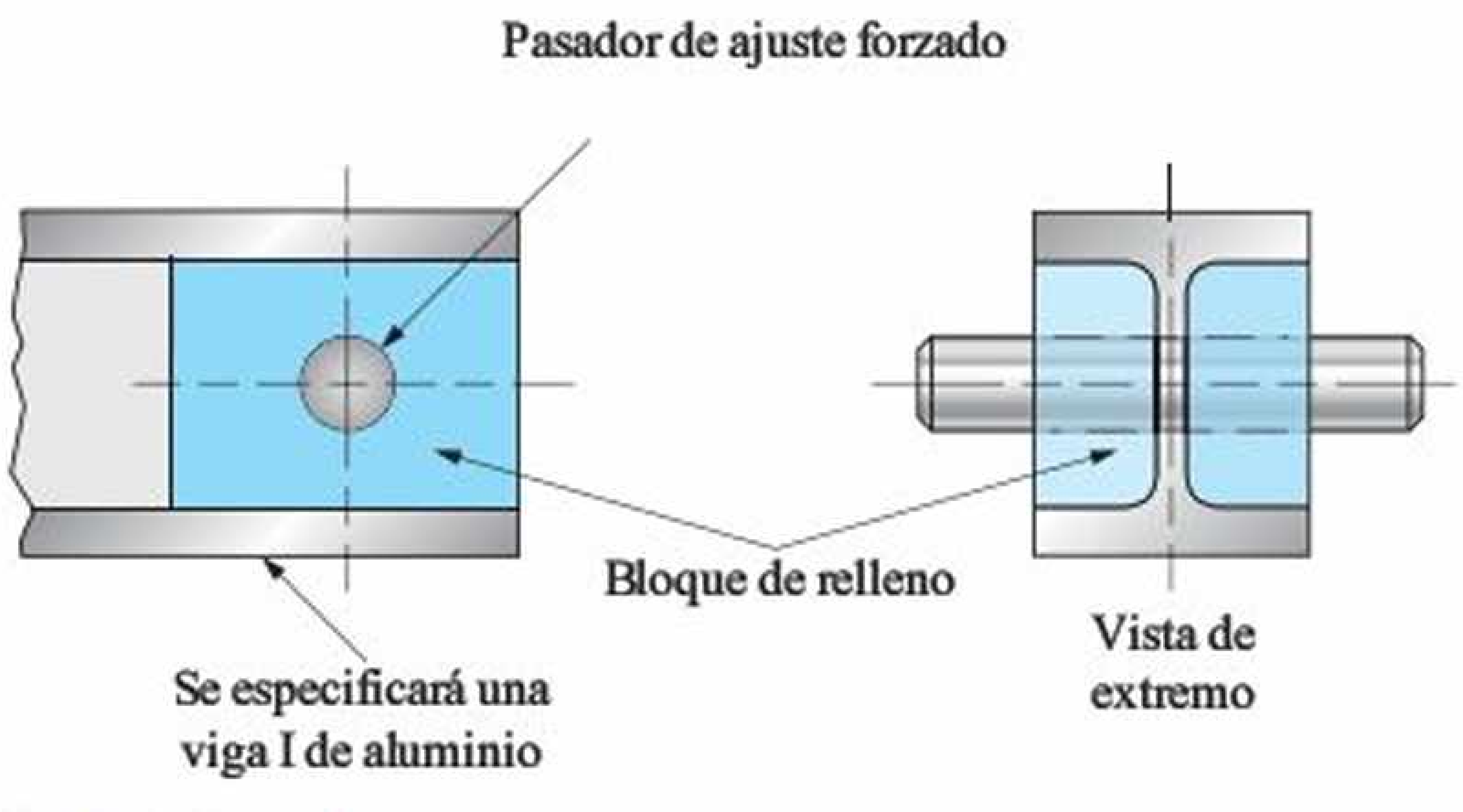


FIGURA P11–25 Conexión de un extremo de la viga I del problema 11–25.

11.26.E Se utiliza un tubo cuadrado hueco, HSS3 × 3 × 1/4, de acero ASTM A500, como columna de 16.5 ft de longitud en un edificio. Con $L_e = 0.80L$, calcule la carga permisible sobre la columna para un factor de diseño de 3.0.

11–27.E Se utiliza un tubo rectangular hueco, HSS4 × 2 × 1/4, de acero ASTM A500, grado B, como columna de 16.5 ft de longitud en un edificio. Con $L_e = 0.80L$, calcule la carga permisible sobre la columna para un factor de diseño de 3.0.

11–28.E Se arma una columna soldando dos ángulos de acero estándar de 3 × 3 × 1/4, como se muestra en la figura 11–11(f). Los ángulos son de acero estructural ASTM A36. Si la longitud de la columna es de 16.5 ft y $L_e = 0.8L$, calcule la carga permisible sobre ella para un factor de diseño de 3.0.

11–29.M Se utiliza una barra rectangular de acero AISI 1020 laminado en caliente como riostra de seguridad para sostener el ariete de una prensa punzonadora de grandes dimensiones, mientras se montan troqueles en ella. La sección transversal de la barra es de 60 mm por 40 mm. Su longitud es de 750 mm y sus extremos están soldados a placas planas gruesas apoyadas en la bancada plana de la prensa y la cara inferior plana del ariete. Especifique una carga segura que se podría aplicar a la riostra.

11–30.M Se pretende utilizar un canal de aleación de aluminio 6061 T–4, C102 × 2.586 (C4 × 1.738), como columna de 4.25 m de longitud. Se puede considerar que los extremos son de pasador. Calcule la carga permisible sobre la columna para un factor de diseño de 4.0.

11–31.M En un intento por mejorar la capacidad de soportar carga de la columna descrita en el problema 11–30, se propone utilizar la aleación 6061–T6 en lugar de la 6061–T4 para aprovechar su mayor resistencia. Evalúe el efecto de este cambio propuesto en la carga permisible.

11–32.E Calcule la carga permisible sobre la sección de columna W12 × 65 de acero ASTM A992 de 22.5 ft de longitud mostrada en la figura 11–12(b) e instalada de modo que $L_e = 0.8L$. Use el reglamento AISC.

PROBLEMAS ADICIONALES DE REPASO Y PRÁCTICA

11–33. Se utiliza un tubo rectangular hueco de acero ASTM A501, formado en caliente para soportar una carga de compresión axial. El tubo es de 13.6 ft de longitud y sus extremos están rígidamente fijos. Calcule la carga permisible sobre la columna para un factor de diseño de 3.0.

11–34. Repita el problema 11–33 si el tubo está lateralmente arriostrado en un punto a 80 in de su extremo inferior.

11–35. Repita el problema 11–33 si el extremo superior del tubo es de pasador.

11–36. Repita el problema 11–33 si el tubo es HSS3 × 3 × 1/4.

11–37. Los extremos de un tubo de acero rectangular hueco, HSS102 × 51 × 6.4 (4 × 2 × 1/4) son articulados. El tubo es de 2.65 m de longitud y soporta una carga de compresión axial de 75.0 kN. Calcule el factor de diseño que resulta con este diseño. Use acero ASTM A501.

11–38. Rediseñe la columna descrita en el problema 11–37 para que produzca un factor de diseño no menor que 3.0. Verifique si su rediseño es satisfactorio.

11–39. La figura P11–39 muestra una armadura. Especifique un diseño adecuado para cada miembro cargado a compresión que logre un factor de diseño mínimo de 3.0.

11–40. Para la armadura de la figura P11–40, especifique un diseño adecuado para cada miembro cargado a compresión que logre un factor de diseño mínimo de 2.5.

11–41. Para la armadura de la figura P11–41, especifique un diseño adecuado para cada miembro cargado a compresión que logre un factor de diseño mínimo de 2.5.

11–42. La eslinga mostrada en la figura P11–42 tiene que soportar una carga de 18 000 lb. Diseñe el travesaño.

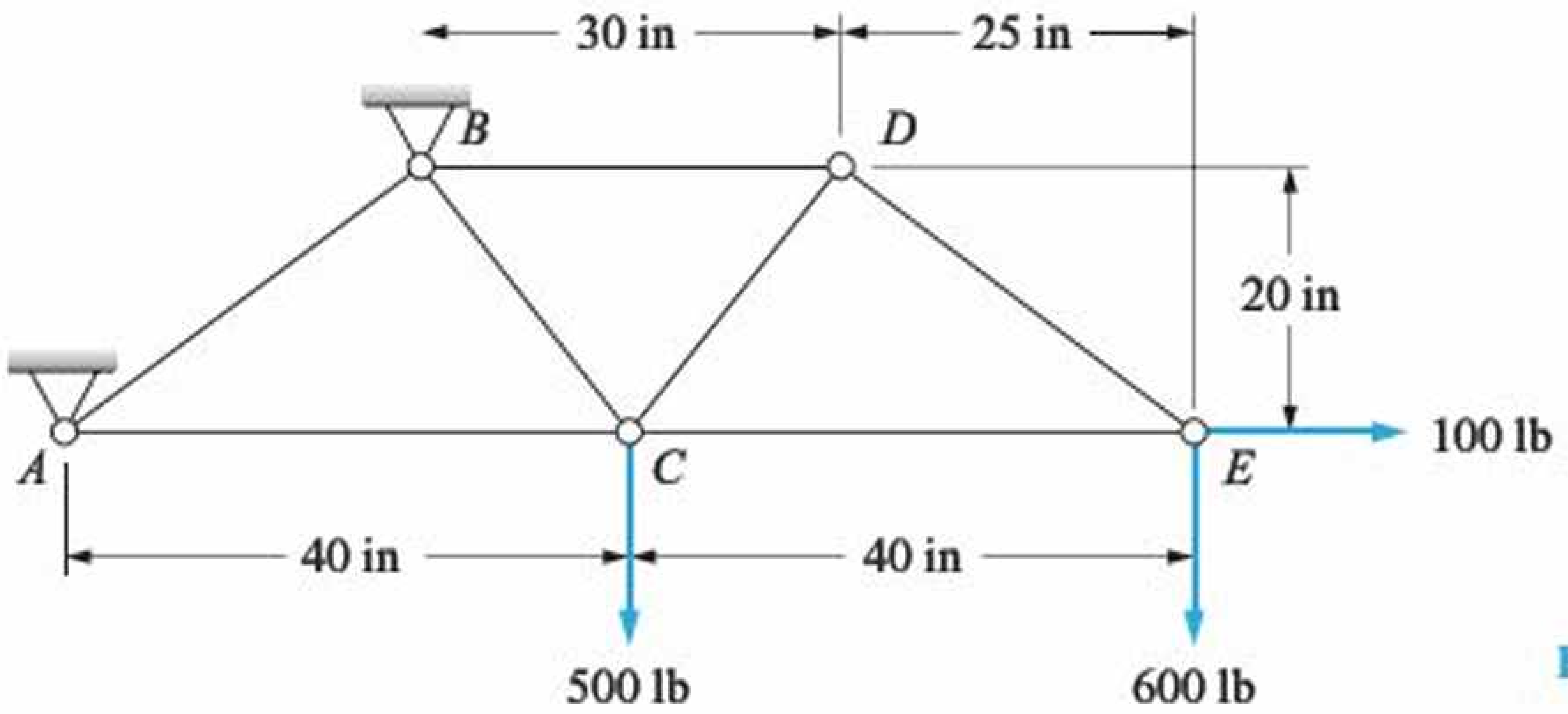


FIGURA P11–39 Armadura del problema 11–39.

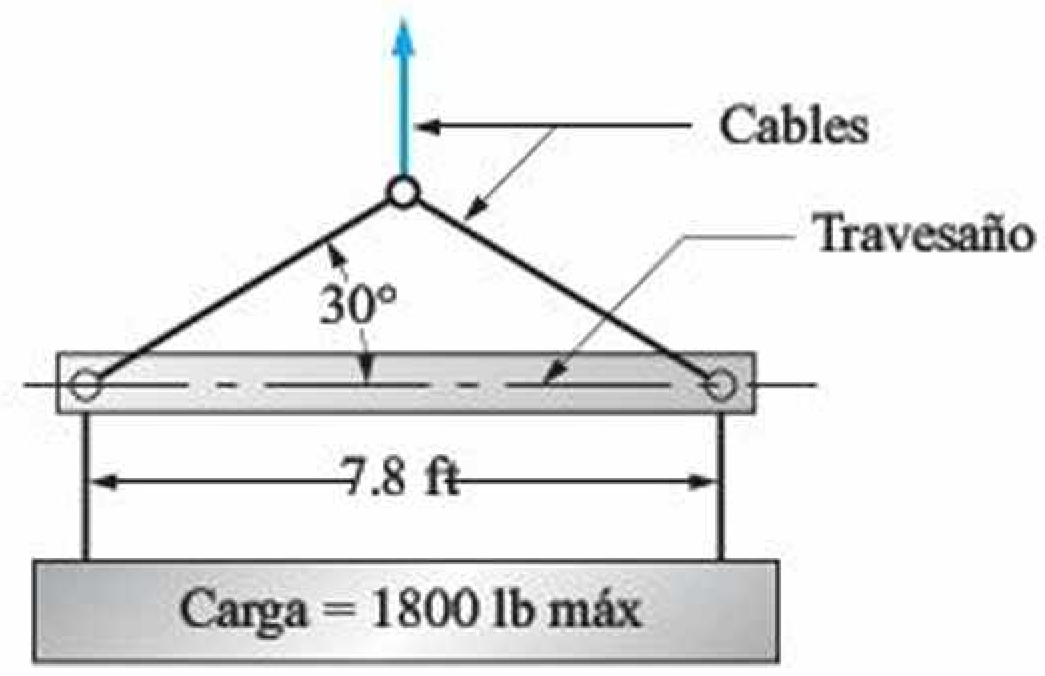


FIGURA P11–42

11–43. Repita el problema 11–42 si el ángulo mostrado cambia de 30° a 15°.

Columnas combadas: determine P_a con $N = 3$.

11–44. Repita el problema 11–1 para una columna con una combadura inicial de 4.0 mm.

11–45. Repita el problema 11–7 para una columna con una combadura inicial de 1.60 mm.

11–46. Repita el problema 11–10 para una columna con una combadura inicial de 14.0 mm.

11–47. Repita el problema 11–12 para una columna con una combadura inicial de 0.75 in.

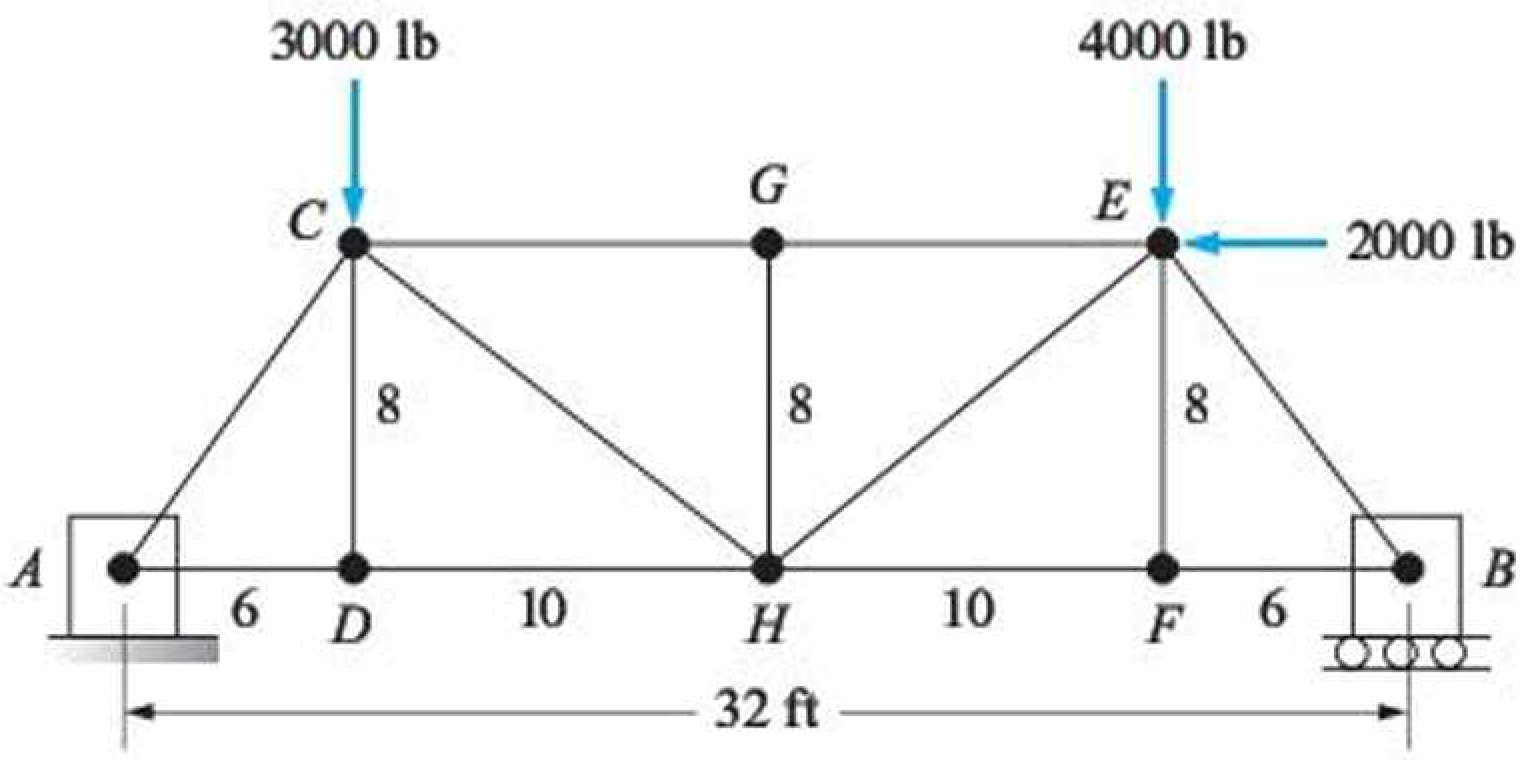


FIGURA P11–40

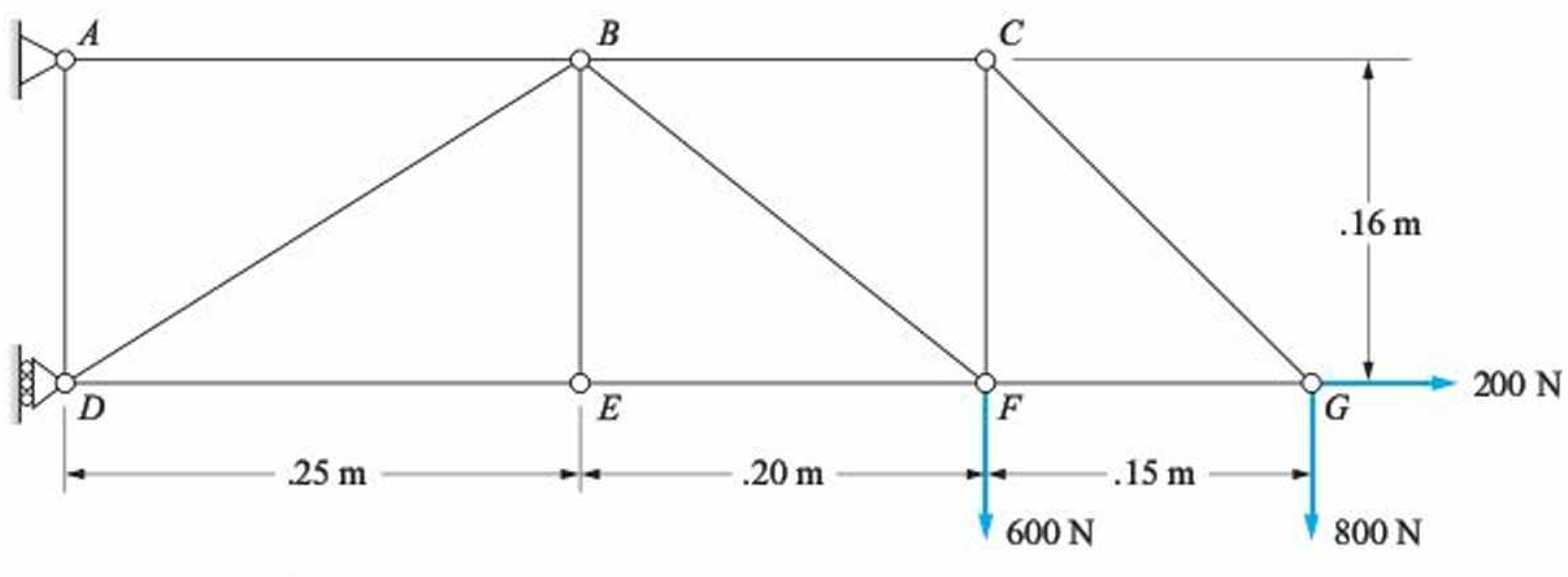


FIGURA P11–41

11–48. Repita el problema 11–3 para una columna con una combadura inicial de 1.25 in.

11–49. Repita el problema 11–37 para una columna con una combadura inicial de 32 mm.

Columnas excéntricamente cargadas

11–50. Una columna de aluminio (6061–T4) de 42 in de longitud tiene una sección transversal de 1.25 in por lado. Soporta una carga de compresión de 1250 lb, aplicada con una excentricidad de 0.60 in; calcule el esfuerzo máximo en la columna y la flexión máxima.

11–51. Se utiliza un tubo de acero (AISI 1020 laminado en caliente) estándar PIPE 75STD (cédula 40 de 3 in) como columna (vea el apéndice A–12). Se aplica una carga de compresión de 30.5 kN con una excentricidad de 150 mm; calcule el esfuerzo máximo en la columna y la flexión máxima.

11–52. El eslabón de conexión de un mecanismo es de 14.75 in de longitud y su sección transversal es de 0.250 por lado. Es de acero inoxidable AISI 301 recocido. Use $E = 28\,000$ psi. Soporta una carga de compresión de 45 lb con una excentricidad de 0.30 in; calcule el esfuerzo máximo y la flexión máxima.

11–53. Se propone utilizar un tubo de acero de acero cuadrado, de 40 in de longitud como puntal para sostener el ariete de una prensa punzonadora durante la instalación de troqueles nuevos. El ariete pesa 75 000 lb. El puntal se hizo de tubería estructural HSS4 × 4 × 1/4 de acero similar al acero estructural, ASTM A500, grado C. La carga aplicada por el ariete podría tener una excentricidad de 0.50 in. ¿Sería seguro el puntal?

11–54. Calcule el esfuerzo y flexión máximos que pueden esperarse en el miembro de acero de una máquina que soporta una carga excéntrica, como se muestra en la figura P11–54. La carga P es de 1000 lb. Si se desea un factor de diseño de 3, especifique un acero adecuado.

11–55. Se aplica una carga axial de 4000 lb a un canal de acero estructural ASTM A36, C5 × 9, de 112 in de longitud. La línea de acción de la carga actúa a la mitad de la altura del alma y a la mitad de los patines. Los extremos son de pasador. ¿Sería adecuado el canal si se desea un factor de diseño de 3.0?

11–56. La figura P11–56 muestra una columna de acero estructural ASTM A500, grado B, HSS4 × 4 × 1/2. Para cumplir con una restricción de montaje especial, la carga se aplica excéntricamente como se muestra. Determine la cantidad de carga que la columna puede soportar con seguridad. El extremo superior de la columna está soportado lateralmente por la estructura.

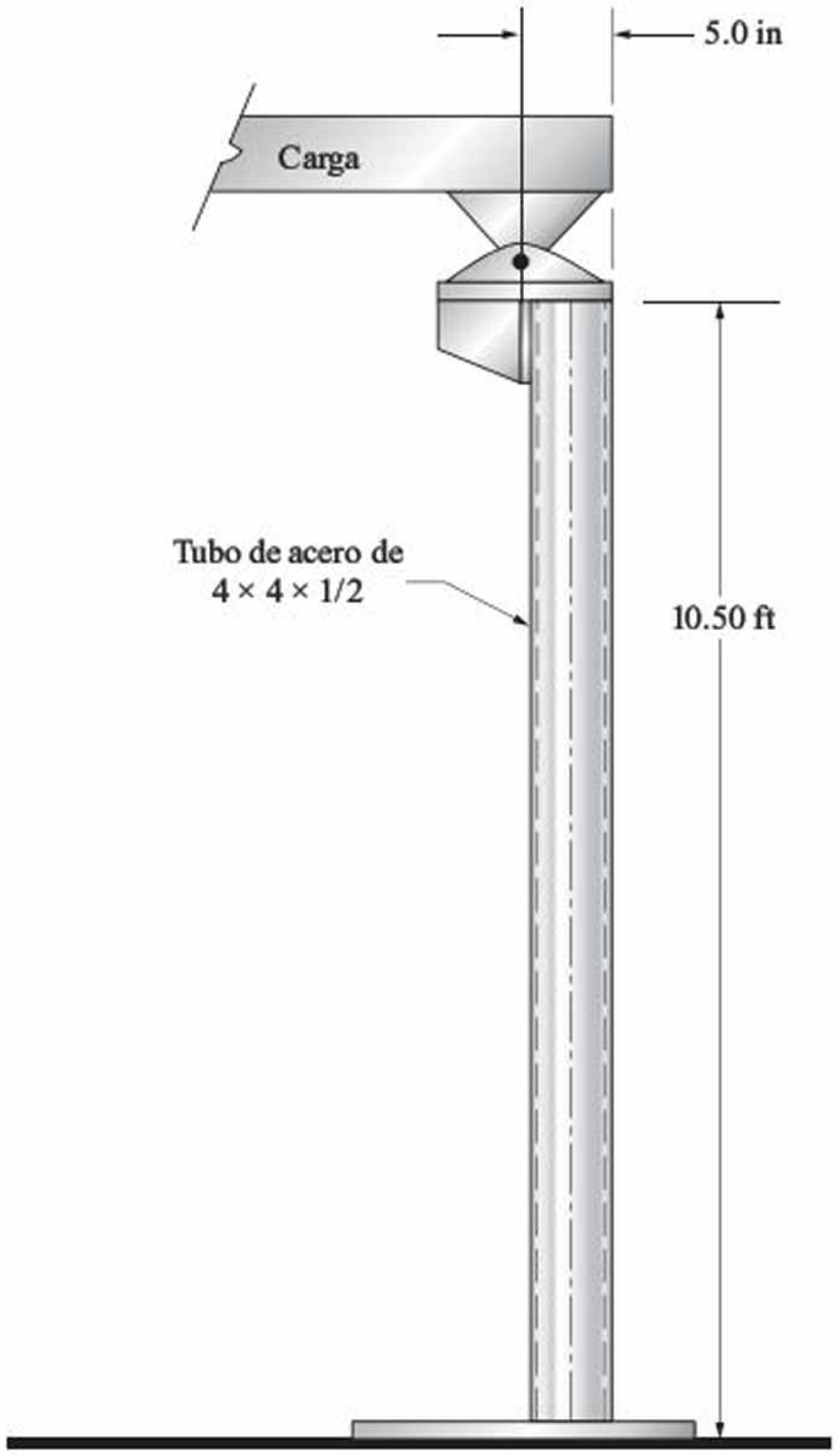


FIGURA P11–56

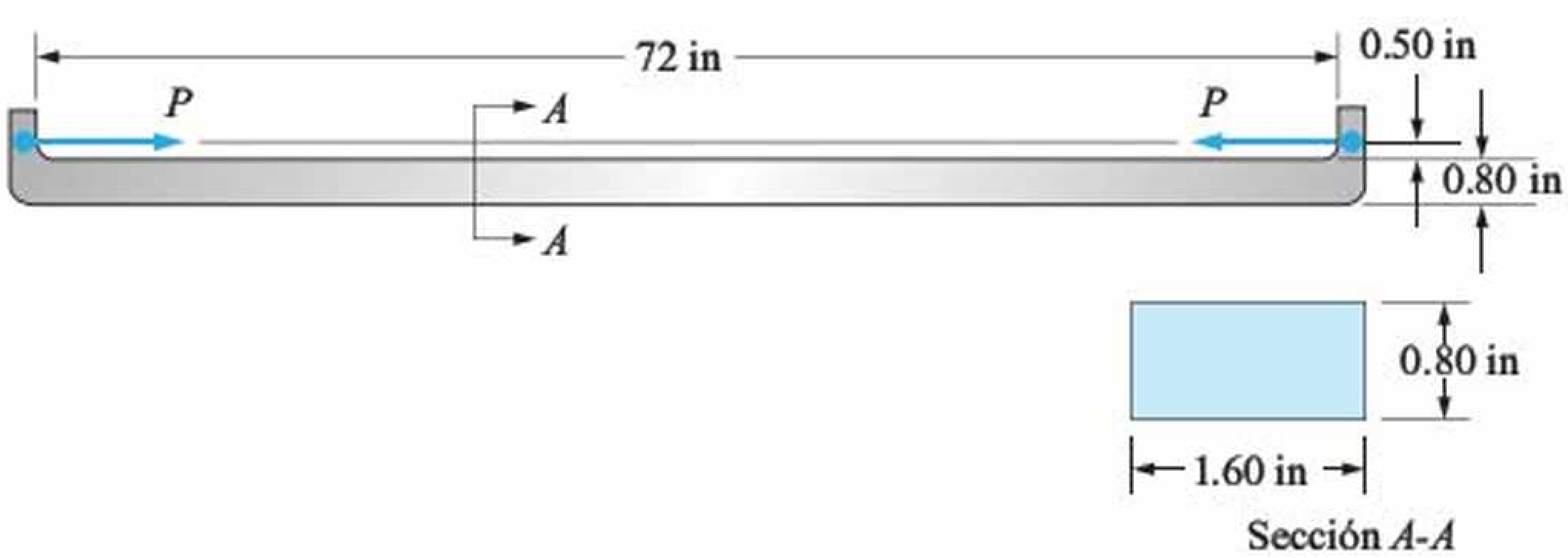


FIGURA P11–54

11–57. El dispositivo mostrado en la figura P11–57 se somete a fuerzas opuestas F. Determine la carga permisible para lograr un factor de diseño de 3. El dispositivo es de aluminio 6061–T6.

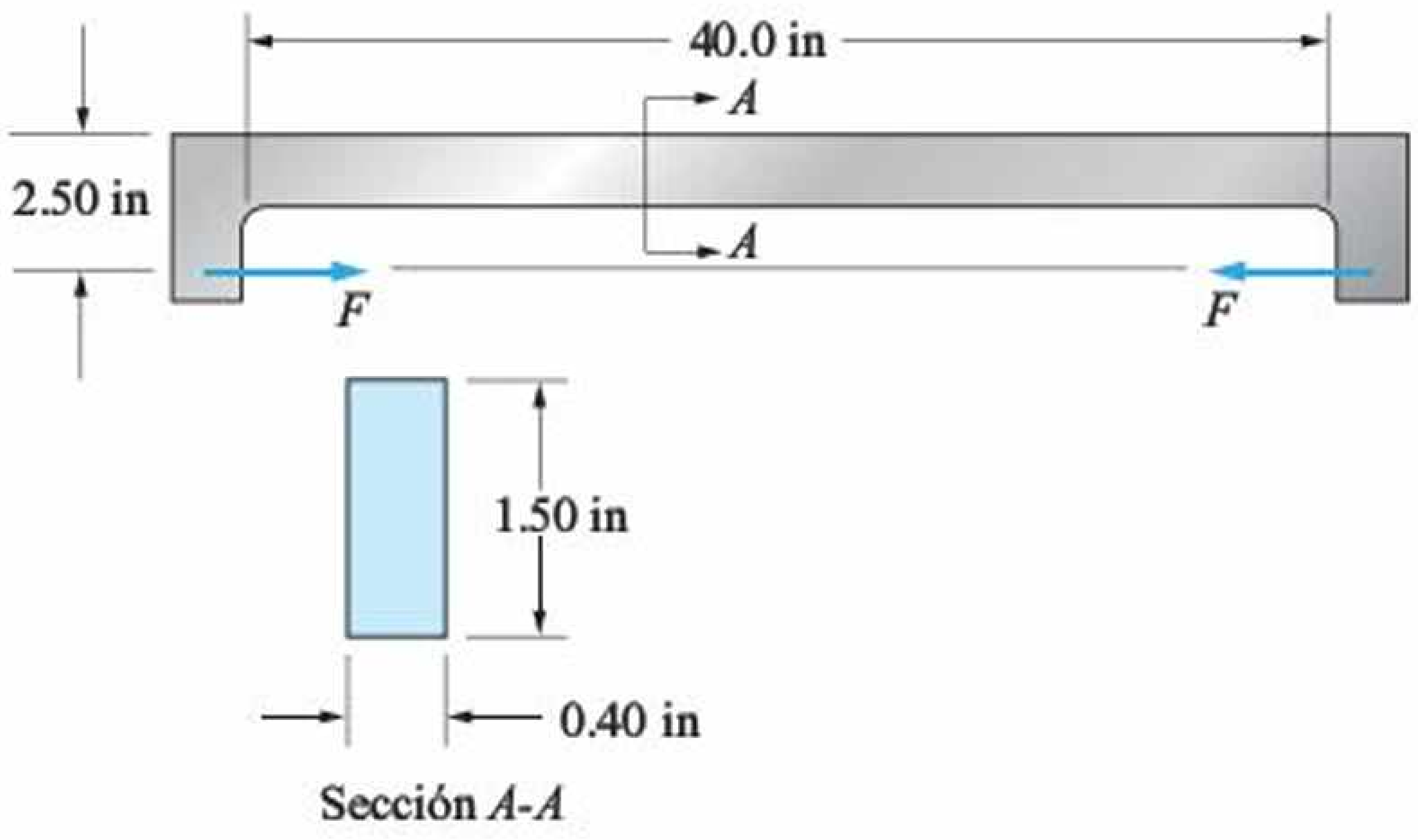


FIGURA P11–57

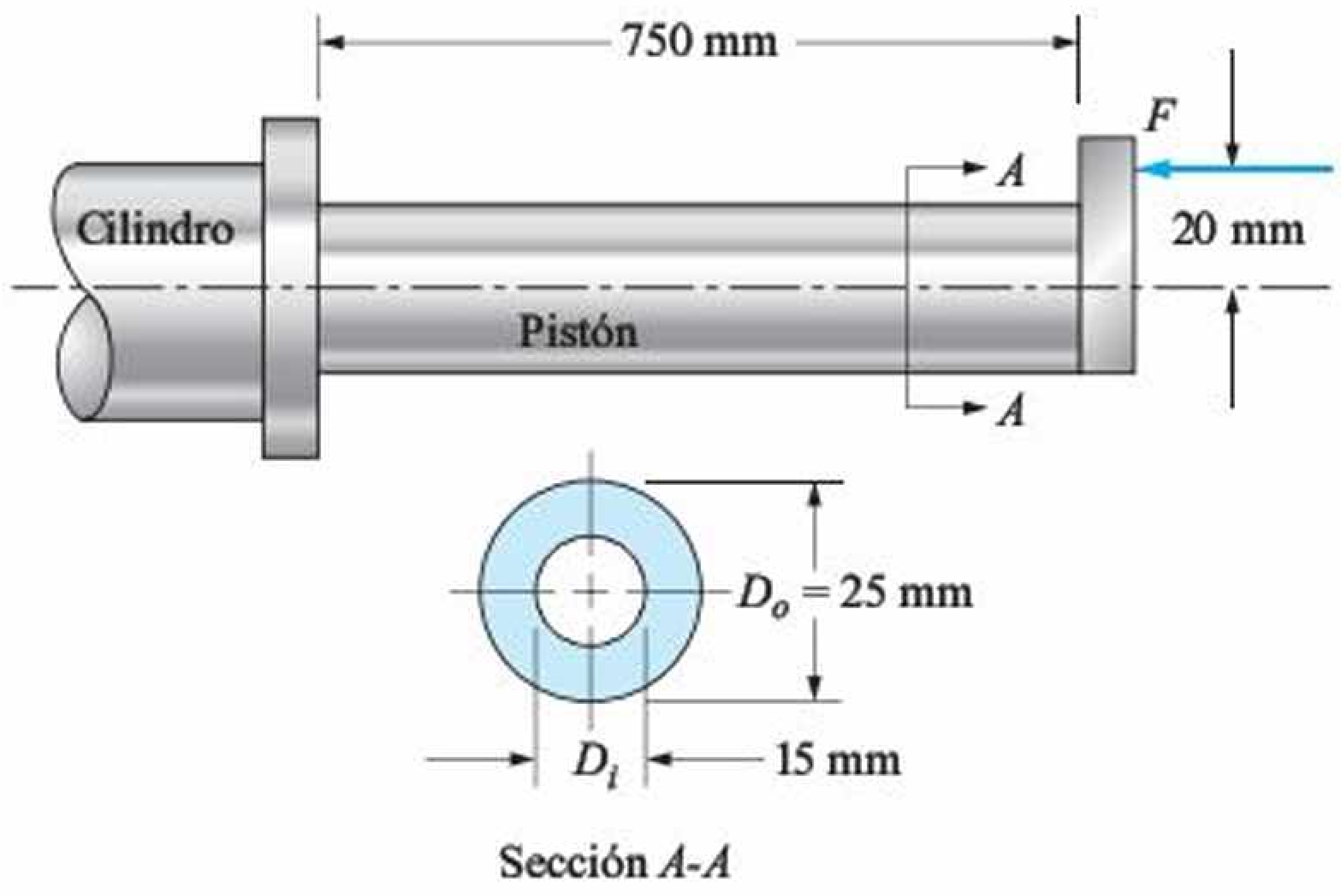


FIGURA P11–58

11–58. Un cilindro hidráulico ejerce una fuerza de 5200 N para mover una pesada pieza fundida a lo largo de una transportadora. El diseño del empujador hace que la carga se aplique excéntricamente a la biela como se muestra en la figura P11–58. ¿Es seguro el pistón bajo esta carga si es de acero inoxidable AISI501 OQT 1000?

11–59. Se propone utilizar un tubo de acero cédula 40 de 2 in estándar para soportar el techo de un porche mientras se desinstala. Su longitud es de 13.0 ft. El tubo es de acero estructural ASTM A501.

(b) Determine la carga segura sobre el tubo para lograr un factor de diseño de 3 si el tubo es recto.

(c) Determine la carga segura si el tubo tiene una combadura inicial de 1.25 in.

TAREAS PARA RESOLVERSE CON COMPUTADORA

1. Escriba un programa u hoja de cálculo para analizar diseños de columna propuestos siguiendo el procedimiento descrito en la sección 11–8. Haga que el usuario ingrese todos los datos esenciales de diseño, tales como el material, la fijación de los extremos, la longitud y las propiedades de la sección transversal. Haga que el programa dé la carga crítica y la carga permisible para un factor de diseño dado.

Adiciones a la tarea 1

(a) Incluya una tabla de datos sobre tubo de acero cédula 40 estándar para que el programa los utilice para determinar las propiedades de la sección transversal para un tamaño de tubo especificado.

(b) Diseñe el programa para que maneje columnas de sección transversal circular sólida y calcule las propiedades de la sección transversal para un diámetro dado.

(c) Agregue una tabla de datos de tubería cuadrada de acero estructural estándar para que el programa los utilice para determinar las propiedades de la sección transversal para un tamaño especificado.

(d) Haga que el programa utilice las especificaciones del AISC como se indica en la sección 11–11 para calcular la carga permisible y el factor de seguridad para columnas de acero.

(e) Haga que el programa utilice las especificaciones de la Aluminum Association como se indica en la sección 11–12 para calcular la carga permisible para columnas de aluminio 6061–T6.

2. Escriba un programa para diseñar una columna de sección transversal circular sólida para que soporte una carga dada con un factor de diseño dado. Advierta que el programa tendrá que verificar que se está utilizando el método correcto —la fórmula de Euler para columnas largas o la fórmula de Johnson para columnas cortas— después de que se hace una suposición inicial.
3. Escriba un programa para diseñar una columna de sección transversal cuadrada sólida para que soporte una carga dada con un factor de diseño dado.
4. Escriba un programa para seleccionar tubo de acero cédula 40 adecuado para que soporte una carga dada con un factor de diseño dado. Se podría diseñar el programa para que busque en una tabla de datos de secciones de tubo estándar desde la menor hasta la mayor y un tubo adecuado. Para cada sección de prueba, se podría calcular la carga permisible con la fórmula de Euler o la fórmula de Johnson, como se requiera, y compararla con la carga de diseño.
5. Elabore una hoja de cálculo para analizar una columna combada como se describe en la sección 11–13.
6. Elabore una hoja de cálculo para analizar una columna excéntricamente cargada como se describe en la sección 11–13.

12

Recipientes a presión

La imagen completa y actividad

12–1 Objetivos de este capítulo

12–2 Distinción entre recipientes a presión de pared delgada y pared gruesa

12–3 Esferas de pared delgada

12–4 Cilindros de pared delgada

12–5 Cilindros y esferas de pared gruesa

12–6 Procedimientos de análisis y diseño de recipientes a presión

12–7 Hoja de cálculo para analizar esferas y cilindros de pared gruesa

12–8 Esfuerzos cortantes en cilindros y esferas

12–9 Otras consideraciones de diseño para recipientes a presión

12–10 Recipientes a presión compuestos

La imagen completa

Recipientes a presión

Mapa de análisis

Un recipiente a presión es un contenedor diseñado para contener líquidos o gases a presión interna.

- Los recipientes a presión típicos son esféricos o cilíndricos.
- Es importante entender la manera en que un recipiente a presión falla, para diseñarlo en tal forma que sea seguro bajo una presión aplicada específica.
- La falla ocurre cuando la presión interna provoca un esfuerzo cortante excesivamente elevado en las paredes del recipiente.
- El tamaño del recipiente y el espesor de su pared son las variables principales que afectan el nivel de esfuerzo.
- En este capítulo se analizan dos tipos diferentes de análisis: uno para recipientes de pared delgada y otro para recipientes de pared gruesa. La diferencia entre estas dos clasificaciones de recipientes se cuantifica más adelante.
- A continuación exploraremos más el concepto de recipiente a presión.

Actividad

Encuentre ejemplos de objetos familiares que puedan ajustarse a esta definición. Luego describa cada uno de ellos y mencione su función, una descripción general de su forma, el material del que está hecho, su longitud y las dimensiones totales. Los siguientes son algunos ejemplos. Vea la figura 12–1.

- Un tanque para contener propano presurizado para una estufa de gas doméstica: *por lo general es un cilindro con extremos en forma de domo, hecho de acero con aproximadamente 300 mm de diámetro (12 in). La longitud de la parte cilíndrica recta es de aproximadamente 225 mm (9 in) con una la longitud total de aproximadamente 350 mm (14 in). La forma cilíndrica o esférica proporciona al tanque robustez y rigidez, pero al golpearlo levemente con algo duro, se siente como si el espesor del acero del cual está hecho fuera relativamente delgado. Hay un orificio en la parte superior del domo para insertar una válvula que permite extraer el propano para cocinar el bistec, pollo, hamburguesa o pescado perfecto.*
- Un tanque de aire comprimido: *Es posible que haya visto ejemplos de éstos en una estación de servicio automotriz, un sitio de construcción o una planta industrial. Están conectados a una compresor que suministra aire a aproximadamente 700 kPa (60 a 100 psi) al tanque donde se almacena un volumen relativamente grande hasta que requiere para inflar una llanta, soplar la basura del suelo o subir un carro con una plataforma. Si bien varían mucho en cuanto a tamaño y capacidad, en general son de forma similar a la del tanque de propano y en su mayoría son cilíndricos con extremos abovedados. El tanque incorpora un interruptor de presión que detecta la presión y apaga el compresor cuando el tanque alcanza la presión deseada. Esto es importante porque el tanque está diseñado para mantener con seguridad una presión máxima especificada; la ruptura de un tanque de aire comprimido es muy peligrosa. En serie con la línea de descarga que sale de la válvula, en general hay un regulador para limitar la presión en el extremo de trabajo de la línea.*
- Un tanque de almacenamiento de alta presión esférico: *¿Alguna vez ha visto alguno en una fotografía o video de un vehículo espacial? En este capítulo veremos que la forma esférica es una forma óptima para un recipiente a presión. Se utilizan cuando se requiere almacenar gases o líquidos a alta presión y utilizar el material más ligero y más delgado. Con frecuencia se utilizan materiales ligeros resistentes tales como titanio o compuestos avanzados.*

Continúe con su propia búsqueda de ejemplos de recipientes a presión. Podrá encontrar algunos en sus alrededores y otros muchos en Internet. Explore los sitios que aparecen al final de este capítulo, pero primero visite el grupo llamado *Pressure Vessel Manufactureres*. Éstas son compañías especializadas en el diseño y fabricación de recipientes a presión para aplicaciones tales como:

- Sistemas de esterilización médicos
- Plantas de procesamiento químico

- Plantas de producción de alimentos
- Tanques de aire comprimido
- Plantas petroquímicas y farmacéuticas y muchas otras

También en Internet podría investigar las diversas formas en que el hidrógeno puede ser almacenado para usarlo en celdas de combustible para operar vehículos o sistemas de generación de electricidad. Cuando se utiliza hidrógeno en forma gaseosa, es importante almacenarlo a alta presión de modo que un volumen moderado pueda contener suficiente combustible para operar un vehículo durante aproximadamente 300 millas (480 km) o una planta eléctrica durante varias horas. Se han propuesto diseños prácticos de tanques cilíndricos que se mantienen a una presión de 3000 a 10 000 psi(20.7 MPa a 69. MPa) de modo que el tanque de de hidrógeno de un vehículo ocupe aproximadamente el mismo espacio que un tanque de gasolina típico. Estudie los diseños de Quantum Technologies, Inc., en www.qtww.com. Se están estudiando otros métodos de almacenar hidrógeno que permitan la operación a bajas presiones.



(*a*) Típico cilindro vertical de 20 lb para gas licuado de propano



(*b*) Compresor de aire de uso general con tanque a presión



(*c*) Tanque esférico de alta presión

FIGURA 12–1 Ejemplos de recipientes a presión (Fuente: (*c*) Photo Researchers, Inc.)

¿Qué ejemplos ha encontrado?

En este capítulo aprenderá la forma en que la presión interna provoca esfuerzos en las paredes del recipiente a presión. Esto le permitirá diseñar recipientes seguros y reconocer la importancia de proteger y dar mantenimiento a los tanques para mantenerlos seguros. La mayoría de los recipientes a presión que encontrará en su carrera probablemente serán del tipo de *pared delgada*, pero algunos, y especialmente los que contienen fluidos a alta presión, pueden encontrarse dentro de la categoría de diseños de *pared gruesa*. En este capítulo damos a la definición de cuando un recipiente se considera de pared delgada o gruesa un enfoque cuantitativo. Ésta es una distinción importante porque el método de análisis es muy diferente para estas dos clases de recipientes.

12–1 OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

Al término de este capítulo, usted podrá:

1. Determinar si un recipiente a presión es de *pared delgada* o *gruesa.*
2. Describir el *esfuerzo tangencial* o *de zuncho* tal como se aplica a esferas sometidas a presión interna, y aplicar la fórmula del esfuerzo anular para calcular el esfuerzo máximo en la pared de una esfera de pared delgada.
3. Describir el *esfuerzo tangencial* tal como se aplica a cilindros sometidos a presión interna y aplicar la fórmula de esfuerzo tangencial para calcular el esfuerzo máximo en la pared del cilindro de pared delgada.
4. Describir el *esfuerzo longitudinal* tal como se aplica a cilindros sometidos a presión interna y aplicar la fórmula del esfuerzo longitudinal para calcular el esfuerzo en la pared de un cilindro de pared delgada que actúa paralelo al eje del cilindro.
5. Identificar el esfuerzo tangencial, el esfuerzo longitudinal y el esfuerzo radial desarrollados en la pared de una esfera o cilindro de pared gruesa producidos por presión interna, y aplicar las fórmulas para calcular los valores máximos de los esfuerzos.

12–2 DISTINCIÓN ENTRE RECIPIENTES A PRESION DE PARED DELGADA Y PARED GRUESA

En general, la magnitud del esfuerzo en la pared de un recipiente a presión varía en función de la posición en la pared. Un análisis preciso permite calcular el esfuerzo en cualquier punto. Las fórmulas para realizar ese cálculo se demostrarán más adelante en esta sección.

Sin embargo, cuando el espesor de pared del recipiente a presión es pequeño, la suposición de que el esfuerzo es uniforme en toda la pared produce un error insignificante. Además, esta suposición permite desarrollar fórmulas de esfuerzo relativamente simples.

En primer lugar tiene que entender la geometría básica de un recipiente a presión y definir algunos términos. La figura 12–2 muestra la definición de diámetros, radios y espesor de pared de cilindros y esferas. La mayoría son obvios en la figura. El radio medio, R_m, se define como el promedio del radio externo al radio interno. Es decir,

Radio medio

$$R_m = \frac{R_o + R_i}{2} \tag{12–1}$$

También podemos definir el *diámetro medio* como

Diámetro medio

$$D_m = \frac{D_o + D_i}{2} \tag{12–2}$$

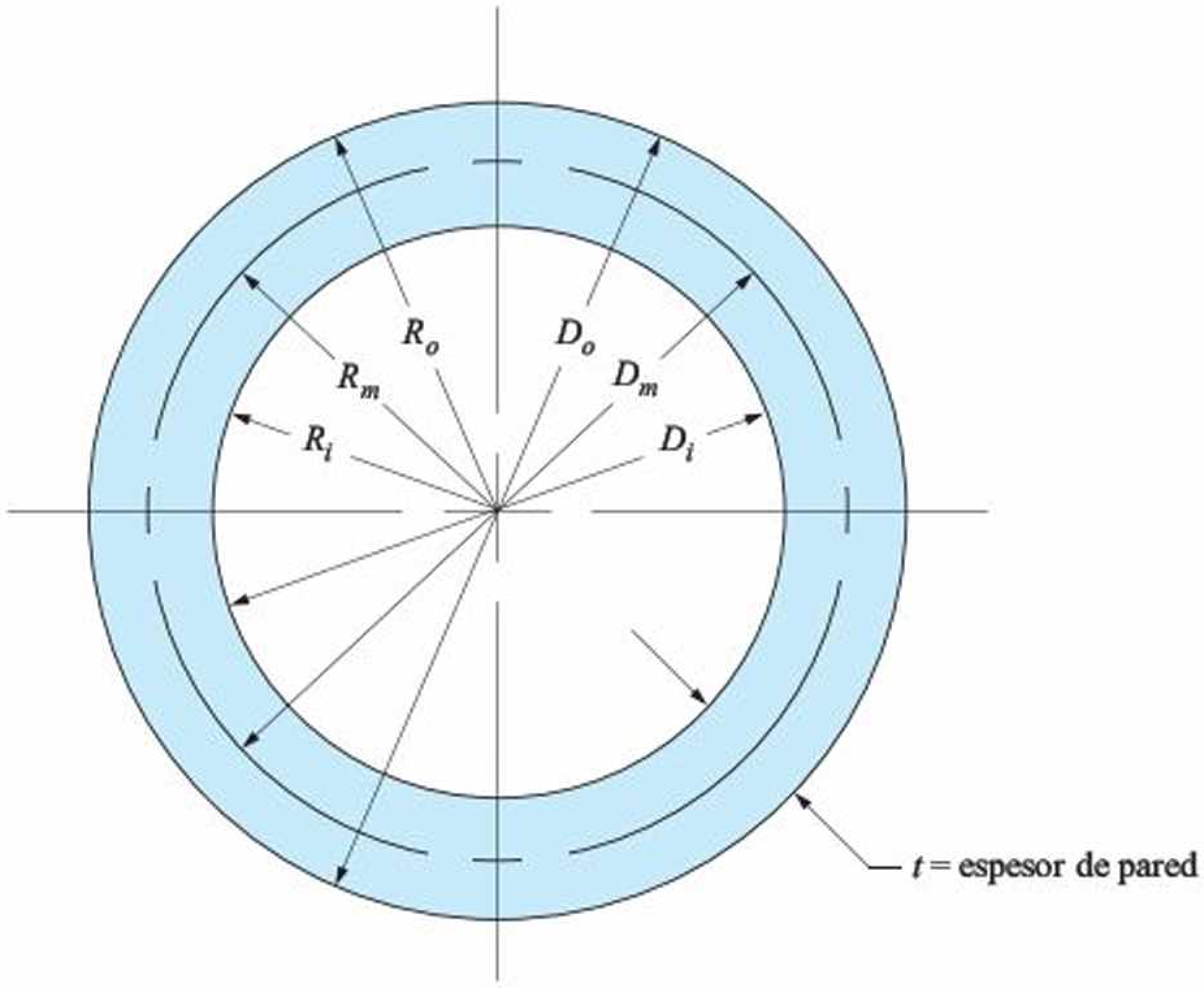


FIGURA 12–2
Definición de diámetros, radios y espesor de pared clave de cilindros y esferas.

Otras fórmulas útiles son

$$R_i = R_o - t \qquad D_i = D_o - 2t$$

$$R_m = R_o - \frac{t}{2} \qquad D_m = D_o - t$$

$$R_m = R_i + \frac{t}{2} \qquad D_m = D_i + t$$

El criterio para determinar si un recipiente a presión es de pared delgada es el siguiente:

> Si la relación del radio medio del recipiente a su espesor de pared es de 10 o mayor, el esfuerzo es casi uniforme y se puede suponer que todo el material de la pared resiste por igual las fuerzas aplicadas. Los recipientes a presión como éstos se llaman recipientes de pared delgada.

Por lo tanto, un recipiente a presión se considera delgado si

$$\frac{R_m}{t} \geq 10 \qquad \textbf{(12–3)}$$

donde t es el espesor de pared del recipiente.

Como el diámetro es dos veces el radio, el criterio para que un recipiente se considere de pared delgada también se escribe como

$$\frac{D_m}{t} \geq 20 \qquad \textbf{(12–4)}$$

Obviamente, si el recipiente no satisface los criterios expresados en las ecuaciones (12–3) y (12–4), se considera de pared gruesa.

Las dos secciones siguientes se dedican al análisis de esferas y cilindros de *pared delgada*; la sección 12–5 se ocupa de las esferas y cilindros de *pared gruesa*.

12–3 ESFERAS DE PARED DELGADA

Al analizar un recipiente a presión esférico, el objetivo es determinar el esfuerzo en su pared para garantizar la seguridad. Por la simetría de una esfera, un diagrama de cuerpo libre conveniente que puede usarse en el análisis es una semiesfera, como se muestra en la figura 12–3. La presión interna del líquido o gas contenido en la esfera actúa perpendicular a las paredes, uniformemente sobre toda la superficie interna. Como la esfera se cortó a través de un diámetro, todas las fuerzas actúan horizontalmente. En consecuencia, se tiene que considerar sólo el componente horizontal de las fuerzas producidas por la presión ejercida por el fluido para determinar la magnitud de la fuerza que actúa en las paredes. Si una presión p actúa en un área A, la fuerza ejercida en el área es

$$F = pA \tag{12–5}$$

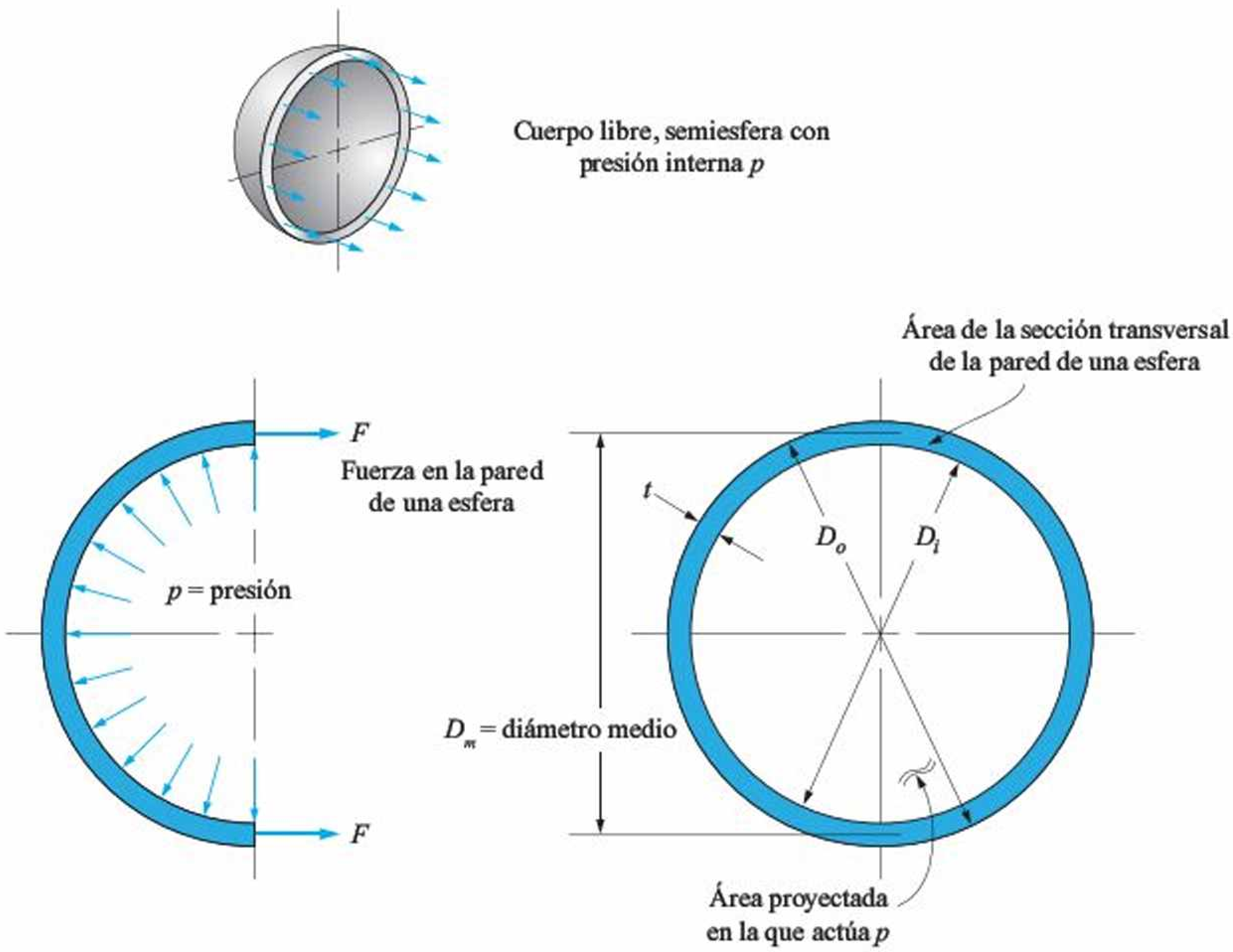
Si se considera la fuerza que actúa en toda la superficie interna de la esfera y determina el componente horizontal, vemos que la fuerza resultante en la dirección horizontal es

$$F_R = p A_p \tag{12–6}$$

donde A_p es el *área proyectada* de la esfera en el plano que pasa a través del diámetro. Por consiguiente,

$$A_p = \frac{\pi D_m^2}{4} \tag{12–7}$$

FIGURA 12–3
Diagramas de cuerpo libre de una esfera sometida a presión interna.



Por el equilibrio de las fuerzas horizontales en el cuerpo libre, las fuerzas que actúan en las paredes también deben ser iguales a F_R, calculada con la ecuación (12–6). Estas fuerzas de tensión que actúan en el área de la sección transversal de las paredes de la esfera crean esfuerzos de tensión. Es decir,

$$\sigma = \frac{F_R}{A_w} \tag{12–8}$$

donde A_w es el área del anillo recortado para crear el cuerpo libre, como se muestra en la figura 12–2. El área real es

$$A_w = \frac{\pi}{4}(D_o^2 - D_i^2) \tag{12–9}$$

Sin embargo, el área de la pared de esferas de pared delgada de espesor t menor que $\frac{1}{10}$ de su radio, puede expresarse de manera aproximada como

$$A_w = \pi D_m t \tag{12–10}$$

Ésta es el área de una franja rectangular de espesor t y longitud igual a la circunferencia media de la esfera, πD_m.

Las ecuaciones (12–6) y (12–8) se combinan para obtener la ecuación del esfuerzo,

$$\sigma = \frac{F_R}{A_w} = \frac{pA_p}{A_w} \tag{12–11}$$

Expresando A_p y A_w en función de D_m y t de las ecuaciones (12–7) y (12–10) se obtiene

Esfuerzo en una esfera de pared delgada

$$\sigma = \frac{p(\pi D_m^2/4)}{\pi D_m t} = \frac{pD_m}{4t} \tag{12–12}$$

Ésta es la expresión del esfuerzo en la pared de una esfera de pared delgada sometida a presión interna. El error que resulta de utilizar el diámetro externo o el interno en lugar del diámetro medio es mínimo (de menos del 5%).

Problema de ejemplo 12–1 Calcule el esfuerzo en la pared de una esfera de 300 mm de diámetro interno y 1.50 mm de espesor de pared cuando contiene gas nitrógeno a 3500 kPa de presión interna.

Solución

Objetivo: Calcular el esfuerzo en la pared de la esfera.

Datos: $p = 3500$ kPa; $D_1 = 300$ mm; $t = 1.50$ mm.

Análisis: En primer lugar debemos determinar si la esfera es de pared delgada, calculando la relación del diámetro medio al espesor de pared.

$$D_m = D_i + t = 300\,\text{mm} + 1.50\,\text{mm} = 301.5\,\text{mm}$$
$$D_m/t = 301.5\,\text{mm}/1.50\,\text{mm} = 201$$

Como ésta es mucho mayor que el límite inferior de 20, la esfera es de pared delgada. Entonces se utilizará la ecuación (12–12) para calcular el esfuerzo.

Resultados

$$\sigma = \frac{pD_m}{4t} = \frac{(3500 \times 10^3 \text{ Pa})(301.5 \text{ mm})}{4(1.50 \text{ mm})}$$

$$\sigma = 175.9 \times 10^6 \text{ Pa} = 175.9 \text{ MPa}$$

12–4 CILINDROS DE PARED DELGADA

Con frecuencia se utilizan cilindros como recipientes a presión, por ejemplo, como tanques de almacenamiento, actuadores hidráulicos y neumáticos, y tubería para conducir fluidos a presión. Los esfuerzos en las paredes de cilindros son similares a los que actúan en esferas, aunque el valor máximo es mayor.

Aquí se demuestran dos análisis distintos. En un caso, se determina la tendencia de la presión interna de romper por tracción el cilindro en una dirección paralela a su eje. Ésta se llama *esfuerzo longitudinal*. A continuación, se analiza un anillo alrededor del cilindro para determinar el esfuerzo que tiende a romper el anillo. Éste se llama *esfuerzo anular* o *esfuerzo tangencial*.

Esfuerzo longitudinal. La figura 12–4 muestra una parte de un cilindro, sometida a una presión interna, cortada perpendicular a su eje para crear un diagrama de cuerpo libre. Suponiendo que el extremo del cilindro está cerrado, la presión que actúa en el área circular del extremo produciría una fuerza resultante de

$$F_R = pA = p\left(\frac{\pi D_m^2}{4}\right) \tag{12–13}$$

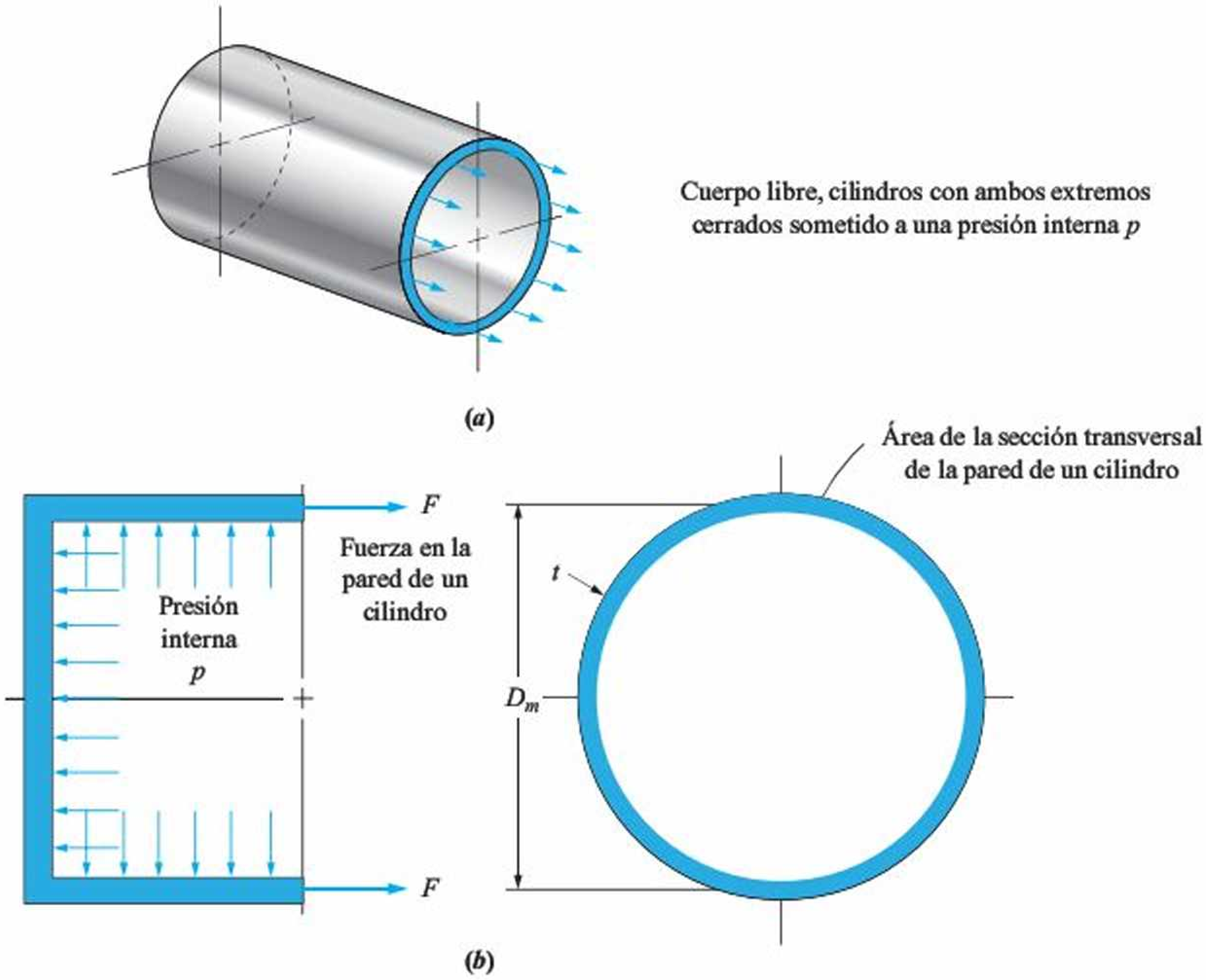


FIGURA 12–4 Diagrama de cuerpo libre de un cilindro sometido a presión interna que muestra el esfuerzo longitudinal.

Esta fuerza debe ser resistida por la fuerza presente en las paredes del cilindro, la que a su vez crea un esfuerzo de tensión en las paredes. El esfuerzo es

$$\sigma = \frac{F_R}{A_w} \tag{12–14}$$

Suponiendo que las paredes son delgadas, como en el caso de las esferas,

$$A_w = \pi D_m t \tag{12–15}$$

donde t es el espesor de pared.

Ahora combinando las ecuaciones (12–13), (12–14) y (12–15),

Esfuerzo longitudinal en un cilindro de pared delgada

$$\sigma = \frac{F_R}{A_w} = \frac{p(\pi D_m^2/4)}{\pi D_m t} = \frac{pD_m}{4t} \tag{12–16}$$

Éste es el esfuerzo que actúa en la pared del cilindro paralelo al eje, llamado esfuerzo longitudinal. Observe que su magnitud es igual a la determinada para la pared de una esfera. Pero no es el esfuerzo máximo, como se demuestra a continuación.

Esfuerzo anular. La presencia del esfuerzo anular o tangencial se visualiza aislando un anillo del cilindro, como se muestra en la figura 12–5. La presión interna empuja hacia fuera uniformemente alrededor del anillo. Éste desarrolla un esfuerzo de tensión tangencial a su circunferencia para resistir la tendencia de la presión de reventarlo.

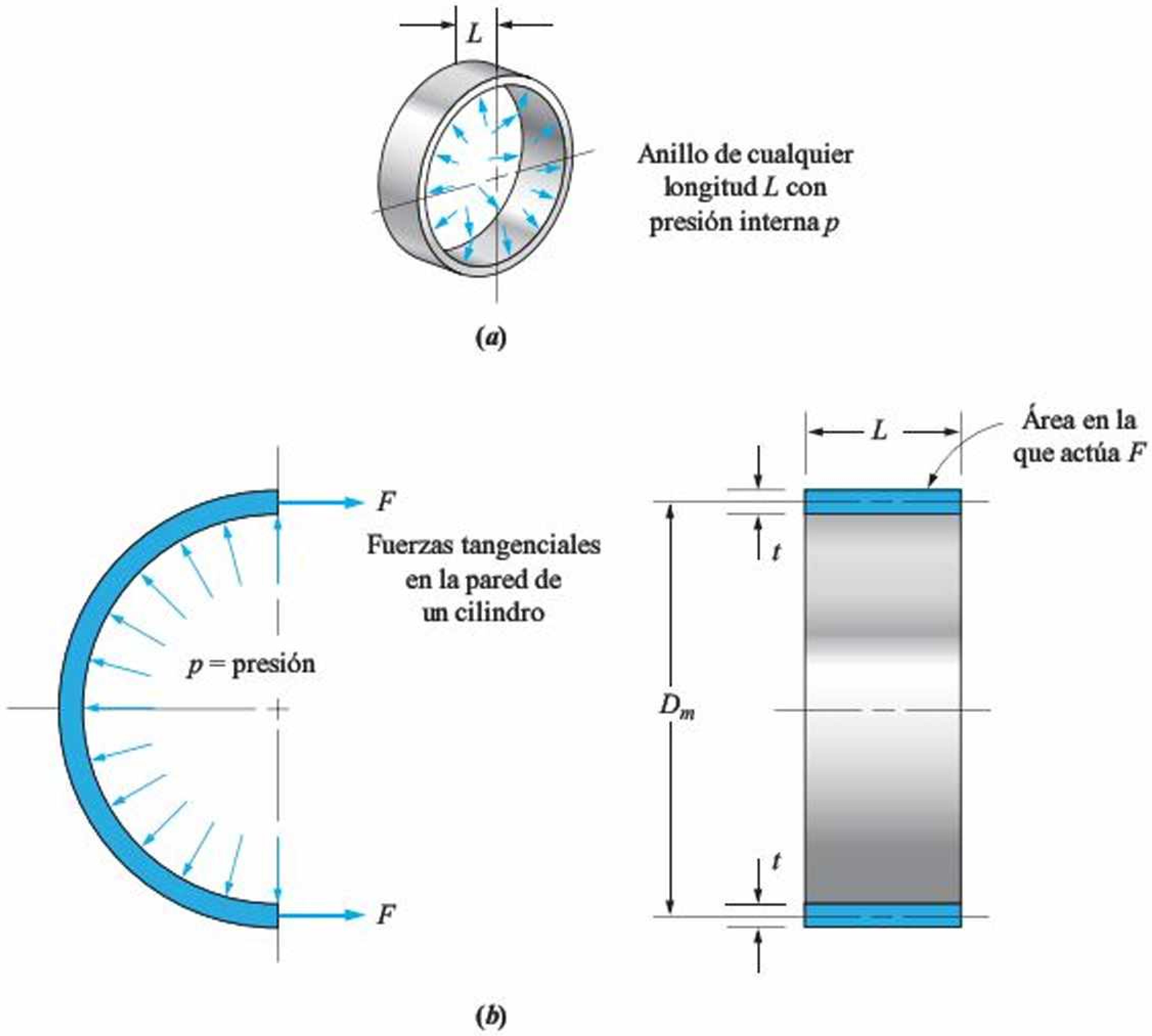


FIGURA 12–5 Diagrama de cuerpo libre de un cilindro sometido a presión interna que muestra el esfuerzo anular.

La magnitud del esfuerzo se determina utilizando la mitad del anillo como cuerpo libre, como se muestra en la figura 12–5(b).

La resultante de las fuerzas creadas por la presión interna se determina en la dirección horizontal y las fuerzas que actúan en las paredes del anillo la equilibran. Con el mismo razonamiento del análisis de la esfera, vemos que la fuerza resultante es el producto de la presión por el *área proyectada* del anillo. Para un anillo de diámetro medio D_m y longitud L,

$$F_R = pA_p = p(D_m L) \tag{12–17}$$

El esfuerzo de tensión en la pared del cilindro es igual a la fuerza resistente dividida entre el área de la sección transversal de la pared. De nuevo suponiendo que la pared es delgada, su área es

$$A_w = 2tL \tag{12–18}$$

Entonces el esfuerzo es

$$\sigma = \frac{F_R}{A_w} = \frac{F_R}{2tL} \tag{12–19}$$

Combinando las ecuaciones (12–17) y (12–19) se obtiene

Esfuerzo anular en un cilindro de pared delgada

$$\sigma = \frac{F_R}{A_w} = \frac{pD_m L}{2tL} = \frac{pD_m}{2t} \tag{12–20}$$

Ésta es la ecuación del esfuerzo anular en un cilindro delgado sometido a presión interna. Observe que la magnitud del esfuerzo anular es *dos* veces la del esfuerzo longitudinal. Asimismo, el esfuerzo anular es dos veces el esfuerzo presente en un recipiente esférico del mismo diámetro sometido a la misma presión.

Problema de ejemplo 12–2

Un tanque cilíndrico que contiene oxígeno a 2000 kPa de presión tiene un diámetro externo de 450 mm y un espesor de pared de 10 mm. Calcule el esfuerzo anular y el esfuerzo longitudinal en la pared del cilindro.

Solución

Objetivo Calcular el esfuerzo anular y el esfuerzo longitudinal en la pared del cilindro.

Datos $p = 2000$ kPa; $D_o = 450$ mm; $t = 10$ mm.

Análisis En primer lugar tenemos que determinar si el cilindro es de pared delgada calculando la relación del diámetro medio al espesor de pared.

$$D_m = D_o - t = 450\,\text{mm} - 10\,\text{mm} = 440\,\text{mm}$$
$$D_m/t = 440\,\text{mm}/10\,\text{mm} = 44$$

Como este valor es mucho mayor que el límite inferior de 20, el cilindro es delgado. Entonces se utiliza la ecuación (12–20) para calcular el esfuerzo anular y la ecuación (12–16) para calcular el esfuerzo longitudinal. El esfuerzo anular se calcula primero.

Resultados

$$\sigma = \frac{pD_m}{2t} = \frac{(2000 \times 10^3\,\text{Pa})(440\,\text{mm})}{2(10\,\text{mm})} = 44.0\,\text{MPa}$$

El esfuerzo longitudinal, según la ecuación (12–12) es

$$\sigma = \frac{pD_m}{4t} = 22.0\,\text{MPa}$$

Problema de ejemplo 12–3

Determine la presión requerida para reventar un tubo de acero cédula 40 estándar si la resistencia máxima a la tensión del acero es de 40000 psi.

Solución

Objetivo: Calcular la presión requerida para reventar el tubo de acero.

Datos: Resistencia máxima a la tensión del acero $= s_u = 40000$ psi.

El tubo es de acero cédula 40 de 8 in estándar.

Las dimensiones del tubo dadas en el apéndice A–12 son:

$$\begin{aligned} \text{diámetro externo} &= 8.625\text{ in} = D_o \\ \text{diámetro interno} &= 7.981\text{ in} = D_i \\ \text{espesor de pared} &= 0.322\text{ in} = t \end{aligned}$$

Análisis: En primer lugar determinamos si el tubo es un cilindro de pared delgada calculando la relación del diámetro medio al espesor de pared.

$$D_m = \text{diámetro medio} = \frac{D_o + D_i}{2} = 8.303\text{ in}$$

$$\frac{D_m}{t} = \frac{8.303\text{ in}}{0.322\text{ in}} = 25.8$$

Como esta relación es mayor que 20, se utilizan las ecuaciones para pared delgada. El esfuerzo anular es el esfuerzo máximo y se utilizará para calcular la presión de ruptura.

Resultados: Use la ecuación (12–20).

$$\sigma = \frac{pD_m}{2t} \tag{12–20}$$

Con $\sigma = 40000$ psi y el diámetro medio se determina la presión de ruptura como

$$p = \frac{2t\sigma}{D_m} = \frac{(2)(0.322\text{ in})(40000\text{ lb/in}^2)}{8.303\text{ in}} = 3102\text{ psi}$$

Comentario: En general se aplica un factor de diseño de 6 o mayor a la presión de ruptura para obtener una presión de operación permisible. Este cilindro se limitaría a una presión interna de aproximadamente 500 psi.

12–5 CILINDROS Y ESFERAS DE PARED GRUESA

Las fórmulas de las secciones precedentes para esferas y cilindros de pared delgada se derivaron con la suposición de que el esfuerzo es uniforme en toda la pared del recipiente. Tal como se enunció, si la relación del diámetro del recipiente al espesor de pared es mayor que 20, esta suposición es razonablemente correcta. Por otra parte si es menor que 20, las paredes se consideran gruesas y se requiere una técnica de análisis diferente.

La derivación detallada de las fórmulas para recipientes de pared gruesa no se abordará aquí por su complejidad (consulte la referencia 12); sin embargo, sí se demostrará la aplicación de las fórmulas.

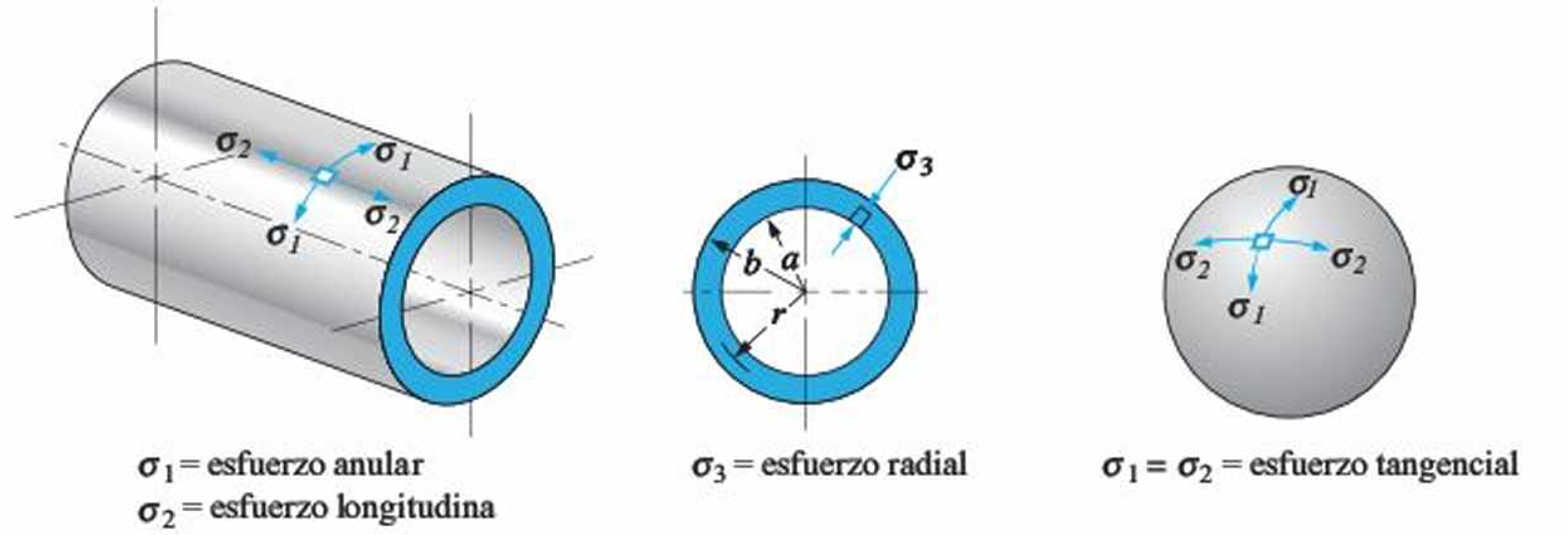


FIGURA 12–6 Notación para los esfuerzos que actúan en cilindros y esferas de pared gruesa.

Para un cilindro de pared gruesa, la figura 12–6 muestra la notación que se utilizará. La geometría está caracterizada por el radio interno a, el radio externo b y cualquier posición entre a y b, llamada r. El *esfuerzo anular* es σ_1; el *esfuerzo longitudinal* es σ_2. Éstos tienen el mismo significado que para los recipientes de pared delgada, excepto porque ahora sus magnitudes varían con las diferentes posiciones en la pared. Además de los esfuerzos anular y longitudinal, se crea un *esfuerzo radial* σ_3 en un recipiente de pared gruesa. Como el nombre lo implica, el esfuerzo radial actúa a lo largo de un radio del cilindro o la esfera. Es un esfuerzo de compresión y varía desde cero en la superficie externa hasta un valor máximo en la superficie interna, donde es igual a la presión interna.

La tabla 12–1 resume las fórmulas requeridas para calcular los tres esfuerzos que actúan en las paredes de cilindros y esferas de pared gruesa sometidos a presión interna. Los términos *esfuerzo longitudinal* y *esfuerzo anular* no se aplican a esferas. En cambio, nos referimos al *esfuerzo tangencial*, el cual es igual en todas las direcciones alrededor de la esfera. Entonces

$$\text{esfuerzo tangencial} = \sigma_1 = \sigma_2$$

TABLA 12–1 Esfuerzos en cilindros y esferas de pared gruesa*

	Esfuerzo en la posición r	Esfuerzo máximo
Cilindro de pared gruesa		
Anular (tangencial)	$\sigma_1 = \dfrac{pa^2(b^2 + r^2)}{r^2(b^2 - a^2)}$	$\sigma_1 = \dfrac{p(b^2 + a^2)}{b^2 - a^2}$ (en la superficie interna)
Longitudinal	$\sigma_2 = \dfrac{pa^2}{b^2 - a^2}$	$\sigma_2 = \dfrac{pa^2}{b^2 - a^2}$ (uniforme en toda la pared)
Radial	$\sigma_3 = \dfrac{-pa^2(b^2 - r^2)}{r^2(b^2 - a^2)}$	$\sigma_3 = -p$ (en la superficie interna)
Esfera de pared gruesa		
Tangencial	$\sigma_1 = \sigma_2 = \dfrac{pa^3(b^3 + 2r^3)}{2r^3(b^3 - a^3)}$	$\sigma_1 = \sigma_2 = \dfrac{p(b^3 + 2a^3)}{2(b^3 - a^3)}$ (en la superficie interna)
Radial	$\sigma_3 = \dfrac{-pa^3(b^3 - r^3)}{r^3(b^3 - a^3)}$	$\sigma_3 = -p$ (en la superficie interna)

*Los símbolos utilizados aquí son los siguientes: a = radio interno; b = radio externo; r = cualquier radio entre a y b; p = presión interna, uniforme en todas las direcciones. Los esfuerzos son de tensión cuando son positivos y de compresión cuando son negativos.

12–6 PROCEDIMIENTOS DE ANÁLISIS Y DISEÑO DE RECIPIENTES A PRESIÓN

En esta sección se resumen los principios expuestos en este capítulo en relación con el análisis de esfuerzo tanto de esferas y cilindros de pared delgada como de pared gruesa. El resumen se da en la forma de procedimientos generales para analizar y diseñar recipientes a presión.

Por lo que se refiere a esfuerzos de diseño, se recomienda repasar las secciones 3–3 y 3–6. Se supondrá que la falla de un recipiente a presión sometido a presión interna se debe a los esfuerzos de tensión que ocurren tangencialmente en sus paredes. Los esfuerzos de diseño deben tener en cuenta el material del cual está hecho el recipiente, el ambiente de operación y si la presión es constante o variable de manera cíclica.

Vea también la sección 12–7 con respecto al análisis de otros modos de falla en recipientes que tienen orificios, soportes estructurales, anillos de refuerzo y otros elementos que difieren de la forma cilíndrica o esférica simple.

Esfuerzos de diseño. *Para presión estable*, el esfuerzo de diseño se basa en la resistencia a la cedencia del material

$$\sigma_d = s_y/N$$

La selección del factor de diseño, N, con frecuencia se hace de conformidad con un reglamento debido al peligro creado cuando falla un recipiente a presión. Esto es particularmente cierto en el caso de recipientes que contienen gases o vapor a presión porque las fallas dan lugar a la expulsión violenta del gas en el momento en que se libera un alto nivel de la energía almacenada. Sin un reglamento, utilizaremos $N = 4$ como valor mínimo y valores mayores en aplicaciones críticas o cuando exista incertidumbre en las condiciones de operación o las propiedades del material. Otra recomendación sugerida es limitar la presión en un recipiente a no más de 1/6 de la presión de ruptura pronosticada. Esto efectivamente exige un esfuerzo de diseño relacionado con la resistencia máxima a la tensión del material:

$$\sigma_d = s_u/N = s_u/6$$

Con presión cíclica, base el esfuerzo de diseño en la resistencia máxima,

$$\sigma_d = s_u/N$$

Use $N = 8$ como mínimo para producir un esfuerzo de diseño relacionado con la resistencia a la fatiga del material.

A. Procedimiento para analizar recipientes a presión

Datos Presión interna en el recipiente, p.
Material del cual está hecho el recipiente. Se supone que es metal dúctil.
Diámetro externo, D_o; diámetro interno, D_i y espesor de pared, t, del recipiente.

Objetivo Determinar el esfuerzo máximo en el recipiente y comprobar la seguridad de ese nivel de esfuerzo con respecto al esfuerzo de diseño en el material del cual está hecho el recipiente.

1. Calcule el diámetro medio, D_m, del recipiente con la ecuación (12–2), $D_m = (D_o + D_i)/2$.
2. Calcular la relación del diámetro medio al espesor de pared del recipiente, D_m/t.

3. Si $D_m/t \geq 20$, el recipiente se considera de pared delgada. Use la ecuación (12–12) para esferas o la ecuación (12–20) para cilindros para calcular el esfuerzo tangencial máximo en sus paredes.

$$\sigma = pD_m/4t \quad \text{para esferas} \qquad (12\text{–}12)$$

$$\sigma = pD_m/2t \quad \text{para cilindros} \qquad (12\text{–}20)$$

4. Si $D_m/t < 20$, el recipiente se considera de pared gruesa. Use las ecuaciones de la tabla 12–1 para calcular el esfuerzo tangencial o el esfuerzo anular máximo en sus paredes.

$$\sigma = \frac{p(b^3 + 2a^3)}{2(b^3 - a^3)} \quad \text{para esferas}$$

$$\sigma = \frac{p(b^2 + a^2)}{b^2 - a^2} \quad \text{para cilindros}$$

5. Calcule el esfuerzo de diseño para el material de que está hecho el recipiente.
6. El esfuerzo máximo real debe ser menor que el esfuerzo de diseño por seguridad.

B. Procedimiento para diseñar recipientes a presión de un material dado

Datos Presión interna en el recipiente, p.
Material del que está hecho el recipiente. Se supone material dúctil.
Diámetro interno nominal del recipiente basado en la capacidad volumétrica deseada.

Objetivo Especificar el diámetro externo, D_o; el diámetro interno, D_i y el espesor de pared t del recipiente para garantizar su seguridad con respecto al esfuerzo de diseño en el material del que está hecho.

1. Use el diámetro dado como una estimación del diámetro medio, D_m, del recipiente.
2. Suponga en principio que el recipiente será de pared delgada y que el esfuerzo máximo se calcula con la ecuación (12–12) para una esfera o la ecuación (12–20) para un cilindro. Esta suposición se comprobará más adelante.
3. Calcule el esfuerzo de diseño para material del cual se tiene que hacer el recipiente.
4. En la ecuación de esfuerzo apropiado, sustituya el esfuerzo de diseño por el esfuerzo máximo y resuélvala para el espesor de pared mínimo requerido, t.
5. Especifique valores convenientes para t, D_i y D_o basados en espesores de material disponibles. También se puede utilizar el apéndice A–2 para especificar los tamaños básicos preferidos.
6. Calcule el diámetro medio real del recipiente utilizando las dimensiones especificadas.
7. Calcule la relación del diámetro medio al espesor de pared del recipiente, D_m/t.
8. Si $D_m/t \geq 20$, el recipiente es de pared delgada, como se supuso, y el diseño se termina.
9. Si $D_m/t < 20$, el recipiente es de pared gruesa. Use las ecuaciones de la tabla 12–1 para calcular el esfuerzo tangencial o anular máximo en las paredes del recipiente y compárelo con el esfuerzo de diseño. Si el esfuerzo real es menor que el esfuerzo de diseño, el diseño es satisfactorio; si el esfuerzo máximo real es mayor que el esfuerzo de diseño, incremente el espesor de pared y calcule de nuevo el esfuerzo resultante. Continúe este proceso hasta que se obtenga un nivel de esfuerzo satisfactorio y dimensiones convenientes para el recipiente. Este proceso se facilita con un programa para resolver ecuaciones, hojas de cálculo o una calculadora graficadora.

C. Procedimiento para especificar un material dúctil para un recipiente a presión de un tamaño dado

Datos Presión interna en el recipiente, p.
Diámetro externo, D_o; diámetro interno, D_i y espesor de pared t, del recipiente.

Objetivo Especifique un metal dúctil adecuado del cual se tiene que hacer el recipiente.

1. Calcule el diámetro medio, D_m, del recipiente con la ecuación (12–2); $D_m = (D_o + D_i)/2$.
2. Calcule la relación del diámetro medio al espesor de pared del recipiente, D_m/t.
3. Si $D_m/t \geq 20$, el recipiente es de pared delgada. use la ecuación (12–12) para esferas o la ecuación (12–20) para cilindros con el fin de calcular el esfuerzo tangencial máximo en sus paredes.

$$\sigma = pD_m/4t \quad \text{para esferas} \qquad \textbf{(12–12)}$$

$$\sigma = pD_m/2t \quad \text{para cilindros} \qquad \textbf{(12–20)}$$

4. Si $D_m/t < 20$, el recipiente es de pared gruesa. Use las ecuaciones de la tabla 12–1 para calcular el esfuerzo tangencial o anular máximo en sus paredes.

$$\sigma = \frac{p(b^3 + 2a^3)}{2(b^3 - a^3)} \quad \text{para esferas}$$

$$\sigma = \frac{p(b^2 + a^2)}{b^2 - a^2} \quad \text{para cilindros}$$

5. Especifique una ecuación adecuada para el esfuerzo de diseño basado en la exposición al principio de esta sección.
6. Sea el esfuerzo de diseño igual al esfuerzo máximo calculado en el paso 3 o 4. Luego calcule la resistencia del material apropiada, s_y o s_u con la ecuación del esfuerzo de diseño.
7. Especifique un material adecuado cuya resistencia sea mayor que el valor máximo requerido.

Problema de ejemplo 12–4

Calcule la magnitud de los esfuerzos longitudinal, anular y radial máximos en un cilindro que contiene helio a una presión constante de 10 000 psi. El diámetro externo es de 8.00 in y el interno de 6.40 in. Especifique un material adecuado para el cilindro.

Solución

Objetivo: Calcular los esfuerzos máximos y especificar un material.

Datos: Presión $= p = 10\,000$ psi. $D_o = 8.00$ in. $D_1 = 6.40$ in.

Análisis: Use el procedimiento C de esta sección.

Resultados:

Paso 1. $D_m = (D_o + D_i)/2 = (8.00 + 6.40)/2 = 7.20$ in

Paso 2. $t = (D_o + D_i)/2 = (8.00 - 6.40)/2 = 0.80$ in

$D_m/t = 7.20/0.80 = 9.00$

Paso 3. Este paso no se aplica. El cilindro es grueso.

Paso 4. Use las ecuaciones de la tabla 12–1.

$$a = D_i/2 = 6.40/2 = 3.20 \text{ in}$$
$$b = D_o/2 = 8.00/2 = 4.00 \text{ in}$$

$$\sigma_1 = \frac{p(b^2 + a^2)}{b^2 - a^2} = \frac{(10\,000\text{ psi})(4.00^2 + 3.20^2)\text{ in}^2}{(4.00^2 - 3.20^2)\text{ in}^2} = 45\,560\text{ psi anular}$$

$$\sigma_2 = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} = \frac{(10\,000\text{ psi})(3.20\text{ in})^2}{(4.00^2 - 3.20^2)\text{ in}^2} = 17\,780\text{ psi longitudinal}$$

$$\sigma_3 = -p = -10\,000\text{ psi radial}$$

Los tres esfuerzos alcanzan su valor máximo en la superficie interna del cilindro.

Paso 5. Sea el esfuerzo de diseño $= \sigma_d = s_y/4$.

Paso 6. El esfuerzo máximo es el esfuerzo anular, $\sigma_1 = 45560$ psi. Entonces la resistencia a la cedencia requerida del material es

$$s_y = N(\sigma_2) = 4(45\,560\text{ psi}) = 182\,200\text{ psi} = 182\text{ ksi}$$

Paso 7. Con el apéndice A–14 se puede especificar un acero AISI 4140 OQT cuya resistencia a la cedencia es de 212 ksi.

Problema de ejemplo 12–5

Calcule los esfuerzos tangencial y radial máximos en una esfera que contiene helio a una presión constante de 10000 psi. El diámetro externo es de 8.00 in y el interno de 6.40 in. Especifique un material adecuado para el cilindro.

Solución

Objetivo: Calcular los esfuerzos máximos y especificar un material.

Datos: Presión $= p = 10000$ psi, $D_o = 8.00$ in. $D_i = 6.40$ in.

Análisis: Use el procedimiento C de esta sección. Estos datos son los mismos que se utilizaron en el problema de ejemplo 12–4. Algunos valores se arrastrarán en los cálculos.

Resultados

Pasos 1, 2, 3. La esfera es de pared gruesa.

Paso 4. Use la ecuación de la tabla 12–1. $a = 3.20$ in. $b = 4.00$ in.

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{p(b^3 + 2a^3)}{2(b^3 - a^3)} = \frac{(10000\text{ psi})[4.00^3 + 2(3.20)^3]\text{ in}^3}{2(4.00^3 - 3.20^3)\text{ in}^3}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 20\,740\text{ psi tangencial}$$

$$\sigma_3 = -p = -10000\text{ psi radial}$$

Cada uno de estos esfuerzos alcanza su valor máximo en la superficie interna.

Pasos 5, 6. Con un esfuerzo máximo de 20740 psi, la resistencia a la cedencia requerida para el material es

$$s_y = N(\sigma_2) = 4(20\,740\text{ psi}) = 82\,960\text{ psi} = 83\text{ ksi}$$

Paso 7. Con el apéndice A–14, podemos especificar un acero AISI 4140 OQT 1300 con una resistencia a la cedencia de 101 ksi. Se podrían utilizar otros.

Comentario: El esfuerzo máximo en la esfera es menor que la mitad del que ocurre en un cilindro del mismo tamaño, lo que permite utilizar un material con una resistencia mucho menor. Por otra parte, se podría diseñar la esfera con el mismo material pero con un espesor de pared menor.

Problema de ejemplo 12–6

Los diámetros externo e interno de un recipiente cilíndrico son respectivamente, de 400 y 300 mm. Para una presión interna de 20.1 MPa, calcule el esfuerzo anular σ_1 en la superficie interna y externa y puntos de la pared a intervalos de 10 mm. Trace una gráfica de σ_1 contra la posición radial en la pared.

Solución

Objetivo: Calcular el esfuerzo anular en posiciones específicas en la pared del cilindro.

Datos: Presión $= p = 20.1$ MPa. $D_o = 400$ mm. $D_i = 300$ mm.
Use incrementos de 10 mm para el radio comprendido entre la superficie externa y la superficie interna.

Análisis: Use los pasos 1–4 del procedimiento A de esta sección.

Resultados

Paso 1. $D_m = (D_o + D_i)/2 = (400 + 300)/2 = 350$ mm

Paso 2. $t = (D_o - D_i)/2 = (400 - 300)/2 = 50$ mm
$D_m/t = 350/50 = 7.00 < 20$; cilindro de pared gruesa

Paso 3. Este paso no se aplica.

Paso 4. Use la ecuación del esfuerzo tangencial de la tabla 12–1.

$$\sigma_1 = \frac{pa^2(b^2 + r^2)}{r^2(b^2 - a^2)}$$

$$a = D_i/2 = 300/2 = 150 \text{ mm}$$

$$b = D_o/2 = 400/2 = 200 \text{ mm}$$

Los resultados se muestran en la tabla siguiente.

r (mm)	σ_2 (MPa)	
200	51.7	(Superficie mínima externa)
190	54.5	
180	57.7	
170	61.6	
160	66.2	
150	71.8	(Superficie máxima interna)

Comentario: La figura 12–7 muestra la gráfica del esfuerzo tangencial contra la posición en la pared. La gráfica ilustra con claridad que la suposición de esfuerzo uniforme en la pared de un cilindro de pared gruesa *no* sería válida.

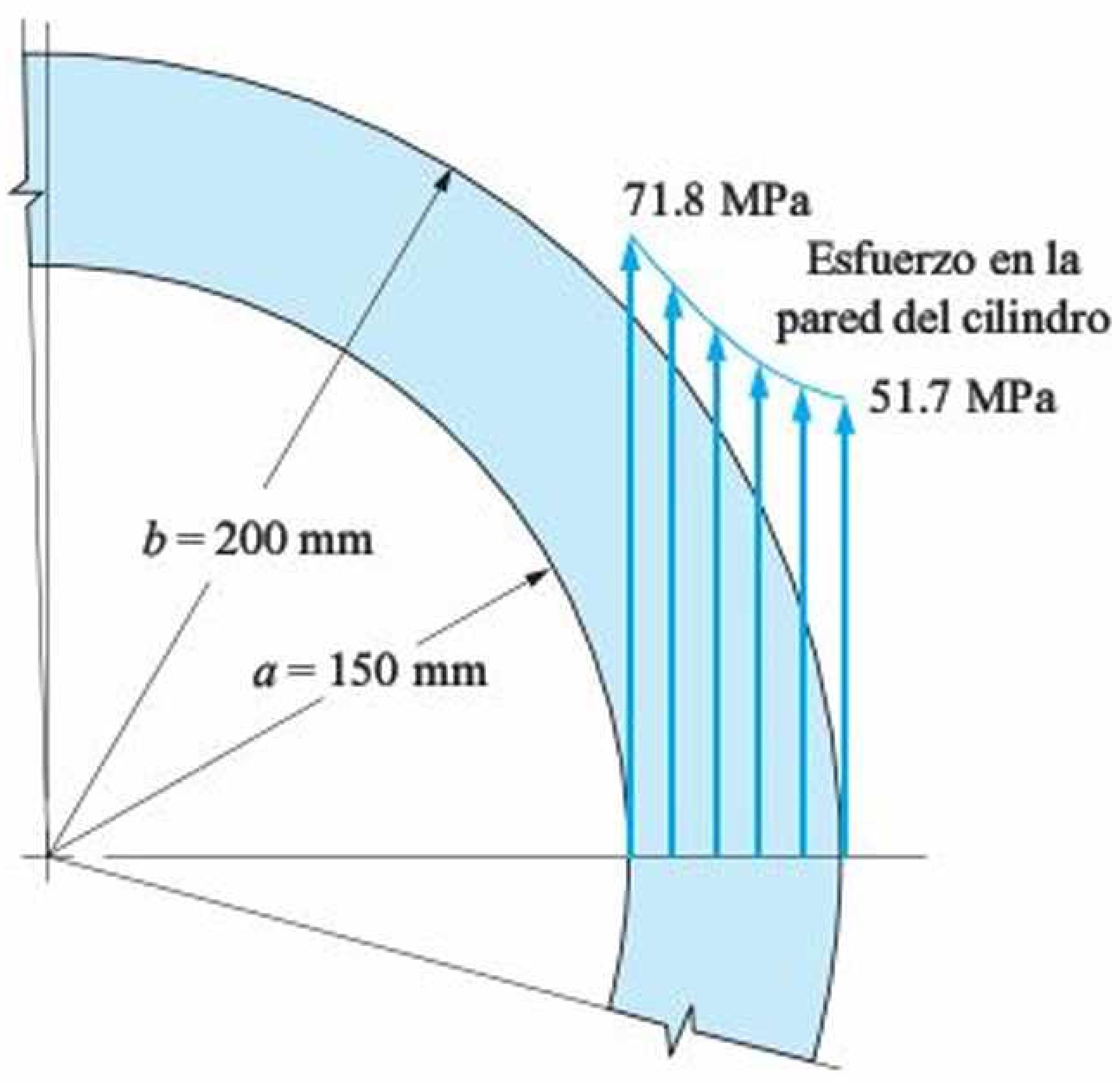


FIGURA 12–7 Variación del esfuerzo tangencial en la pared del cilindro de pared gruesa del ejemplo 12–6.

Problema de ejemplo 12–7 Diseñe un cilindro de titanio envejecido Ti–6A1–4V para almacenar gas natural comprimido a 7500 psi. El diámetro interno debe ser de 24.00 in para obtener el volumen necesario. El esfuerzo de diseño tiene que ser 1/6 de la resistencia máxima del titanio.

Solución Objetivo Diseñar el cilindro.

Datos Presión $= p = 7500$ psi. $D_i = 24.0$ in

Titanio Ti-6A1–4V; $s_u = 170$ ksi (apéndice A–15)

Análisis Use el procedimiento B de esta sección.

Resultados ***Paso 1.*** Sea $D_m = 24.00$ in.

Paso 2. Suponga que el cilindro es de pared delgada.

Paso 3. Esfuerzo de diseño,

$$\sigma_d = s_u/6 = (170\,000\,\text{psi})/6 = 28\,333\,\text{psi}$$

Paso 4. Use la ecuación (12–20) para calcular el valor nominal de t.

$$t = \frac{pD_m}{2\sigma_d} = \frac{(7500\,\text{psi})(24.0\,\text{in})}{2(28\,333\,\text{psi})} = 3.18\,\text{in}$$

Paso 5. Prueba #1: $D_i = 24.00$; $t = 3.50$ in; $D_o = D_i + 2t = 31.00$ in

Paso 6. $D_m = D_i + t = 24.00 + 3.50 = 27.50$

Paso 7. $D_m/t = 27.50/3.50 = 7.86 < 20$; pared gruesa

Paso 8. Este paso no se aplica.

Paso 9. Use la ecuación para σ_1 de la tabla 12–1.

$$a = D_i/2 = 24.00/2 = 12.00\,\text{in}$$
$$b = D_o/2 = 31.00/2 = 15.50\,\text{in}$$
$$\sigma_1 = \frac{p(b^2 + a^2)}{(b^2 - a^2)} = \frac{(7500\,\text{psi})(15.50^2 + 12.00^2)}{(15.50^2 - 12.00^2)}$$

$\sigma_1 = 29\,940$ psi Ligeramente elevado. Repita los pasos 5 y 9.

Paso 5. Incremente $t = 3.75$ in; $D_o = D_i + 2t = 31.50$ in; el cilindro es de pared gruesa.

Paso 9. Use la ecuación para σ_1 de la tabla 12–1.

$$a = D_i/2 = 24.00/2 = 12.00\,\text{in}$$
$$b = D_o/2 = 31.50/2 = 15.75\,\text{in}$$

Entonces $\sigma_1 = 28\,250$ psi. Este valor es menor que el esfuerzo de diseño. Es correcto.

Comentario El espesor de pared es bastante grueso, lo que daría por resultado un cilindro pesado. Considere utilizar una esfera y un material más resistente para el recipiente. Una esfera compuesta puede dar por resultado un diseño más ligero.

12–7 HOJA DE CÁLCULO PARA ANALIZAR ESFERAS Y CILINDROS DE PARED GRUESA

El cálculo requerido para analizar esferas y cilindros de pared gruesa puede ser tedioso. Las ecuaciones mostradas en la tabla 12–1 requieren numerosos cálculos. El uso de hojas de cálculo, programas de computadora, calculadoras programables o sistemas de álgebra computarizados simplifica su trabajo de manera significativa.

La figura 12–8 muestra un ejemplo de hoja de cálculo que analiza esferas y cilindros de pared gruesa para determinar esfuerzos tangencial, longitudinal y radial máximos. Sólo algunos de los datos que aparecen en las áreas sombreadas tienen que ser introducidos por el usuario.

Si el recipiente es una esfera, los resultados se muestran a la mitad de la hoja; si es un cilindro, los esfuerzos máximos se muestran justo debajo de la mitad de la hoja.

En la parte inferior de la hoja de cálculo también se incluye el cálculo del esfuerzo tangencial en un cilindro como en función de la posición radial dentro de la pared del cilindro. Esto requiere que el usuario especifique los valores de los radios para los que se están realizando los cálculos.

Los datos muestra incluidos en la hoja de cálculo son los mismos que se utilizaron en el problema de ejemplo 12–6 para un cilindro de pared gruesa, y en la figura 12–7 se muestra una gráfica de la distribución del esfuerzo tangencial en la pared del cilindro.

Se pueden hacer adiciones a la hoja de cálculo de modo que pueda ser utilizada para diseñar recipientes a presión utilizando los procedimientos A, B y C descritos con anterioridad en este capítulo. Lo instamos a producir tales auxiliares de diseño.

FIGURA 12–8 Hoja de cálculo para analizar esfuerzos en esferas y cilindros de pared gruesa.

ESFUERZOS EN CILINDROS Y ESFERAS DE PARED GRUESA

DATOS REQUERIDOS:		
Presión $= p =$	20100kPa	
Ri $= a =$	150 mm	
Ro $= b =$	200 mm	
Espesor de pared $= t =$	50 mm	
Diám. medio $= Dm =$	350 mm	
Relación: $Dm/t =$	7.0	

Si la relación < 20, el recipiente es de pared gruesa

Análisis de una esfera

Esfuerzo tangencial máximo	30.05 MPa	En la superficie interna
Esfuerzo radial máximo	–20.10 MPa	En la superficie interna

Análisis de un cilindro

Esfuerzo tangencial máximo	71.79 MPa	En la superficie interna
Esfuerzo longitudinal máximo	25.84 MPa	Uniforme en toda la pared
Esfuerzo radial máximo	–20.10 MPa	En la superficie interna

Esfuerzo vs. radio – Esfuerzo tangencial únicamente

Radio	***Esfuerzo***	
150	71.79 MPa	En la superficie interna
160	66.22 MPa	
170	61.61 MPa	
180	57.75 MPa	
190	54.48 MPa	
200	51.69 MPa	En la superficie externa

12–8 ESFUERZOS CORTANTES EN CILINDROS Y ESFERAS

Vimos que la presión interna en un recipiente a presión produce esfuerzos de tensión normales en las paredes del cilindro o esfera. Si éstos son los únicos esfuerzos externamente generados en el recipiente, serán los esfuerzos principales en cualquier elemento de superficie plano. No se aplica torsión al recipiente y no existen apoyos externos o penetraciones en la pared del recipiente en el área de interés.

La figura 12–9 muestra el elemento sometido a esfuerzo en la superficie de un cilindro junto con el círculo de Mohr de dicho elemento. Se muestra que habrá esfuerzos cortantes que actúan a ángulos diferentes de 0° o 90° con respecto al eje x donde actúa el esfuerzo longitudinal. El esfuerzo cortante máximo en el plano del elemento es $\sigma_2/2$ y ocurre a un ángulo de 45° con respecto al eje esfuerzo principal máximo.

Como ambos esfuerzos principales son de tensión, éste es un caso clásico en que ambos esfuerzos principales tienen el mismo signo. En la sección 10–11 se observó, durante la exposición del círculo de Mohr, que en esos casos es necesario considerar la combinación del esfuerzo principal máximo con el esfuerzo perpendicular al elemento sometido a esfuerzo superficial para determinar el esfuerzo cortante máximo real en el elemento. El esfuerzo perpendicular al plano del cilindro, σ_3, es cero en la superficie. En ese caso, como se muestra en la figura 12–9, se traza un círculo de Mohr complementario con σ_1 y σ_3 sobre el diámetro horizontal. Con esta combinación, el esfuerzo cortante máximo real es $\sigma_1/2$ y actúa en el plano x–z, a 45° con respecto al eje del esfuerzo principal máximo.

Los recipientes a presión en general se fabrican con placas planas laminadas en forma cilíndrica y soldadas a lo largo de la junta. El diseño de las soldaduras y la resistencia del material cerca de las soldaduras son parámetros de diseño críticos. La junta con frecuencia es longitudinal por conveniencia de la operación de laminado. El esfuerzo en la junta sería el esfuerzo tangencial, el cual es el esfuerzo principal máximo.

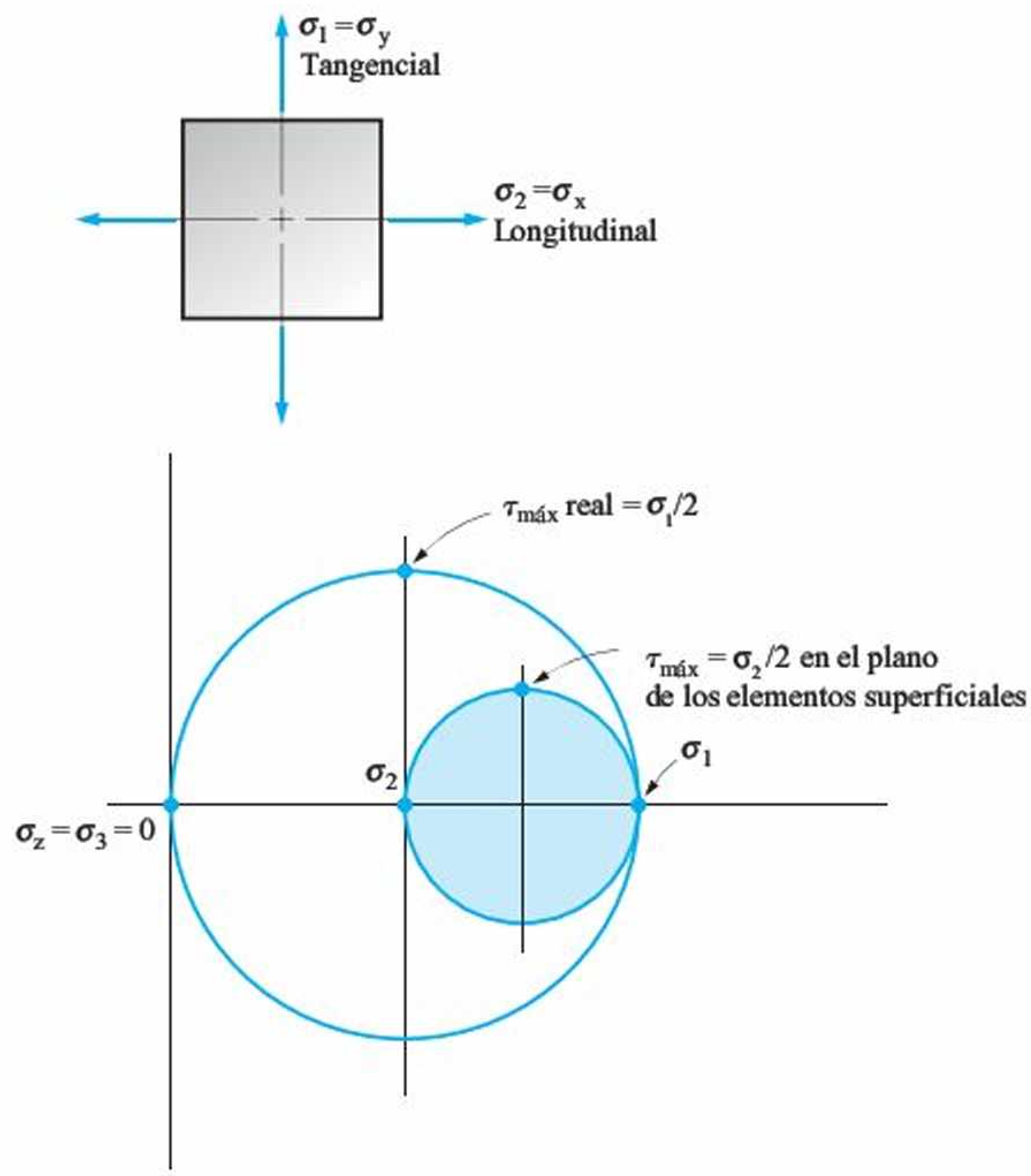


FIGURA 12–9 Esfuerzos principales y esfuerzos cortantes en un cilindro presurizado.

Otro método de construir la forma cilíndrica es laminar la lámina plana a lo largo de una trayectoria helicoidal como se ilustra en la figura 12–10. En seguida se suelda toda la junta helicoidal. Esto es particularmente atractivo cuando se fabrican tanques o tubos relativamente largos y grandes. En este caso, tendrá que conocer la condición de esfuerzo en un elemento alineado con la junta helicoidal. También se puede utilizar el círculo de Mohr para esa tarea como se demuestra en el problema de ejemplo 12–8.

Problema de ejemplo 12–8

La figura 12–10 muestra un tanque que se tiene que construir laminando láminas planas de acero AISI 1040 estirado en frío en la forma helicoidal mostrada, donde ésta forma un ángulo de 65° con el eje horizontal del tanque. La presión interna de diseño es de 1750 kPa. El diámetro interno especificado es de 900 mm para crear la capacidad deseada en el tanque. a) Especifique un espesor adecuado para la lámina de acero de modo que produzca un factor de diseño de 4 basado en la resistencia a la cedencia, o para que produzca un factor de diseño de 6 basado en la resistencia máxima. b) Para el diseño final del tanque, determine la condición de esfuerzo en un elemento alineado con la junta.

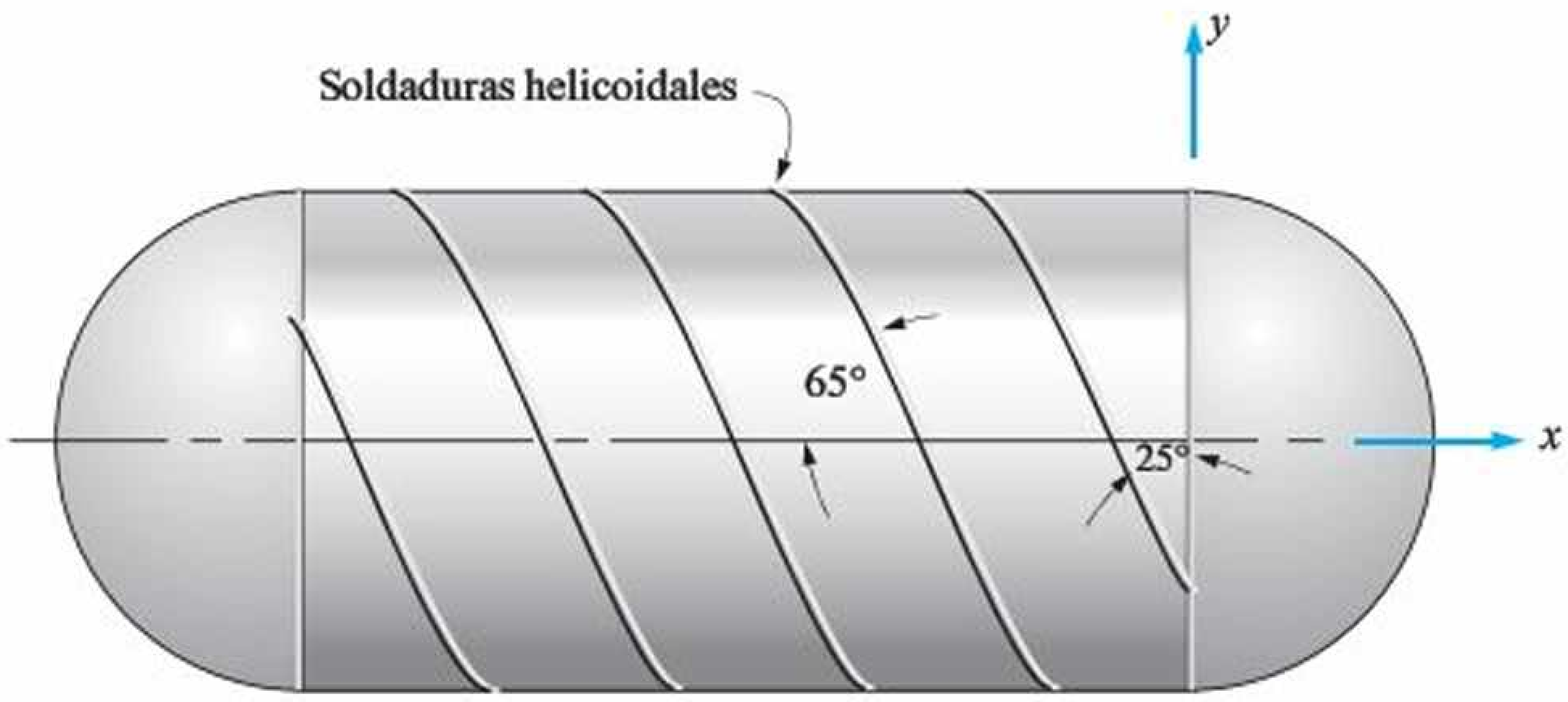


FIGURA 12–10 Tanque del ejemplo 12–8.

Solución

Objetivo: Especificar el espesor del tanque y determine el esfuerzo en la soldadura.

Datos: Diseño del tanque mostrado en la figura 12–10. $D_i = 900$ mm. $p = 1750$ kPa.

Acero AISI 1040 CD, $s_y = 565$ MPa, $s_u = 669$ MPa

$\sigma_d = s_y/4$ o $\sigma_d = s_u/6$, el que sea menor.

Análisis: Use el procedimiento B de la sección 12–6 para diseñar el tanque. Luego utilice el círculo de Mohr para determinar el esfuerzo en la soldadura.

Resultados:

Pasos 1 y 2. En primer lugar suponga $D_m = 900$ mm. Use la ecuación (12–20).

Paso 3. Calcule dos esfuerzos de diseño y especifique el valor menor.

$$\sigma_d = s_y/4 = (565\,\text{MPa})/4 = 141.3\,\text{MPa}$$
$$\sigma_d = s_u/6 = (669\,\text{MPa})/6 = 111.5\,\text{MPa}$$

Paso 4. Resuelva para el espesor de pared mínimo requerido, t. Sea $\sigma_{\text{máx}} = \sigma_d$.

$$\sigma_{\text{máx}} = (pD_m)/(2t) \text{ ecuación (12–20)}$$

$$t = \frac{pD_m}{2\sigma_{\text{máx}}} = \frac{(1750 \times 10^3\,\text{Pa})(900\,\text{mm})}{2(111.5 \times 10^6\,\text{Pa})} = 7.06\,\text{mm}$$

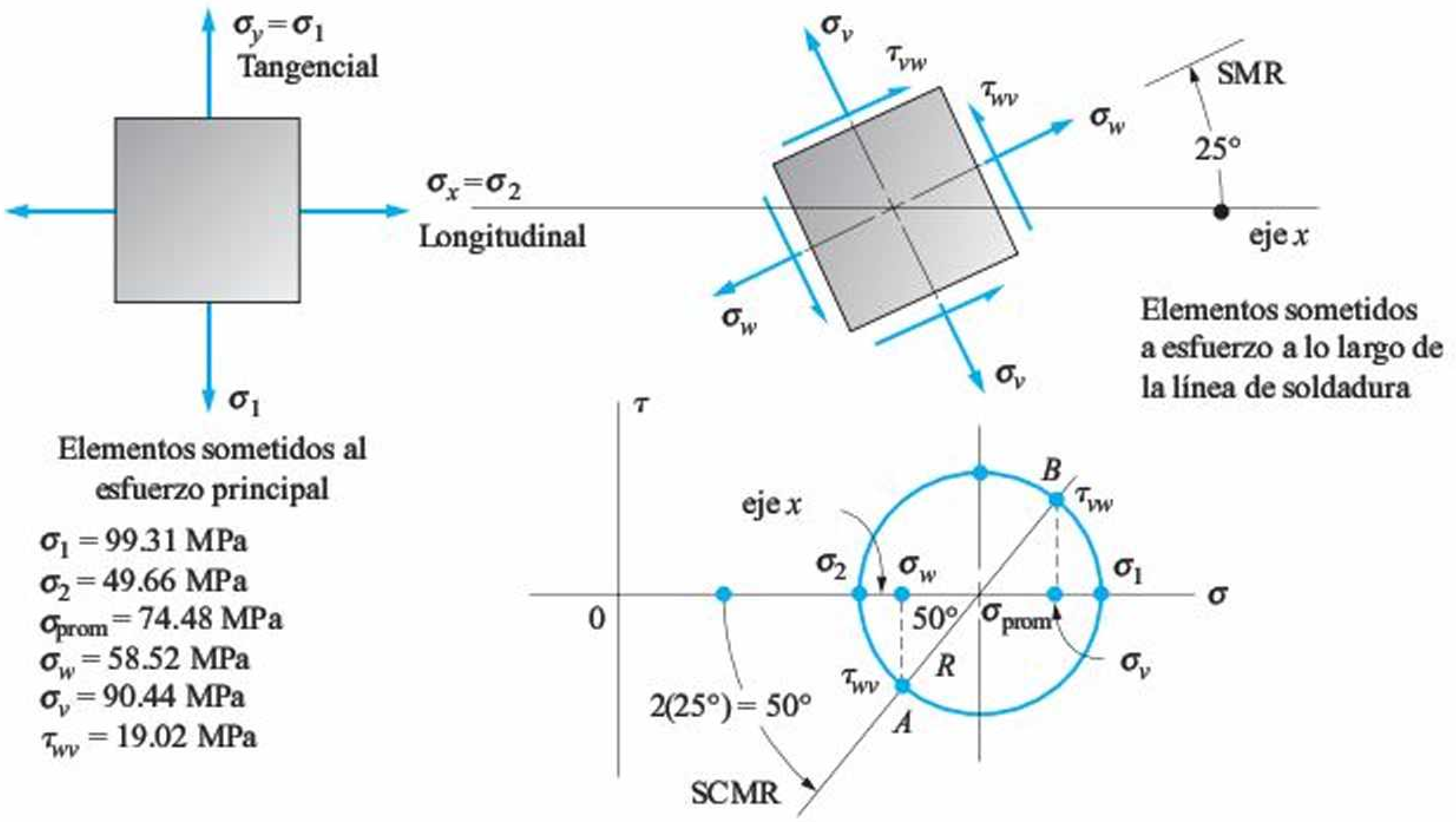


FIGURA 12–11
Elementos sometidos a esfuerzo y círculo de Mohr para el ejemplo 12–8.

Paso 5. Especifique $t = 8.00$ mm. Entonces,

$$D_i = 900\,\text{mm}.$$
$$D_o = D_i + 2t = 900 + 2(8.0) = 916\,\text{mm}$$

Paso 6. $D_m = D_i + t = 900 + 8.0 = 908$ mm
Paso 7. $D_m/t = (908\text{ mm})/(8.0\text{ mm}) = 113.5$
Paso 8. $D_m/t > 20$. El círculo es de pared muy delgada.

Análisis con el círculo de Mohr. Vea la figura 12–11.
El esfuerzo principal máximo real, σ_1, es

$$\sigma_1 = (pD_m)/(2\,t)$$
$$\sigma_1 = \frac{(1750 \times 10^3\,\text{Pa})(908\,\text{mm})}{2(8.0\,\text{mm})} = 99.31 \times 10^6\,\text{Pa} = 99.31\,\text{MPa}$$

El esfuerzo principal mínimo real, σ_2, en este caso especial es:

$$\sigma_2 = (pD_m)/(4t) = \sigma_1/2 = 49.66\,\text{MPa}$$

El elemento sometido a esfuerzo en el plano del tanque se muestra en la figura 12–11 con $\sigma_2 = \sigma_x$ y $\sigma_1 = \sigma_y$. No existe ningún esfuerzo cortante en el elemento con esta orientación.

El círculo de Mohr también se muestra en la figura 12–11. Tenemos que determinar el esfuerzo en un elemento girado 25° en sentido contrario al sentido de las manecillas del reloj con respecto al eje x.

En el círculo de Mohr, el eje x es la línea que va del centro del círculo a σ_2. Luego lo giramos en sentido contrario al sentido de las manecillas del reloj un ángulo de 2(25°) = 50° para determinar el punto del círculo que representa la condición de esfuerzo a lo largo de la soldadura. Ese punto se designa A en el círculo, y su coordenadas son σ_w, τ_{wv}. En este caso utilizamos el subíndice w para indicar la dirección perpendicular a la línea de soldadura y el subíndice v para indicar la dirección a lo largo de la línea de soldadura. Entonces τ_{wv} es el esfuerzo cortante perpendicular a la dirección w y paralelo a la dirección v.

Con la geometría del círculo determinamos

$$\sigma_w = \sigma_{prom} - R\cos(50°).$$

donde R es el radio del círculo. Determinamos R con

$$R = (\sigma_1 - \sigma_2)/2 = (99.31 - 49.66)/2 = 24.83 \text{ MPa}$$

Entonces

$$\sigma_w = \sigma_{prom} - R(\cos 50°) = 74.48 - (24.83)(\cos 50°) = 58.52 \text{ MPa}$$

Además,

$$\tau_{wv} = R \operatorname{sen}(50°) = (24.83)(\operatorname{sen} 50°) = 19.02 \text{ MPa}$$

Por último, determinamos el esfuerzo normal paralelo a la dirección de la soldadura. Se encuentra a 180° del punto A, llamado punto B en el círculo. Con un razonamiento similar,

$$\sigma_v = \sigma_{prom} + R(\cos 50°) = 74.48 + (24.83)(\cos 50°) = 90.44 \text{ MPa}$$

El elemento sometido a esfuerzo final orientado en la dirección de la línea de soldadura se muestra en la figura 12–11.

Resumen

El diseño final se resume como sigue.

El tanque es de acero AISI 1040 estirado en frío

$D_i = 900$ mm, $D_o = 916$ mm, $t = 8.0$ mm.

El esfuerzo normal perpendicular a la línea de soldadura es $\sigma_w = 58.52$ MPa.

El esfuerzo normal paralelo a la línea de soldadura es $\sigma_v = 90.44$ MPa.

El esfuerzo cortante paralelo a la línea de soldadura es $\tau_{wv} = 19.02$ MPa.

12–9 OTRAS CONSIDERACIONES DE DISEÑO PARA RECIPIENTES A PRESIÓN

Las técnicas de diseño y análisis de recipientes a presión presentadas hasta ahora han tenido que ver sólo con el análisis de esfuerzo de cilindros y esferas ideales sin considerar penetraciones y otros cambios de geometría. Desde luego, la mayoría de los recipientes a presión prácticos incorporan varios tipos de elementos que hacen que se aparten de la forma ideal. La figura 12–12 muestra un dibujo generado por computadora de un recipiente como ése. Consta de dos secciones cilíndricas de diferentes diámetros, una sección cónica de transición entre ellas, extremos abovedados esféricos de dos diámetros y tres penetraciones en el casco con diferentes geometrías.

Con frecuencia se aplican cargas externas que producen esfuerzos que se combinan con el esfuerzo creado por la presión interna. Por ejemplo,

- Un recipiente a presión esférico o cilíndrico en general dispone de una o más lumbreras para llenarlo o vaciarlo. Las lumbreras a menudo se sueldan en el recipiente e interrumpen la geometría y modifican las propiedades del material cerca de la soldadura.
- Algunos recipientes a presión utilizados para reacciones químicas u otras aplicaciones de procesamiento de materiales contienen mirillas para observar el proceso. Las mirillas pueden contener bridas para detener la ventana transparente.
- Los recipientes cilíndricos con frecuencia se fabrican con extremos abovedados o semiesféricos para crear un diseño óptimo resistente a la presión interna. Pero, como el esfuerzo tangencial en el extremo esférico es menor que aquél en cilindro, se deberá prestar una especial atención al diseño en la intersección de los extremos con la parte cilíndrica recta.

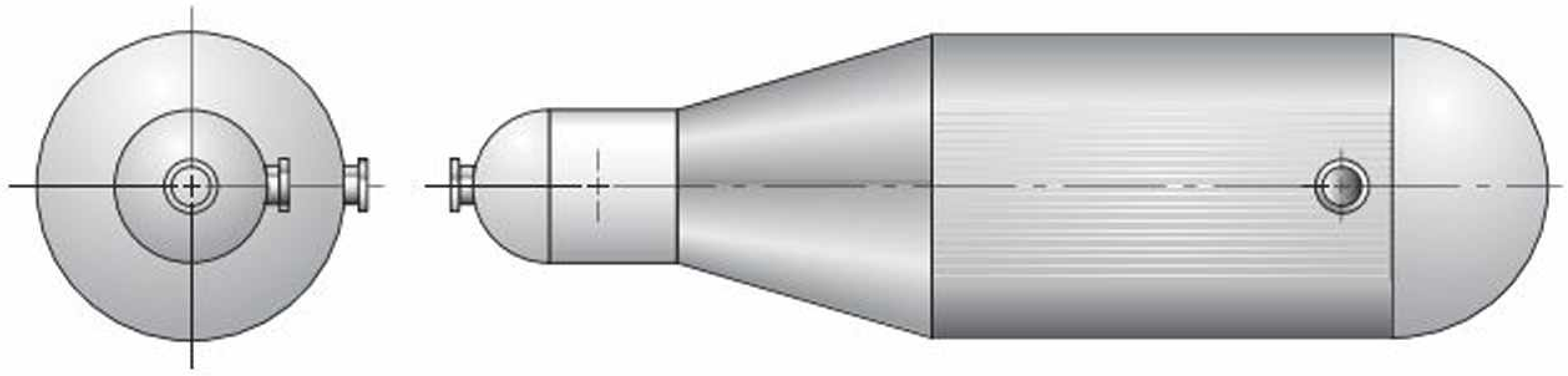


FIGURA 12–12
Dibujo generado por computadora de un recipiente a presión con varios cambios de geometría.

- Los cilindros grandes pueden disponer de bandas de refuerzo o nervaduras instaladas en el interior o el exterior para reforzarlos estructuralmente.
- Los cilindros y esferas grandes pueden experimentar esfuerzos grandes creados por el peso del recipiente y su contenido, que se combinan con los esfuerzos producidos por la presión interna. Por ejemplo, un tanque cilíndrico relativamente largo colocado en posición horizontal y apoyado cerca de sus extremos se ve sometido a esfuerzos flexionantes; un tanque cilíndrico colocado con su eje vertical se ve sometido a un esfuerzo de compresión axial.
- Los cilindros y esferas grandes deben contar con apoyos que transmitan el peso del recipiente y su contenido al piso o la tierra. Cerca de los apoyos existen condiciones de esfuerzo especiales.
- Los recipientes a presión utilizados en equipo de transporte terrestre con frecuencia experimentan cargas dinámicas por detención, arranque, movimiento del producto en su interior y vibraciones provocadas por carreteras irregulares.
- Los recipientes a presión en aviones y vehículos espaciales se someten a fuerzas de aceleración elevadas durante aterrizajes, despegues, lanzamientos y maniobras rápidas.
- Las juntas entre las sección de recipientes a presión formadas con dos o más piezas con frecuencia contienen discontinuidades geométricas que requieren técnicas de análisis especiales y una cuidadosa fabricación.

Fuentes de información adicionales sobre recipientes a presión. Las técnicas de análisis en las condiciones antes mencionadas no se abordan en este libro. Las listas de referencias y sitios de Internet que aparecen al final de este capítulo ofrecen una amplia variedad de estándares, recomendaciones y auxiliares computacionales para garantizar el diseño seguro y económico de recipientes a presión. Las exposiciones siguientes ofrecen anotaciones sobre las referencias y sitios de Internet que aparecen al final de capítulo.

1. La referencia principal en cuanto a estándares de diseño de recipientes a presión en Estados Unidos es la referencia 2, el *ASME Boiler and Pressure Vessels Code* (*Código ASME para Calderas y Recipientes a Presión*). Se deberá utilizar la revisión más actualizada. Sus secciones principales son:
   a. I Calderas de potencia o energía
   b. II Materiales
   c. III Reglamentos de construcción de componentes de plantas nucleares
   d. IV Calderas de calentamiento
   e. V Exámenes no destructivos
   f. VI Reglamentos recomendados para el mantenimiento y operación de calderas de calentamiento
   g. VII Recomendaciones para el mantenimiento de calderas de potencia
   h. VIII Recipientes a presión
   i. IX Calificaciones de soldadura y soldadura fuerte o de latón

j. X Recipientes a presión de plástico reforzados con fibras

k. XI Reglamentos de inspección en servicio de componentes de plantas de energía nuclear

l. XII Reglamentos de construcción y servicio continuo de tanques de transporte

Numerosos seminarios, cursos cortos y programas de entrenamiento especializado basados en el código BPV están disponibles y muchas firmas proporcionan servicios de diseño, pruebas y construcción certificados en cuanto a la aplicación del código. La sección VIII, *Recipientes a presión*, es el más pertinente a este libro. Explore el sitio de Internet 1 para obtener más información. El apego estricto a estos estándares es esencial para garantizar la protección de la vida y propiedad.

2. Los sistemas de tuberías funcionan como recipientes a presión junto con sus tanques, calderas, intercambiadores de calor y otros dispositivos especiales sometidos a presión. En los siguientes estándares se incluyen requerimientos especializados para materiales, componentes (tales como bridas, accesorios de conexión, válvulas, etc.), diseño, fabricación, ensamble, erección, examen, inspección y pruebas de tuberías.
   a. La referencia 3, del estándar ASME B31.1 proporciona estándares para sistemas de tuberías de plantas eléctricas, plantas industriales y plantas de calefacción central que por lo general operan a altas temperaturas y presiones de moderadas a elevadas.
   b. La referencia 4, del estándar ASME B31.3, se ocupa de tubería que por lo general se utiliza en refinerías de petróleo, plantas químicas, plantas farmacéuticas, plantas textiles, plantas que fabrican papel, semiconductores y plantas de procesamiento, y terminales de embarque de líquidos o productos gaseosos.
3. Las referencias 1, 5–8, 10, 11 y 14 son manuales y libros de instrucciones que amplían los estándares ASME y que proporcionan ejemplos de las aplicaciones y provisiones de los estándares.
4. La referencia 9 es un parte de un manual muy completo para ingenieros, contratistas y vendedores que diseñan o surten equipo que se utiliza en los Lawrence Livermore Nacional Laboratorios, uno de los principales laboratorios de investigación del gobierno de los Estados Unidos. El documento sobre *recipientes a presión y diseño de sistemas* es la parte más pertinente del manual para este libro.
   a. La sección 4.0 aborda los controles de diseño de recipientes a presión, incluida la selección de los materiales, las especificaciones de materiales (aceros al carbón y de aleación, aceros inoxidables y titanio), consideraciones de diseño, presión de trabajo máxima permisible (MAWP, *maximum allowable working pressure*), presión máxima de operación (MOP, *maximum operating presure*), presiones de prueba y recomendaciones de cálculo de recipientes de pared delgada y gruesa, y cierres de extremos.
   b. La sección 5.3 describe los requisitos para recipientes que contendrán materiales tóxicos, radiactivos, corrosivos o inflamables a presión.
   c. La sección 6.3 proporciona recomendaciones y estándares para el soporte de tubos y tuberías.
   d. La sección 6.6 describe dispositivos de alivio de presión que limitan el nivel de presión en un recipiente o sistema de tuberías.

   El manual puede ser consultado y descargado del sitio de Internet 3.
5. Las referencias 12 y 13 proporcionan más información, derivación y extensión de los métodos analíticos y fórmulas utilizadas en este libro para el análisis de esfuerzo y diseño de recipientes a presión y sistemas de tuberías y sus componentes.
6. Si bien el código ASME es el que más se utiliza en Estados Unidos, el sitio de Internet 2 describe un estándar correspondiente utilizado en Gran Bretaña y en algunas otras partes de Europa. Existen estándares de otras partes del mundo y deberán ser consultados cuando se surta equipo a dichas áreas.

7. Los sitios de Internet 4–9 conectan varios proveedores de paquetes de “software” de diseño de recipientes a presión que realizan los complejos cálculos requeridos para analizar y diseñar recipientes a presión y sus accesorios. La mayoría dispone de capacidad CA tridimensional, la habilidad de exportar los dibujos de diseño a otros sistemas CAD y análisis completos del casco, anillos de refuerzo, varios estilos de cabezales, toberas, lumbreras, bridas y juntas entre elementos. Todos los métodos de análisis de esfuerzo están correlacionados con los códigos y estándares ASME y consideran las propiedades de materiales, las temperaturas de diseño para recipientes, soldaduras y requisitos de prueba formularios de documentación que tienen que se completados y archivados junto con los diseños de productos.
8. Los sitios de Internet 10–14 conectan a una pequeña muestra de compañías geográficamente dispersas en Estados Unidos que ofrecen diversos productos y servicios en el diseño y la fabricación de recipientes a presión, tanques y sistemas de tuberías. Estos sitios pueden ser útiles para estudiantes y otros usuarios de este libro que tengan experiencia limitada con los detalles de tales sistemas para ayudarlos a visualizar su complejidad.

12–10 RECIPIENTES A PRESIÓN COMPUESTOS

Las aplicaciones y ejemplos presentados en este capítulo resaltaron el uso de metales para las paredes estructurales de recipientes a presión. Con frecuencia también se utilizan otros materiales, en particular materiales compuestos y plásticos reforzados. Las características especiales de estos materiales deben ser entendidas cuando se aplican a recipientes a presión.

Los materiales compuestos de alta resistencia son muy adecuados para la fabricación de recipientes a presión. El hecho de que los esfuerzos principales sean tangenciales (anulares) o longitudinales obligan al diseñador de recipientes a presión a alinear las fibras compuestas en la dirección de los esfuerzos máximos. La envoltura circunferencial de una cinta preimpregnada alrededor de un casco de metal o plástico reduce significativamente el peso en comparación con un diseño que utiliza sólo metal o plástico. Para resistir los esfuerzos longitudinales producidos por la presión interna junto con otras fuerzas externas, algunos tanques se envuelven helicoidalmente además de la envoltura circunferencial. El espesor y dirección de las capas pueden adecuarse a las cargas específicas esperadas en una aplicación particular.

Los materiales seleccionados para recipientes a presión compuestos incluye fibras de vidrio E/resina epóxica, vidrio estructural/resina epóxica y carbón/resina epóxica. El costo es un factor importante en la especificación del material.

Se debe tener cuidado para garantizar que el material compuesto se adhiere bien y se adapta a la geometría de cualquier casco utilizado en el recipiente. Se requiere especial atención en los extremos abovedados de los cilindros a presión y en las lumbreras. Éstas en general se colocan en la parte superior o inferior de los polos de los extremos abovedados de modo que las fibras compuestas sean continuas. La colocación de las lumbreras en los costados de un tanque interrumpiría la integridad de los devanados de filamento. Además, la geometría del tanque con frecuencia se diseña para producir esfuerzos gradualmente variables en las juntas entre la parte cilíndrica y los extremos abovedados. El espesor de las capas compuestas también se hace que cambie de acuerdo con los esfuerzos esperados.

Las aplicaciones primordiales de los recipientes a presión compuestos incluyen aquellas en las cuales un peso liviano es un importante objetivo de diseño. El tanque de suministro de aire de aparatos de respiración autónoma (SCBA, *self–contained breathing apparatus*) utilizados por bomberos es un buen ejemplo porque la ligereza del tanque permite más movilidad y menos fatiga. Las reducciones de peso en aplicaciones espaciales y aeronáuticas permiten mayores cargas útiles o un mejor desempeño de los vehículos espaciales.

El desarrollo de vehículos terrestres que utilizan gas natural comprimido (CNG, *compressed natural gas*) o hidrógeno requiere producir cilindros compactos livianos para almacenar el combustible. Se están utilizando unidades de demostración que incorporan tanques de almacenamiento de combustible hechos de compuestos avanzados en autobuses, flotillas de vehículos comerciales, automóviles, vehículos utilitarios e incluso en fuentes de poder de computadoras portátiles, sistemas de detección de control remoto, aplicaciones aeroespaciales y equipo de manufactura. Las reducciones del peso pueden ser significativas.

REFERENCIAS

1. Aluminum Association, *Aluminum Design Manual*, *Specifications for Aluminum Structures*. Aluminum Association, Washington, D.C., 2005.
2. American Society of Mechanical Engineers (ASME), *ASME Boiler and Pressure Vessel Code*, ASME, Fairfield, NJ, 2007.
3. American Society of Mechanical Engineers (ASME), *ASME Standard B31.1–2007 Power Piping*. ASME Fairfield, NJ, 2007.
4. American Society of Mechanical Engineers (ASME), *ASME Standard B31.1–2006 Process Piping*, ASME Fairfield, NJ, 2006.
5. Ball, B. E. y W. J. Carter, *CASTI Guidebook to ASME Section VIII Div. 1 Pressure Vessels*, 4ª ed., CASTI Publishing, Edmonton, Canadá, 2005.
6. Chattopadhyay, S. *Pressure Vessels: Design and Practice*, CRC Press, Boca Raton, FL., 2004.
7. Ellenberger, P., R. Chuse y B. E. Carson, *Pressure Vessels*, McGraw–Hill, Nueva York, 2004.
8. Farr, J. R. y M. H. Jalad, *Guidebook for the Design of ASME Section VIII Pressure Vessels*, 3ª ed., American Society of Mechanical Engineers, Fairfield, NJ, 2006.
9. Lawrence Livermore Nacional Laboratory (LLNL), *Environment Safety and Health Manual*, Volume II, Part 18: Pressure/Noise/ Hazardous Atmospheres, Document 18.2 *Pressure Vessel and System Design*, LLNL, Livermore, CA, 2005. (Visite el sitio de Internet 3.)
10. Moss, D. R., *Pressure Vessel Design Manual*, 3ª ed., Elsevier, Nueva York, 2003.
11. Rao, K. R. (ed.), *Companion Guide to ASME Boiler & Pressure Vessel Code*, Volume 1 (2001), Volume 2 (2006), Volume 3 (2006). American Society of Mechanical Engineers, Nueva York.
12. Young W. C. y R. D. Cook, *Advanced Mechanics of Materials*, 2ª ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1999.
13. Young W. C. y R. G. Budynas, *Roark's Formulas for Stress and Strain*, 6ª ed., McGraw–Hill, Nueva York, 2002.
14. Zeman, F. L., F. Rsuscher y S. Schindler, *Pressure Vessel Design: The Direct Route*, Elsevier, Nueva York, 2006.

SITIOS DE INTERNET

Información general sobre recipientes a presión

1. American Society of Mechanical Engineers www.asme.org/ Codes/Publications/BPVC/ Una lista de recursos ASME disponibles relacionados con el *ASME Boiler & Pressure Vessel Code.*
2. British Standards Insitution www.bsi–global.com/PSS/About/ index.xalter Esta página es la descripción total de la BSI con vínculos a fuentes de información sobre normas emitidas por la BSI. Más pertinente para este capítulo es la norma BS EN 13445, *Unfired Pressure Vessels*, una norma ampliamente utilizada en Europa.
3. Lawrence Livermore Nacional Laboratory (LLNL) www. llnl.gov.es_and_h/hsm/doc_18.02.html Una parte de LLNL'a Environment Safety and Health Manual, Volume II, Part 18: Noise Hazardous Atmospheres, Document 18.2. *Pressure Vessel and System Design*, 2005. Este documento es un repaso general de un riguroso proceso de diseño de recipientes a presión, aun cuando está enfocado en la misión del LLNL. Las secciones 4, 5, 6 son más pertinentes en cuanto a consideraciones de diseño.
4. Computer Engineering, Inc. www.computereng.com/products/ advanced_pressure_vessel/ Este programa realiza cálculos de acuerdo con la ASME Section VIII del ASME Boiler & Pressure Vessel Code, incluido el recipiente básico, toberas, cabezales y accesorios.
5. Algor–Center for Mechanical Design Technology www.algor. com/products/PVDesi1475/default.asp Productor del programa PV/Designer que facilita el diseño eficiente de recipientes a presión de acuerdo con el ASME Boiler & Pressure Vessel Code.
6. COADE Engineering Software http://coade.com Productor del programa PVElite de diseño de recipientes a presión y el diseño de torres altas de proceso de acuerdo con el ASME Boiler & Pressure Vessel Code. El programa acompañante CODECALC ayuda en el diseño de intercambiadores de calor, bridas, toberas y tuberías de acuerdo con el código ANSI B31.3.
7. Heat Tranfer Consultants, Inc. ww.htcsoftware.com Productor del programa PVX–2007 Pressure Vessel & Heat Exchanger.
8. Codeware, Inc. www.codeware.com Productor del programa COM–PRESS para el diseño de recipientes a presión de acuerdo con el ASME Boiler & Pressure Vessel Code.
9. Chempute Software www.chempute.com Proveedor de programas para las disciplinas química, mecánica y otras disciplinas para las industrias de procesamiento químico, generación de energía y refinación de petróleo, incluidos varios paquetes que tienen que ver con recipientes a presión y sistemas de tuberías.

Fabricantes de recipientes a presión

La lista siguiente es una muestra de compañías que ofrecen una amplia variedad de servicios en el diseño y fabricación de recipientes a presión, tanques y sistemas de tuberías.

10. PMF Industries, Inc., www.pmfind.com Productor de recipientes a presión de acero inoxidable para esterilización médica y otras aplicaciones sanitarias, localizado en Williasport, PA.
11. West Metal Works, Inc. www.westmetalworks.com Productor de recipientes a presión de acuerdo con el código ASME junto con otros contenedores y fabricaciones especiales, localizado en Buffalo, NY.
12. Bay Tank & Manufacturing Co., Inc. www.baytankfab.com Productor de recipientes a presión, reactores, columnas, tanques de almacenamiento, chimeneas, hornos giratorios, depuradores y otros productos de acuerdo con el código ASME para las industrias petroquímica, farmacéutica, de generación de energía y otras industrias, localizado en Panamá City, FL.
13. Enerfab www.enerfab.como Productor de recipientes a presión, columnas, reactores, fermentadores, sistemas de tuberías y sistemas completos de procesamiento que utilizan una amplia variedad de materiales de acuerdo con el código ASME; basado en Cincinnati, OH, con operaciones en muchos otros lugares.
14. Roy E. Hanson, Jr. Manufacturing www.hansontank.com Hanson Tank fabricantes de recipientes a presión, tanques de almacenamiento de agua, receptores de aire, tanques de propano y una amplia variedad de otros productos de acuerdo con el código ASME; localizado en Los Ángeles, CA.

PROBLEMAS

12–1.M Calcule el esfuerzo en una esfera de 200 mm de diámetro externo y 184 mm de diámetro interno; se aplica una presión interna de 19.2 MPa.

12–2.M Un gran tanque esférico de almacenamiento de gas comprimido en una planta química es de 10.5 m de diámetro está hecho de placa de acero AISI 1040 laminado en caliente, de 12 mm de espesor. ¿Qué presión interna podría soportar el tanque si se desea un factor de diseño de 4.0 basado en la resistencia a la cedencia?

12–3.M Se tiene que utilizar titanio 6A1–4V para fabricar un tanque esférico de 1200 mm de diámetro externo. La presión de trabajo en el tanque tiene que ser de 4.20 MPa. Determine el espesor requerido de la pared del tanque si se desea un factor de diseño de 4.0 basado en la resistencia a la cedencia.

12–4.M Si el tanque del problema 12–3 fuera de lámina de aluminio 2014–T6 en lugar de titanio, ¿cuál sería el espesor de pared requerido? ¿Cuál diseño pesaría menos?

12–5.E Calcule el esfuerzo anular en las paredes de un tubo de acero cédula 40 de 10 in; conduce agua a 150 psi.

12–6.M Un cilindro neumático tiene un diámetro interno de 80 mm y un espesor de pared de 3.5 mm. Calcule el esfuerzo anular en la pared del cilindro; se aplica una presión interna de 2.85 MPa.

12–7.M Un cilindro de acetileno tiene una diámetro externo de 300 mm y contendrá acetileno a 1.7 MPa. Se desea un factor de diseño basado en la resistencia a la cedencia; calcule el espesor de pared requerido para el tanque. Use acero AISI 1040 estirado en frío.

12–8.M El cilindro de oxígeno compañero del de acetileno del problema 12–7 contiene oxígeno a 15.2 MPa. Su diámetro es de 250 mm. Calcule el espesor de pared requerido utilizando los mismos criterios de diseño.

12–9.M El tanque de propano de un vehículo recreativo es de acero AISI 1040 laminado en caliente y su espesor es de 2.20 mm. El diámetro del tanque es de 450 mm. Determine el factor de diseño que resultaría, basado en la resistencia a la cedencia si el tanque se llena de propano a 750 kPa.

12–10.M El tanque de abasto de propano en las instalaciones del distribuidor es un cilindro de 1800 mm de diámetro. Si se desea un factor de diseño de 4 basado en la resistencia a la cedencia del acero AISI 1040 laminado en caliente, calcule el espesor requerido de las paredes del tanque cuando la presión interna es de 750 kPa.

12–11.M El oxígeno en una nave espacial se almacena a una presión de 70.0 MPa para reducir al mínimo el volumen requerido. El recipiente esférico tiene un diámetro externo de 250 mm y un espesor de pared de 18 mm. Calcule los esfuerzos tangencial y radial máximos en la esfera.

12–12.M Calcule los esfuerzos longitudinal, anular y radial máximos en la pared de un tubo de acero cédula 40 estándar de $\frac{1}{2}$ in cuando soporta una presión interna de 1.72 MPa (250 psi).

12–13.M El cañón de una gran pieza de artillería tiene un diámetro interno de 220 mm y un diámetro externo de 300 mm. Calcule la magnitud del esfuerzo anular en puntos del cañón situados a 10 mm uno de otro de la superficie interna a la externa. La presión interna es de 50 MPa.

12–14.M El radio medio de un tubo de acero cédula 40 de $1\frac{1}{2}$ in es menos de 10 veces menor al espesor de pared y por tanto se considera como un cilindro de pared gruesa. Calcule qué esfuerzos máximos se obtendrían tanto con la fórmula para pared delgada como con la fórmula para pared gruesa producidos por una presión interna de 10.0 MPa.

12–15.M Un cilindro tiene un diámetro externo de 50 mm y un diámetro interno de 30 mm. Calcule el esfuerzo tangencial máximo en la pared del cilindro producido por una presión interna de 7.0 MPa.

12–16.M Para el cilindro del problema 12–15, calcule el esfuerzo tangencial en la pared a incrementos de 2.00 mm desde el interior hasta el exterior. Luego grafique los resultados de esfuerzo contra radio.

12–17.M Para el cilindro del problema 12–15, calcule el esfuerzo radial en la pared a incrementos de 2.00 mm de adentro hacia fuera. Luego grafique los resultados de esfuerzo contra radio.

12–18.M Para el cilindro del problema 12–15, calcule el esfuerzo tangencial pronosticado por la teoría de pared delgada en vez de con la teoría de pared gruesa. Compare el resultado con el esfuerzo determinado en el problema 12–15.

12–19.M Se hace una esfera de acero inoxidable, AISI 501 OQT 1000. Su diámetro externo es de 500 mm y el espesor de pared es de 40 mm. Calcule la presión máxima que se podría aplicar a la esfera si el esfuerzo máximo tiene que ser de un cuarto de la resistencia a la cedencia del acero.

12–20.M Una esfera tiene un diámetro externo de 500 mm y un diámetro interno de 420 mm. Calcule el esfuerzo tangencial en la pared a incrementos de 5.0 mm de adentro hacia fuera. Luego grafique los resultados. Use una presión de 100 MPa.

12–21.M Una esfera tiene un diámetro externo de 500 mm y un diámetro interno de 420 mm. Calcule el esfuerzo radial en la pared a incrementos de 5.0 mm de adentro hacia fuera. Luego grafique los resultados. Use una presión de 100 MPa.

12–22.M Para visualizar la importancia de utilizar las fórmulas de pared gruesa para calcular esfuerzos en la paredes de un cilindro, calcule el esfuerzo tangencial máximo pronosticado en la pared de un cilindro tanto con la fórmula de pared delgada como con la fórmula de pared gruesa, en las siguientes condiciones. El diámetro externo en todos los diseños tiene que ser de 400 mm. El espesor de pared debe varias de 5.0 mm a 85.0mm en incrementos de 10.0 mm. Use una presión de 10.0 MPa. Luego calcule la relación D_m/t y la diferencia en porcentaje entre el esfuerzo calculado con la teoría de la pared gruesa y la teoría de la pared delgada. Observe el incremento de la diferencia en porcentaje conforme el valor de D_m/t se reduce, es decir, conforme t se incrementa.

12–23.M El diámetro externo de una esfera es de 400 mm y el interno de 325 mm. Calcule la variación del esfuerzo tangencial de adentro hacia fuera en incrementos de 7.5 mm. Use una presión de 10.0 MPa.

12–24.M El diámetro externo de una esfera es de 400 mm y el interno de 325 mm. Calcule la variación del esfuerzo radial de adentro hacia fuera en incrementos de 7.5 mm. Use una presión de 10.0 MPa.

12–25.E El apéndice A–12 da las dimensiones de tubos de acero cédula 40 American Nacional Standard. ¿Cuáles de estos tamaños se deberán clasificar como de pared delgada y cuáles como de pared gruesa?

12–26.E Diseñe un recipiente a presión cilíndrico que contendrá aire comprimido para un aparato de respiración autónoma utilizado por bomberos cuando operan en edificios llenos de humo. El diámetro interno mínimo tiene que ser de 15.0 in. Debe soportar una presión de servicio de 450 psi. Use un esfuerzo de diseño de $s_u/8$ para tener en cuenta un gran número de ciclos de presurización. Además, verifique la capacidad del diseño final de soporta una presión máxima de 900 psi calculando el factor de diseño basado en la resistencia a la cedencia. El tanque tiene que ser de aleación de aluminio 6061–T6. Calcule el peso de sólo la parte cilíndrica.

12–27.E Repita el problema 12–26, pero use titanio Ti–6A1–4V.

12–28.E Repita el problema 12–26 pero use acero inoxidable 17–4PH H900.

12–29.E Para cualquiera de los diseños del cilindro neumático SCBA de los problemas 12–26, 12–27 o 12–28, dibuje el tanque completo con los cabezales semiesféricos en cada extremo. Muestre una lumbrera en un extremo para conectar el regulador de presión y el dispositivo de descarga. Suponiendo que el espesor de pared de los cabezales sea el mismo que el de la parte cilíndrica, calcule el peso aproximado del tanque completo.

12–30.E Repita el problema 12–26 pero ahora use el material compuesto de grafito/resina epóxica dado en la tabla 2–13 del capítulo 2 cuya resistencia a la tensión es de 278 ksi. Verifique el diseño final calculando el factor de diseño con respecto a resistencia a la tensión contra la presión máxima de 900 psi. El tanque se cubrirá con una delgada película polimérica y se envolverá por completo con el compuesto unidireccional en un patrón circunferencial para resistir el esfuerzo anular en el cilindro. Ignore la contribución del forro en el análisis del esfuerzo y en el cálculo del peso. (Observe que es probable que el casco del cilindro también requiera que se coloquen algunas capas del compuesto en forma helicoidal para resistir el esfuerzo longitudinal y permitir la formación de extremos abovedados, lo que incrementará un poco el peso final con respecto al calculado para la parte circunferencialmente envuelta).

12–31.E Diseñe un tanque esférico para almacenar oxígeno a una presión de 3000 psi con un diámetro interno de 18.0 in. Use acero AISI 501 OQT 1000 y un factor de diseño basado en la resistencia última. Calcule el peso del tanque.

12–32.E Repita el problema 12–31 pero ahora con aleación de aluminio 7075–T6.

12–33.E Repita el problema 12–32 con aleación de titanio 6A1–4V.

12–34.M Diseñe un tanque cilíndrico para almacenar gas natural a una presión de 4.20 MPa. El diámetro interno mínimo tiene que ser de 450 mm. Use aleación de aluminio 6061–T6 y un factor de diseño de 8 basado en la resistencia última.

12–35.E Diseñe un tanque cilíndrico para almacenar aire comprimido que se utilizará para inflar llantas en una vulcanizadora. La presión del aire será de 300 psi. El diámetro interno mínimo del tanque tiene que ser de 24 in. Use acero AISI 1040 estirado en frío y un factor de diseño de 8 basado en la resistencia última. Verifique el diseño final con respecto a una presión máxima de 600 psi calculando el factor de diseño basado en la resistencia a la cedencia.

TAREAS PARA RESOLVERSE CON COMPUTADORA

1. Escriba un programa u hoja de cálculo para calcular el esfuerzo tangencial en la pared de una esfera de pared delgada. Incluya el cálculo del diámetro medio y la relación de éste al espesor para comprobar que es de pared delgada.
2. Escriba un programa u hoja de cálculo para calcular el esfuerzo tangencial en la pared de un cilindro de pared delgada. Incluya el cálculo del diámetro medio y la relación de éste al espesor para comprobar que es de pared delgada.
3. Escriba un programa u hoja de cálculo para calcular el esfuerzo longitudinal en la pared de un cilindro de pared delgada. Incluya el cálculo del diámetro medio y la relación de éste al espesor para comprobar que es de pared delgada.
4. Combine los programas u hojas de cálculo de las tareas 2 y 3.
5. Combine los programas u hojas de cálculo de las tareas 1, 2 y 3 y deje que el usuario especifique si el recipiente es un cilindro o una esfera.
6. Reescriba los programas u hojas de cálculo de las tareas 1, 2 y 5 de modo que el objetivo sea calcular el espesor de pared requerido para que el recipiente a presión produzca un esfuerzo máximo dado a una presión interna dada.
7. Escriba un programa u hoja de cálculo para calcular los esfuerzos longitudinal, anular y radial máximos en la pared de un cilindro de pared gruesa con las fórmulas de la tabla 12–1.
8. Escriba un programa u hoja de cálculo para calcular el esfuerzo tangencial en cualquier radio dentro de la pared de un cilindro de pared gruesa con las fórmulas de la tabla 12–1.
9. Escriba un programa u hoja de cálculo para calcular el esfuerzo radial en cualquier radio dentro de la pared de un cilindro de pared gruesa con las fórmulas de la tabla 12–1.
10. Escriba un programa u hoja de cálculo para calcular el esfuerzo tangencial en cualquier radio dentro de la pared de una esfera de pared gruesa con las fórmulas de la tabla 12–1.
11. Escriba un programa u hoja de cálculo para calcular el esfuerzo radial en cualquier radio dentro de la pared de una esfera de pared gruesa con las fórmulas de la tabla 12–1.
12. Combine los programas u hojas de cálculo de las tareas 8 a 11.
13. Escriba un programa u hoja de cálculo para calcular la distribución del esfuerzo tangencial dentro de la pared de un cilindro de pared gruesa con las fórmulas de la tabla 12–1. Comience en el radio interno y especifique un número de incrementos de adentro hacia fuera.
14. Escriba un programa u hoja de cálculo para calcular la distribución del esfuerzo radial dentro de la pared de un cilindro de pared gruesa con las fórmulas de la tabla 12–1. Comience en el radio interno y especifique un número de incrementos de adentro hacia fuera.
15. Escriba un programa u hoja de cálculo para calcular la distribución del esfuerzo tangencial dentro de la pared de una esfera de pared gruesa con las fórmulas de la tabla 12–1. Comience en el radio interno y especifique un número de incrementos de adentro hacia fuera.
16. Escriba un programa u hoja de cálculo para calcular la distribución del esfuerzo radial dentro de la pared de una esfera de pared gruesa con las fórmulas de la tabla 12–1. Comience en el radio interno y especifique un número de incrementos de adentro hacia fuera.
17. Escriba un programa u hoja de cálculo para realizar los cálculos solicitados en el problema 12–22.
18. Escriba un programa u hoja de cálculo para realizar los cálculos solicitados en el problema 12–22, excepto que en este caso son para una esfera.
19. Escriba un programa u hoja de cálculo para calcular el esfuerzo tangencial máximo en cualquier tubo cédula 40 estándar a una presión interna dada. Incluya una tabla de las dimensiones de los tubos del apéndice A–12. Incluya un procedimiento para ver si el tubo es de pared gruesa o delgada.

13

Conexiones

La imagen completa y actividad
13–1 Objetivos de este capítulo
13–2 Modos de falla de juntas atornilladas
13–3 Diseño de conexiones atornilladas
13–4 Juntas remachadas
13–5 Juntas remachadas y atornilladas excéntricamente cargadas
13–6 Juntas soldadas con cargas concéntricas

La imagen completa

Conexiones

Mapa de análisis

- Los miembros de carga que forman una estructura deben actuar juntos para realizar la función planeada. Después de completar el análisis o diseño de los miembros principales, es necesario especificar conexiones adecuadas entre ellos. Como su nombre lo indica, las conexiones vinculan a los miembros.
- Las estructuras y los dispositivos mecánicos se confían a las conexiones entre los elementos de carga para mantener la integridad de los ensambles. Las conexiones crean la trayectoria a través de la cual se transfieren las cargas de un elemento a otro.
- Tres tipos comunes de conexiones son remachado, soldadura y atornillado. La figura 13–1 muestra una tolva de almacenamiento de material a granel soportada por soleras rectangulares sujetas de una viga T. Durante su fabricación, las pestañas de soporte se soldaron a la cara externa de las paredes. Las pestañas contienen un patrón de barrenos que permiten que las soleras se atornillen en el sitio de ensamble. Antes de instalar la viga T, las soleras se remacharon al alma.
- La carga producida por el peso de la tolva y los materiales que contiene debe ser transferida desde las paredes hasta las pestañas por conducto de las soldaduras. En seguida, los tornillos transfieren la carga a las soleras, que actúan como miembros sometidos a tensión. Por último, los remaches transfieren la carga a la T.

Actividad

Encuentre algunos ejemplos en estructuras, máquinas, vehículos o productos de consumo en los que los sujetadores desempeñan un rol importante. Trate de encontrar por lo menos diez ejemplos que incluyan juntas remachadas, soldadas o atornilladas. Además de la tolva mostrada en la figura 13–1, a continuación se dan algunos ejemplos como inicio de su búsqueda.

- Los tornillos que sujetan el alternador, el compresor del aire acondicionado y otros accesorios en el motor de su automóvil. *Cada uno de éstos sujetadores es crítico para mantener el dispositivo en su lugar con respecto al bloque del motor y con respecto a las partes con las que está acoplado. Los componentes del motor se mantienen unidos con diversos tornillos sometidos a esfuerzos muy elevados y que deben ser apretados con una llave de torsión calibrada. Los tornillos desempeñan principalmente una función de sujeción para garantizar que las partes acopladas no se separen o muevan durante el proceso de carga. En general se cargan con alguna combinación de tensión y cortante.*
- Los remaches que sujetan los escalones de una escalera en los largueros laterales. *Estos sujetadores críticos garantizan que la fuerza transferida del peso de su cuerpo a los escalones se transfiera con seguridad a los largueros laterales y, por lo tanto, al suelo. Las demás partes funcionales de la escalera también están afianzadas con remaches tubulares insertados a través de barrenos en ambas partes y luego recalcados con una herramienta que aplasta la cabeza contra una superficie sólida. Los remaches en general soportan cargas a cortante.*
- Las soldaduras que mantienen unidas las diversas partes del cuadro de una bicicleta. *Los miembros del cuadro en general son tubos de acero o un material más ligero que se sueldan en las juntas para obtener una estructura integral, rígida y resistente. Las soldaduras se someten a combinaciones de flexión, torsión y cortante directo conforme el ciclista realiza maniobras cíclicas. Observe las diferencias en los cuadros de bicicletas de turismo, ruta y montaña.*
- Sujetadores estructurales en la construcción de edificios. *Localice un sitio de construcción donde se esté erigiendo la estructura de acero de un edificio y fíjese específicamente en cómo las columnas, vigas y otros miembros estructurales están conectados mediante tornillos o soldadura. Examine el tipo de sujetadores utilizados, la disposición de los tornillos en juntas de múltiples tornillos, los patrones de las líneas de soldadura y el diseño de los miembros conectados. La figura 13–2 es una fotografía de una escultura que ilustra muchos de los tipos de juntas estructurales utilizadas para la instrucción de estudiantes de ingeniería civil y tecnología, construcción y arquitectura. Observe la diversidad de abrazaderas angulares, placas añadidas y modificaciones de los miembros estructurales principales que facilitan la sujeción.*

¿Cuáles otros ejemplos están en su lista? Analícelos con sus colegas y el instructor, e indague cuáles ejemplos diferentes a los suyos encontraron.

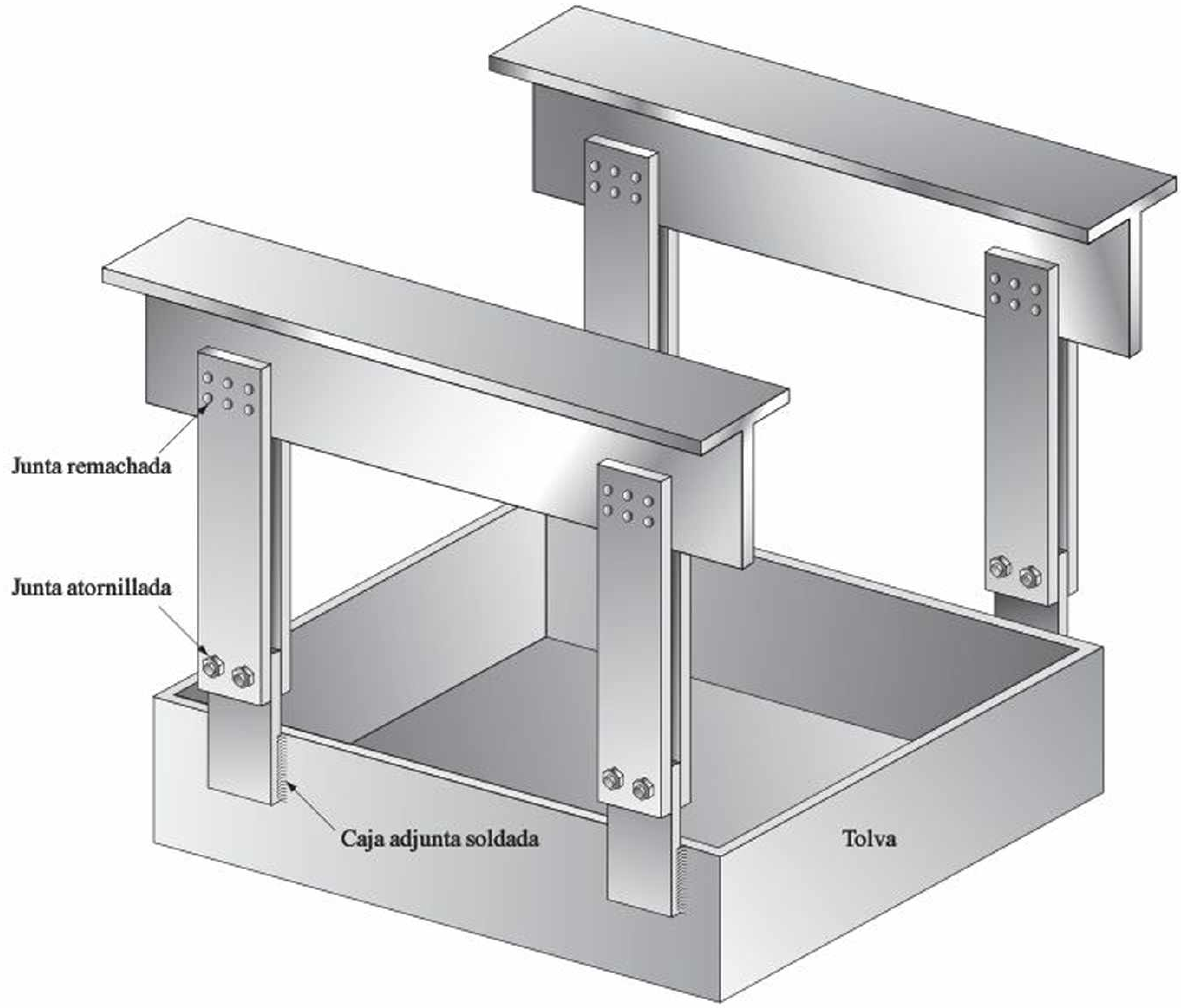


FIGURA 13–1 Dos varillas que soportan una pesada pieza fundida.

Explore la Internet

¿Qué tanto sabe en la actualidad sobre conexiones, soldadura y juntas? Este capítulo proporciona información útil sobre las funciones de las conexiones, sus modos de falla, conexiones remachadas, conexiones atornilladas y juntas soldadas. Antes de entrar en los detalles técnicos, visite algunos de los sitios de Internet que aparecen al final de este capítulo de modo que pueda obtener una buena ideal general de:

- La tecnología del diseño y fabricación de conexiones.
- Las normas que guían el diseño de conexiones.
- Los programas que permiten el diseño y análisis asistidos por computadora de juntas atornilladas.
- Una muestra de fabricantes de muchos tipos de sujetadores utilizados en la construcción de edificios, automóviles, naves aeroespaciales, productos de consumo, maquinaria agrícola, maquinaria industrial, muebles y otras aplicaciones.
- La tecnología de la soldadura y el diseño de juntas soldadas.

13–1 OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

El objetivo primordial de este capítulo es proporcionar datos y métodos de análisis para el diseño seguro de juntas remachadas, juntas atornilladas y juntas soldadas.

Al término de este capítulo, usted podrá:

1. Describir la geometría típica de juntas remachadas y atornilladas.
2. Identificar los modos probables de falla de una junta.



FIGURA 13–2 Escultura que ilustra numerosos métodos de conectar miembros estructurales. (Fuente: University of Dayton School of Engineering, Dayton, OH)

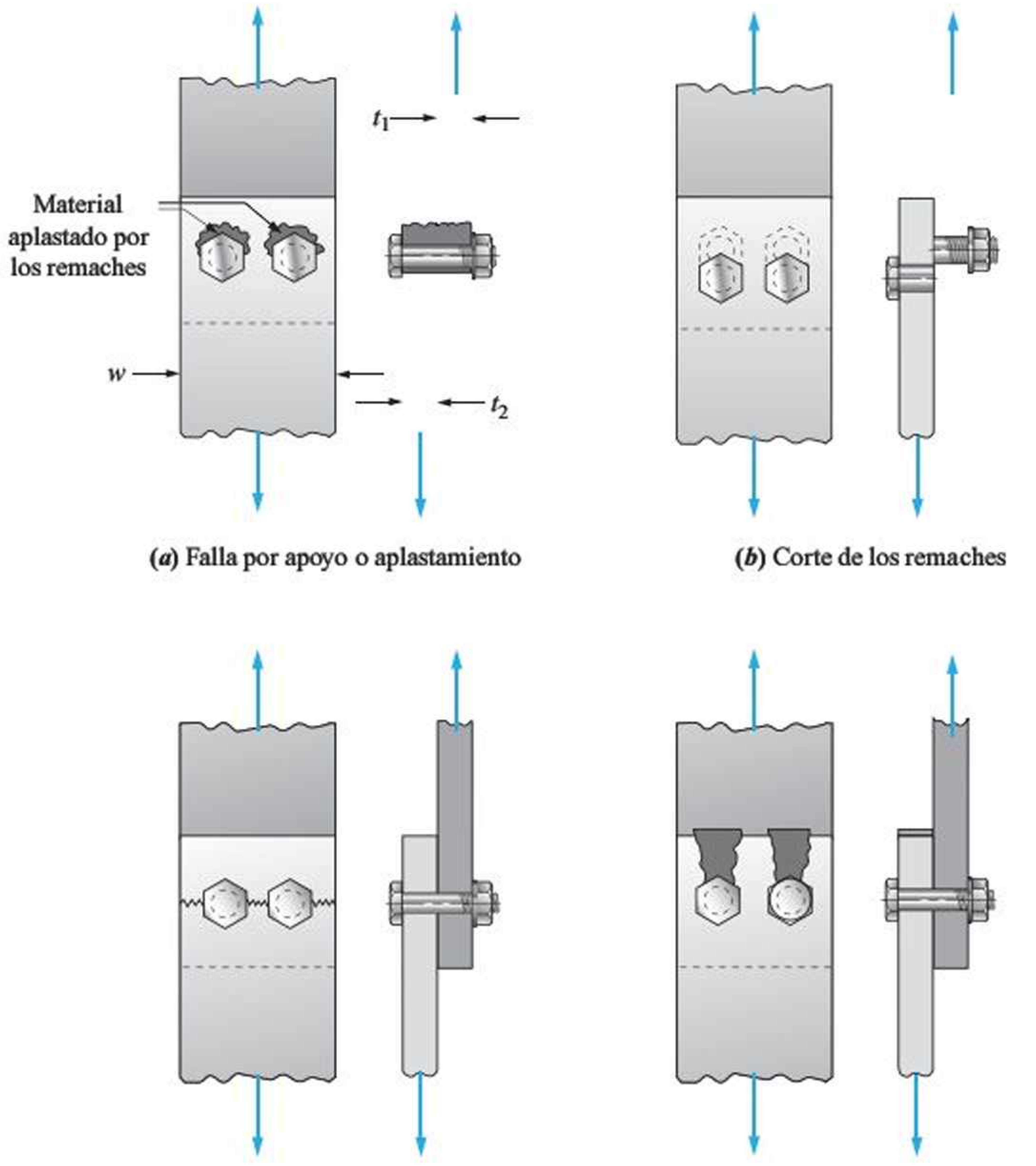
3. Reconocer estilos típicos de remaches.
4. Identificar cuándo un sujetador está a cortante simple o a cortante doble.
5. Analizar una junta remachada o atornillada en cuanto a su capacidad de resistir fuerza cortante.
6. Analizar una junta remachada o atornillada en cuanto a su capacidad de resistir fuerza de tensión.
7. Analizar una junta remachada o atornillada en cuanto a su capacidad de resistir esfuerzo de apoyo.
8. Utilizar los esfuerzos permisibles para conexiones estructurales de acero publicados por el American Institute of Steel Construction (AISC).
9. Describir la diferencia entre una conexión tipo fricción y una conexión tipo apoyo, y completar el análisis apropiado.
10. Utilizar los esfuerzos permisibles para conexiones estructurales de aluminio publicados por el Aluminum Association.
11. Analizar juntas cargadas tanto simétrica como excéntricamente.
12. Analizar juntas soldadas con cargas concéntricas.

13–2 MODOS DE FALLA DE JUNTAS ATORNILLADAS

La figura 13–3 muestra juntas traslapadas simples en las que dos placas están conectadas con dos tornillos y tuercas. La función de la junta es mantener unidas a las placas y transferir una carga aplicada a una placa por medio del tornillo a la otra placa. Siga la trayectoria de la carga y visualice los tipos de esfuerzo creados:

1. De la placa 1, la carga se transfiere a las superficies laterales de los tornillos.
2. Los tornillos apoyados en los barrenos tienden a aplastar el material de la placa [figura 13–3(a)].
3. La carga pasa a través del tornillo a la placa 2 y crea un esfuerzo de apoyo en los barrenos.
4. Las fuerzas opuestas que actúan en las placas 1 y 2 tienden a cortar (cizallar) el tornillo de la cara de contacto entre las dos placas [figura 13–3(b)].
5. Las fuerzas de tensión en las placas 1 y 2 tienden a rasgar el material a través de la sección de área mínima para resistir la fuerza de tensión. Esto ocurre a través de la sección donde se encuentran los barrenos para los tornillos [figura 13–3(c)].
6. Conforme los tornillos presionan contra la superficies laterales de los barrenos en las placas, existe la tendencia de rasgar el material del tornillo al borde el material en una u otra placas [figura 13–3(d)].

FIGURA 13–3 Tipos de falla de conexiones atornilladas.



(*a*) Falla por apoyo o aplastamiento

(*b*) Corte de los remaches

(*c*) Falla por tensión

(*d*) Desprendimiento del extremo

Las conexiones apropiadamente diseñadas deberán tener una distancia, desde la línea de centros del tornillo al borde de la placa que se está uniendo, de por lo menos tres veces el diámetro del tornillo. La distancia al borde se mide en la dirección de la presión de apoyo. Si se atiende esta recomendación no se presentará el desprendimiento de extremo. Si bien esto deberá ser verificado con un análisis, en los ejemplos incluidos en este capítulo se supondrá que se cumple. Por lo tanto, los modos de falla por cortante, apoyo y tensión se considerarán sólo al evaluar la resistencia de una junta.

13–3 DISEÑO DE CONEXIONES ATORNILLADAS

En la construcción de edificios se utilizan dos tipos de conexiones atornilladas:

- ***Conexiones tipo apoyo*** Se supone que las placas unidas *no* están tan firmemente sujetas como para desarrollar fuerzas de fricción entre las placas que transmitan cargas; por lo tanto, los tornillos se apoyan en los barrenos, y se deberá investigar la falla por apoyo. También podrían ocurrir fallas por cortante y tensión.
- ***Conexiones a prueba de deslizamiento crítico*** En este tipo de junta se producen fuerzas de sujeción elevadas que evitan el deslizamiento y se requieren técnicas de fabricación cuidadosas para garantizar que las fuerzas de fricción compartan la transmisión de las fuerzas desarrolladas en la conexión.

El diseño de conexiones a prueba de deslizamiento crítico implica muchas variaciones y pasos. Se aconseja que los usuarios consulten las referencias 2 y 3 en cuanto a los detalles. En este capítulo se analizan sólo las conexiones tipo apoyo.

La tabla 13–1 contiene datos de muestra de esfuerzos permisibles en conexiones atornilladas para acero estructural e incluye tres tipos de tornillos: ASTM A307, ASTM A325 y ASTM A490, con resistencias progresivamente incrementadas. Observe la diferencia en el esfuerzo cortante permisible, según si las roscas están o no en el plano de cortante. La figura 13–4 muestra un tornillo de cabeza hexagonal estándar con una parte de su longitud roscada. Se prefiere diseñar la junta de modo que la parte correspondiente al diámetro completo del tornillo quede en el plano de cortante.

Los métodos de analizar modos de falla por cortante, apoyo y tensión se describen a continuación.

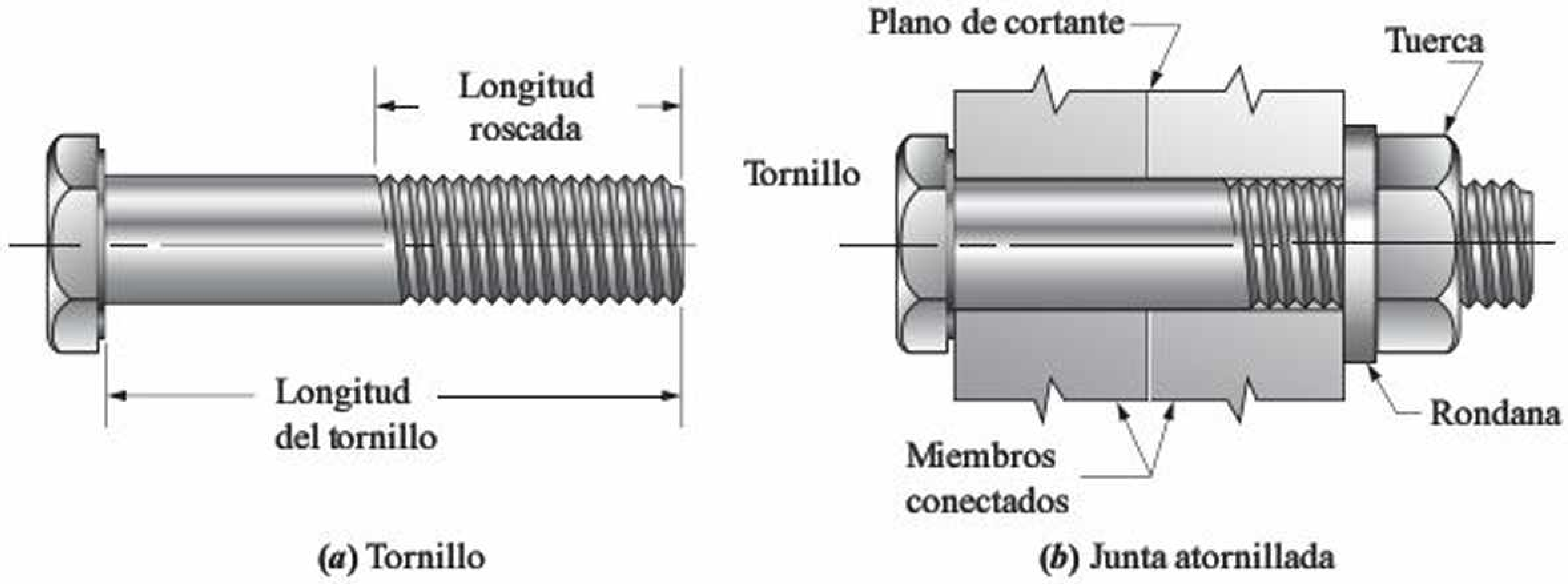
Falla por cortante. Se supone que el tornillo se ve sometido a cortante directo cuando se aplica una carga de tensión a una junta, siempre que la línea de acción de la carga pase por el

TABLA 13–1 Esfuerzos permisibles para conexiones estructurales tipo apoyo.*

	Esfuerzo cortante permisible					
	Sin roscas en el plano de cortante		Roscas en el plano de cortante		Esfuerzo de tensión permisible	
Tornillos	ksi	MPa	ksi	MPa	ksi	MPa
ASTM A307	12.0	82.5	12.0	82.5	22.5	155
ASTM A325	30.0	207	24.0	165	45.0	310
ASTM A490	37.5	260	30.0	207	56.5	390
Miembros conectados			Esfuerzo de apoyo permisible		Esfuerzo de tensión permisible‡	
Todas las aleaciones			$1.20s_u$		$0.6s_y$	

*Especificaciones AISC.
‡Consulte el apéndice A-16 respecto a aceros estructurales.

FIGURA 13–4
Junta atornillada.



centroide del patrón de tornillos. También se supone que los tornillos comparten por igual la carga aplicada. La capacidad de una junta con respecto a cortante de los tornillos es

$$F_s = \tau_a A_s \tag{13–1}$$

donde F_s = capacidad de la junta a cortante
τ_a = esfuerzo cortante permisible en los tornillos
A_s = área sometida a cortante

El área sometida a cortante depende del número de secciones transversales disponibles para resistir el cortante. Si este número se designa N_s,

$$A_s = \frac{N_s \pi D^2}{4} \tag{13–2}$$

donde D es el diámetro del tornillo.

Para determinar N_s, se debe observar si existe *cortante simple* o *cortante doble* en la junta. La figura 13–3 muestra un ejemplo de cortante simple. Sólo una sección transversal de cada tornillo resiste la carga aplicada. Entonces N_s es igual al número de tornillos en la junta. Las soleras utilizadas para soportar la tolva de la figura 13–1 someten a los remaches y tornillos a cortante doble. Dos secciones transversales de cada tornillo resisten la carga aplicada. Entonces N_s es dos veces el número de tornillos que hay en la junta.

Falla por apoyo Cuando un tornillo cilíndrico ejerce presión contra la pared de un barreno en la placa, entre ellos se crea una presión no uniforme. Como una simplificación de la distribución del esfuerzo real, se supone que el área sometida a esfuerzo de apoyo, A_b, es el área rectangular calculada multiplicando el espesor de la placa t por el diámetro del tornillo D. Esta área se puede considerar como el *área proyectada* del barreno del tornillo. Entonces la capacidad de apoyo de una junta es

$$F_b = \sigma_{ba} A_b \tag{13–3}$$

donde F_b = capacidad de la junta de resistir el esfuerzo de apoyo
σ_{ba} = esfuerzo de apoyo permisible
A_b = área de apoyo = $N_b D t$ **(13–4)**
N_b = número de superficies sometidas a esfuerzo de apoyo
t = espesor de las placas

El esfuerzo de apoyo permisible en general se basa en la resistencia a la cedencia del material conectado porque en general el sujetador es más resistente. Esto se deberá verificar.

Falla por tensión. Una fuerza de tensión directa aplicada a través del centroide del patrón de tornillos produce un esfuerzo de tensión. Entonces la capacidad de la junta a tensión sería

$$F_t = \sigma_{ta} A_t \tag{13–5}$$

donde F_t = capacidad de la junta a tensión
σ_{ta} = esfuerzo permisible a tensión
A_t = área neta sometida a tensión

La evaluación de A_t requiere que se reste el diámetro de todos los barrenos del ancho de las placas que se van a unir. Entonces

$$= (w - ND_H)t \tag{13–6}$$

donde w = ancho de la placa
D_H = diámetro del barreno (en estructuras use $D_H = D + 1/16$ in o $D + 1.6$ mm)
N = número de barrenos en la sección de interés
t = espesor de la placa

Problema de ejemplo 13–1 Para la junta tipo apoyo traslapada simple de la figura 13–3, determine la carga permisible en la junta; las dos placas son de ¼ in de espesor por 2 in de ancho unidas por dos pernos de acero ASTM A490 de 3/8 in de diámetro. Las placas son de acero estructural ASTM A36.

Solución

Objetivo: Calcular la carga permisible en la junta.

Datos: Espesor de las placas = t = 0.25 in, ancho de las placas = w = 2.00 in

Las placas son de acero estructural ASTM A36, s_u = 58 ksi, s_y = 36 ksi

Tornillos = Diámetro = D = 0.375 in; ASTM A490

Conexión tipo apoyo; sin roscas en el plano de cortante.

Análisis: Se investigará la posible falla a cortante, esfuerzo de apoyo y tensión. El mínimo de los tres valores es la carga límite en la junta.

Resultados: ***Falla por cortante***

$$F_s = \tau_a A_s \tag{13–1}$$

$$\tau_a = 40\,000 \text{ psi} \quad \text{(Tabla 16–1)}$$

$$A_s = \frac{N_s \pi D^2}{4} = \frac{2\pi(0.375 \text{ in})^2}{4} = 0.221 \text{ in}^2 \tag{13–2}$$

Entonces

$$F_s = (37\,500 \text{ lb/in}^2)(0.221 \text{ in}^2) = 8288 \text{ lb}$$

Falla por esfuerzo de apoyo

$$F_b = \sigma_{ba} A_b \tag{13–3}$$

$$\sigma_{ba} = 1.20(58\,000 \text{ psi}) = 69\,600 \text{ psi}$$

$$A_b = N_b D t = (2)(0.375 \text{ in})(0.25 \text{ in}) = 0.188 \text{ in}^2 \tag{13–4}$$

Por tanto

$$F_b = (69\,600\text{ lb/in}^2)(0.188\text{ in}^2) = 13\,050\text{ lb}$$

Falla por tensión

$$F_t = \sigma_{ta}A_t \quad \textbf{(13–5)}$$

$$\sigma_{ta} = 0.6(36\,000\text{ psi}) = 21\,600\text{ psi}$$

$$A_t = (W - ND_H)t = [2.0\text{ in} - 2(0.375 + 0.063)\text{ in}](0.25\text{ in}) = 0.281\text{ in}^2 \quad \textbf{(13–6)}$$

Entonces

$$F_t = (21\,600\text{ lb/in}^2)(0.281\text{ in}^2) = 6070\text{ lb}$$

Comentario En este caso la capacidad a tensión es la mínima, por lo que la capacidad de la junta es de 6070 lb.

13–4 JUNTAS REMACHADAS

Las juntas remachadas son similares a las mostradas en la figura 13–3 excepto porque los sujetadores son como los mostrados en la figura 13–5. El cuerpo cilíndrico del remache se inserta en los barrenos que hay en los miembros para conectarlos. Con la cabeza preformada firmemente sujeta por un lado de la junta, el extremo opuesto recalca o remacha a presión para formar una cabeza en el lado opuesto, con el fin de sujetar los miembros. Los agujeros para los remaches en general son casi del mismo tamaño que el diámetro de su cuerpo y la acción de recalcado durante la instalación hace al cuerpo dilatarse y llenar el agujero, lo que impide el movimiento relativo entre los miembros conectados y los remaches. El remache ciego es único en el sentido de que la parte del cuerpo se inserta en los barrenos por un lado, y una herramienta especial tira del mandril y hace a la cabeza en el lado opuesto expandirse y sujetar los miembros conectados. Después de formado, el mandril se desprende y desecha. Las ventajas de esta técnica son que se requiere acceso sólo a un lado de los miembros conectados y la instalación completa es bastante rápida.

Los métodos de análisis básicos de juntas remachadas son similares a las descritas para juntas atornilladas. Se deben analizar los modos de falla por cortante, esfuerzo de apoyo y tensión. Se pueden aplicar las ecuaciones (13–1) a (13–6) como se ilustra en el problema de ejemplo 13–1. Sin embargo, por lo que se refiere a falla por tensión de los miembros conectados, el diámetro del barreno se considera igual al diámetro del cuerpo del remache.

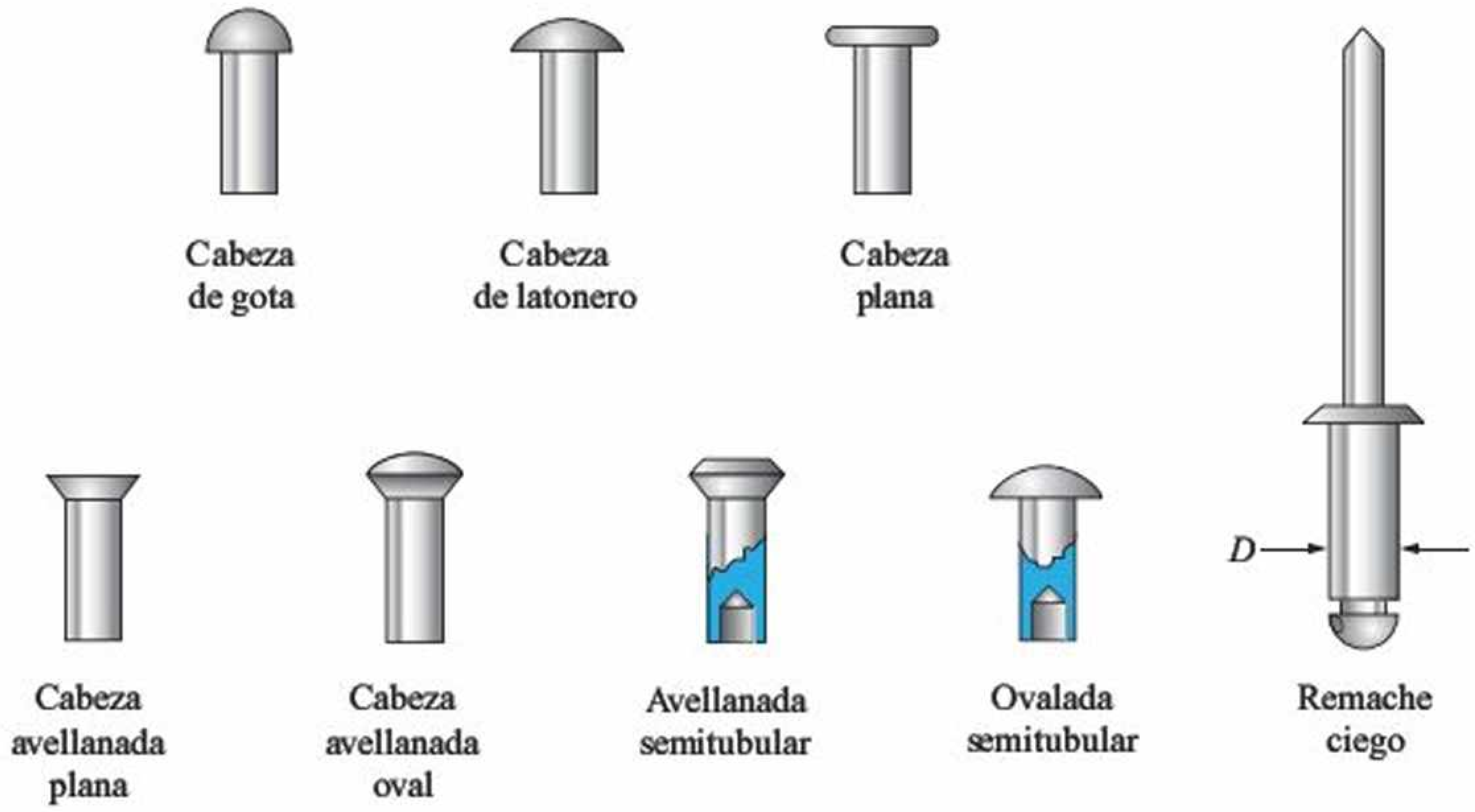


FIGURA 13–5 Ejemplos de estilos de remaches.

TABLA 13–2 Capacidad de fuerza cortante de remaches típicos [en libras y (N)].

Diámetro del cuerpo [in (mm)]	Material			
	Aluminio	Acero al carbón	Acero inoxidable	MONEL®
3/32 (2.38)	70 (311)	130 (578)	230 (1023)	200 (890)
1/8 (3.18)	120 (534)	260 (1156)	420 (1868)	350 (1557)
5/32 (3.99)	190 (845)	370 (1646)	650 (2891)	550 (2446)
3/16 (4.76)	260 (1156)	540 (2402)	950 (4226)	800 (3558)
1/4 (6.35)	460 (2046)	700 (3114)	1700 (7562)	1400 (6227)

La tabla 13–2 contiene datos representativos de la capacidad para resistir la fuerza cortante permisible de remaches hechos de aluminio, acero al carbón y MONEL® (una aleación de níquel con excelente resistencia a la corrosión utilizada en aplicaciones marinas y plantas químicas; MONEL es una marca registrada de Special Metals Corporation). En este libro se utilizarán estos datos. No obstante será necesario buscar datos de resistencia de proveedores específicos en el caso de diseños críticos. Visite el sitio de Internet 13. La tabla 13–3 muestra datos adicionales para remaches, tornillos y miembros conectados de aluminio.

TABLA 13–3 Esfuerzos permisibles para conexiones estructurales de estructuras de edificios.

Remaches

Aleación y temple antes de hincarlos*	Esfuerzo cortante permisible	
	ksi	MPa
1100-H14	4.1	28
2017-T4	14	96
6053-T61	8.5	58
6061-T6	10.5	72

Tornillos

Aleación y temple	Esfuerzo cortante† permisible		Esfuerzo de† tensión permisible	
	ksi	MPa	ksi	MPa
2024-T4	16	110	26	179
6061-T6	11	76	18	124
7075-T73	18	124	29	200

Miembros conectados

Aleación y temple	Esfuerzo de apoyo permisible	
	ksi	MPa
1100-H14	16	110
2014-T6	62	427
3003-H14	21	145
6061-T6	39	269
6063-T6	31	214

Fuente: Aluminum Association, *Aluminum Design Manual.* Washington, D.C., 2000.

*Todos los hincados en frío.

†Los esfuerzos están basados en el área correspondiente al diámetro nominal del tornillo, a menos que las roscas estén en el plano de cortante. Entonces el área a cortante se basa en el diámetro de raíz.

13–5 JUNTAS REMACHADAS Y ATORNILLADAS EXCÉNTRICAMENTE CARGADAS

Las juntas previamente consideradas se limitaban a casos en los cuales la línea de acción de la carga que actuaba en la junta pasaba por el centroide del patrón de remaches o tornillos. En esos casos, la carga aplicada se dividía por igual entre todos los sujetadores. Cuando la carga no pasa por el centroide del patrón de sujetadores, se llama *junta excéntricamente cargada* y las fuerzas se distribuyen de forma no uniforme entre los sujetadores.

En juntas excéntricamente cargadas se debe considerar el efecto del momento o par en el sujetador. La figura 13–6 muestra una ménsula fija en la cara de una columna y utilizada para soportar un motor eléctrico. La fuerza neta dirigida hacia abajo ejercida por el peso del motor y la tensión en la banda actúan a una distancia a del centro del patín de la columna. Entonces el sistema de fuerzas total que actúan en los tornillos de la ménsula se compone de la fuerza cortante directa P más las fuerzas producidas por el momento $P \times a$. Cada uno de estos componentes puede considerarse por separado y luego sumados mediante el principio de superposición.

La figura 13–7(a) muestra que para la fuerza cortante directa P, se supone que cada tornillo comparte por igual la carga, como en las juntas concéntricamente cargadas. Pero en la parte (b) de la figura, a causa del momento, cada tornillo se ve sometido a una fuerza perpendicular a la línea radial que va del centroide al patrón de tornillos. Se supone que la magnitud de la fuerza que actúa en un tornillo producida por la carga del momento es proporcional a su distancia r al centroide. Esta magnitud es

$$R_i = \frac{Mr_i}{\sum r^2} \tag{13–7}$$

donde R_i = fuerza cortante en el tornillo i producida por el momento M

r_i = distancia radial del tornillo i al centroide del patrón de tornillos

$\sum r^2$ = suma de las distancias radiales al cuadrado a *todos* los tornillos en el patrón

Si se considera más conveniente trabajar con componentes de fuerzas horizontales y verticales, se pueden calcular con

$$R_{ix} = \frac{My_i}{\sum r^2} = \frac{My_i}{\sum(x^2 + y^2)} \tag{13–8}$$

$$R_{iy} = \frac{Mx_i}{\sum r^2} = \frac{Mx_i}{\sum(x^2 + y^2)} \tag{13–9}$$

FIGURA 13–6
Carga excéntrica en una junta atornillada.

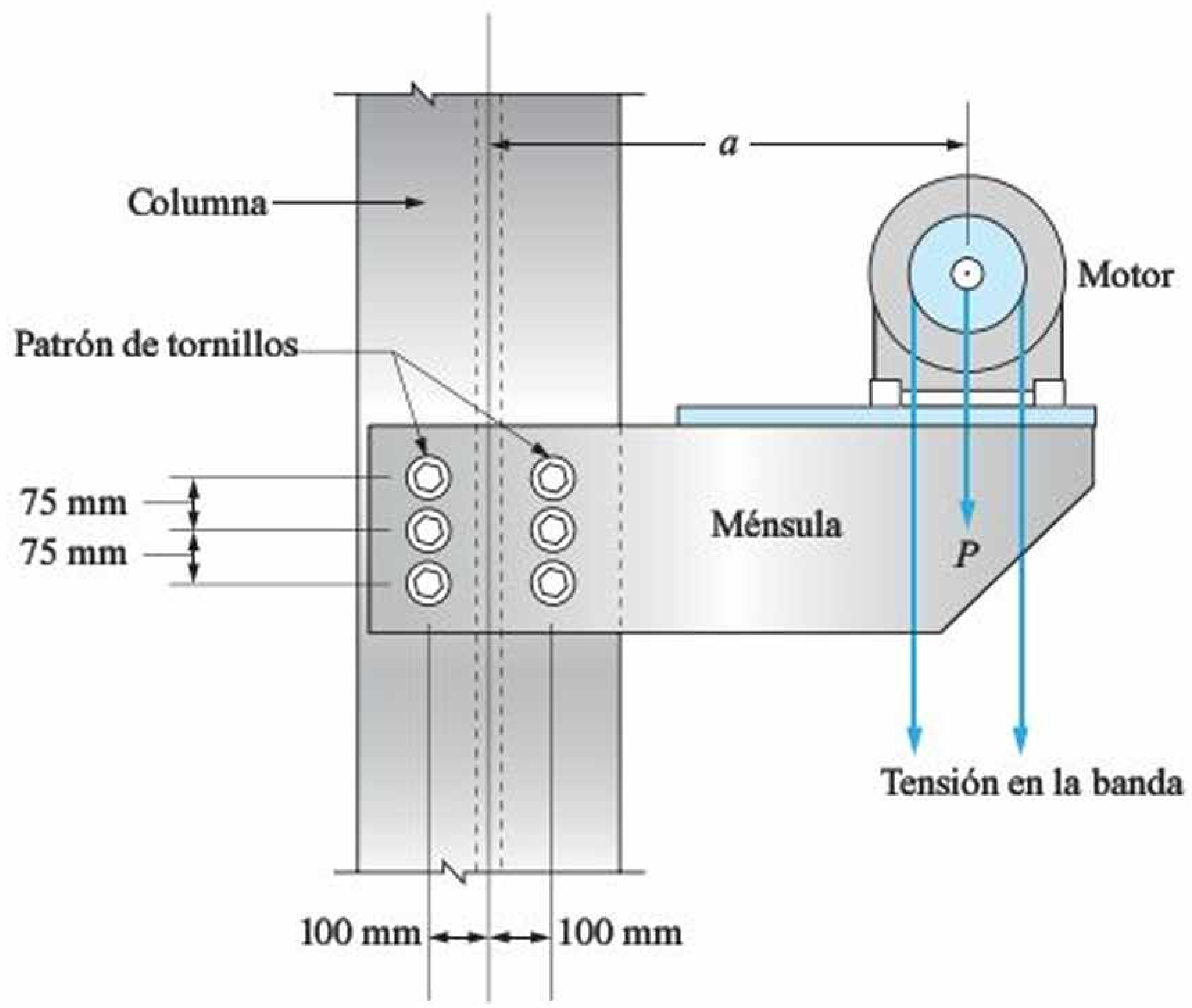
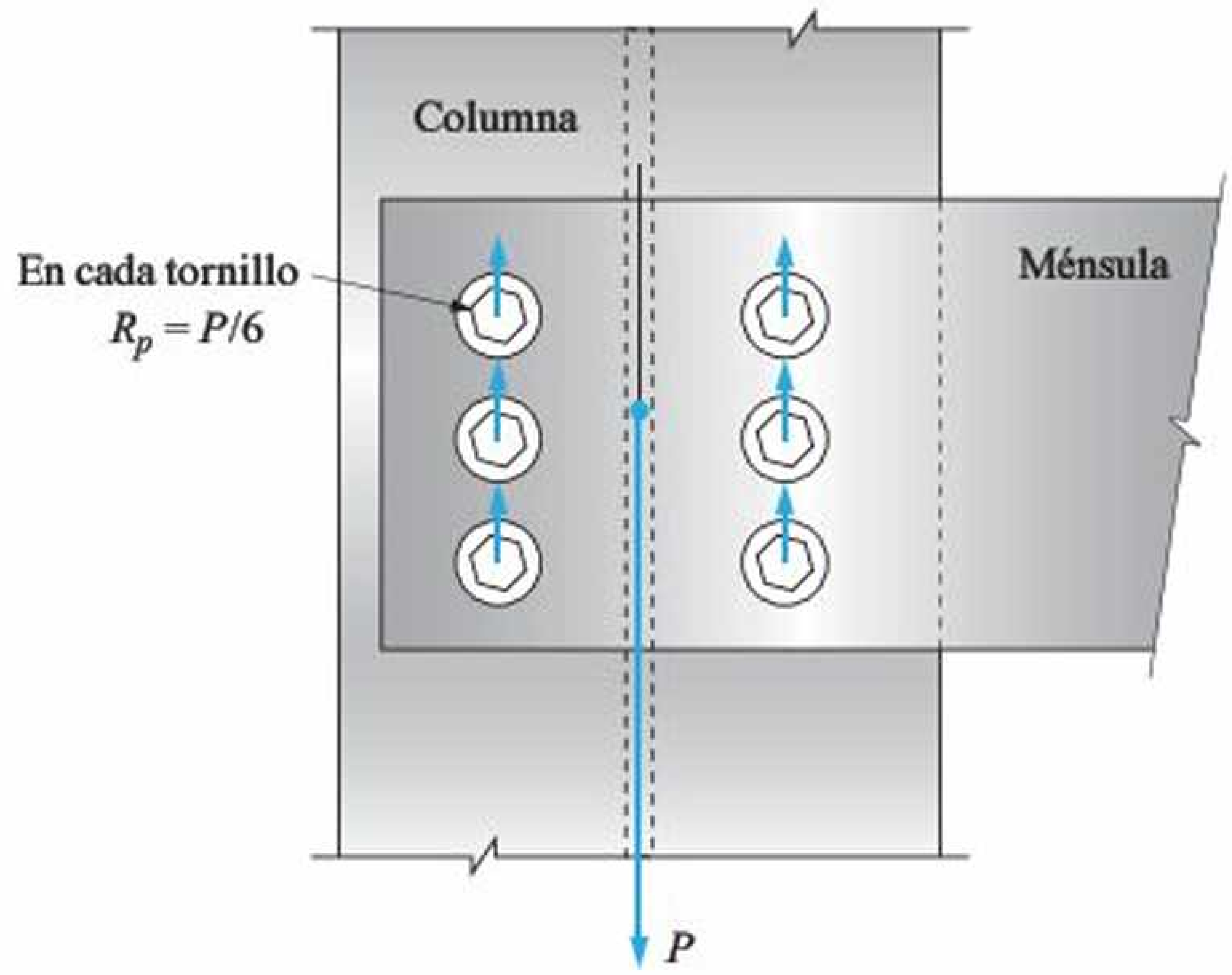
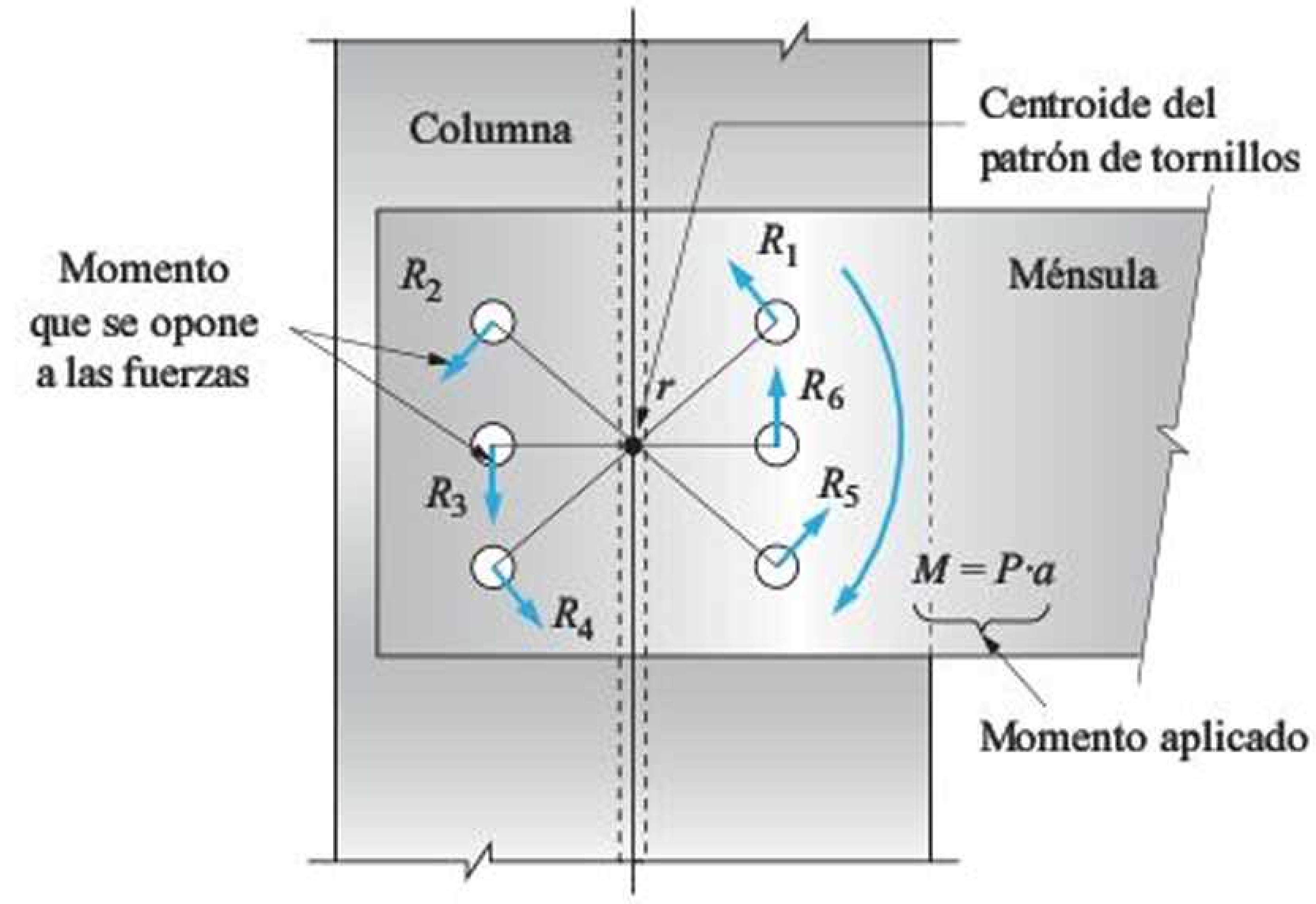


FIGURA 13–7
Cargas en tornillos excéntricamente cargados.



(*a*) Fuerza que se opone a *P*, la fuerza cortante



(*b*) Fuerzas que se oponen al momento

donde y_i = distancia vertical del tornillo i al centroide

x_i = distancia horizontal del tornillo i al centroide

$\sum(x^2 + y^2)$ = suma de las distancias horizontales y verticales al cuadrados de todos los tornillos en el patrón

Por último, todas las fuerzas horizontales y verticales se suman para cualquier tornillo particular. Luego se determina la resultante de las fuerzas horizontales y verticales.

Problema de ejemplo 13–2

En la figura 13–6, la fuerza neta dirigida hacia abajo P es de 26.4 kN en cada placa lateral de la ménsula. La distancia a es de 0.75 m. Determine el tamaño requerido de los tornillos ASTM A325 para afianzar la ménsula. Considere que la conexión es tipo apoyo sin roscas en el plano de cortante.

Solución Objetivo Especificar el tamaño de los tornillos en la junta.

Datos Carga = P = 26.4 kN dirigida hacia abajo. Brazo de momento = a = 0.75 m.
Patrón de tornillos mostrado en la figura 13–6. Tornillos: ASTM A325.
Conexión tipo apoyo.

Análisis Para determinar la fuerza cortante en cada tornillo producida por la fuerza cortante vertical directa de P = 26.4 kN, se supondrá que cada uno de los tornillos soporta una parte igual de la carga. Entonces se utilizarán las ecuaciones (13–8) y (13–9) para calcular las fuerzas que actúan en el tornillo sometido al mayor esfuerzo para resistir la carga del momento, donde

$$M = P \times a$$

Las fuerzas resultantes se combinarán vectorialmente para determinar la carga resultante en el tornillo sometido a mayor esfuerzo. Entonces se calculará el tamaño del tornillo basado en la fuerza cortante permisible para los tornillos ASTM A325.

Resultados ***Fuerza cortante directa***
La fuerza cortante total dirigida hacia abajo se reparte entre los seis tornillos. Por consiguiente, la carga en cada uno llamada R_p, es

$$R_p = \frac{P}{6} = \frac{26.4\,\text{kN}}{6} = 4.4\,\text{kN}$$

La figura 13–7(a) muestra que se trata de una fuerza de reacción dirigida hacia arriba en cada tornillo.

Fuerzas que resiste el momento En las ecuaciones (13–8) y (13–9), se requiere el término siguiente:

$$\sum(x^2 + y^2) = 6(100\,\text{mm})^2 + 4(75\,\text{mm})^2 = 82\,500\,\text{mm}^2$$

El momento en la junta es

$$M = P \times a = 26.4\,\text{kN}\,(0.75\,\text{m}) = 19.8\,\text{kN}\cdot\text{m}$$

Comenzando con el tornillo 1, situado arriba a la derecha (vea la figura 13–8),

$$R_{1x} = \frac{My_1}{\sum(x^2 + y^2)} = \frac{19.8\,\text{kN}\cdot\text{m}(75\,\text{mm})}{82\,500\,\text{mm}^2} \times \frac{10^3\,\text{mm}}{\text{m}}$$

$$R_{1x} = 18.0\,\text{kN} \leftarrow \text{(actúa hacia la izquierda)}$$

$$R_{1y} = \frac{Mx_1}{\sum(x^2 + y^2)} = \frac{(19.8\,\text{kN}\cdot\text{m})(100\,\text{mm})}{82\,500\,\text{mm}^2} \times \frac{10^3\,\text{mm}}{\text{m}}$$

$$R_{1y} = 24.0\,\text{kN} \uparrow \text{(actúa hacia arriba)}$$

Ahora ya se puede determinar la resultante de estas fuerzas. En la dirección vertical, R_p y R_{1y} actúan hacia arriba.

$$R_p + R_{1y} = 4.4\,\text{kN} + 24.0\,\text{kN} = 28.4\,\text{kN}$$

Sólo R_{1x} actúa en la dirección horizontal. Si la fuerza resultante total en el tornillo 1 se denomina R_{t1}.

$$R_{t1} = \sqrt{28.4^2 + 18.0^2} = 33.6\,\text{kN}$$

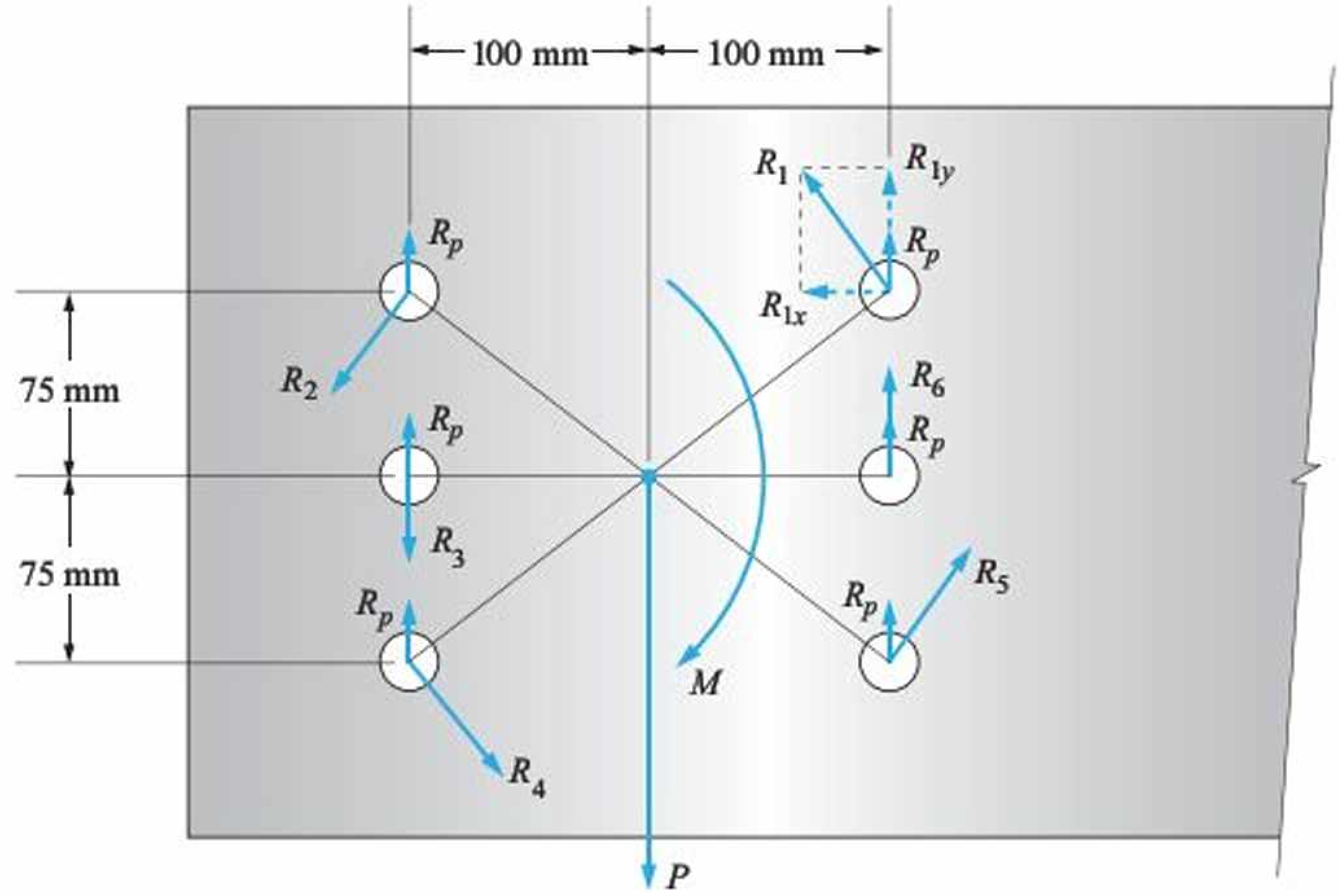


FIGURA 13–8
Fuerzas en cada tornillo.

Investigando los otros cinco tornillos de la misma manera, se ve que el tornillo 1 es el que soporta el esfuerzo máximo. Entonces se determinará su diámetro para limitar el esfuerzo cortante a 207 MPa (30.0 ksi) para los tornillos ASTM A325, como se muestra en la tabla 13–1.

$$\tau = \frac{R_{t1}}{A}$$

$$A = \frac{R_{t1}}{\tau_a} = \frac{33.6\text{ kN}}{207\text{ N/mm}^2} = 162\text{ mm}^2 = \frac{\pi D^2}{4}$$

$$D = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4(162)\text{ mm}^2}{\pi}} = 14.4\text{ mm}$$

El tamaño métrico más aproximado es el de 16 mm. Si es necesario especificar unidades convencionales en pulgadas,

$$D = 14.4\text{ mm} \times \frac{1\text{ in}}{25.4\text{ mm}} = 0.567\text{ in}$$

El tamaño estándar más aproximado es el de 5/8 in (0.625 in).

Comentario Especifique tornillo de $D = 16$ mm o $D = 5/8$ in.

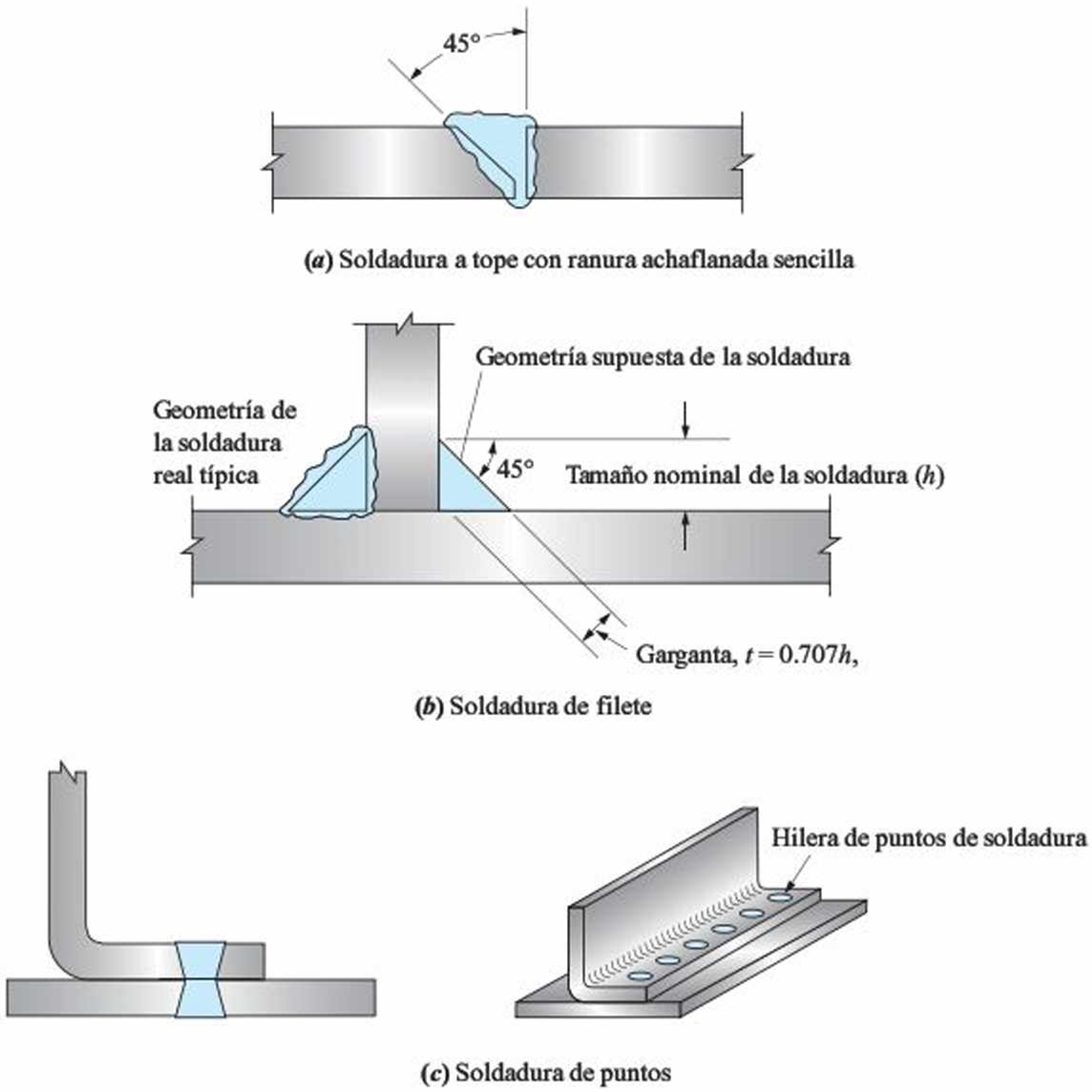
13–6 JUNTAS SOLDADAS CON CARGAS CONCÉNTRICAS

La soldadura es un proceso de unión en el que se aplica calor para hacer que dos piezas de metal se peguen metalúrgicamente. El calor puede ser aplicado por una llama de gas, un arco eléctrico, un rayo láser o por una combinación de presión y calentamiento por resistencia eléctrica.

Los tipos de soldadura incluyen las soldaduras de ranura, filete y de puntos (como se muestra en la figura 13–9) y otros. Las soldaduras de ranura y filete se utilizan con frecuencia en conexiones estructurales, puesto que se adaptan con facilidad a los perfiles y las placas que forman las estructuras. Las soldaduras de puntos se utilizan para unir láminas de acero relativamente delgadas y perfiles formados en frío.

Las variables implicadas en el diseño de juntas soldadas son la forma y el tamaño de la soldadura, la selección del material de aporte, la longitud de la soldadura y la posición de la soldadura con respecto a la carga aplicada.

FIGURA 13–9
Tipos de soldadura.



Se supone que las soldaduras de filete tienen una pendiente de 45 grados entre las dos superficies unidas, como se muestra en la figura 13–9(b). El tamaño de la soldadura se denota como la altura de un lado del filete triangular. Los tamaños típicos varían desde $\frac{1}{8}$ in hasta $\frac{1}{2}$ in en incrementos de $\frac{1}{16}$ in. Se supone que el esfuerzo desarrollado en las soldaduras de filete es un *esfuerzo cortante* sin importar la dirección de aplicación de la carga. El esfuerzo cortante máximo ocurriría en la garganta del filete (vea la figura 13–9), donde el espesor es 0.707 veces el tamaño nominal de la soldadura. Entonces el esfuerzo cortante en la soldadura producido por una carga P es

$$\tau = \frac{P}{Lt} \tag{13–10}$$

donde L = la longitud de la soldadura
t = el espesor en la garganta

La ecuación (13–10) se utiliza *sólo* para miembros concéntricamente cargados. Esto requiere que la línea de acción de la fuerza que actúa en las soldaduras pase por el centroide de la soldadura. La excentricidad de la carga produce un momento, además de la fuerza cortante directa, que debe ser resistida por la soldadura. Las referencias 2, 3, 6, 11 y 15 al final de es-te capítulo contienen información pertinente con respecto a juntas soldadas excéntricamente cargadas.

En la soldadura de arco eléctrico, utilizada principalmente en conexiones estructurales, normalmente se utiliza una varilla de aporte para agregar metal a la zona soldada. Conforme

TABLA 13–4 Propiedades de electrodos de soldar para acero.

Tipo de electrodo	Resistencia mínima a la tensión		Esfuerzo cortante permisible		Metales soldados típicos
	ksi	MPa	ksi	MPa	
E60	60	414	18	124	A36, A500
E70	70	483	21	145	A572 Gr. 50 A913 Gr. 50, A992
E80	80	552	24	165	A913 Gr. 65

las dos partes que se van a unir se calientan al rojo, se agrega el metal de aporte, el cual se combina con el metal base. Al enfriarse, el metal de soldadura resultante normalmente es más fuerte que el metal base original. Por consiguiente, una junta apropiadamente diseñada y hecha deberá fallar en el metal base y no en la soldadura.

En la soldadura estructural, los electrodos reciben un código que comienza con una E seguida por dos o tres dígitos, tal como E60, E80 o E100. El número denota la resistencia máxima a la tensión en ksi de la soldadura en la varilla. Por tanto una varilla E80 tendría una resistencia a la tensión de 80000 psi. Es posible agregar otros dígitos al número de código para denotar propiedades especiales. El esfuerzo cortante permisible para soldaduras de filete que utilizan electrodos es 0.3 veces la resistencia a la tensión del electrodo según el AISC. La tabla 13–4 incluye algunos electrodos comunes y sus esfuerzos permisibles.

Los productos de aluminio se sueldan con un proceso de arco protegido y gas inerte, o el proceso de soldadura por resistencia. Para el proceso de arco protegido y gas inerte, la Aluminum Association especifica las aleaciones de aporte para unir aleaciones de metal base particulares, como se indica en la tabla 13–5. También se dan los esfuerzos cortantes permisibles para ese tipo de soldaduras. Es de hacerse notar que el calentamiento de la soldadura reduce las propiedades de la mayoría de las aleaciones de aluminio dentro de 1.0 in (25 mm) de la soldadura; por ello, esto debe tenerse en cuenta en el diseño de ensambles soldados.

Consulte la referencia 4 en cuanto a datos adicionales y consideraciones de aplicación de juntas soldadas.

Problema de ejemplo 13–3

Se forma una junta traslapada aplicando dos soldaduras de filete de $\frac{3}{8}$ in a todo lo ancho de dos placas de acero ASTM A36 de $\frac{1}{2}$ in, como se muestra en la figura 13–10. Se utiliza el método de arco de metal protegido, con un electrodo E60. Calcule la carga permisible, P, que se puede aplicar a la junta.

Solución

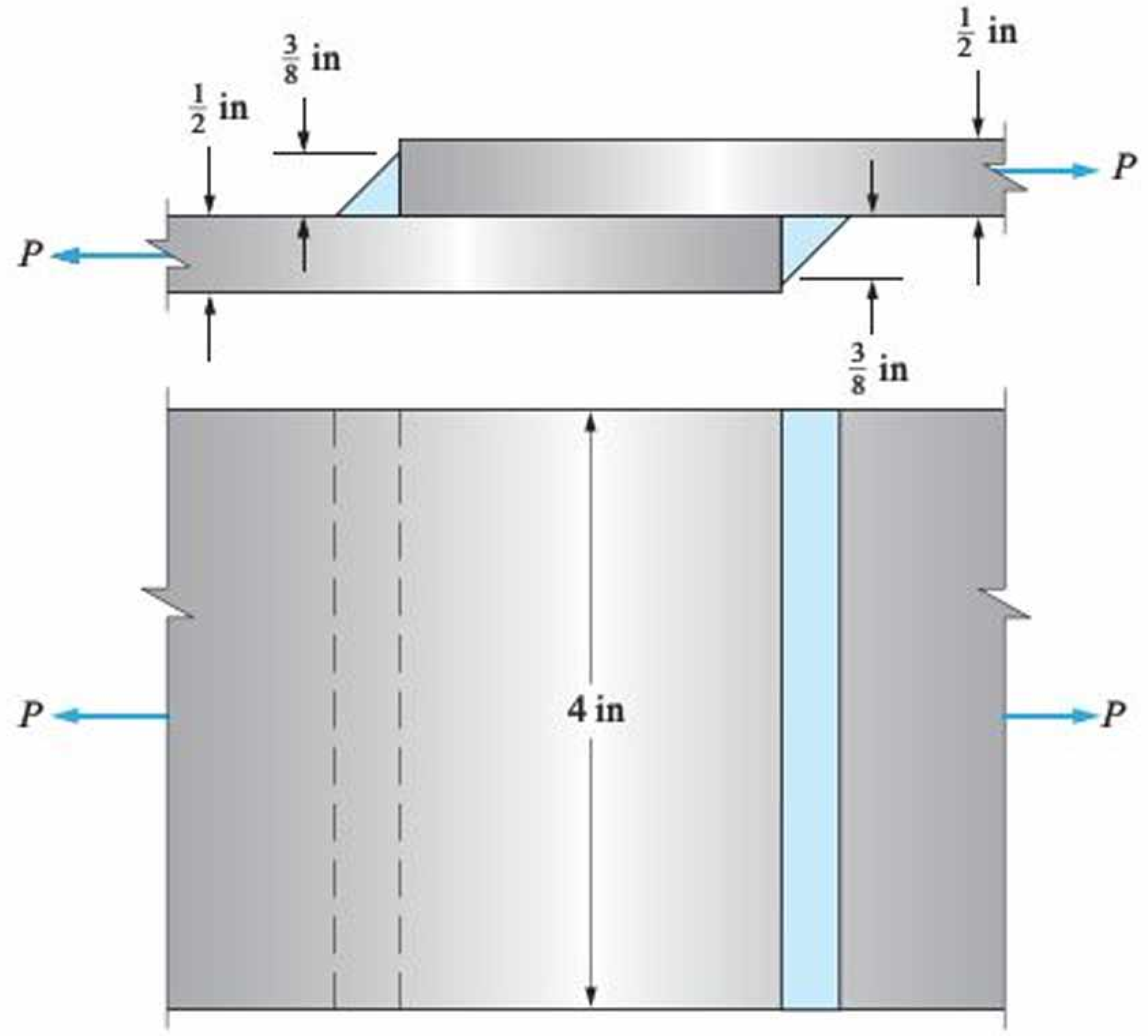
Objetivo Calcular la carga permisible, P, en la junta.

Datos Diseño de la junta mostrada en la figura 13–10. Las placas son de acero ASTM A36. Se utilizó el electrodo E60 en el método de arco de metal protegido.

TABLA 13–5 Esfuerzos cortantes permisibles en soldaduras de filete en estructuras de aluminio de edificios.

Metal base	Aleación del material de aporte							
	1100		4043		5356		5556	
	ksi	MPa	ksi	MPa	ksi	MPa	ksi	MPa
1100	3.2	22	4.8	33	—	—	—	—
3003	3.2	22	5.0	34	—	—	—	—
6061	—	—	5.0	34	7.0	48	8.5	59
6063	—	—	5.0	34	6.5	45	6.5	45

FIGURA 13–10
Junta traslapada soldada.



Análisis Se supone que la carga se distribuye por igual en todas las partes de la soldadura, de modo que se puede utilizar la ecuación (13–10) con $L = 8.0$ in.

$$\tau = \frac{P}{Lt}$$

Sea τ igual al esfuerzo permisible de 18 ksi, dado en la tabla 13–4. El espesor t es

$$t = 0.707(\tfrac{3}{8}\text{ in}) = 0.265\text{ in}$$

Ahora se puede resolver para P.

$$P = \tau_a Lt = (18\,000\text{ lb in}^2)(8.0\text{ in})(0.265\text{ in}) = 38\,200\text{ lb}$$

REFERENCIAS

1. Aluminum Association, *Aluminum Design Manual*, Washington, DC, 2005.
2. American Institute of Steel Construction, *Specification for Structural Steel Buildings*, AISC, Chicago, IL, 2005.
3. American Institute of Steel Construction, *Allowable Stress Design Specification for Structural Joints Using ASTM A325 o A490 Bolts*, American Institute of Steel Construction, Nueva York, 2001.
4. American Welding Society, *Standard AWS D1.1/D1.1M Structural Welding Code Steel*, American Welding Society, Miami, FL., 2006.
5. Bickford, J. H. *An introduction to the Design and Behavior of Bolted Joints*, 3ª ed., Marcel Dekker, Nueva York, 1995.
6. Blodgett, O. W., *Design of Weldments*, James F. Lincoln Arc Welding Foundation, Cleveland, OH, 1963.
7. Brockenbrough, R. L. y F. S. Merritt, *Structural Steel Designer's Handbook*, McGraw–Hill, Nueva York, 2005.
8. Industrial Fasteners Institute, *Fastener Standards*, 7ª ed., Industrial Fasteners Institute, Cleveland, OH, 2003.
9. Kisell, J. R. y R. Ferry, *Aluminum Structures: A Guide to their Specifications and Design*, John Wiley & Sons, Nueva York, 2002.
10. McCormac, J. C. y J. Nelson, *Structural Steel Design–LRED Method*, 4ª ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2007.
11. Mott, R. L., *Machine Elements in Mechanical Design*, 4ª ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2004.

12. Oberg E., F. D. Jones y H. L. Horton, *Machinery's Handbook*, 27ª ed., Industrial Press, Nueva York, 2004.

13. Parmley, R. O., *Standard Handbook of Fastening and Joining*, 3ª ed., McGraw–Hill, Nueva York, 1997.

14. Society of Automotive Engineers, *SAE Fastener Standards Manual–2005 Edition*, SAE Intenational, Warrendale, PA, 2005.

15. Tamboli, A. R. *Handbook of Structural Steel Connection Design and Details*, McGraw–Hill, Nueva York, 2000.

SITIOS DE INTERNET

Estándares y asociaciones profesionales

1. Aluminum Association www.aluminum.org La asociación de la industria del aluminio. Fuente de información y documentos sobre el aluminio utilizado para sujetadores, e información sobre el diseño de conexiones de estructuras de aluminio.
2. American Institute of Steel Construction www.aisc.org Editor de *Specifications for Structural Steel Buildings* que contienen datos extensos sobre conexiones y procedimientos para diseñar y fabricar conexiones para edificios de acero.
3. ASTM International www.astm.org Anteriormente conocida como la American Society for Testing and Materials. Desarrolladora de numerosos estándares para sujetadores utilizados en la industria de la construcción de edificios.
4. Industrial Fasteners Institute www.industrial–fasteners.org Una asociación de fabricantes y proveedores de tornillos, tuercas, pernos, remaches y partes de forma especial, y los materiales y equipo para fabricarlos. El sitio incluye estándares, publicaciones de referencia y oportunidades educativas.
5. Research Council on Structural Connections (RCSC) www.boltcouncil.org Una organización que estimula y apoya la investigación sobre conexiones estructurales, y que prepara y publica estándares.
6. SAE International www.sae.org The Society of Automotive Engineers, la sociedad de ingeniería que promueve el avance de la movilidad en tierra, el mar, el aire o el espacio. Editor del *SAE Handbook* y el *SAE Fastener Manual*, cada uno de los cuales contiene información útil sobre el uso de sujetadores y sus propiedades.
7. NASA Ames Research Center (ARC) www.windtunnels.arc.nasa.gov/strucjo.html Parte de un sitio más grande del ARC que incluye estándares de juntas estructurales para cualquier estructura o equipo suministrado para usarse en sus túneles de viento. La lista es un buen resumen general de las consideraciones de diseño y fabricación importantes para obtener juntas estructurales exitosas.

Programas de diseño de juntas

8. Bolt Science www.boltscience.com Productor de programas de análisis de juntas atornilladas. El sitio incluye un *tutorial sobre los fundamentos de juntas atornilladas.*
9. Sensor Products, Inc. www.sensorproducts.com Desarrollador del programa BoltFAST para juntas atornilladas, que incluye análisis de juntas, análisis de roscas y par de torsión de apriete.

Fabricantes de sujetadores

10. St. Louis & Bolt Company www.stlouisscrewbolt.com Fabricante de tornillos, tuercas y rondanas de acuerdo con estándares ASTM para la industria de la construcción.
11. Nucor Fastener Division www.nucor–fastener.com Fabricante de tornillos prisioneros de cabeza hexagonal en grados SAE, ASTM y métricos; tuercas hexagonales y pernos estructurales, tuercas y rondanas
12. Nylok Corporation www.nylok.com Fabricante de Nylok, sujetadores autotrabantes para automóviles, naves aeroespaciales, productos de consumo, maquinaria agrícola, maquinaria industrial, muebles y muchas otras aplicaciones.
13. The Fastener Group www.fastenergroup.com Un proveedor de pernos, tornillos prisioneros, tuercas, remaches y muchos otros tipos de sujetadores para usos industriales generales.
14. SPS Technologies, Inc. www.spstech.com/unbrako Fabricante de sujetadores diseñados bajo las marcas Unbrako®, Flexiloc® y Durlok®, incluidos tornillos de prisioneros de cabeza hueca, tuercas de seguridad, y tuercas y pernos resistentes a la vibración para maquinaria industrial y aplicaciones automotrices y aeroespaciales. El sitio incluye catálogos y datos de ingeniería.

Tecnología y estándares de la soldadura

15. American Welding Society www.aws.org Editor del estándar AWS D1.1/D1.1M *Structural Welding Code Steel* y muchas otras publicaciones relacionadas con el diseño de estructuras soldadas, el proceso de soldadura y la industria de la soldadura.
16. James F. Lincoln Foundation www.jflf.org Una organización que promueve la educación y entrenamiento en la tecnología de la soldadura. El sitio incluye mucha información sobre procesos de soldadura, diseño de juntas y recomendaciones para la construcción de acero soldado.
17. Miller Electric Company www.millerwelds.com Fabricante de equipo y accesorios de soldar. El sitio incluye una sección de capacitación/educación con información sobre procesos de soldar.
18. Hobart Institute of Welding Technology www.welding.org Organización educativa que incluye instrucción en el desempeño de técnicas de soldar. El sitio proporciona consejos sobre el proceso de soldar y un glosario de términos de soldadura.

PROBLEMAS

13–1 Determine las cargas permisibles en las juntas mostradas en la figura P13–1. Todos los sujetadores son remaches de acero al carbón cuya capacidad de resistir fuerza cortante se muestra en la tabla 13–2. Las placas son de acero estructural ASTM A36.

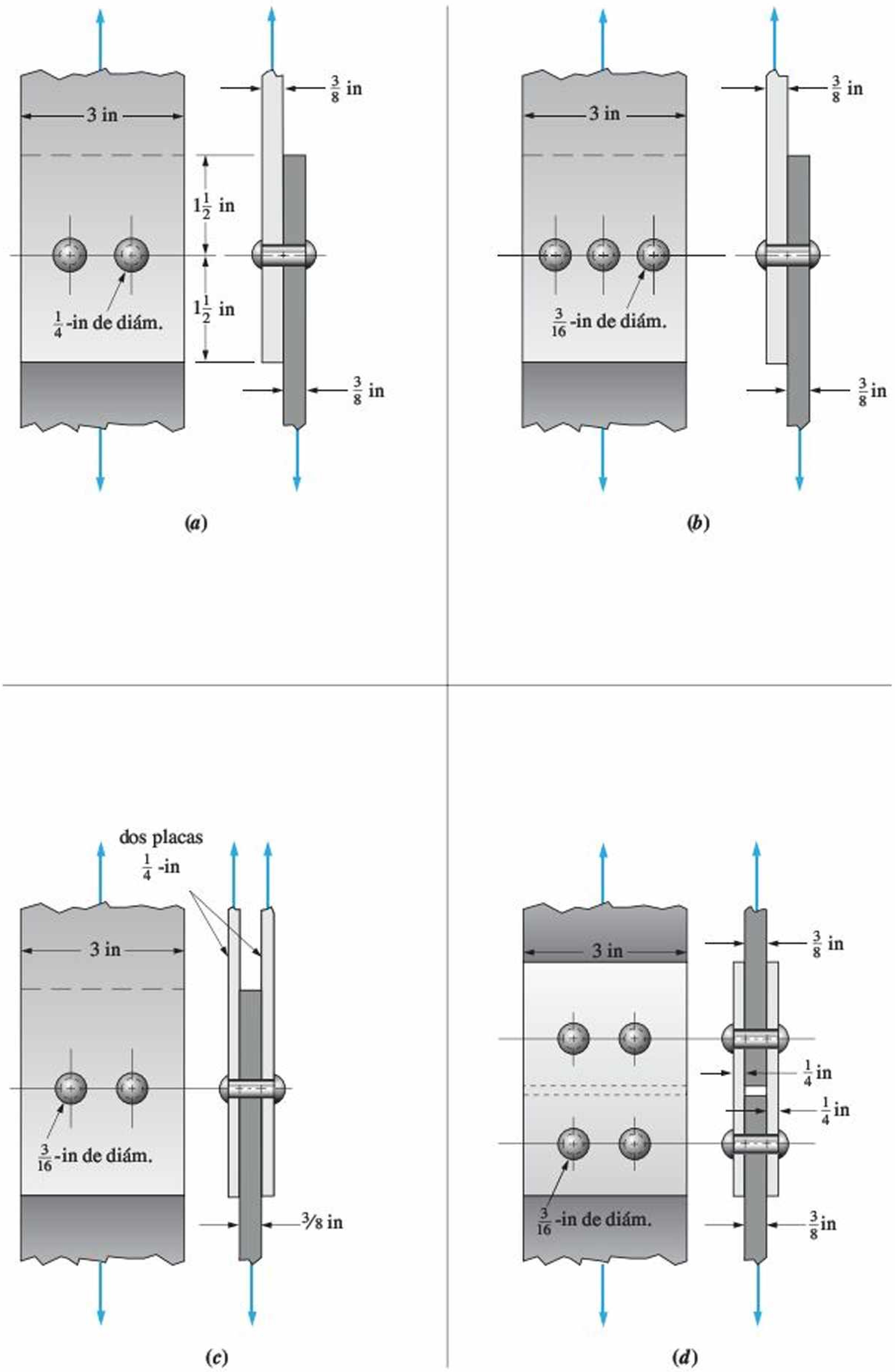


FIGURA 13–1 Juntas de los problemas 13–1 y 13–3.

13–2 Determine las cargas permisibles en las juntas mostradas en la figura P13–2. Todos los sujetadores son de acero inoxidable cuya capacidad de resistir fuerza cortante se muestra en la tabla 13–2. Las placas son de acero inoxidable AISI 430 en la condición de dureza completa.

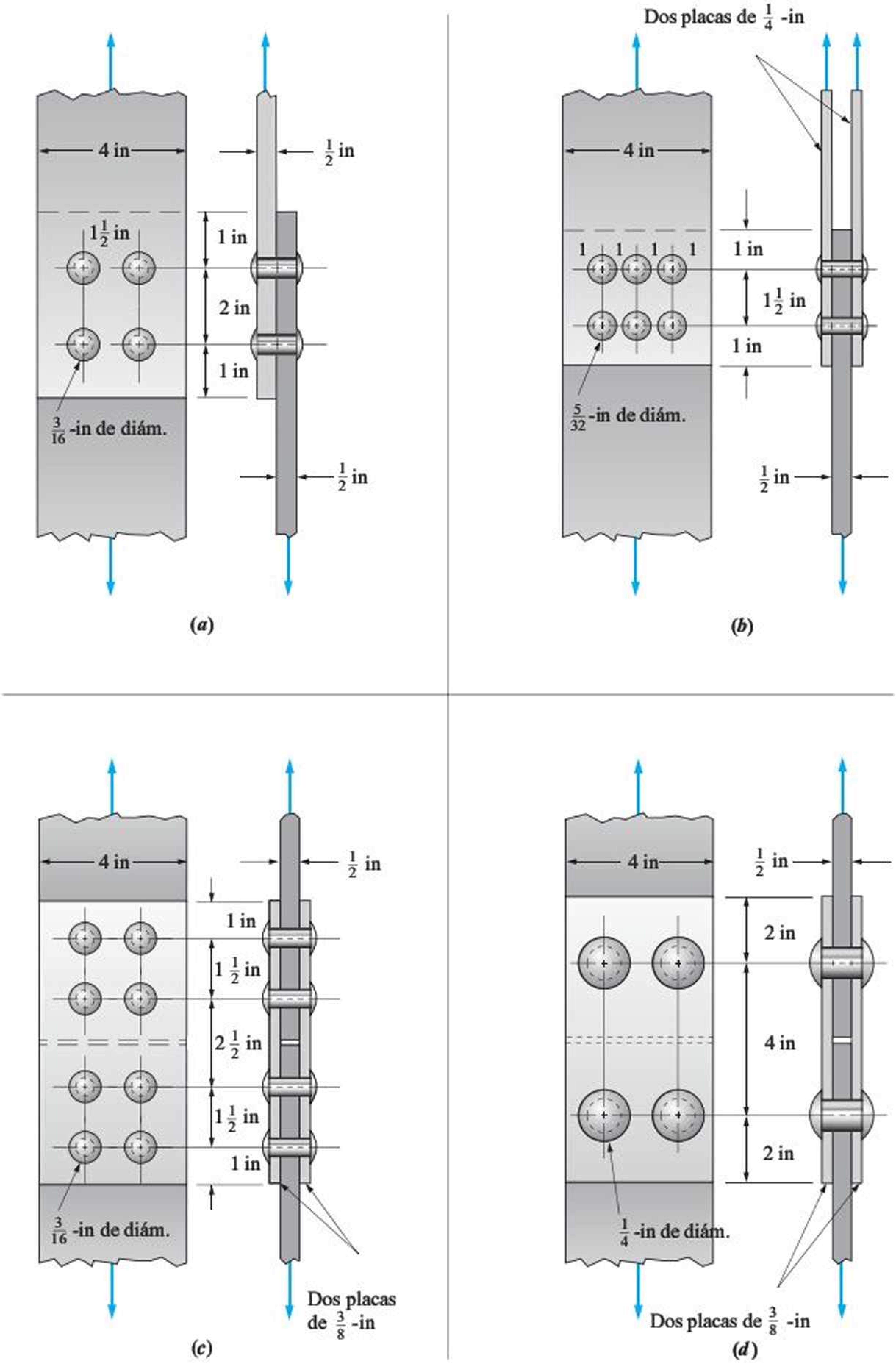


FIGURA 13–2 Juntas de los problemas 13–2 y 13–4.

13–3 Determine las cargas permisibles en las juntas mostradas en la figura P13–1; todos los sujetadores son pernos de acero ASTM A307 que forman una conexión tipo apoyo. Las placas son de acero estructural ASTM A242 HSLA resistente a la corrosión.

13–4 Determine las cargas permisibles en las juntas mostradas en la figura P13–2; todos los sujetadores son pernos de acero ASTM A514 de alta resistencia que forman una conexión tipo apoyo. Las placas con de acero estructural de aleación enfriado por inmersión y templado.

13–5 Determine el diámetro requerido de los tornillos utilizados para unir la viga en voladizo a la columna, como se muestra en la figura P13–5. Use tornillos ASTM A325. La placa es de acero estructural ASTM A36 y la columna de acero estructural ASTM A992.

13–6 Diseñe la conexión del canal a la columna para la ménsula mostrada en la figura P13–6. El canal es de acero estructural ASTM A36 y la columna de acero estructural ASTM A992. Especifique el material de los tornillos, el número de ellos, su patrón (localización y separación) y su tamaño. Use los datos de la tabla 13–1.

13–7.E Para la conexión mostrada en la figura P13–1(a), suponga que, en lugar de los remaches, las dos placas de 3 in de ancho se soldaron a través de sus extremos con soldaduras de $\frac{5}{16}$ in. Las placas son de acero ASTM A36 y se utilizó la técnica de soldadura de arco eléctrico con electrodos E60. Determine la carga permisible en la conexión.

13–8.E Determine la carga permisible en la junta mostrada de la figura P13–2(c) si se aplicaron soldaduras de $\frac{1}{4}$ in con electrodos E70 a lo largo de ambos extremos de las dos cubreplacas. Éstas son de acero ASTM A572 grado 50.

13–9.M Diseñe la junta en el extremo superior de las soleras mostradas en la figura 13–1 si la carga total en la tolva es de 15.0 megagramos (Mg). La viga es un perfil WT12 × 34 de acero ASTM A36 con alma de 10.6 mm de espesor. La altura vertical libre del alma es aproximadamente de 275 mm. Use remaches de acero y especifique el patrón, el número de remaches, el diámetro y el material de éstos y las dimensiones de las soleras. Use los datos de la tabla 13–2.

13–10.M Diseñe la junta en la parte inferior de las soleras mostradas en la figura 13–1 si la carga total en la tolva es de 15.0 Mg. Use tornillos de acero y una conexión de tipo apoyo. Especifique el patrón, el número, el diámetro y el material de los tornillos, el material y las dimensiones de las soleras. Es posible que desee coordinar el diseño de las soleras con los resultados del problema 13–9. El diseño del apéndice del problema 13–11 también se ve afectado por el diseño de la junta atornillada.

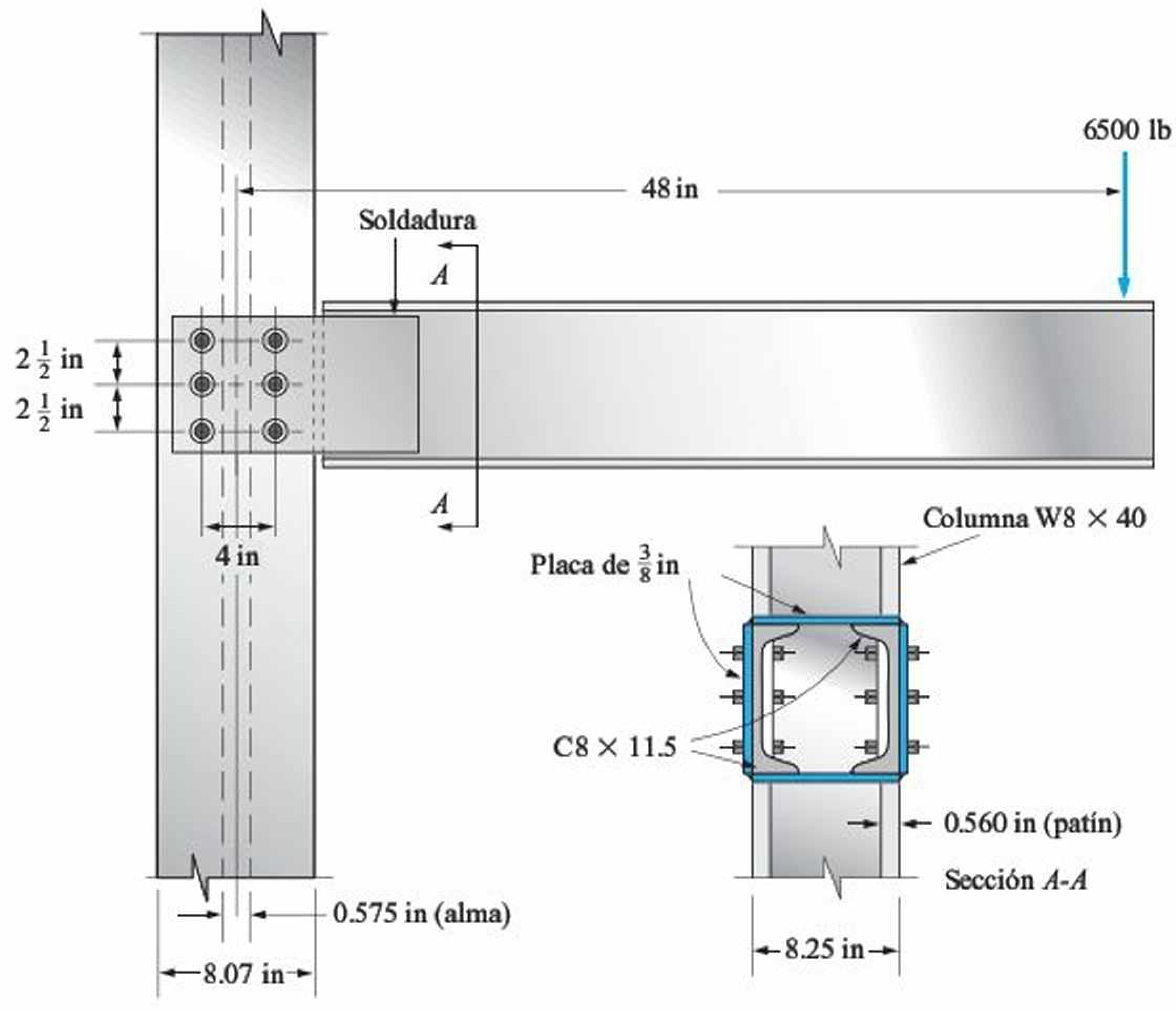


FIGURA 13–5 Conexión del problema 13–5.

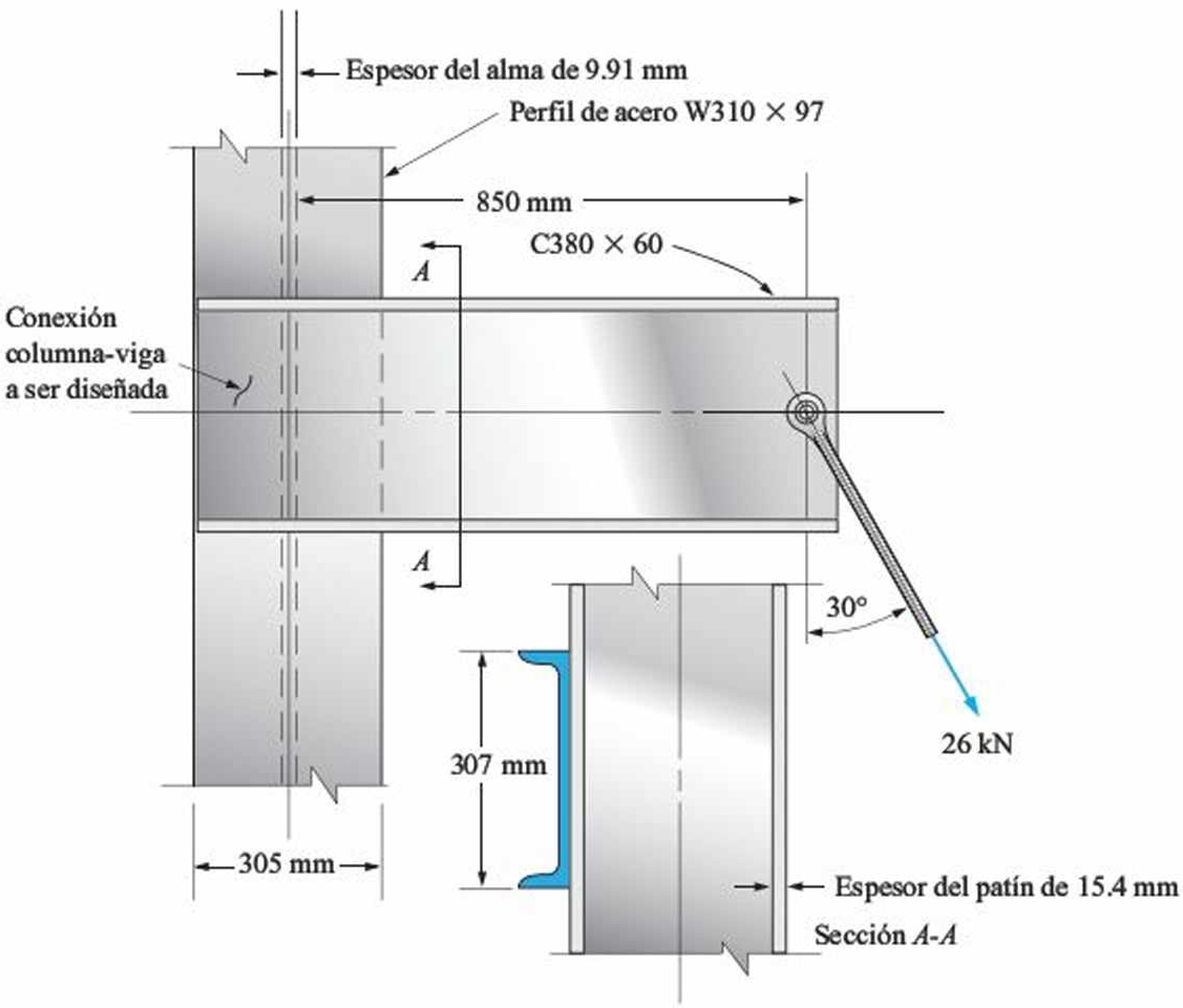


FIGURA 13–6 Conexión del problema 13–6.

13–11.M Diseñe la caja adjunta que se va a soldar a la tolva para conectarla a las soleras de soporte, como se muestra en la figura 13–1. La carga en la tolva es de 15.0 Mg. El material del cual está hecha la tolva es de acero ASTM A36. Especifique el ancho y espesor de la caja adjunta y el diseño de la junta soldada. En posible que desee coordinar el diseño de la caja adjunta con la conexión atornillada pedida en el problema 13–10.

Apéndices

Lista de apéndices

A–1 Propiedades de áreas
A–2 Tamaños básicos preferidos
A–3 Roscas de tornillos
A–4 Propiedades de vigas de madera estándar
A–5 Propiedades de ángulos de acero (perfiles L) en unidades del sistema inglés
A–6 Propiedades de canales de acero American Standard (perfiles C) en unidades del sistema inglés
A–7 Propiedades de perfiles de acero de patín ancho (perfiles W) en unidades del sistema inglés
A–8 Propiedades de vigas de acero American Standard (perfiles S) en unidades del sistema inglés
A–9 Propiedades de tubería estructural de acero cuadrada y rectangular (perfiles HSS) en unidades del sistema inglés
A–10 Propiedades de canales estándar Aluminum Association, en unidades del sistema inglés
A–11 Propiedades de vigas I estándar Aluminum Association, en unidades del sistema inglés
A–12 Propiedades de tubos de acero en unidades del sistema inglés
A–13 Propiedades de tubería mecánica de acero, en unidades del sistema inglés
A–14 Propiedades típicas de aceros al carbón y de aleación
A–15 Propiedades típicas de aceros inoxidables y metales no ferrosos
A–16 Propiedades de aceros estructurales
A–17 Propiedades típicas del hierro fundido
A–18 Propiedades típicas de aleaciones de aluminio
A–19 Propiedades típicas de la madera
A–20 Propiedades típicas de plásticos seleccionados
A–21 Instrucciones para determinar el esfuerzo de diseño
A–22 Factores de concentración de esfuerzo
A–23 Fórmulas para determinar la deflexión de vigas simplemente apoyadas
A–24 Fórmulas para determinar la deflexión de vigas en voladizo
A–25 Diagramas de vigas y fórmulas para determinar la deflexión de vigas estáticamente indeterminadas
A–26 Factores de conversión
A–27 Repaso de los fundamentos de estática

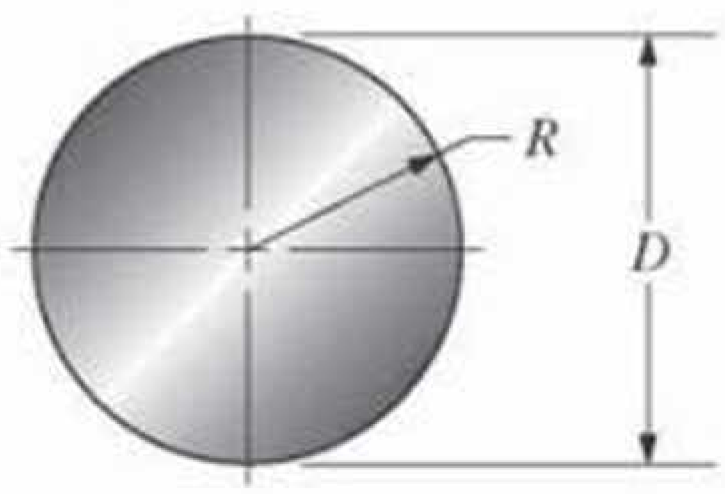
Apéndice

A–1 Propiedades de áreas.

*Los símbolos utilizados son:

A = área
I = momento de inercia
S = módulo de sección
r = radio de giro = $\sqrt{I/A}$
J = momento polar de inercia
Z_p = módulo de sección polar

Círculo



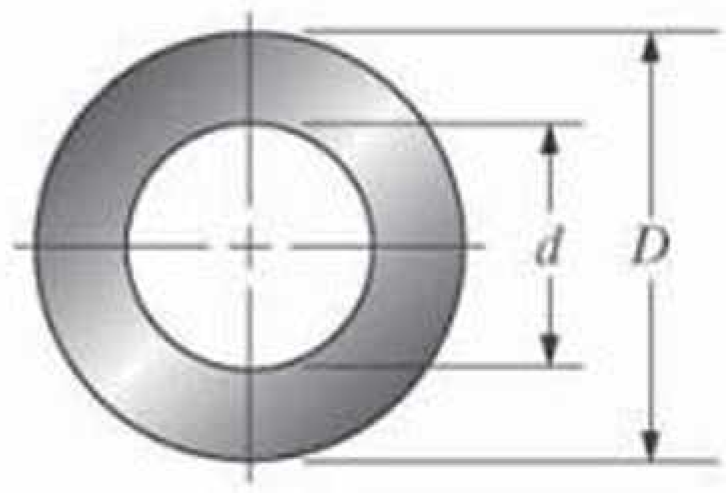
$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \pi R^2 \qquad r = \frac{D}{4} = \frac{R}{2}$$

$$I = \frac{\pi D^4}{64} \qquad J = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$S = \frac{\pi D^3}{32} \qquad Z_p = \frac{\pi D^3}{16}$$

Circunferencia $= \pi D = 2\pi R$

Círculo hueco (tubo)

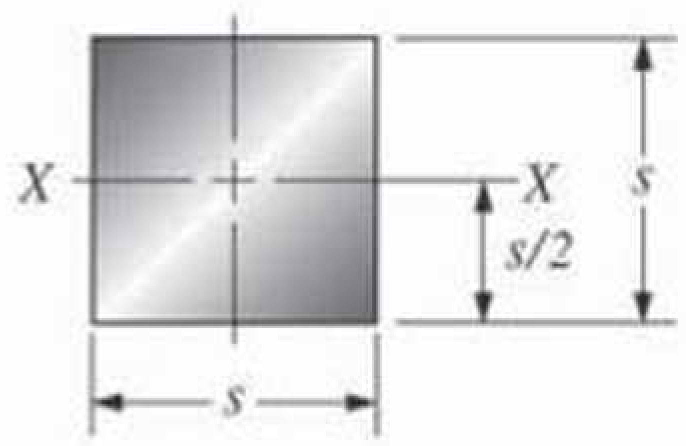


$$A = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} \qquad r = \frac{\sqrt{D^2 + d^2}}{4}$$

$$I = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} \qquad J = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$$

$$S = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D} \qquad Z_p = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D}$$

Cuadrado

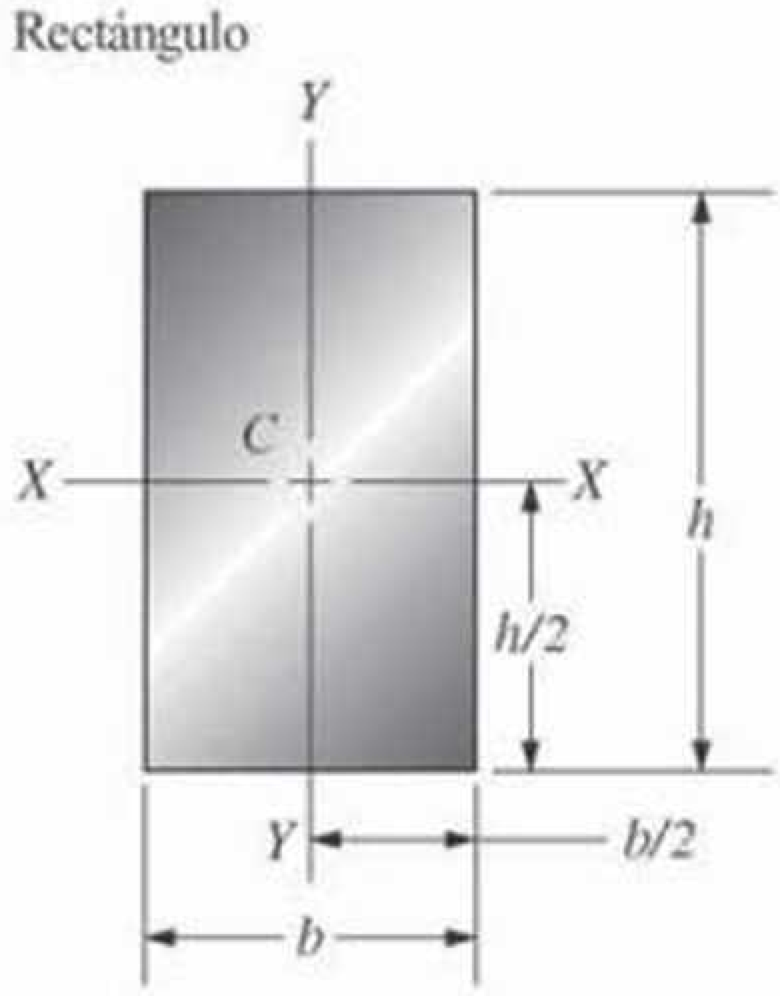


$$A = s^2$$

$$I_x = \frac{s^4}{12} \qquad r_x = \frac{s}{\sqrt{12}}$$

$$S_x = \frac{s^3}{6}$$

Rectángulo



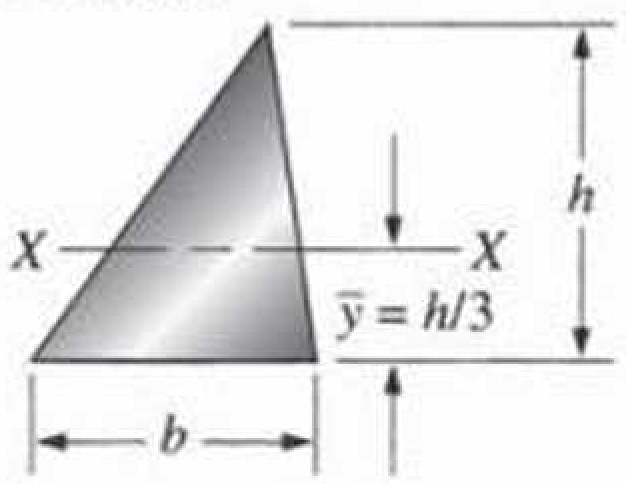
$$A = \frac{bh}{2}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{36} \qquad r_x = \frac{h}{\sqrt{18}}$$

$$S_x = \frac{bh^2}{24}$$

$$A = \frac{\pi D^2}{8}$$

Triángulo

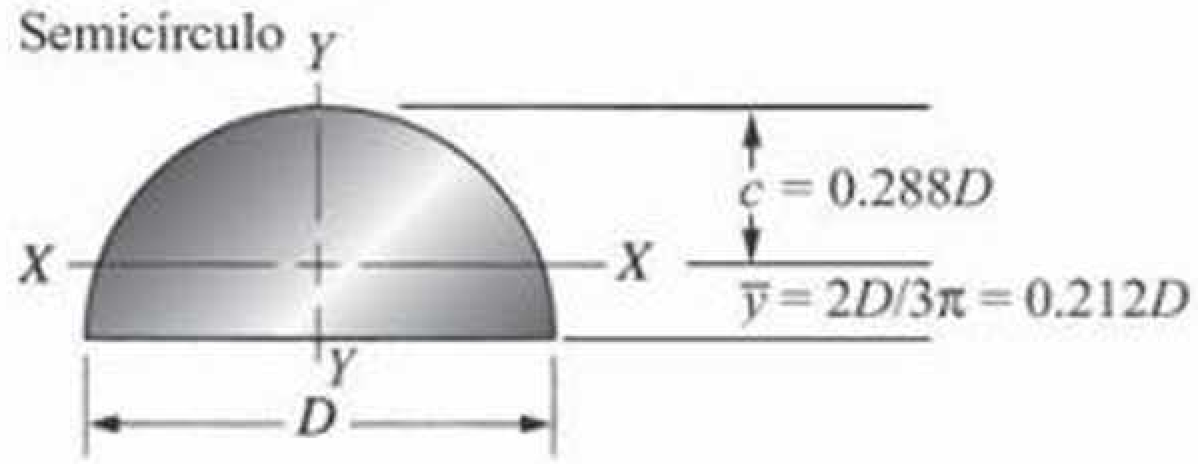


$$A = \frac{bh}{2}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{36} \qquad r_x = \frac{h}{\sqrt{18}}$$

$$S_x = \frac{bh^2}{24}$$

Semicírculo

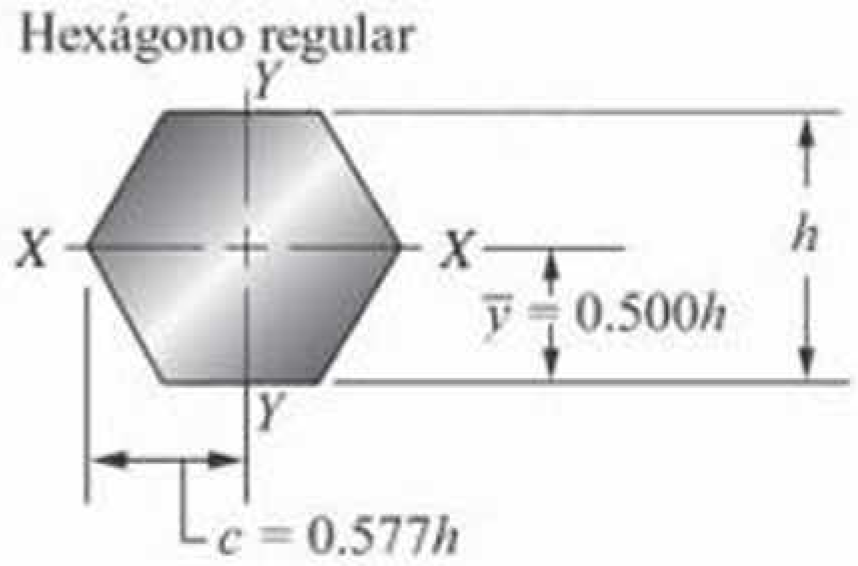


$$A = \frac{\pi D^2}{8}$$

$I_x = 0.00686D^4$ $\quad S_x = 0.0238D^3$ $\quad r_x = 0.132D$

$I_y = 0.0245D^4$ $\quad S_y = 0.0491D^3$ $\quad r_y = D/4 = R/2$

Hexágono regular

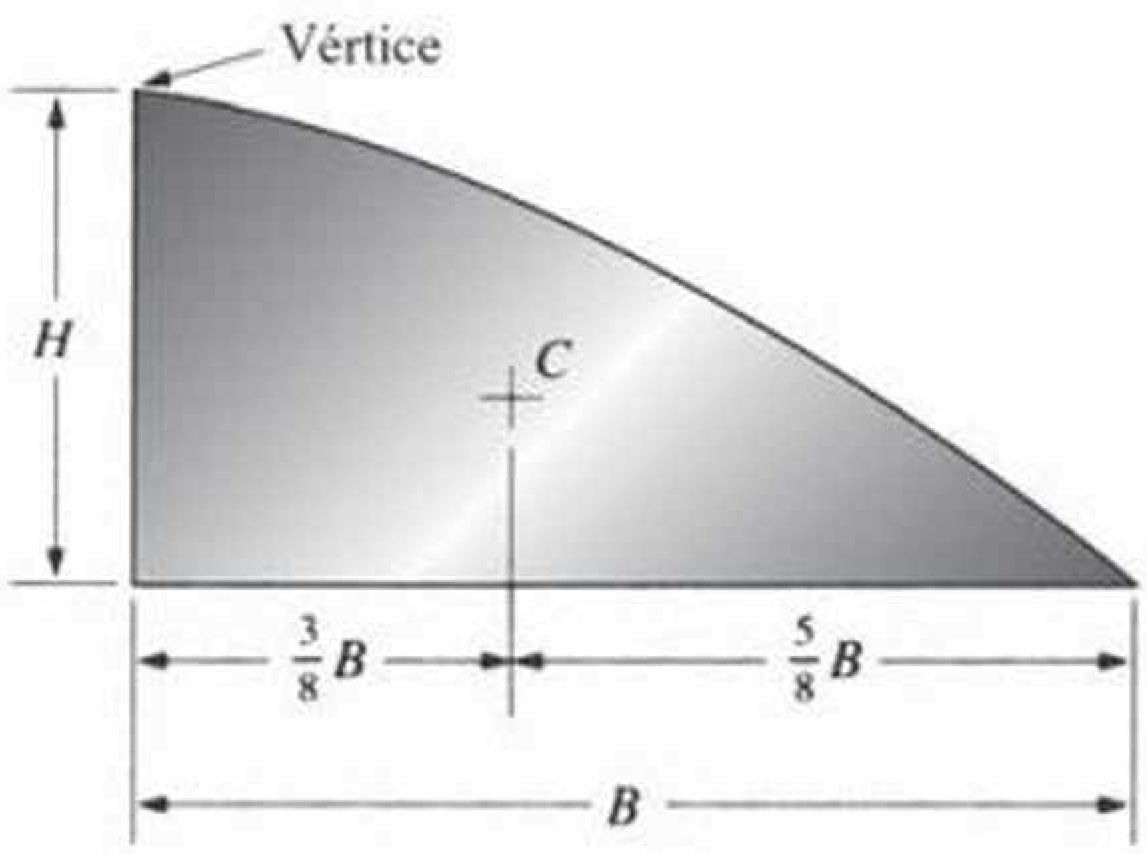


$$A = 0.866h^2$$

$I_x = 0.0601h^4$ $\quad S_x = 0.120h^3$ $\quad r_x = 0.264h$

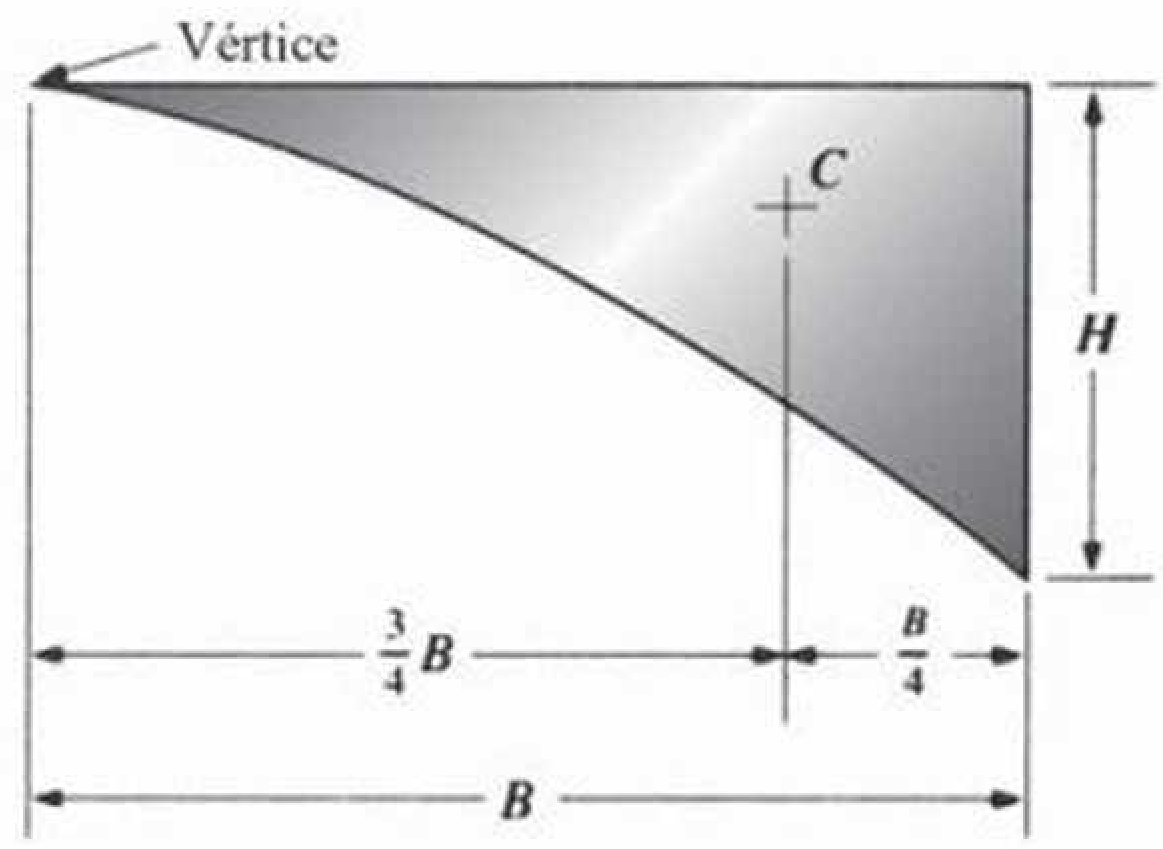
$I_y = 0.0601h^4$ $\quad S_y = 0.104h^3$ $\quad r_y = 0.264h$

Área bajo una curva de segundo grado



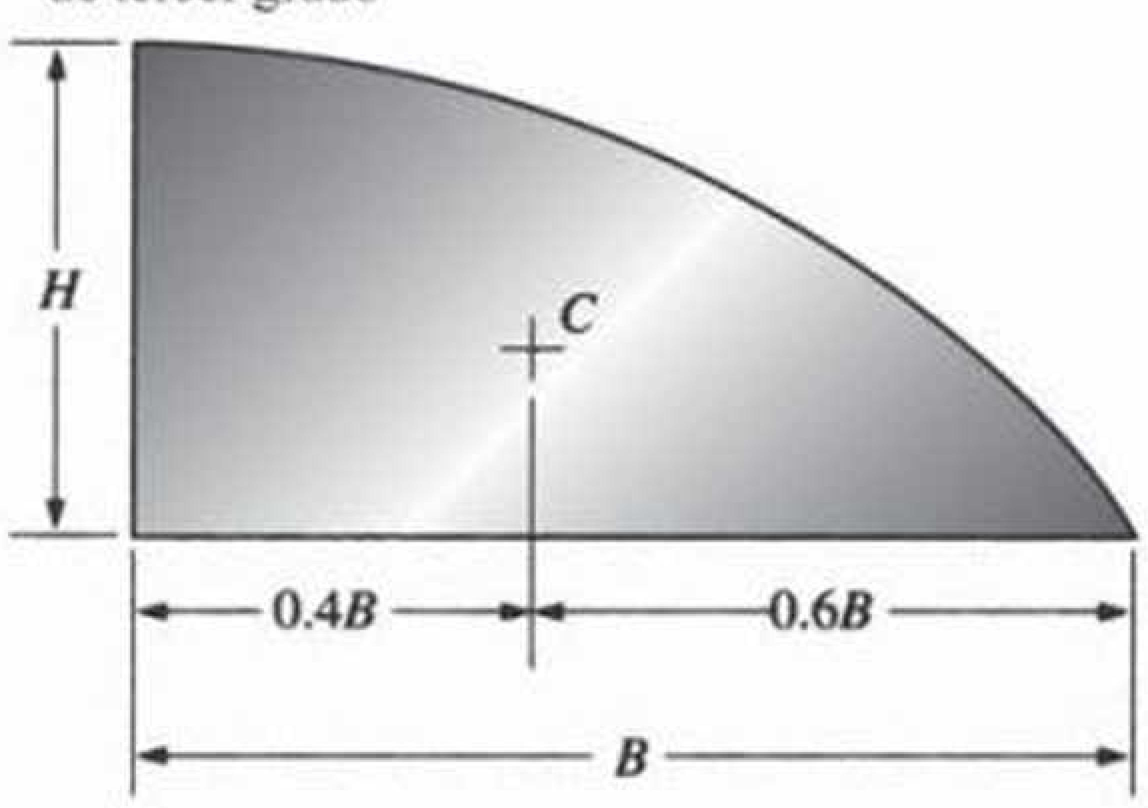
$$A = \frac{2}{3}BH$$

Área sobre una curva de segundo grado



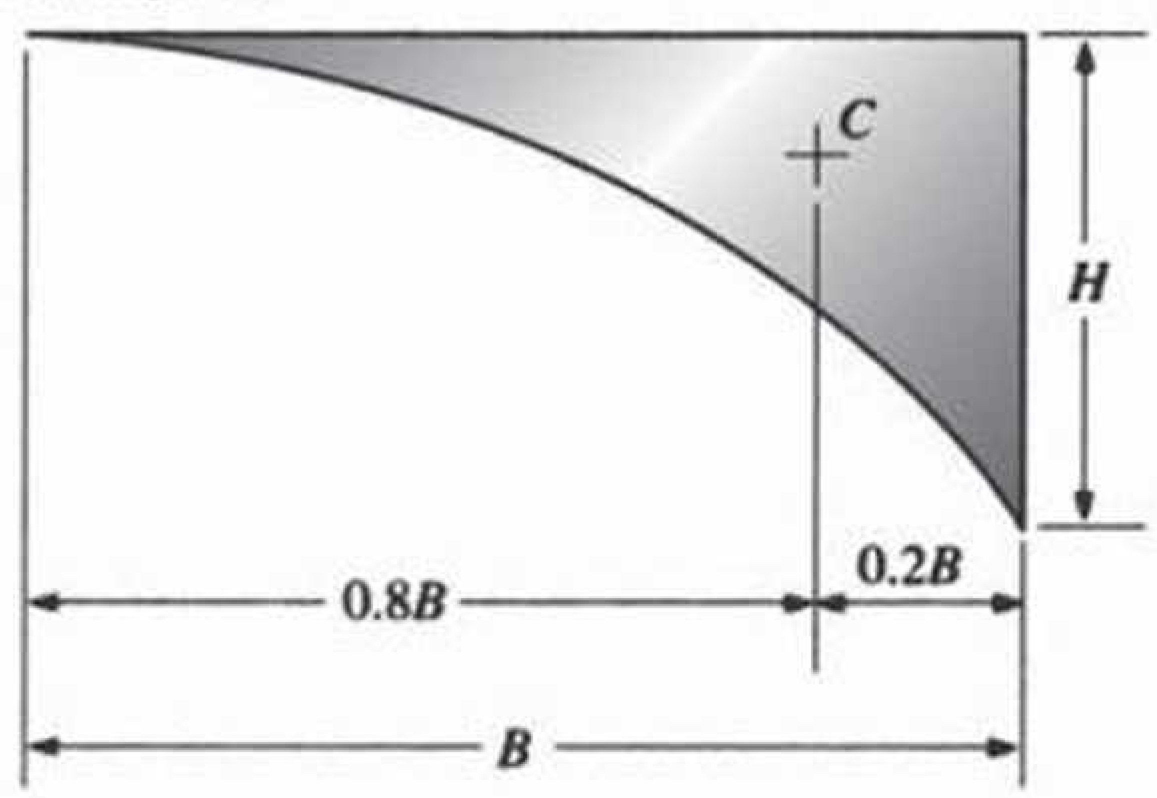
$$A = \frac{1}{3}BH$$

Área bajo una curva de tercer grado



$$A = \frac{3}{4}BH$$

Área sobre una curva de tercer grado



$$A = \frac{1}{4}BH$$

A–2 Tamaños básicos preferidos.

Fracciones (in)				Decimales (in)			Métricos (mm)					
							Primero	Segundo	Primero	Segundo	Primero	Segundo
$\frac{1}{64}$	0.015 625	5	5.000	0.010	2.00	8.50	1		10		100	
$\frac{1}{32}$	0.031 25	$5\frac{1}{4}$	5.250	0.012	2.20	9.00		1.1		11		110
$\frac{1}{16}$	0.062 5	$5\frac{1}{2}$	5.500	0.016	2.40	9.50	1.2		12		120	
$\frac{3}{32}$	0.093 75	$5\frac{3}{4}$	5.750	0.020	2.60	10.00		1.4		14		140
$\frac{1}{8}$	0.125 0	6	6.000	0.025	2.80	10.50	1.6		16		160	
$\frac{5}{32}$	0.156 25	$6\frac{1}{2}$	6.500	0.032	3.00	11.00		1.8		18		180
$\frac{3}{16}$	0.187 5	7	7.000	0.040	3.20	11.50	2		20		200	
$\frac{1}{4}$	0.250 0	$7\frac{1}{2}$	7.500	0.05	3.40	12.00		2.2		22		220
$\frac{5}{16}$	0.312 5	8	8.000	0.06	3.60	12.50	2.5		25		250	
$\frac{3}{8}$	0.375 0	$8\frac{1}{2}$	8.500	0.08	3.80	13.00		2.8		28		280
$\frac{7}{16}$	0.437 5	9	9.000	0.10	4.00	13.50	3		30		300	
$\frac{1}{2}$	0.500 0	$9\frac{1}{2}$	9.500	0.12	4.20	14.00		3.5		35		350
$\frac{9}{16}$	0.562 5	10	10.000	0.16	4.40	14.50	4		40		400	
$\frac{5}{8}$	0.625 0	$10\frac{1}{2}$	10.500	0.20	4.60	15.00		4.5		45		450
$\frac{11}{16}$	0.687 5	11	11.000	0.24	4.80	15.50	5		50		500	
$\frac{3}{4}$	0.750 0	$11\frac{1}{2}$	11.500	0.30	5.00	16.00		5.5		55		550
$\frac{7}{8}$	0.875 0	12	12.000	0.40	5.20	16.50	6		60		600	
1	1.000	$12\frac{1}{2}$	12.500	0.50	5.40	17.00		7		70		700
$1\frac{1}{4}$	1.250	13	13.000	0.60	5.60	17.50	8		80		800	
$1\frac{1}{2}$	1.500	$13\frac{1}{2}$	13.500	0.80	5.80	18.00		9		90		900
$1\frac{3}{4}$	1.750	14	14.000	1.00	6.00	18.50					1000	
2	2.000	$14\frac{1}{2}$	14.500	1.20	6.50	19.00						
$2\frac{1}{4}$	2.250	15	15.000	1.40	7.00	19.50						
$2\frac{1}{2}$	2.500	$15\frac{1}{2}$	15.500	1.60	7.50	20.00						
$2\frac{3}{4}$	2.750	16	16.000	1.80	8.00							
3	3.000	$16\frac{1}{2}$	16.500									
$3\frac{1}{4}$	3.250	17	17.000									
$3\frac{1}{2}$	3.500	$17\frac{1}{2}$	17.500									
$3\frac{3}{4}$	3.750	18	18.000									
4	4.000	$18\frac{1}{2}$	18.500									
$4\frac{1}{4}$	4.250	19	19.000									
$4\frac{1}{2}$	4.500	$19\frac{1}{2}$	19.500									
$4\frac{3}{4}$	4.750	20	20.000									

A–3 Roscas de tornillos.

(a) Dimensiones de roscas American Standard, tamaños numerados

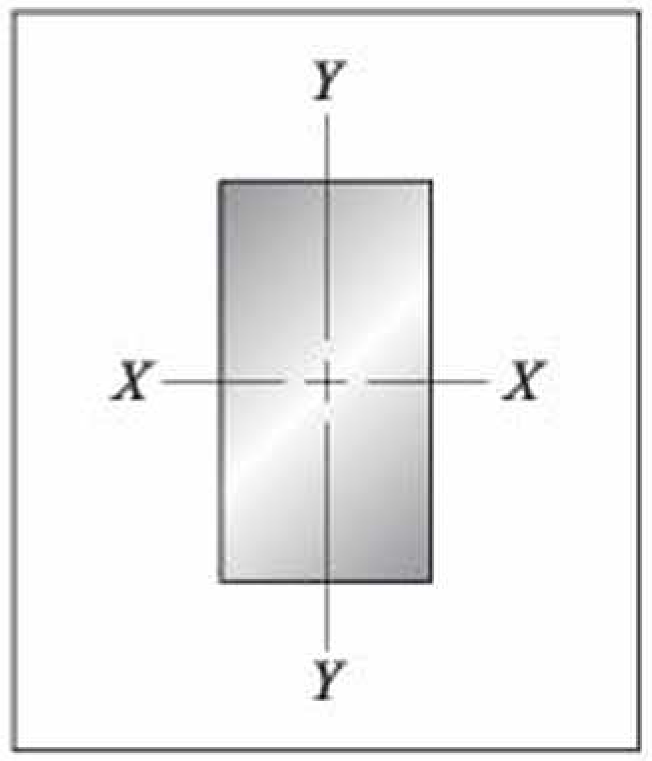
Tamaño	Diámetro mayor básico, *D* (in)	Roscas gruesas: UNC Hilos por pulgada, *n*	Roscas gruesas: UNC Área a esfuerzo de tensión (in^2)	Roscas finas: UNF Hilos por pulgada, *n*	Roscas finas: UNF Área a esfuerzo de tensión (in^2)
0	0.060 0	—	—	80	0.001 80
1	0.073 0	64	0.002 63	72	0.002 78
2	0.086 0	56	0.003 70	64	0.003 94
3	0.099 0	48	0.004 87	56	0.005 23
4	0.112 0	40	0.006 04	48	0.006 61
5	0.125 0	40	0.007 96	44	0.008 30
6	0.138 0	32	0.009 09	40	0.010 15
8	0.164 0	32	0.014 0	36	0.014 74
10	0.190 0	24	0.017 5	32	0.020 0
12	0.216 0	24	0.024 2	28	0.025 8

(b) Dimensiones de roscas American Standard, tamaños en fracciones

Tamaño	Diámetro mayor básico, *D* (in)	Roscas gruesas: UNC Hilos por pulgada, *n*	Roscas gruesas: UNC Área a esfuerzo de tensión (in^2)	Roscas finas: UNF Hilos por pulgada, *n*	Roscas finas: UNF Área a esfuerzo de tensión (in^2)
$\frac{1}{4}$	0.250 0	20	0.031 8	28	0.036 4
$\frac{5}{16}$	0.312 5	18	0.052 4	24	0.058 0
$\frac{3}{8}$	0.375 0	16	0.077 5	24	0.087 8
$\frac{7}{16}$	0.437 5	14	0.106 3	20	0.118 7
$\frac{1}{2}$	0.500 0	13	0.141 9	20	0.159 9
$\frac{9}{16}$	0.562 5	12	0.182	18	0.203
$\frac{5}{8}$	0.625 0	11	0.226	18	0.256
$\frac{3}{4}$	0.750 0	10	0.334	16	0.373
$\frac{7}{8}$	0.875 0	9	0.462	14	0.509
1	1.000	8	0.606	12	0.663
$1\frac{1}{8}$	1.125	7	0.763	12	0.856
$1\frac{1}{4}$	1.250	7	0.969	12	1.073
$1\frac{3}{8}$	1.375	6	1.155	12	1.315
$1\frac{1}{2}$	1.500	6	1.405	12	1.581
$1\frac{3}{4}$	1.750	5	1.90	—	—
2	2.000	$4\frac{1}{2}$	2.50	—	—

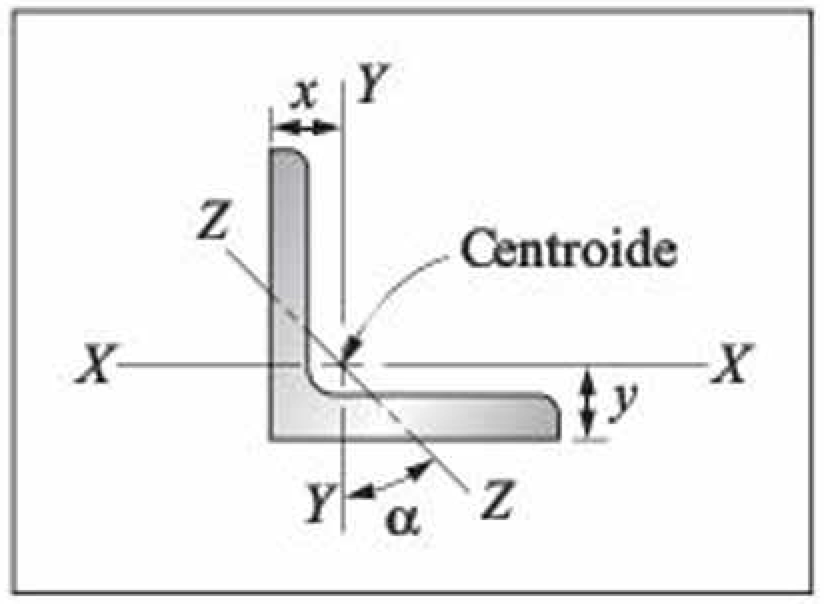
(*c*) Dimensiones de roscas métricas

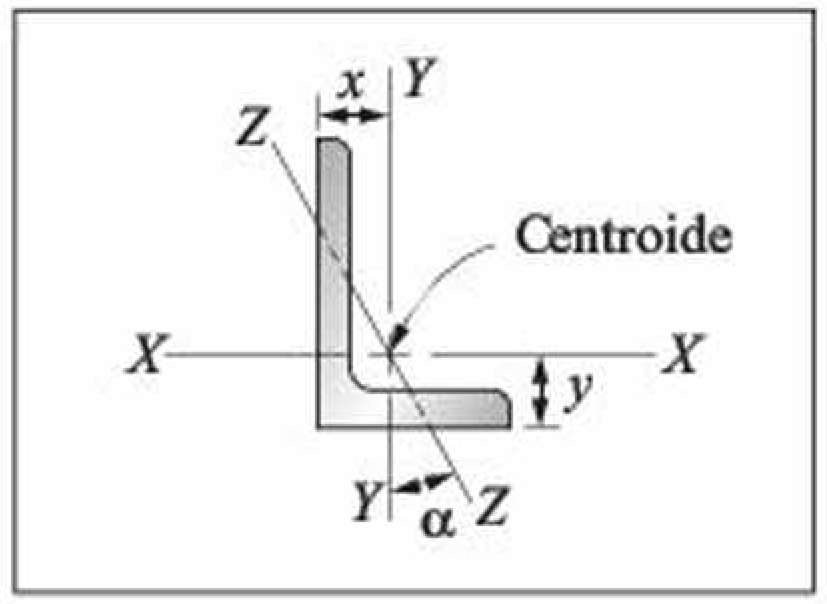
Diámetro mayor básico, *D* (mm)	Roscas gruesas		Roscas finas	
	Paso (mm)	Área a esfuerzo de tensión (mm^2)	Paso (mm)	Área a esfuerzo de tensión (mm^2)
1	0.25	0.460	—	—
1.6	0.35	1.27	0.20	1.57
2	0.4	2.07	0.25	2.45
2.5	0.45	3.39	0.35	3.70
3	0.5	5.03	0.35	5.61
4	0.7	8.78	0.5	9.79
5	0.8	14.2	0.5	16.1
6	1	20.1	0.75	22.0
8	1.25	36.6	1	39.2
10	1.5	58.0	1.25	61.2
12	1.75	84.3	1.25	92.1
16	2	157	1.5	167
20	2.5	245	1.5	272
24	3	353	2	384
30	3.5	561	2	621
36	4	817	3	865
42	4.5	1 121	—	—
48	5	1 473	—	—



A–4 Propiedades de vigas de madera estándar.

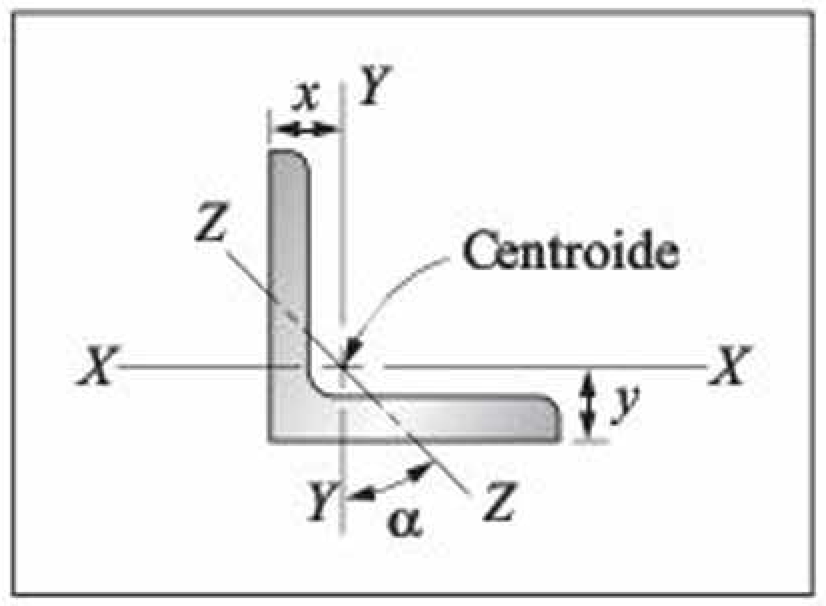
Tamaño nominal	Tamaño real		Área de sección		Momento de inercia, I_x		Módulo de sección, S_x	
	in	mm	in^2	mm^2	in^4	mm^4	in^3	mm^3
2 × 4	1.5 × 3.5	38 × 89	5.25	3.39×10^3	5.36	2.23×10^6	3.06	50.1×10^3
2 × 6	1.5 × 5.5	38 × 140	8.25	5.32×10^3	20.8	8.66×10^6	7.56	124×10^3
2 × 8	1.5 × 7.25	38 × 184	10.87	7.01×10^3	47.6	19.8×10^6	13.14	215×10^3
2 × 10	1.5 × 9.25	38 × 235	13.87	8.95×10^3	98.9	41.2×10^6	21.4	351×10^3
2 × 12	1.5 × 11.25	38 × 286	16.87	10.88×10^3	178	74.1×10^6	31.6	518×10^3
4 × 4	3.5 × 3.5	89 × 89	12.25	7.90×10^3	12.51	5.21×10^6	7.15	117×10^3
4 × 6	3.5 × 5.5	89 × 140	19.25	12.42×10^3	48.5	20.2×10^6	17.65	289×10^3
4 × 8	3.5 × 7.25	89 × 184	25.4	16.39×10^3	111.1	46.2×10^6	30.7	503×10^3
4 × 10	3.5 × 9.25	89 × 235	32.4	20.90×10^3	231	96.1×10^6	49.9	818×10^3
4 × 12	3.5 × 11.25	89 × 286	39.4	25.42×10^3	415	172×10^6	73.9	1211×10^3
6 × 6	5.5 × 5.5	140 × 140	30.3	19.55×10^3	76.3	31.8×10^6	27.7	454×10^3
6 × 8	5.5 × 7.5	140 × 191	41.3	26.65×10^3	193	80.3×10^6	51.6	846×10^3
6 × 10	5.5 × 9.5	140 × 241	52.3	33.74×10^3	393	164×10^6	82.7	1355×10^3
6 × 12	5.5 × 11.5	140 × 292	63.3	40.84×10^3	697	290×10^6	121	1983×10^3
8 × 8	7.5 × 7.5	191 × 191	56.3	36.32×10^3	264	110×10^6	70.3	1152×10^3
8 × 10	7.5 × 9.5	191 × 241	71.3	46.00×10^3	536	223×10^6	113	1852×10^3
8 × 12	7.5 × 11.5	191 × 292	86.3	55.68×10^3	951	396×10^6	165	2704×10^3
10 × 10	9.5 × 9.5	241 × 241	90.3	58.26×10^3	679	283×10^6	143	2343×10^3
10 × 12	9.5 × 11.5	241 × 292	109.3	70.52×10^3	1204	501×10^6	209	3425×10^3
12 × 12	11.5 × 11.5	292 × 292	132.3	85.35×10^3	1458	607×10^6	253	4146×10^3

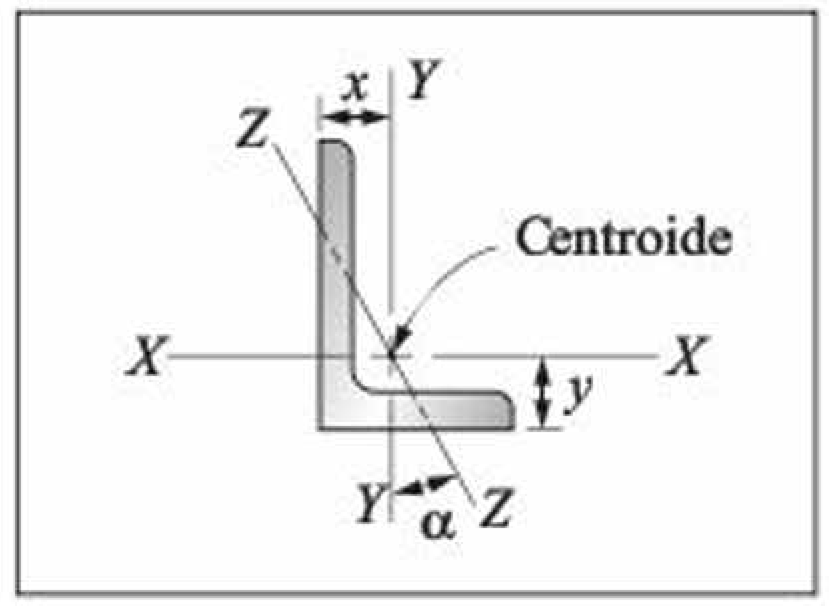




A–5 Propiedades de ángulos de acero (perfiles L) en unidades del sistema inglés.

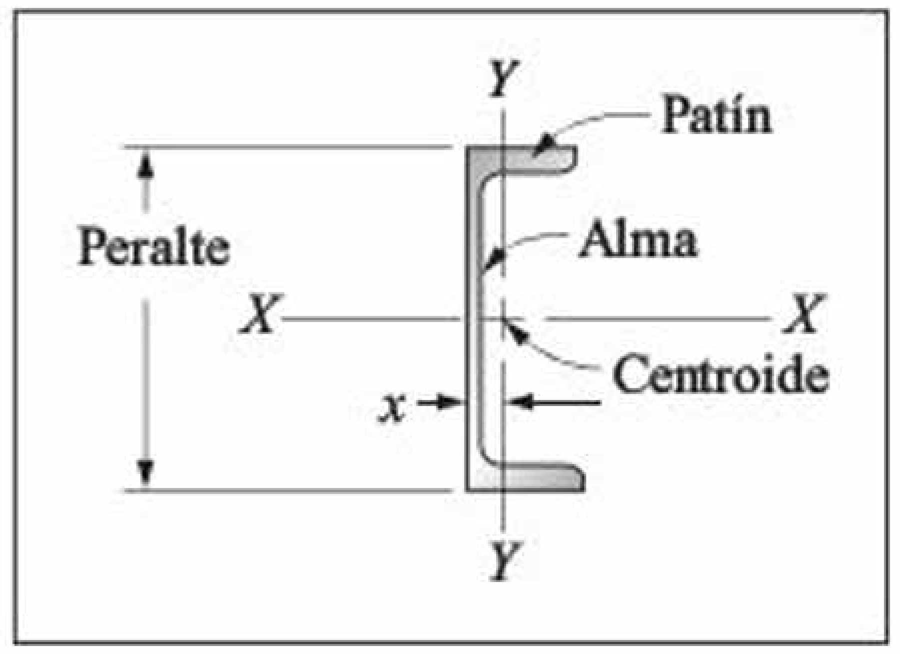
Ref.	Perfil (in) (in) (in)	Peso por ft (lb/ft)	Área, A (in²)	Eje X-X: I_x (in⁴)	Eje X-X: S_x (in³)	Eje X-X: y (in)	Eje Y-Y: I_y (in⁴)	Eje Y-Y: S_y (in³)	Eje Y-Y: x (in)	Eje Z-Z: r (in)	Eje Z-Z: α (grados)
a	L 8 × 8 × 1	51.3	15.1	89.1	15.8	2.36	89.1	15.8	2.36	1.56	45.0
b	L 8 × 8 × $\frac{1}{2}$	26.7	7.84	48.8	8.36	2.17	48.8	8.36	2.17	1.59	45.0
c	L 8 × 4 × 1	37.6	11.10	69.7	14.00	3.03	11.6	3.94	1.04	0.844	13.9
d	L 8 × 4 × $\frac{1}{2}$	19.7	5.80	38.6	7.48	2.84	6.75	2.15	0.854	0.863	14.9
e	L 6 × 6 × $\frac{3}{4}$	28.8	8.46	28.1	6.64	1.77	28.1	6.64	1.77	1.17	45.0
f	L 6 × 6 × $\frac{3}{8}$	14.9	4.38	15.4	3.51	1.62	15.4	3.51	1.62	1.19	45.0
g	L 6 × 4 × $\frac{3}{4}$	23.5	6.90	24.4	6.23	2.08	8.63	2.95	1.08	0.857	23.2
h	L 6 × 4 × $\frac{3}{8}$	12.2	3.58	13.4	3.30	1.94	4.84	1.58	0.940	0.871	24.1
i	L 4 × 4 × $\frac{1}{2}$	12.7	3.75	5.52	1.96	1.18	5.52	1.96	1.18	0.776	45.0
j	L 4 × 4 × $\frac{1}{4}$	6.58	1.93	3.00	1.03	1.08	3.00	1.03	1.08	0.783	45.0
k	L 4 × 3 × $\frac{1}{2}$	11.1	3.25	5.02	1.87	1.32	2.40	1.10	0.822	0.633	28.5
l	L 4 × 3 × $\frac{1}{4}$	5.75	1.69	2.75	0.988	1.22	1.33	0.585	0.725	0.639	29.2
m	L 3 × 3 × $\frac{1}{2}$	9.35	2.75	2.20	1.06	0.929	2.20	1.06	0.929	0.580	45.0
n	L 3 × 3 × $\frac{1}{4}$	4.89	1.44	1.23	0.569	0.836	1.23	0.569	0.836	0.585	45.0
o	L 3 × 2 × $\frac{1}{2}$	7.70	2.26	1.92	1.00	1.08	0.667	0.470	0.580	0.425	22.4
p	L 3 × 2 × $\frac{1}{4}$	4.09	1.20	1.09	0.541	0.980	0.390	0.258	0.487	0.431	23.6
q	L 2 × 2 × $\frac{3}{8}$	4.65	1.37	0.476	0.348	0.632	0.476	0.348	0.632	0.386	45.0
r	L 2 × 2 × $\frac{1}{4}$	3.21	0.944	0.346	0.244	0.586	0.346	0.244	0.586	0.387	45.0
s	L 2 × 2 × $\frac{1}{8}$	1.67	0.491	0.189	0.129	0.534	0.189	0.129	0.534	0.391	45.0





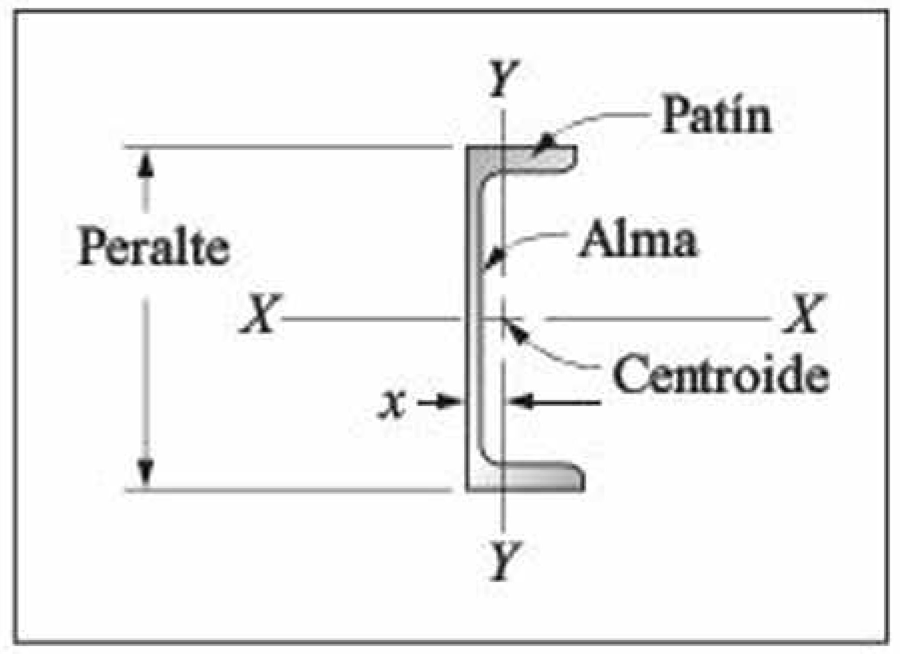
A–5 (SI) Propiedades de ángulos de acero (perfiles L) en unidades SI.

Ref.	Perfil (mm) (mm) (mm)	Masa por m (kg/m)	Peso por m (N/m)	Área, A (mm^2)	Eje X-X: I_x (mm^4)	Eje X-X: S_x (mm^3)	Eje X-X: y (mm)	Eje Y-Y: I_y (mm^4)	Eje Y-Y: S_y (mm^3)	Eje Y-Y: x (mm)	Eje Z-Z: r (mm)	Eje Z-Z: α (grados)
a	L 203 × 203 × 25.4	76.3	749	9740	3.71E+07	2.59E+05	59.9	3.71E+07	2.59E+05	59.9	39.6	45.0
b	L 203 × 203 × 12.7	39.7	390	5060	2.03E+07	1.37E+05	55.1	2.03E+07	1.37E+05	55.1	40.4	45.0
c	L 203 × 102 × 25.4	55.9	549	7160	2.90E+07	2.29E+05	77.0	4.83E+06	6.46E+04	26.4	21.4	13.9
d	L 203 × 102 × 12.7	29.3	288	3740	1.61E+07	1.23E+05	72.1	2.81E+06	3.52E+04	21.7	21.9	14.9
e	L 152 × 152 × 19	42.9	420	5460	1.17E+07	1.09E+05	45.0	1.17E+07	1.09E+05	45.0	29.7	45.0
f	L 152 × 152 × 9.5	22.2	217	2830	6.41E+06	5.75E+04	41.1	6.41E+06	5.75E+04	41.1	30.2	45.0
g	L 152 × 102 × 19	35.0	343	4450	1.02E+07	1.02E+05	52.8	3.59E+06	4.84E+04	27.4	21.8	23.2
h	L 152 × 102 × 9.5	18.2	178	2310	5.58E+06	5.41E+04	49.3	2.01E+06	2.59E+04	23.9	22.1	24.1
i	L 102 × 102 × 12.7	18.9	185	2420	2.30E+06	3.21E+04	30.0	2.30E+06	3.21E+04	30.0	19.7	45.0
j	L 102 × 102 × 6.4	9.79	96.0	1250	1.25E+06	1.69E+04	27.4	1.25E+06	1.69E+04	27.4	19.9	45.0
k	L 102 × 76 × 12.7	16.5	162	2100	2.09E+06	3.06E+04	33.5	9.99E+05	1.80E+04	20.9	16.1	28.5
l	L 102 × 76 × 6.4	8.56	83.9	1090	1.14E+06	1.62E+04	31.0	5.54E+05	9.59E+03	18.4	16.2	29.2
m	L 76 × 76 × 12.7	13.9	136	1770	9.16E+05	1.74E+04	23.6	9.16E+05	1.74E+04	23.6	14.7	45.0
n	L 76 × 76 × 6.4	7.28	71.4	929	5.12E+05	9.33E+03	21.2	5.12E+05	9.33E+03	21.2	14.9	45.0
o	L 76 × 51 × 12.7	11.5	112	1460	7.99E+05	1.64E+04	27.4	2.78E+05	7.70E+03	14.7	10.8	22.4
p	L 76 × 51 × 6.4	6.09	59.7	774	4.54E+05	8.87E+03	24.9	1.62E+05	4.23E+03	12.4	10.9	23.6
q	L 51 × 51 × 9.5	6.92	67.9	884	1.98E+05	5.70E+03	16.1	1.98E+05	5.70E+03	16.1	9.80	45.0
r	L 51 × 51 × 6.4	4.78	46.9	609	1.44E+05	4.00E+03	14.9	1.44E+05	4.00E+03	14.9	9.83	45.0
s	L 51 × 51 × 3.2	2.48	24.4	317	7.87E+04	2.11E+03	13.6	7.87E+04	2.11E+03	13.6	9.93	45.0



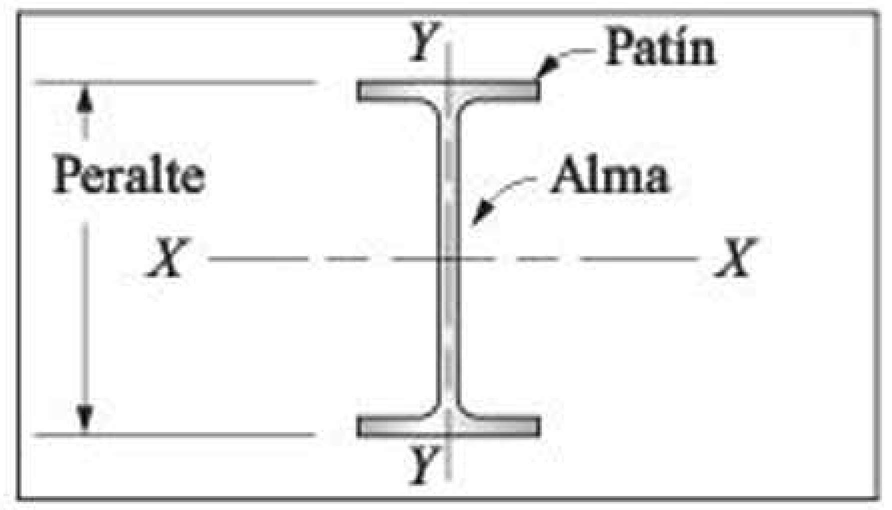
A–6 Propiedades de canales de acero American Standard (perfiles C) en unidades del sistema inglés.

					Patín		Propiedades de sección				
							Eje X-X		Eje Y-Y		
Ref.	Perfil (in) (lb/ft)	Área, A (in^2)	Peralte, d (in)	Espesor del alma, t_w (in)	Ancho, b_f (in)	Espesor, t_f promedio (in)	I_x (in^4)	S_x (in^3)	I_y (in^4)	S_y (in^3)	x (in)
a	C 15 × 50	14.7	15.0	0.716	3.72	0.650	404	53.8	11.0	3.77	0.799
b	C 15 × 40	11.8	15.0	0.520	3.52	0.650	348	46.5	9.17	3.34	0.778
c	C 12 × 30	8.82	12.0	0.510	3.17	0.501	162	27.0	5.12	2.05	0.674
d	C 12 × 25	7.35	12.0	0.387	3.05	0.501	144	24.0	4.45	1.87	0.674
e	C 10 × 30	8.82	10.0	0.673	3.03	0.436	103	20.7	3.93	1.65	0.649
f	C 10 × 20	5.88	10.0	0.379	2.74	0.436	78.9	15.8	2.80	1.31	0.606
g	C 9 × 20	5.88	9.0	0.448	2.65	0.413	60.9	13.5	2.41	1.17	0.583
h	C 9 × 15	4.41	9.0	0.285	2.49	0.413	51.0	11.3	1.91	1.01	0.586
i	C 8 × 18.75	5.51	8.0	0.487	2.53	0.390	43.9	11.0	1.97	1.01	0.565
j	C 8 × 11.5	3.38	8.0	0.220	2.26	0.390	32.5	8.14	1.31	0.775	0.572
k	C 7 × 14.75	4.33	7.0	0.419	2.30	0.366	27.2	7.78	1.37	0.772	0.532
l	C 7 × 9.8	2.87	7.0	0.210	2.09	0.366	21.2	6.07	0.957	0.617	0.541
m	C 6 × 13	3.83	6.0	0.437	2.16	0.343	17.3	5.78	1.05	0.638	0.514
n	C 6 × 8.2	2.40	6.0	0.200	1.92	0.343	13.1	4.35	0.687	0.488	0.512
o	C 5 × 9	2.64	5.0	0.325	1.89	0.320	8.89	3.56	0.624	0.444	0.478
p	C 5 × 6.7	1.97	5.0	0.190	1.75	0.320	7.48	2.99	0.470	0.372	0.484
q	C 4 × 7.25	2.13	4.0	0.321	1.72	0.296	4.58	2.29	0.425	0.337	0.459
r	C 4 × 5.4	1.59	4.0	0.184	1.58	0.296	3.85	1.92	0.312	0.277	0.457
s	C 3 × 6	1.76	3.0	0.356	1.60	0.273	2.07	1.38	0.300	0.263	0.455
t	C 3 × 4.1	1.21	3.0	0.170	1.41	0.273	1.65	1.10	0.191	0.196	0.437



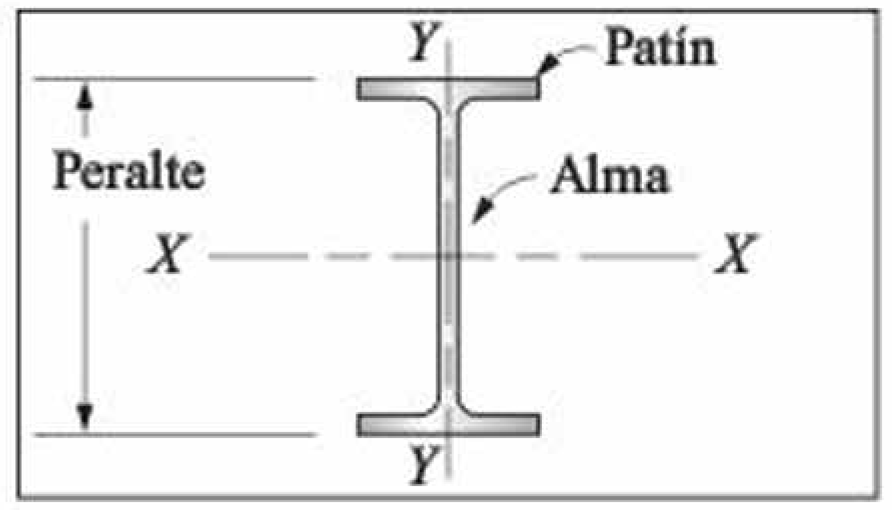
A–6 (SI) Propiedades de canales de acero American Standard (perfiles C) en unidades SI.

Ref.	Perfil (mm) (kg/m)	Wt/m (KN/m)	Área, A (mm^2)	Peralte, d (mm)	Espesor del alma, t_w (mm)	Patín: Ancho, b_f (mm)	Patín: Espesor, t_f (mm)	Eje X-X: I_x (mm^4)	Eje X-X: S_x (mm^3)	Eje Y-Y: I_y (mm^4)	Eje Y-Y: S_y (mm^3)	x (mm)
a	C 380 × 74	0.730	9480	381	18.2	94.4	16.5	1.68E+08	8.82E+05	4.58E+06	6.18E+04	20.3
b	C 380 × 60	0.584	7610	381	13.2	89.4	16.5	1.45E+08	7.62E+05	3.82E+06	5.47E+04	19.8
c	C 300 × 45	0.438	5690	305	13.0	80.5	12.7	6.74E+07	4.43E+05	2.13E+06	3.36E+04	17.1
d	C 300 × 37	0.365	4740	305	9.83	77.4	12.7	5.99E+07	3.93E+05	1.85E+06	3.06E+04	17.1
e	C 250 × 45	0.438	5690	254	17.1	77.0	11.1	4.29E+07	3.39E+05	1.64E+06	2.70E+04	16.5
f	C 250 × 30	0.292	3790	254	9.63	69.6	11.1	3.28E+07	2.59E+05	1.17E+06	2.15E+04	15.4
g	C 230 × 30	0.292	3790	229	11.4	67.3	10.5	2.53E+07	2.21E+05	1.00E+06	1.92E+04	14.8
h	C 230 × 22	0.219	2850	229	7.24	63.1	10.5	2.12E+07	1.85E+05	7.95E+05	1.66E+04	14.9
i	C 200 × 27.9	0.274	3560	203	12.4	64.2	9.91	1.83E+07	1.80E+05	8.20E+05	1.66E+04	14.4
j	C 200 × 17.1	0.168	2180	203	5.59	57.4	9.91	1.35E+07	1.33E+05	5.45E+05	1.27E+04	14.5
k	C 180 × 22	0.215	2790	178	10.6	58.4	9.30	1.13E+07	1.28E+05	5.70E+05	1.27E+04	13.5
l	C 180 × 14.6	0.143	1850	178	5.33	53.1	9.30	8.82E+06	9.95E+04	3.98E+05	1.01E+04	13.7
m	C 150 × 19.3	0.190	2470	152	11.1	54.8	8.71	7.20E+06	9.47E+04	4.37E+05	1.05E+04	13.1
n	C 150 × 12.2	0.120	1550	152	5.08	48.8	8.71	5.45E+06	7.13E+04	2.86E+05	8.00E+03	13.0
o	C 130 × 13	0.128	1700	127	8.26	47.9	8.13	3.70E+06	5.83E+04	2.60E+05	7.28E+03	12.1
p	C 130 × 10.4	0.102	1270	127	4.83	44.5	8.13	3.11E+06	4.90E+04	1.96E+05	6.10E+03	12.3
q	C 100 × 10.8	0.106	1370	102	8.15	43.7	7.52	1.91E+06	3.75E+04	1.77E+05	5.52E+03	11.7
r	C 100 × 8	0.0788	1020	102	4.67	40.2	7.52	1.60E+06	3.15E+04	1.30E+05	4.54E+03	11.6
s	C 80 × 8.9	0.0876	1140	76.2	9.04	40.5	6.93	8.62E+05	2.26E+04	1.25E+05	4.31E+03	11.6
t	C 80 × 6.1	0.0598	777	76.2	4.32	35.8	6.93	6.87E+05	1.80E+04	7.95E+04	3.21E+03	11.1



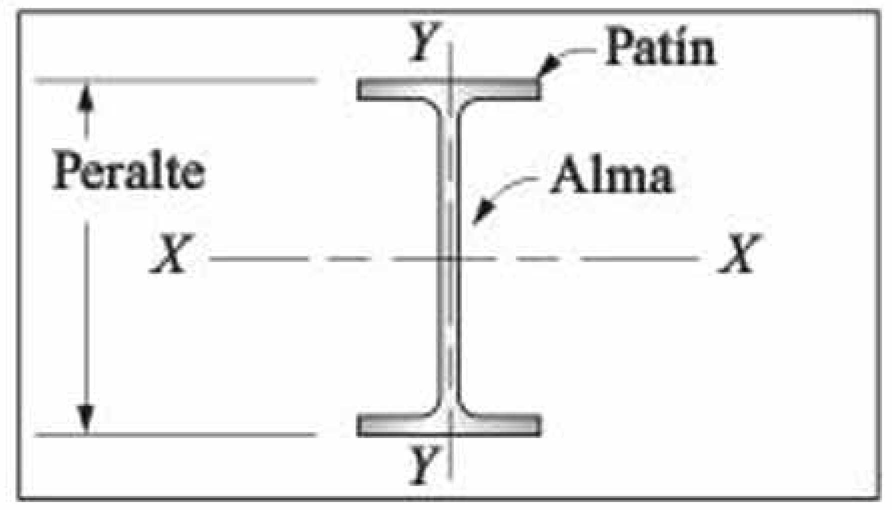
A–7 Propiedades de perfiles de acero de patín ancho (perfiles W) en unidades del sistema inglés.

Ref.	Perfil (in) (lb/ft)	Área, A (in^2)	Peralte, d (in)	Espesor del alma, t_w (in)	Patín: Ancho, b_f (in)	Patín: Espesor, t_f (in)	Eje X-X: I_x (in^4)	Eje X-X: S_x (in^3)	Eje Y-Y: I_y (in^4)	Eje Y-Y: S_y (in^3)
a	W 30 × 173	51.0	30.4	0.655	15.0	1.070	8230	541	598	79.8
b	W 30 × 108	31.7	29.8	0.545	10.5	0.760	4470	299	146	27.9
c	W 27 × 146	43.1	27.4	0.605	14.0	0.975	5660	414	443	63.5
d	W 27 × 102	30.0	27.1	0.515	10.0	0.830	3620	267	139	27.8
e	W 24 × 76	22.4	23.9	0.440	8.99	0.680	2100	176	82.5	18.4
f	W 24 × 68	20.1	23.7	0.415	8.97	0.585	1830	154	70.4	15.7
g	W 21 × 73	21.5	21.2	0.455	8.30	0.740	1600	151	70.6	17.0
h	W 21 × 57	16.7	21.1	0.405	6.56	0.650	1170	111	30.6	9.35
i	W 18 × 55	16.2	18.1	0.390	7.53	0.630	890	98.3	44.9	11.9
j	W 18 × 40	11.8	17.9	0.315	6.02	0.525	612	68.4	19.1	6.35
k	W 14 × 43	12.6	13.7	0.305	8.00	0.530	428	62.7	45.2	11.3
l	W 14 × 26	7.69	13.9	0.255	5.03	0.420	245	35.3	8.91	3.54
m	W 12 × 65	19.1	12.1	0.390	12.0	0.605	533	87.9	174	29.1
n	W 12 × 30	8.79	12.3	0.260	6.52	0.440	238	38.6	20.3	6.24
o	W 12 × 16	4.71	12.0	0.220	3.99	0.265	103	17.1	2.82	1.41
p	W 10 × 60	17.60	10.2	0.420	10.1	0.680	341	66.7	116	23.0
q	W 10 × 30	8.84	10.5	0.300	5.81	0.510	170	32.4	16.7	5.75
r	W 10 × 12	3.54	9.87	0.190	3.96	0.210	53.8	10.9	2.18	1.10
s	W 8 × 40	11.70	8.25	0.360	8.07	0.560	146	35.5	49.1	12.2
t	W 8 × 21	6.16	8.28	0.250	5.27	0.400	75.3	18.2	9.77	3.71
u	W 8 × 10	2.96	7.89	0.170	3.94	0.205	30.8	7.81	2.09	1.06
v	W 6 × 15	4.43	5.99	0.230	5.99	0.260	29.1	9.72	9.32	3.11
w	W 6 × 12	3.55	6.03	0.230	4.00	0.280	22.1	7.31	2.99	1.50
x	W 5 × 19	5.54	5.15	0.270	5.03	0.430	26.2	10.2	9.13	3.63
y	W 5 × 16	4.68	5.01	0.240	5.00	0.360	21.3	8.51	7.51	3.00
z	W 4 × 13	3.83	4.16	0.280	4.06	0.345	11.3	5.46	3.86	1.90



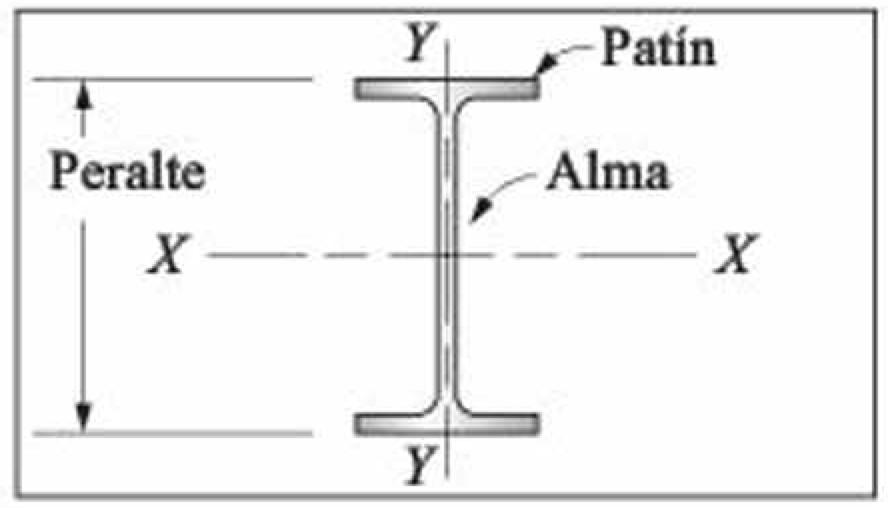
A–7 (SI) Propiedades de perfiles de acero de patín ancho (perfiles W) en unidades métricas.

						Patín		Propiedades de sección: Eje X-X		Eje Y-Y	
Ref.	Perfil (mm) (kg/m)	Wt/m (KN/M)	Área, A (mm^2)	Peralte, d (mm)	Espesor del alma, t_w (mm)	Ancho, b_f (mm)	Espesor, t_f (mm)	I_x (mm^4)	S_x (mm^3)	I_y (mm^4)	S_y (mm^3)
a	W 760 × 257	2.525	32 900	772	16.6	381	27.2	3.43E+09	8.87E+06	2.49E+08	1.31E+06
b	W 760 × 161	1.576	20 500	757	13.8	267	19.3	1.86E+09	4.90E+06	6.08E+07	4.57E+05
c	W 690 × 217	2.131	27 800	696	15.4	356	24.8	2.36E+09	6.79E+06	1.84E+08	1.04E+06
d	W 690 × 152	1.489	19 400	688	13.1	254	21.1	1.51E+09	4.38E+06	5.79E+07	4.56E+05
e	W 610 × 113	1.109	14 500	607	11.2	228	17.3	8.74E+08	2.88E+06	3.43E+07	3.02E+05
f	W 610 × 101	0.993	13 000	602	10.5	228	14.9	7.62E+08	2.52E+06	2.93E+07	2.57E+05
g	W 530 × 109	1.066	13 900	538	11.6	211	18.8	6.66E+08	2.47E+06	2.94E+07	2.79E+05
h	W 530 × 85	0.832	10 800	536	10.3	167	16.5	4.87E+08	1.82E+06	1.27E+07	1.53E+05
i	W 460 × 82	0.803	10 500	460	9.91	191	16.0	3.70E+08	1.61E+06	1.87E+07	1.95E+05
j	W 460 × 60	0.584	7610	455	8.00	153	13.3	2.55E+08	1.12E+06	7.95E+06	1.04E+05
k	W 360 × 64	0.628	8130	348	7.75	203	13.5	1.78E+08	1.03E+06	1.88E+07	1.85E+05
l	W 360 × 39	0.380	4960	353	6.48	128	10.7	1.02E+08	5.79E+05	3.71E+06	5.80E+04
m	W 310 × 97	0.949	12 300	307	9.91	305	15.4	2.22E+08	1.44E+06	7.24E+07	4.77E+05
n	W 310 × 44.5	0.437	5670	312	6.60	166	11.2	9.91E+07	6.33E+05	8.45E+06	1.02E+05
o	W 310 × 23.8	0.233	3040	305	5.59	101	6.73	4.29E+07	2.80E+05	1.17E+06	2.31E+04
p	W 250 × 89	0.876	11 400	259	10.7	257	17.3	1.42E+08	1.09E+06	4.83E+07	3.77E+05
q	W 250 × 44.8	0.439	5700	267	7.62	148	13	7.08E+07	5.31E+05	6.95E+06	9.42E+04
r	W 250 × 17.9	0.176	2280	251	4.83	101	5.33	2.24E+07	1.79E+05	9.07E+05	1.80E+04
s	W 200 × 59	0.579	7550	210	9.14	205	14.2	6.08E+07	5.82E+05	2.04E+07	2.00E+05
t	W 200 × 31.3	0.307	3970	210	6.35	134	10.2	3.13E+07	2.98E+05	4.07E+06	6.08E+04
u	W 200 × 15	0.146	1910	200	4.32	100	5.21	1.28E+07	1.28E+05	8.70E+05	1.74E+04
v	W 150 × 22.5	0.221	2860	152	5.84	152	6.60	1.21E+07	1.59E+05	3.88E+06	5.10E+04
w	W 150 × 18	0.175	2290	153	5.84	102	7.11	9.20E+06	1.20E+05	1.24E+06	2.46E+04
x	W 130 × 28.1	0.276	3570	131	6.86	128	10.9	1.09E+07	1.67E+05	3.80E+06	5.95E+04
y	W 130 × 23.8	0.233	3020	127	6.10	127	9.14	8.87E+06	1.39E+05	3.13E+06	4.92E+04
z	W 100 × 19.3	0.189	2470	106	7.11	103	8.76	4.70E+06	8.95E+04	1.61E+06	3.11E+04



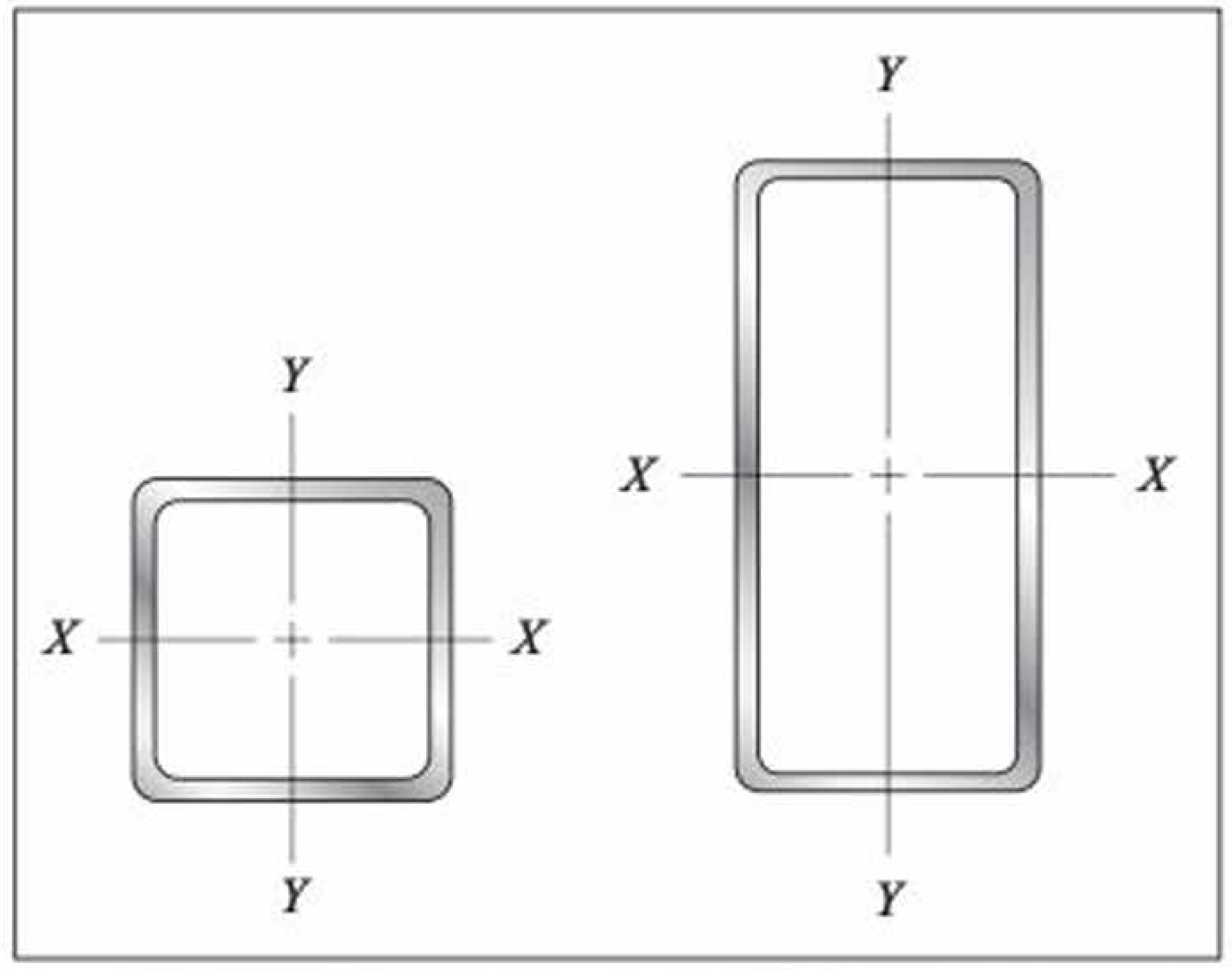
A–8 Propiedades de vigas de acero American Standard (perfiles S) en unidades del sistema inglés.

Ref.	Perfil (in) (lb/ft)	Área, A (in^2)	Peralte, d (in)	Espesor del alma, t_w (in)	Patín: Ancho, b_f (in)	Patín: Espesor, t_f (in)	Propiedades de sección, Eje X-X: I_x (in^4)	Eje X-X: S_x (in^3)	Eje Y-Y: I_y (in^4)	Eje Y-Y: S_y (in^3)
a	S 24 × 121	35.5	24.5	0.800	8.05	1.090	3160	258	83.0	20.6
b	S 24 × 90	26.5	24.0	0.625	7.13	0.870	2250	187	44.7	12.5
c	S 20 × 96	28.2	20.3	0.800	7.20	0.920	1670	165	49.9	13.9
d	S 20 × 75	22.0	20.0	0.635	6.39	0.795	1280	128	29.5	9.25
e	S 20 × 66	19.4	20.0	0.505	6.26	0.795	1190	119	27.5	8.78
f	S 18 × 70	20.5	18.0	0.711	6.25	0.691	923	103	24.0	7.69
g	S 18 × 54.7	16.0	18.0	0.461	6.00	0.691	801	89.0	20.7	6.91
h	S 15 × 50	14.7	15.0	0.550	5.64	0.622	485	64.7	15.6	5.53
i	S 15 × 42.9	12.6	15.0	0.411	5.50	0.622	446	59.4	14.3	5.19
j	S 12 × 50	14.6	12.0	0.687	5.48	0.659	303	50.6	15.6	5.69
k	S 12 × 35	10.2	12.0	0.426	5.08	0.544	228	38.1	9.84	3.88
l	S 10 × 35	10.3	10.0	0.594	4.94	0.491	147	29.4	8.30	3.36
m	S 10 × 25.4	7.45	10.0	0.311	4.66	0.491	123	24.6	6.73	2.89
n	S 8 × 23	6.76	8.00	0.441	4.17	0.425	64.7	16.2	4.27	2.05
o	S 8 × 18.4	5.40	8.00	0.271	4.00	0.425	57.5	14.4	3.69	1.84
p	S 6 × 17.25	5.06	6.00	0.465	3.57	0.359	26.2	8.74	2.29	1.28
q	S 6 × 12.5	3.66	6.00	0.232	3.33	0.359	22.0	7.34	1.80	1.08
r	S 5 × 10	2.93	5.00	0.214	3.00	0.326	12.3	4.90	1.19	0.795
s	S 4 × 9.5	2.79	4.00	0.326	2.80	0.293	6.8	3.38	0.887	0.635
t	S 4 × 7.7	2.26	4.00	0.193	2.66	0.293	6.05	3.03	0.748	0.562
u	S 3 × 7.5	2.20	3.00	0.349	2.51	0.260	2.91	1.94	0.578	0.461
v	S 3 × 5.7	1.66	3.00	0.170	2.33	0.260	2.50	1.67	0.447	0.383



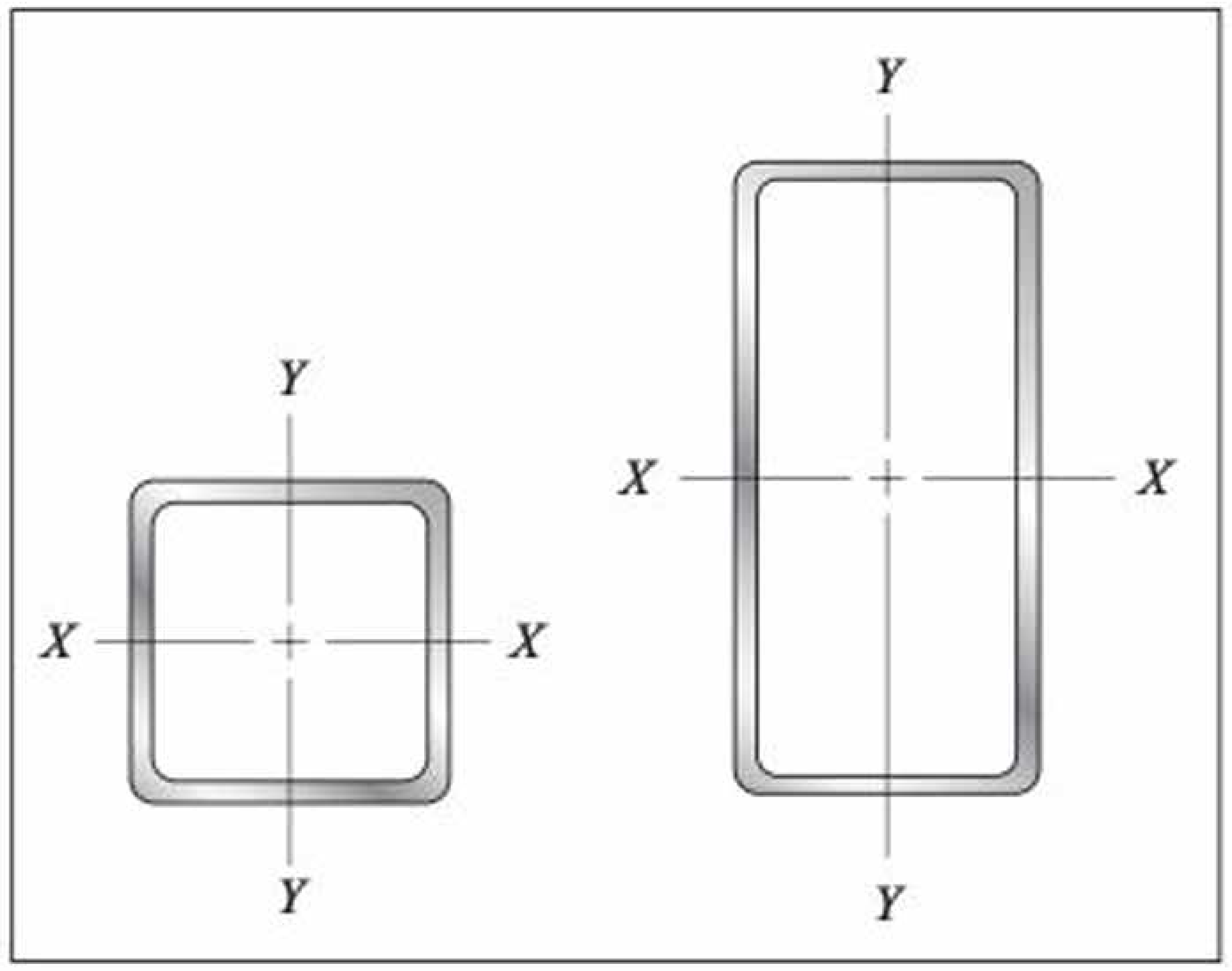
A–8(SI) Propiedades de vigas de acero American Standard (perfiles S) en unidades SI.

Ref.	Perfil (mm) (kg/m)	Wt/m (KN/m)	Área, A (mm^2)	Peralte, d (mm)	Espesor del alma, t_w (mm)	Patín: Ancho, b_f (mm)	Patín: Espesor, t_f (mm)	Eje X-X: I_x (mm^4)	Eje X-X: S_x (mm^3)	Eje Y-Y: I_y (mm^4)	Eje Y-Y: S_y (mm^3)
a	S 610 × 180	1.766	22 900	622	20.3	204	27.7	1.32E+09	4.23E+06	3.45E+07	3.38E+05
b	S 610 × 134	1.314	17 100	610	15.9	181	22.1	9.36E+08	3.06E+06	1.86E+07	2.05E+05
c	S 510 × 143	1.401	18 200	516	20.3	183	23.4	6.95E+08	2.70E+06	2.08E+07	2.28E+05
d	S 510 × 112	1.095	14 200	508	16.1	162	20.2	5.33E+08	2.10E+06	1.23E+07	1.52E+05
e	S 510 × 98.2	0.963	12 500	508	12.8	159	20.2	4.95E+08	1.95E+06	1.14E+07	1.44E+05
f	S 460 × 104	1.022	13 200	457	18.1	159	17.6	3.84E+08	1.69E+06	9.99E+06	1.26E+05
g	S 460 × 81.4	0.799	10 300	457	11.7	152	17.6	3.33E+08	1.46E+06	8.62E+06	1.13E+05
h	S 380 × 74	0.730	9480	381	14.0	143	15.8	2.02E+08	1.06E+06	6.49E+06	9.06E+04
i	S 380 × 64	0.626	8130	381	10.4	140	15.8	1.86E+08	9.74E+05	5.95E+06	8.51E+04
j	S 300 × 74	0.730	9420	305	17.4	139	16.7	1.26E+08	8.29E+05	6.49E+06	9.33E+04
k	S 300 × 52	0.511	6580	305	10.8	129	13.8	9.49E+07	6.24E+05	4.10E+06	6.36E+04
l	S 250 × 52	0.511	6650	254	15.1	125	12.5	6.12E+07	4.82E+05	3.45E+06	5.51E+04
m	S 250 × 37.8	0.371	4810	254	7.9	118	12.5	5.12E+07	4.03E+05	2.80E+06	4.74E+04
n	S 200 × 34	0.336	4360	203	11.2	106	10.8	2.69E+07	2.66E+05	1.78E+06	3.36E+04
o	S 200 × 27.4	0.269	3480	203	6.9	102	10.8	2.39E+07	2.36E+05	1.54E+06	3.02E+04
p	S 150 × 25.7	0.252	3260	152	11.8	90.7	9.1	1.09E+07	1.43E+05	9.53E+05	2.10E+04
q	S 150 × 18.6	0.182	2360	152	5.9	84.6	9.1	9.16E+06	1.20E+05	7.49E+05	1.77E+04
r	S 130 × 15	0.146	1890	127	5.4	76.2	8.3	5.12E+06	8.03E+04	4.95E+05	1.30E+04
s	S 100 × 14.1	0.138	1800	102	8.3	71.1	7.4	2.81E+06	5.54E+04	3.69E+05	1.04E+04
t	S 100 × 11.5	0.113	1460	102	4.9	67.6	7.4	2.52E+06	4.97E+04	3.11E+05	9.21E+03
u	S 80 × 11.2	0.110	1420	76.2	8.9	63.8	6.6	1.21E+06	3.18E+04	2.41E+05	7.56E+03
v	S 80 × 8.5	0.083	1070	76.2	4.3	59.2	6.6	1.04E+06	2.74E+04	1.86E+05	6.28E+03



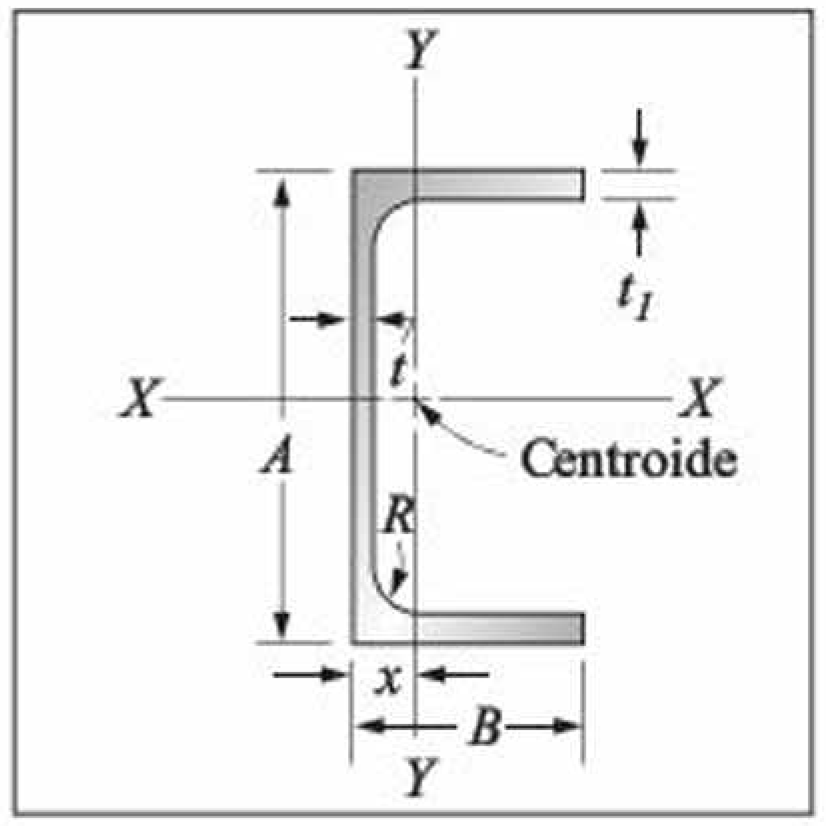
A–9 Propiedades de tubería estructural de acero cuadrada y rectangular (perfiles HSS) en unidades del sistema inglés.

Ref.	Perfil (in) (in) (in)	Espesor de pared de diseño, t_w (in)	Peso por ft (lb/ft)	Área, A (in²)	Propiedades de sección: Eje X-X I_x (in⁴)	Eje X-X S_x (in³)	Eje X-X r_x (in)	Eje Y-Y I_y (in⁴)	Eje Y-Y S_y (in³)	Eje Y-Y r_y (in)	Constantes torsionales J (in⁴)	Constantes torsionales C (in³)
a	HSS 8 × 8 × 1/2	0.465	48.7	13.5	125	31.2	3.04	125	31.2	3.04	204	52.4
b	HSS 8 × 8 × 1/4	0.233	25.8	7.10	70.7	17.7	3.15	70.7	17.7	3.15	111	28.1
c	HSS 8 × 4 × 1/2	0.465	35.1	9.74	71.8	17.9	2.71	23.6	11.8	1.56	61.1	24.4
d	HSS 8 × 4 × 1/4	0.233	19.0	5.24	42.5	10.6	2.85	14.4	7.21	1.66	35.3	13.6
e	HSS 8 × 2 × 1/4	0.233	15.6	4.30	28.5	7.12	2.57	2.94	2.94	0.827	9.36	6.35
f	HSS 6 × 6 × 1/2	0.465	35.1	9.74	48.3	16.1	2.23	48.3	16.1	2.23	81.1	28.1
g	HSS 6 × 6 × 1/4	0.233	19.0	5.24	28.6	9.54	2.34	28.6	9.54	2.34	45.6	15.4
h	HSS 6 × 4 × 1/4	0.233	15.6	4.30	20.9	6.96	2.20	11.1	5.56	1.61	23.6	10.1
i	HSS 6 × 2 × 1/4	0.233	12.2	3.37	13.1	4.37	1.97	2.21	2.21	0.810	6.55	4.70
j	HSS 4 × 4 × 1/2	0.465	21.5	6.02	11.9	5.97	1.41	11.9	5.97	1.41	21.0	11.2
k	HSS 4 × 4 × 1/4	0.233	12.2	3.37	7.80	3.90	1.52	7.80	3.90	1.52	12.8	6.56
l	HSS 4 × 2 × 1/4	0.233	8.78	2.44	4.49	2.25	1.36	1.48	1.48	0.779	3.82	3.05
m	HSS 3 × 3 × 1/4	0.233	8.78	2.44	3.02	2.01	1.11	3.02	2.01	1.11	5.08	3.52
n	HSS 3 × 2 × 1/4	0.233	7.08	1.97	2.13	1.42	1.04	1.11	1.11	0.751	2.52	2.23
o	HSS 2 × 2 × 1/4	0.233	5.38	1.51	0.747	0.747	0.704	0.747	0.747	0.704	1.31	1.41



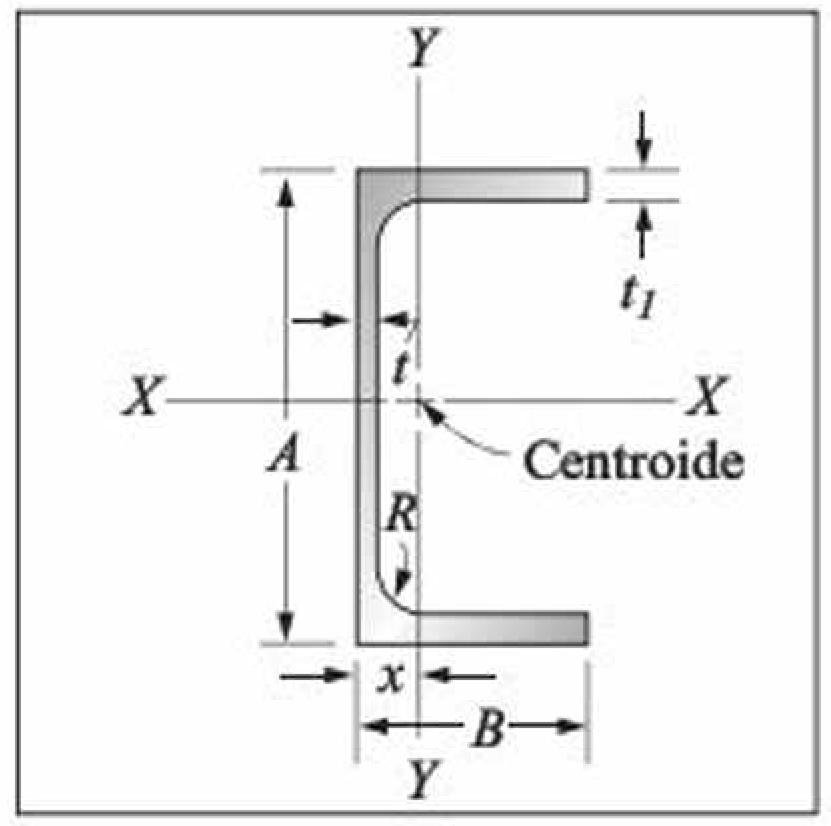
A–9 (SI) Propiedades de tubería estructural de acero cuadrada y rectangular (perfiles HSS) en unidades SI.

Ref.	Perfil (mm) × (mm) × (mm)	Espesor de pared de diseño, t_w (mm)	Masa por m (kg/m)	Peso por m (N/m)	Área A (mm^2)	Eje X-X: I_x (mm^4)	Eje X-X: S_x (mm^3)	Eje X-X: r_x (mm)	Eje Y-Y: I_y (mm^4)	Eje Y-Y: S_y (mm^3)	Eje Y-Y: r_y (mm)	Constantes torsionales: J (mm^4)	Constantes torsionales: C (mm^3)
a	HSS 203 × 203 × 12.7	11.8	72.5	711	8710	5.20E+07	5.11E+05	77.2	5.20E+07	5.11E+05	77.2	8.49E+07	8.59E+05
b	HSS 203 × 203 × 6.4	5.92	38.4	377	4580	2.94E+07	2.90E+05	80.0	2.94E+07	2.90E+05	80.0	4.62E+07	4.61E+05
c	HSS 203 × 102 × 12.7	11.8	52.2	512	6280	2.99E+07	2.93E+05	68.8	9.82E+06	1.93E+05	39.6	2.54E+07	4.00E+05
d	HSS 203 × 102 × 6.4	5.92	28.3	277	3380	1.77E+07	1.74E+05	72.4	5.99E+06	1.18E+05	42.2	1.47E+07	2.23E+05
e	HSS 203 × 51 × 6.4	5.92	23.2	228	2770	1.19E+07	1.17E+05	65.3	1.22E+06	4.82E+04	21.0	3.90E+06	1.04E+05
f	HSS 152 × 152 × 12.7	11.8	52.2	512	6280	2.01E+07	2.64E+05	56.6	2.01E+07	2.64E+05	56.6	3.38E+07	4.61E+05
g	HSS 152 × 152 × 6.4	5.92	28.3	277	3380	1.19E+07	1.56E+05	59.4	1.19E+07	1.56E+05	59.4	1.90E+07	2.52E+05
h	HSS 152 × 102 × 6.4	5.92	23.2	228	2770	8.70E+06	1.14E+05	55.9	4.62E+06	9.11E+04	40.9	9.82E+06	1.66E+05
i	HSS 152 × 51 × 6.4	5.92	18.2	178	2170	5.45E+06	7.16E+04	50.0	9.20E+05	3.62E+04	20.6	2.73E+06	7.70E+04
j	HSS 102 × 102 × 12.7	11.8	32.0	314	3880	4.95E+06	9.78E+04	35.8	4.95E+06	9.78E+04	35.8	8.74E+06	1.84E+05
k	HSS 102 × 102 × 6.4	5.92	18.2	178	2170	3.25E+06	6.39E+04	38.6	3.25E+06	6.39E+04	38.6	5.33E+06	1.08E+05
l	HSS 102 × 51 × 6.4	5.92	13.1	128	1570	1.87E+06	3.69E+04	34.5	6.16E+05	2.43E+04	19.8	1.59E+06	5.00E+04
m	HSS 76 × 76 × 6.4	5.92	13.1	128	1570	1.26E+06	3.29E+04	28.2	1.26E+06	3.29E+04	28.2	2.11E+06	5.77E+04
n	HSS 76 × 51 × 6.4	5.92	10.5	103	1271	8.87E+05	2.33E+04	26.4	4.62E+05	1.82E+04	19.1	1.05E+06	3.65E+04
o	HSS 51 × 51 × 6.4	5.92	8.01	78.5	974	3.11E+05	1.22E+04	17.9	3.11E+05	1.22E+04	17.9	5.45E+05	2.31E+04



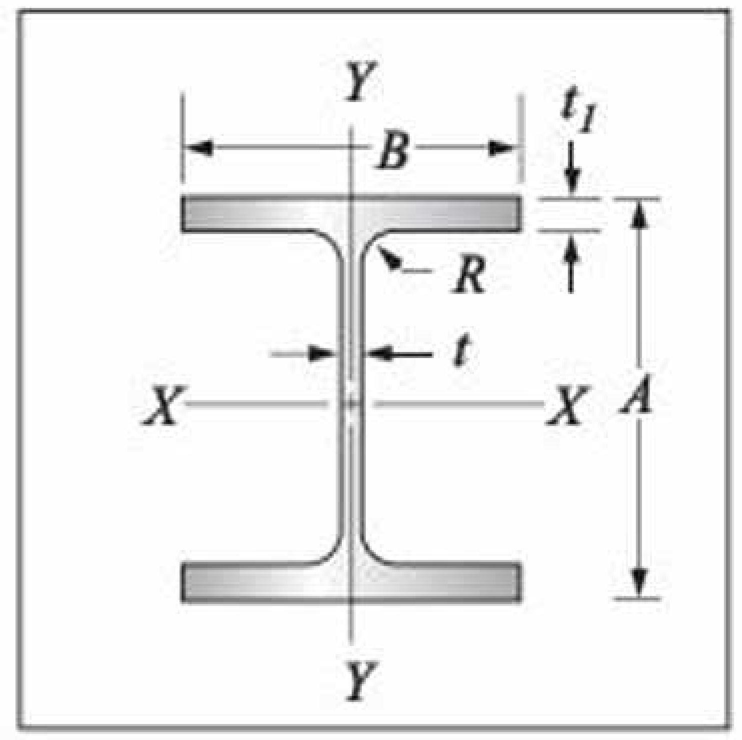
A–10 Propiedades de canales estándar Aluminum Association, en unidades del sistema inglés.

Ref.	Perfil (in)	Perfil (lb/ft)	Peralte, A (in)	Ancho, B (in)	Área (in^2)	Espesor de patín, t_1 (in)	Espesor del alma, t (in)	Eje X-X: I_x (in^4)	Eje X-X: S_x (in^3)	Eje X-X: r_x (in)	Eje Y-Y: I_y (in^4)	Eje Y-Y: S_y (in^3)	Eje Y-Y: r_y (in)	Eje Y-Y: x (in)
a	C 2 ×	0.577	2.00	1.00	0.491	0.13	0.13	0.288	0.288	0.766	0.045	0.064	0.303	0.298
b	C 2 ×	1.071	2.00	1.25	0.911	0.26	0.17	0.546	0.546	0.774	0.139	0.178	0.391	0.471
c	C 3 ×	1.135	3.00	1.50	0.965	0.20	0.13	1.41	0.94	1.21	0.22	0.22	0.47	0.49
d	C 3 ×	1.597	3.00	1.75	1.358	0.26	0.17	1.97	1.31	1.20	0.42	0.37	0.55	0.62
e	C 4 ×	1.738	4.00	2.00	1.478	0.23	0.15	3.91	1.95	1.63	0.60	0.45	0.64	0.65
f	C 4 ×	2.331	4.00	2.25	1.982	0.29	0.19	5.21	2.60	1.62	1.02	0.69	0.72	0.78
g	C 5 ×	2.212	5.00	2.25	1.881	0.26	0.15	7.88	3.15	2.05	0.98	0.64	0.72	0.73
h	C 5 ×	3.089	5.00	2.75	2.627	0.32	0.19	11.14	4.45	2.06	2.05	1.14	0.88	0.95
i	C 6 ×	2.834	6.00	2.50	2.410	0.29	0.17	14.35	4.78	2.44	1.53	0.90	0.80	0.79
j	C 6 ×	4.030	6.00	3.25	3.427	0.35	0.21	21.04	7.01	2.48	3.76	1.76	1.05	1.12
k	C 7 ×	3.205	7.00	2.75	2.725	0.29	0.17	22.09	6.31	2.85	2.10	1.10	0.88	0.84
l	C 7 ×	4.715	7.00	3.50	4.009	0.38	0.21	33.79	9.65	2.90	5.13	2.23	1.13	1.20
m	C 8 ×	4.147	8.00	3.00	3.526	0.35	0.19	37.40	9.35	3.26	3.25	1.57	0.96	0.93
n	C 8 ×	5.789	8.00	3.75	4.923	0.41	0.25	52.69	13.17	3.27	7.13	2.82	1.20	1.22
o	C 9 ×	4.983	9.00	3.25	4.237	0.35	0.23	54.41	12.09	3.58	4.40	1.89	1.02	0.93
p	C 9 ×	6.970	9.00	4.00	5.927	0.44	0.29	78.31	17.40	3.63	9.61	3.49	1.27	1.25
q	C 10 ×	6.136	10.00	3.50	5.218	0.41	0.25	83.22	16.64	3.99	6.33	2.56	1.10	1.02
r	C 10 ×	8.360	10.00	4.25	7.109	0.50	0.31	116.15	23.23	4.04	13.02	4.47	1.35	1.34
s	C 12 ×	8.274	12.00	4.00	7.036	0.47	0.29	159.76	26.63	4.77	11.03	3.86	1.25	1.14
t	C 12 ×	11.822	12.00	5.00	10.053	0.62	0.35	239.69	39.95	4.88	25.74	7.60	1.60	1.61



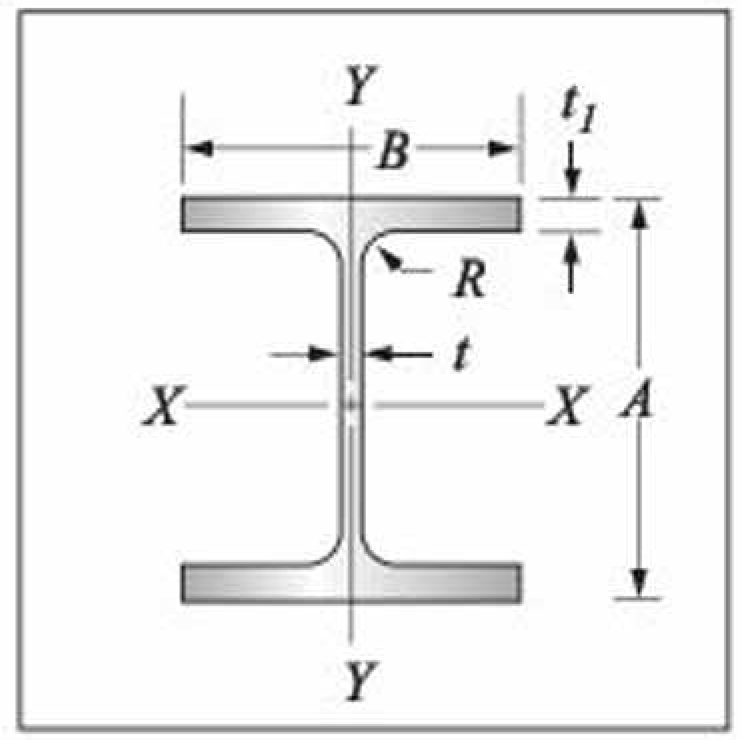
A–10(SI) Propiedades de canales estándar Aluminum Association, en unidades SI.

Ref.	Perfil (mm)	Perfil (kg/m)	Wt/m (N/m)	Peralte (mm)	Ancho, B (mm)	Área (mm²)	Espesor del patín, t_1 (mm)	Espesor del alma, t (mm)	Propiedades de sección — Eje X-X: I_x (mm⁴)	Eje X-X: S_x (mm³)	Eje X-X: r_x (mm)	Eje Y-Y: I_y (mm⁴)	Eje Y-Y: S_y (mm³)	Eje Y-Y: r_y (mm)	Eje Y-Y: x (mm)
a	C 51 ×	0.859	8.42	51	25	317	3.3	3.3	1.20E+05	4.72E+03	19.46	1.87E+04	1.05E+03	7.70	7.57
b	C 51 ×	1.594	15.63	51	32	588	6.6	4.3	2.27E+05	8.95E+03	19.66	5.79E+04	2.92E+03	9.93	12.0
c	C 76 ×	1.689	16.57	76	38	623	5.1	3.3	5.87E+05	1.54E+04	30.73	9.16E+04	3.61E+03	11.94	12.4
d	C 76 ×	2.376	23.31	76	44	876	6.6	4.3	8.20E+05	2.15E+04	30.48	1.75E+05	6.06E+03	13.97	15.7
e	C 102 ×	2.586	25.37	102	51	954	5.8	3.8	1.63E+06	3.20E+04	41.40	2.50E+05	7.38E+03	16.26	16.5
f	C 102 ×	3.468	34.03	102	57	1279	7.4	4.8	2.17E+06	4.26E+04	41.15	4.25E+05	1.13E+04	18.29	19.8
g	C 127 ×	3.291	32.29	127	57	1214	6.6	3.8	3.28E+06	5.16E+04	52.07	4.08E+05	1.05E+04	18.29	18.5
h	C 127 ×	4.596	45.09	127	70	1695	8.1	4.8	4.64E+06	7.29E+04	52.32	8.53E+05	1.87E+04	22.35	24.1
i	C 152 ×	4.217	41.37	152	64	1555	7.4	4.3	5.97E+06	7.83E+04	61.98	6.37E+05	1.48E+04	20.32	20.1
j	C 152 ×	6.00	58.8	152	83	2211	8.9	5.3	8.76E+06	1.15E+05	62.99	1.56E+06	2.88E+04	26.67	28.4
k	C 178 ×	4.77	46.8	178	70	1758	7.4	4.3	9.19E+06	1.03E+05	72.39	8.74E+05	1.80E+04	22.35	21.3
l	C 178 ×	7.02	68.8	178	89	2587	9.7	5.3	1.41E+07	1.58E+05	73.7	2.14E+06	3.65E+04	28.70	30.5
m	C 203 ×	6.17	60.5	203	76	2275	8.9	4.8	1.56E+07	1.53E+05	82.8	1.35E+06	2.57E+04	24.38	23.6
n	C 203 ×	8.61	84.5	203	95	3176	10.4	6.4	2.19E+07	2.16E+05	83.1	2.97E+06	4.62E+04	30.48	31.0
o	C 229 ×	7.41	72.7	229	83	2734	8.9	5.8	2.26E+07	1.98E+05	90.9	1.83E+06	3.10E+04	25.91	23.6
p	C 229 ×	10.37	101.7	229	102	3824	11.2	7.4	3.26E+07	2.85E+05	92.2	4.00E+06	5.72E+04	32.26	31.8
q	C 254 ×	9.13	89.6	254	89	3367	10.4	6.4	3.46E+07	2.73E+05	101.3	2.63E+06	4.20E+04	27.94	25.9
r	C 254 ×	12.44	122.0	254	108	4587	12.7	7.9	4.83E+07	3.81E+05	102.6	5.42E+06	7.33E+04	34.29	34.0
s	C 305 ×	12.31	120.8	305	102	4540	11.9	7.4	6.65E+07	4.36E+05	121.2	4.59E+06	6.33E+04	31.75	29.0
t	C 305 ×	17.59	172.6	305	127	6486	15.7	8.9	9.98E+07	6.55E+05	124.0	1.07E+07	1.25E+05	40.64	40.9



A–11 Propiedades de vigas I estándar Aluminum Association, en unidades del sistema inglés.

Ref.	Perfil (in) (lb/ft)	Peralte, A (in)	Ancho, B (in)	Área (in^2)	Espesor del patín, t_1 (in)	Espesor del alma, t (in)	Propiedades de sección: Eje X-X I_x (in^4)	S_x (in^3)	r_x (in)	Eje Y-Y I_y (in^4)	S_y (in^3)	r_y (in)
a	I 3 × 1.637	3.00	2.50	1.392	0.20	0.13	2.24	1.49	1.27	0.52	0.42	0.61
b	I 3 × 2.030	3.00	2.50	1.726	0.26	0.15	2.71	1.81	1.25	0.68	0.54	0.63
c	I 4 × 2.311	4.00	3.00	1.965	0.23	0.15	5.62	2.81	1.69	1.04	0.69	0.73
d	I 4 × 2.793	4.00	3.00	2.375	0.29	0.17	6.71	3.36	1.68	1.31	0.87	0.74
e	I 5 × 3.700	5.00	3.50	3.146	0.32	0.19	13.94	5.58	2.11	2.29	1.31	0.85
f	I 6 × 4.030	6.00	4.00	3.427	0.29	0.19	21.99	7.33	2.53	3.10	1.55	0.95
g	I 6 × 4.692	6.00	4.00	3.990	0.35	0.21	25.5	8.50	2.53	3.74	1.87	0.97
h	I 7 × 5.800	7.00	4.50	4.932	0.38	0.23	42.89	12.25	2.95	5.78	2.57	1.08
i	I 8 × 6.181	8.00	5.00	5.256	0.35	0.23	59.69	14.92	3.37	7.30	2.92	1.18
j	I 8 × 7.023	8.00	5.00	5.972	0.41	0.25	67.78	16.94	3.37	8.55	3.42	1.20
k	I 9 × 8.361	9.00	5.50	7.110	0.44	0.27	102.02	22.67	3.79	12.22	4.44	1.31
l	I 10 × 8.646	10.00	6.00	7.352	0.41	0.25	132.09	26.42	4.24	14.78	4.93	1.42
m	I 10 × 10.286	10.00	6.00	8.747	0.50	0.29	155.79	31.16	4.22	18.03	6.01	1.44
n	I 12 × 11.672	12.00	7.00	9.925	0.47	0.29	255.57	42.60	5.07	26.90	7.69	1.65
o	I 12 × 14.292	12.00	7.00	12.153	0.62	0.31	317.33	52.89	5.11	35.48	10.14	1.71



A–11(SI) Propiedades de vigas I estándar Aluminum Association, en unidades SI.

Ref.	Perfil (mm) (kg/m)	Wt/m (N/m)	Peralte, A (mm)	Ancho, B (mm)	Área (mm^2)	Espesor del patín, t_1 (mm)	Espesor del alma, t (mm)	Propiedades de sección: Eje X-X I_x (mm^4)	S_x (mm^3)	r_x (mm)	Eje Y-Y I_y (mm^4)	S_y (mm^3)	r_y (mm)
a	I 76 × 2.436	23.90	76	64	898	5.1	3.3	9.32E+05	2.44E+04	32.26	2.16E+05	6.88E+03	15.49
b	I 76 × 3.021	29.63	76	64	1114	6.6	3.8	1.13E+06	2.97E+04	31.75	2.83E+05	8.85E+03	16.00
c	I 102 × 3.439	33.73	102	76	1268	5.8	3.8	2.34E+06	4.61E+04	42.93	4.33E+05	1.13E+04	18.54
d	I 102 × 4.156	40.77	102	76	1532	7.4	4.3	2.79E+06	5.51E+04	42.67	5.45E+05	1.43E+04	18.80
e	I 127 × 5.506	54.01	127	89	2030	8.1	4.8	5.80E+06	9.15E+04	53.59	9.53E+05	2.15E+04	21.59
f	I 152 × 5.997	58.83	152	102	2211	7.4	4.8	9.15E+06	1.20E+05	64.26	1.29E+06	2.54E+04	24.13
g	I 152 × 6.982	68.49	152	102	2574	8.9	5.3	1.06E+07	1.39E+05	64.26	1.56E+06	3.06E+04	24.64
h	I 178 × 8.630	84.66	178	114	3182	9.7	5.8	1.79E+07	2.01E+05	74.93	2.41E+06	4.21E+04	27.43
i	I 203 × 9.197	90.22	203	127	3391	8.9	5.8	2.48E+07	2.45E+05	85.60	3.04E+06	4.79E+04	29.97
j	I 203 × 10.45	102.5	203	127	3853	10.4	6.4	2.82E+07	2.78E+05	85.60	3.56E+06	5.61E+04	30.48
k	I 229 × 12.44	122.0	229	140	4587	11.2	6.9	4.25E+07	3.72E+05	96.27	5.09E+06	7.28E+04	33.27
l	I 254 × 12.87	126.2	254	152	4744	10.4	6.4	5.50E+07	4.33E+05	107.7	6.15E+06	8.08E+04	36.07
m	I 254 × 15.31	150.1	254	152	5644	12.7	7.4	6.48E+07	5.11E+05	107.2	7.50E+06	9.85E+04	36.58
n	I 305 × 44.50	436.5	305	178	6404	11.9	7.4	1.06E+08	6.98E+05	128.8	1.12E+07	1.26E+05	41.91
o	I 305 × 23.80	233.5	305	178	7841	15.7	7.9	1.32E+08	8.67E+05	129.8	1.48E+07	1.66E+05	43.43

A–12 Propiedades de tubo de acero en unidades del sistema inglés.

						Propiedades de sección				
									Constantes torsionales	
Ref.	Tamaño nominal (in)	Diámetro externo (in)	Diámetro interno (in)	Espesor de pared, t_w (in)	Área A (in^2)	I (in^4)	S (in^3)	r (in)	J (in^4)	Z_p (in^3)
	Tubo cédula 40									
a	1/8 in	0.405	0.269	0.068	0.072	1.06E-03	5.25E-03	0.122	2.13E-03	1.05E-02
b	1/4 in	0.540	0.364	0.088	0.125	3.31E-03	1.23E-02	0.163	6.62E-03	2.45E-02
c	3/8 in	0.675	0.493	0.091	0.167	7.29E-03	2.16E-02	0.209	1.46E-02	4.32E-02
d	PIPE 1/2 STD	0.840	0.622	0.109	0.250	1.71E-02	4.07E-02	0.261	3.42E-02	8.14E-02
e	PIPE 3/4 STD	1.050	0.824	0.113	0.333	3.70E-02	7.05E-02	0.334	7.41E-02	0.1411
f	PIPE 1 STD	1.315	1.049	0.133	0.494	8.73E-02	0.1328	0.421	0.1747	0.2657
g	PIPE 1-1/4 STD	1.660	1.380	0.140	0.669	0.1947	0.2346	0.540	0.3894	0.4692
h	PIPE 1-1/2 STD	1.900	1.610	0.145	0.799	0.3099	0.3262	0.623	0.6198	0.6524
i	PIPE 2 STD	2.375	2.067	0.154	1.075	0.6657	0.5606	0.787	1.331	1.121
j	PIPE 2-1/2 STD	2.875	2.469	0.203	1.704	1.530	1.064	0.947	3.059	2.128
k	PIPE 3 STD	3.500	3.068	0.216	2.228	3.017	1.724	1.164	6.034	3.448
l	PIPE 3-1/2 STD	4.000	3.548	0.226	2.680	4.788	2.394	1.337	9.575	4.788
m	PIPE 4 STD	4.500	4.026	0.237	3.174	7.233	3.214	1.510	14.47	6.429
n	PIPE 5 STD	5.563	5.047	0.258	4.300	15.16	5.451	1.878	30.32	10.90
o	PIPE 6 STD	6.625	6.065	0.280	5.581	28.14	8.496	2.245	56.28	16.99
p	PIPE 8 STD	8.625	7.981	0.322	8.399	72.49	16.81	2.938	145.0	33.62
q	PIPE 10 STD	10.750	10.020	0.365	11.908	160.7	29.90	3.674	321.5	59.81
r	12 in	12.750	11.938	0.406	15.745	300.2	47.09	4.367	600.4	94.18
s	16 in	16.000	15.000	0.500	24.347	731.9	91.49	5.483	1464	183.0
t	18 in	18.000	16.876	0.562	30.788	1171	130.2	6.168	2343	260.3

NOTA: Todos los valores mostrados son para tubo de acero cédula 40.
Las filas d-q se ajustan a los estándares AISC en cuanto a dimensiones de tubo de peso estándar; las filas a-c y r-t no.
Están disponibles muchos otros tamaños de secciones estructurales circulares huecas (HSS). Consulte el manual AISC.

A–12(SI) Propiedades de vigas I estándar Aluminum Association, en unidades SI.

Ref.	Tamaño nominal (mm)	Diámetro externo (mm)	Diámetro interno (mm)	Espesor de pared, t_w (mm)	Área A (mm^2)	Propiedades de sección: I (mm^4)	S (mm^3)	r (mm)	Constantes torsionales: J (mm^4)	Z_p (mm^3)
	Tubo cédula 40									
a	3.2 mm	10.29	6.83	1.73	46.45	442.7	86.07	3.087	885.4	172.1
b	6.4 mm	13.72	9.25	2.24	80.62	1379	201.0	4.135	2757	402.1
c	9.5 mm	17.15	12.52	2.31	107.7	3035	354.0	5.308	6069	708.0
d	PIPE 13 STD	21.34	15.80	2.77	161.5	7114	666.9	6.637	14 228	1334
e	PIPE 19 STD	26.67	20.93	2.87	214.6	15416	1156	8.475	30 831	2312
f	PIPE 25 STD	33.40	26.64	3.38	318.6	36355	2177	10.68	72 710	4354
g	PIPE 32 STD	42.16	35.05	3.56	431.3	81044	3844	13.71	1.62E+05	7688
h	PIPE 38 STD	48.26	40.89	3.68	515.8	1.29E+05	5346	15.81	2.58E+05	10 691
i	PIPE 51 STD	60.33	52.50	3.91	693.2	2.77E+05	9187	19.99	5.54E+05	18 374
j	PIPE 64 STD	73.03	62.71	5.16	1099	6.37E+05	17 436	24.06	1.27E+06	34 873
k	PIPE 75 STD	88.90	77.93	5.49	1438	1.26E+06	28 253	29.55	2.51E+06	56 506
l	PIPE 89 STD	101.6	90.12	5.74	1729	1.99E+06	39 228	33.95	3.99E+06	78 457
m	PIPE 102 STD	114.3	102.3	6.02	2048	3.01E+06	52 676	38.34	6.02E+06	1.05E+05
n	PIPE 127 STD	141.3	128.2	6.55	2774	6.31E+06	89327	47.70	1.26E+07	1.79E+05
o	PIPE 152 STD	168.3	154.1	7.11	3601	1.17E+07	1.39E+05	57.04	2.34E+07	2.78E+05
p	PIPE 203 STD	219.1	202.7	8.18	5419	3.02E+07	2.75E+05	74.62	6.03E+07	5.51E+05
q	PIPE 254 STD	273.1	254.5	9.27	7683	6.69E+07	4.90E+05	93.32	1.34E+08	9.80E+05
r	305 mm	323.9	303.2	10.31	10 158	1.25E+08	7.72E+05	110.9	2.50E+08	1.54E+06
s	406 mm	406.4	381.0	12.70	15 708	3.05E+08	1.50E+06	139.3	6.09E+08	3.00E+06
t	457 mm	457.2	428.7	14.27	19 863	4.88E+08	2.13E+06	156.7	9.75E+08	4.27E+06

NOTA: Todos los valores mostrados son para tubo de acero cédula 40 convertidos en unidades SI.
Las filas d-q se ajustan a los estándares AISC en cuanto a dimensiones de tubo de peso estándar; las filas a-c y r-t no.
Están disponibles muchos otros tamaños de secciones estructurales circulares huecas (HSS). Consulte el manual AISC.

A–13 Propiedades de tubería mecánica de acero, en unidades del sistema inglés.

	Tamaño nominal						Propiedades de sección				
										Constantes torsionales	
Ref.	DE (in)	Calibre de pared	Diámetro externo (in)	Diámetro interno (in)	Espesor de pared, t_w (in)	Área, A (in^2)	I (in^4)	S (in^3)	r (in)	J (in^4)	Z_p (in^3)
a	$\frac{1}{2}$	17	0.500	0.384	0.058	0.081	0.00200	0.00800	0.158	0.00400	0.0160
b	$\frac{1}{2}$	14	0.500	0.334	0.083	0.109	0.00246	0.00983	0.150	0.00491	0.0197
c	1	16	1.000	0.870	0.065	0.191	0.0210	0.0419	0.331	0.0419	0.0839
d	1	10	1.000	0.732	0.134	0.365	0.0350	0.0700	0.310	0.0700	0.140
e	$1\frac{1}{2}$	16	1.500	1.370	0.065	0.293	0.0756	0.101	0.508	0.151	0.202
f	$1\frac{1}{2}$	10	1.500	1.232	0.134	0.575	0.135	0.181	0.485	0.271	0.361
g	2	16	2.000	1.870	0.065	0.395	0.185	0.185	0.685	0.370	0.370
h	2	10	2.000	1.732	0.134	0.786	0.344	0.344	0.661	0.687	0.687
i	$2\frac{1}{2}$	10	2.500	2.232	0.134	0.996	0.699	0.559	0.838	1.398	1.119
j	$2\frac{1}{2}$	5	2.500	2.060	0.220	1.576	1.034	0.827	0.810	2.067	1.654
k	3	10	3.000	2.732	0.134	1.207	1.241	0.828	1.014	2.483	1.655
l	3	5	3.000	2.560	0.220	1.921	1.868	1.245	0.986	3.736	2.490
m	$3\frac{1}{2}$	10	3.500	3.232	0.134	1.417	2.010	1.149	1.191	4.020	2.297
n	$3\frac{1}{2}$	5	3.500	3.060	0.220	2.267	3.062	1.750	1.162	6.125	3.500
o	4	5	4.000	3.560	0.220	2.613	4.682	2.341	1.339	9.364	4.682
p	4	1	4.000	3.400	0.300	3.487	6.007	3.003	1.312	12.013	6.007
q	$4\frac{1}{2}$	5	4.500	4.060	0.220	2.958	6.791	3.018	1.515	13.583	6.037
r	$4\frac{1}{2}$	1	4.500	3.900	0.300	3.958	8.773	3.899	1.489	17.546	7.798
s	5	5	5.000	4.560	0.220	3.304	9.456	3.782	1.692	18.911	7.564
t	5	1	5.000	4.400	0.300	4.430	12.281	4.912	1.665	24.562	9.825

A–13(SI) Propiedades de tubería mecánica de acero, en unidades SI.

Ref.	Tamaño nominal		Diámetro externo (mm)	Diámetro interno (mm)	Espesor de pared, t_w (mm)	Área, A (mm^2)	Propiedades de sección				
										Constantes torsionales	
	DE (mm)	Calibre de pared					I (mm^4)	S (mm^3)	r (mm)	J (mm^4)	Z_p (mm^3)
a	12.7	17	12.70	9.754	1.473	51.96	833	131.1	4.00	1665	262.3
b	12.7	14	12.70	8.484	2.108	70.15	1023	161.1	3.82	2045	322.1
c	25.4	16	25.40	22.098	1.651	123.2	8726	687.1	8.42	1.75E+04	1374
d	25.4	10	25.40	18.593	3.404	235.2	1.46E+04	1147	7.87	2.91E+04	2294
e	38.1	16	38.10	34.798	1.651	189.1	3.15E+04	1651	12.9	6.29E+04	3303
f	38.1	10	38.10	31.293	3.404	371.0	5.64E+04	2959	12.3	1.13E+05	5918
g	50.8	16	50.80	47.498	1.651	254.9	7.71E+04	3034	17.4	1.54E+05	6068
h	50.8	10	50.80	43.993	3.404	506.8	1.43E+05	5632	16.8	2.86E+05	1.13E+04
i	63.5	10	63.50	56.693	3.404	642.6	2.91E+05	9166	21.3	5.82E+05	1.83E+04
j	63.5	5	63.50	52.324	5.588	1017	4.30E+05	1.35E+04	20.6	8.60E+05	2.71E+04
k	76.2	10	76.20	69.393	3.404	778.4	5.17E+05	1.36E+04	25.8	1.03E+06	2.71E+04
l	76.2	5	76.20	65.024	5.588	1240	7.77E+05	2.04E+04	25.0	1.55E+06	4.08E+04
m	88.9	10	88.90	82.093	3.404	914.2	8.37E+05	1.88E+04	30.3	1.67E+06	3.76E+04
n	88.9	5	88.90	77.724	5.588	1463	1.27E+06	2.87E+04	29.5	2.55E+06	5.74E+04
o	101.6	5	101.60	90.424	5.588	1686	1.95E+06	3.84E+04	34.0	3.90E+06	7.67E+04
p	101.6	1	101.60	86.360	7.620	2250	2.50E+06	4.92E+04	33.3	5.00E+06	9.84E+04
q	114.3	5	114.30	103.124	5.588	1908	2.83E+06	4.95E+04	38.5	5.65E+06	9.89E+04
r	114.3	1	114.30	99.060	7.620	2554	3.65E+06	6.39E+04	37.8	7.30E+06	1.28E+05
s	127.0	5	127.00	115.824	5.588	2131	3.94E+06	6.20E+04	43.0	7.87E+06	1.24E+05
t	127.0	1	127.00	111.760	7.620	2858	5.11E+06	8.05E+04	42.3	1.02E+07	1.61E+05

A–14 Propiedades típicas de aceros al carbón y de aleación*

Material AISI núm.	Condición[†]	Resistencia máxima, s_u		Resistencia a la cadencia, s_y		Porcentaje de alargamiento
		ksi	MPa	ksi	MPa	
1020	Recocido	57	393	43	296	36
1020	Laminado en caliente	65	448	48	331	36
1020	Estirado en frío	75	517	64	441	20
1040	Recocido	75	517	51	352	30
1040	Laminado en caliente	90	621	60	414	25
1040	Estirado en frío	97	669	82	565	16
1040	WQT 700	127	876	93	641	19
1040	WQT 900	118	814	90	621	22
1040	WQT 1100	107	738	80	552	24
1040	WQT 1300	87	600	63	434	32
1080	Recocido	89	614	54	372	25
1080	OQT 700	189	1303	141	972	12
1080	OQT 900	179	1234	129	889	13
1080	OQT 1100	145	1000	103	710	17
1080	OQT 1300	117	807	70	483	23
1141	Recocido	87	600	51	352	26
1141	Estirado en frío	112	772	95	655	14
1141	OQT 700	193	1331	172	1186	9
1141	OQT 900	146	1007	129	889	15
1141	OQT 1100	116	800	97	669	20
1141	OQT 1300	94	648	68	469	28
4140	Recocido	95	655	60	414	26
4140	OQT 700	231	1593	212	1462	12
4140	OQT 900	187	1289	173	1193	15
4140	OQT 1100	147	1014	131	903	18
4140	OQT 1300	118	814	101	696	23
5160	Recocido	105	724	40	276	17
5160	OQT 700	263	1813	238	1641	9
5160	OQT 900	196	1351	179	1234	12
5160	OQT 1100	149	1027	132	910	17
5160	OQT 1300	115	793	103	710	23

*Otras propiedades aproximadamente iguales para todos los aceros aleados y al carbón.
Módulo de elasticidad a tensión = 30 000 000 lb/in^2 (207 GPa)
Módulo de elasticidad a cortante = 11 500 000 lb/in^2 (80 GPa)
Densidad = 0.283 lb_m/in^3 (7680 kg/m^3)

[†]OQT significa templado y enfriado en aceite. WQT significa templado y enfriado en agua.

A–15 Propiedades típicas de aceros inoxidables y metales no ferrosos.

Material y condición		Resistencia máxima, s_u		Resistencia a la cadencia, s_y		Porcentaje de alargamiento	Densidad		Módulo de elasticidad, E	
		ksi	MPa	ksi	MPa		lb/in^3†	kg/m^3	lb/in^2	GPa
Aceros inoxidables										
AISI 301 recocido		110	758	40	276	60	0.290	8030	28×10^6	193
AISI 301 duro		185	1280	140	965	8	0.290	8030	28×10^6	193
AISI 430 recocido		75	517	40	276	30	0.280	7750	29×10^6	200
AISI 430 duro		90	621	80	552	15	0.280	7750	29×10^6	200
AISI 501 recocido		70	483	30	207	28	0.280	7750	29×10^6	200
AISI 501OQT 1000		175	1210	135	931	15	0.280	7750	29×10^6	200
17-4PH H900		210	1450	185	1280	14	0.281	7780	28.5×10^6	197
PH 13-8 Mo H1000		215	1480	205	1410	13	0.279	7720	29.4×10^6	203
Cobre y sus aleaciones										
Cobre C14500	blando	32	221	10	69	50	0.323	8940	17×10^6	117
	duro	48	331	44	303	20				
Cobre al berilio C17200	blando	72	496	20	138	20	0.298	8250	19×10^6	131
	duro	195	1344	145	1000	4				
Latón C36000	blando	44	305	18	124	20	0.308	8530	16×10^6	110
	duro	70	480	35	240	4				
Bronce C54400	duro	68	469	57	393	20	0.318	8800	17×10^6	117
Magnesio-fundido										
ASTM AZ 63A-T6		40	276	19	131	5	0.066	1830	6.5×10^6	45
Zinc—fundido ZA 12		58	400	47	324	5	0.218	6030	12×10^6	83

A–15 *(continuación)*

Titanio y sus aleaciones									
Alfa pura Ti-65A									
Forjado	65	448	55	379	18	0.163	4515	15×10^6	103
Aleación alfa Ti-0.2Pd									
Forjado	50	345	40	276	20	0.163	4515	14.9×10^6	103
Aleación beta Ti-3A1-13V-11Cr									
Envejecido	185	1280	175	1210	6	0.176	4875	16.0×10^6	110
Aleación alfa-beta Ti-6A1-4V									
Envejecido	170	1170	155	1070	8	0.160	4432	16.5×10^6	114
Aleaciones basados en níquel									
N06600 recocido									
70°F (21°C)	93	640	37	255	45	0.304	8420	30×10^6	207
800°F (427°C)	89	614	30	207	49				
1200°F (649°C)	65	448	27	186	39				
N06110—40% trabajo en frío									
70°F (21°C)	175	1205	150	1034	18	0.302	8330	30×10^6	207
500°F (260°C)			130	896	18				
800°F (427°C)			120	827	18				
N04400—recocido [A 70°F (21°C)]									
Recocido	80	550	30	207	50	0.318	8800	26×10^6	181
Estirado en frío	100	690	75	517	30				

†Este valor se puede utilizar como peso específico o densidad de masa en lb_m/in^3.

A–16 Propiedades de aceros estructurales.

Material ASTM núm. y productos	Resistencia máxima, s_u*		Resistencia a la cadencia, s_y*		Porcentaje de alargamiento, en 2 in
	ksi	MPa	ksi	MPa	
A36-Perfiles, placas y barras de acero al carbón	58	400	36	248	21
A 53-Tubo grado B	60	414	35	240	—
A242—Perfiles, placas y barras HSLA resistentes a la corrosión					
$\leq\frac{3}{4}$ in de espesor	70	483	50	345	21
$\frac{3}{4}$ a $1\frac{1}{2}$ in de espesor	67	462	46	317	21
$1\frac{1}{2}$ a 4 in de espesor	63	434	42	290	21
A500—Tubería estructural formada en frío					
Redonda, grado B	58	400	42	290	23
Redonda, grado C	62	427	46	317	21
Perfilada, grado B	58	400	46	317	23
Perfilada, grado C	62	427	50	345	21
A501—Tubería estructural formada en caliente, redonda o perfilada	58	400	36	248	23
A514—Acero aleado templado y enfriado en aceite; placa					
$\leq 2\frac{1}{2}$ in de espesor	110	758	100	690	18
$2\frac{1}{2}$ a 6 in de espesor	100	690	90	620	16
A572—Acero al vanadio-columbio HSLA: perfiles, placas y barras					
Grado 42	60	414	42	290	24
Grado 50	65	448	50	345	21
Grado 60	75	517	60	414	18
Grado 65	80	552	65	448	17
A913—HSLA, grado 65: perfiles	80	552	65	448	17
A992—HSLA: sólo perfiles W	65	448	50	345	21

*Valores mínimos; pueden ser más elevados

HSLA-Baja aleación y alta resistencia

El American Institute of Steel Construction especifica $E = 29 \times 10^6$ lb/in^2 (200 GPa) para acero estructural.

A–17 Propiedades típicas del hierro fundido.*

Tipo y grado del material	Resistencia máxima s_u† ksi	s_u† MPa	s_{uc}‡ ksi	s_{uc}‡ MPa	s_{us} ksi	s_{us} MPa	Resistencia a la cadencia s_{yt}‡ ksi	s_{yt}‡ MPa	Modulo de elasticidad, E‡ lb/in²	GPa	Porcentaje de alargamiento
Hierro gris ASTMA48											
Grado 20	20	138	80	552	32	221	—	—	12.2×10^6	84	<1
Grado 40	40	276	140	965	57	393	—	—	19.4×10^6	134	<0.8
Grado 60	55	379	170	1170	72	496	—	—	21.5×10^6	148	<0.5
Hierro dúctil ASTM A536											
60-40-18	60	414	—	—	57	393	40	276	24×10^6	165	18
80-55- 6	80	552	—	—	73	503	55	379	24×10^6	165	6
100-70- 3	100	690	—	—	—	—	70	483	24×10^6	165	3
120-90- 2	120	827	180	1240	—	—	90	621	23×10^6	159	2
Hierro dúctil austemplado (ADI)											
Grado 1	125	862	—	—	—	—	80	552	24×10^6	165	10
Grado 2	150	1034	—	—	—	—	100	690	24×10^6	165	7
Grado 3	175	1207	—	—	—	—	125	862	24×10^6	165	4
Grado 4	200	1379	—	—	—	—	155	1069	24×10^6	165	1
Hierro maleable ASTM A220											
45008	65	448	240	1650	49	338	45	310	26×10^6	170	8
60004	80	552	240	1650	65	448	60	414	27×10^6	186	4
80002	95	655	240	1650	75	517	80	552	27×10^6	186	2

*La densidad del hierro colado varía desde 0.25 a 0.27 lb_m/in^3 (6920 a 7480 kg/m³).

†Valores mínimos; pueden ser mayores.

‡Valores aproximados; pueden ser mayores o menores en aproximadamente 15%.

A–18 Propiedades típicas de aleaciones de aluminio.*

Aleación y temple	Resistencia máxima, s_u ksi	s_u MPa	Resistencia a la cadencia, s_y ksi	s_y MPa	Porcentaje de alargamiento	Resistencia al cortante, s_{us} ksi	s_{us} MPa
1100-H12	16	110	15	103	25	10	69
1100-H18	24	165	22	152	15	13	90
2014-0	27	186	14	97	18	18	124
2014-T4	62	427	42	290	20	38	262
2014-T6	70	483	60	414	13	42	290
3003-0	16	110	6	41	40	11	76
3003-H12	19	131	18	124	20	12	83
3003-H18	29	200	27	186	10	16	110
5154-0	35	241	17	117	27	22	152
5154-H32	39	269	30	207	15	22	152
5154-H38	48	331	39	269	10	28	193
6061-0	18	124	8	55	30	12	83
6061-T4	35	241	21	145	25	24	165
6061-T6	45	310	40	276	17	30	207
7075-0	33	228	15	103	16	22	152
7075-T6	83	572	73	503	11	48	331
Aleaciones de fundición (fundiciones en molde permanente)							
204.0-T4	48	331	29	200	8	—	—
206.0-T6	65	445	59	405	6	—	—
356.0-T6	41	283	30	207	10	—	—

*El módulo de elasticidad E de la mayoría de las aleaciones de aluminio, entre ellas las1100, 3003, 6061 y 6063 es 10×10^6 lb/in² (69.0 GPa). Para la 2014, $E = 10.6 \times 10^6$ psi (73.1 GPa). Para la 5154, $E = 10.2 \times 10^6$ lb/in² (70.3 GPa). Para la 7075, $E = 10.4 \times 10^6$ lb/in² (71.7 Gpa). La densidad de la mayoría de las aleaciones de aluminio es aproximadamente de 0.10 lb_m/in^3 (2770 kg/m³).

A–19 Propiedades típicas de la madera.

Tipo y grado	Esfuerzo permisible										Módulo de elasticidad	
	Flexión		Tensión paralela a la veta		Cortante horizontal		Compresión					
							Perpendicular a la veta		Paralela a la veta			
	lb/in^2	MPa	lb/in^2	MPa	lb/in^2	MPa	lb/in^2	MPa	lb/in^2	MPa	ksi	GPa
Pino Douglas—2 a 4 in de espesor, 6 in o más de ancho												
Núm. 1	1750	12.1	1050	7.2	95	0.66	385	2.65	1250	8.62	1800	12.4
Núm. 2	1450	10.0	850	5.9	95	0.66	385	2.65	1000	6.90	1700	11.7
Núm. 3	800	5.5	475	3.3	95	0.66	385	2.65	600	4.14	1500	10.3
Abeto—2 a 4 in de espesor, 6 in o más de ancho												
Núm. 1	1400	9.6	825	5.7	75	0.52	245	1.69	1000	6.90	1500	10.3
Núm. 2	1150	7.9	675	4.7	75	0.52	245	1.69	800	5.52	1400	9.7
Núm. 3	625	4.3	375	2.6	75	0.52	245	1.69	500	3.45	1200	8.3
Pino del sur—$2\frac{1}{2}$ a 4 in de espesor, 6 in o más de ancho												
Núm. 1	1400	9.6	825	5.7	80	0.55	270	1.86	850	5.86	1600	11.0
Núm. 2	1000	6.9	575	4.0	70	0.48	230	1.59	550	3.79	1300	9.0
Núm. 3	650	4.5	375	2.6	70	0.48	230	1.59	400	2.76	1300	9.0

A–20 Propiedades típicas de plásticos seleccionados.

Material	Tipo	Resistencia a la tensión (ksi)	Resistencia a la tensión (MPa)	Módulo de tensión (ksi)	Módulo de tensión (MPa)	Resistencia a la flexión (ksi)	Resistencia a la flexión (MPa)	Módulo de flexión (ksi)	Módulo de flexión (MPa)	Resistencia al impacto IZOD (ft·lb/in de muesca)
Nylon 66	Seco	21.0	146	1200	8700	32.0	221	1100	7900	
30% de vidrio	50% de H.R.	15.0	102	800	5500					
ABS	Mediano impacto	6.0	41	360	2480	11.5	79	310	2140	4.0
	Alto impacto	5.0	34	250	1720	8.0	55	260	1790	7.0
Policarbonato	Uso general	9.0	62	340	2340	11.0	76	300	2070	12.0
Acrílico	Estándar	10.5	72	430	2960	16.0	110	460	3170	0.4
	Alto impacto	5.4	37	220	1520	7.0	48	230	1590	1.2
PVC	Rígido	6.0	41	350	2410			300	2070	0.4–20.0 (varía ampliamente)
Polimida	Relleno de grafito en polvo al 25%	5.7	39			12.8	88	900	6210	0.25
	Relleno de fibra de vidrio	27.0	186			50.0	345	3250	22 400	17.0
	Laminado	50.0	345			70.0	483	4000	27 580	13.0
Acetal	Copolímero	8.0	55	410	2830	13.0	90	375	2590	1.3
Poliuretano	Elastómero	5.0	34	100	690	0.6	4			No se rompe
Fenólico	General	6.5	45	1100	7580	9.0	62	1100	7580	0.3
Poliéster reforzado con fibra de vidrio (aprox. 30% de vidrio en peso)										
	Trenzado, molde contacto	9.0	62			16.0	110	800	5520	
	Moldeado a presión en frío	12.0	83			22.0	152	1300	8960	
	Moldeado a compresión	25.0	172			10.0	69	1300	8960	

A–21 Instrucciones para determinar el esfuerzo de diseño.

Esfuerzos normales directos—Diseño estructural y de máquinas en general

Forma de carga	Materiales dúctiles (% de alargamiento > 5%)	Materiales frágiles (% de alargamiento < 5%)
Cargas estáticas	$\sigma_d = s_y/2$	$\sigma_d = s_u/6$
Cargas repetidas	$\sigma_d = s_u/8$	$\sigma_d = s_u/10$
Impacto o choque	$\sigma_d = s_u/12$	$\sigma_d = s_u/15$

Esfuerzos normales directos—Cargas estáticas sobre miembros de estructuras como las de edificios

Código AISC $\sigma_d = s_y/1.67 = 0.60\, s_y$ o $\sigma_d = s_u/2.00 = 0.50\, s_u$
Cualquiera que sea menor

Esfuerzos normales directos—Cargas estáticas sobre miembros de aluminio de estructuras similares a las de edificios

Aluminum Association: $\sigma_d = s_y/1.65 = 0.61\, s_y$ o $\sigma_d = s_u/1.95 = 0.51\, s_u$
Cualquiera que sea menor

Esfuerzos cortantes de diseño—Para cortante directo y para esfuerzos cortantes torsionales

Basados en la teoría de falla por esfuerzo cortante máximo

$$\tau_d = s_{ys}/N = 0.5\, s_y/N = s_y/2N$$

Forma de carga	Factor de diseño	Esfuerzo cortante de diseño
Cargas estáticas	Use $N = 2$	$\tau_d = s_y/4$
Cargas repetidas	Use $N = 4$	$\tau_d = s_y/8$
Choque o impacto	Use $N = 6$	$\tau_d = s_y/12$

Estimaciones de la resistencia máxima a cortante

Fórmula	Material
$s_{us} = 0.65\, s_u$	Aleaciones de aluminio
$s_{us} = 0.82\, s_u$	Acero—al carbón simple y aleado
$s_{us} = 0.90\, s_u$	Hierro maleable y aleaciones de cobre
$s_{us} = 1.30\, s_u$	Hierro colado gris

Esfuerzo de apoyo permisible

Acero—Superficies planas o el área proyectada de los pasadores en los agujeros escariados, taladrados o perforados $\sigma_{bd} = 0.90\, s_y$

Carga de apoyo permisible, W_b—Rodillos de acero sobre una placa de acero plana

Unidades estadounidenses	Unidades métricas SI
$R_a = (s_y - 13)\,(0.03\, dL)$	$R_a = (s_y - 90)\,(3.0 \times 10^{-5} dL)$

Donde R_a = Carga de apoyo permisible en kips o KN
s_y = Resistencia a la cadencia del acero en ksi o MPa
d = Diámetro de los rodillos en pulgadas o mm
L = Longitud de los rodillos en pulgadas o mm

continúa

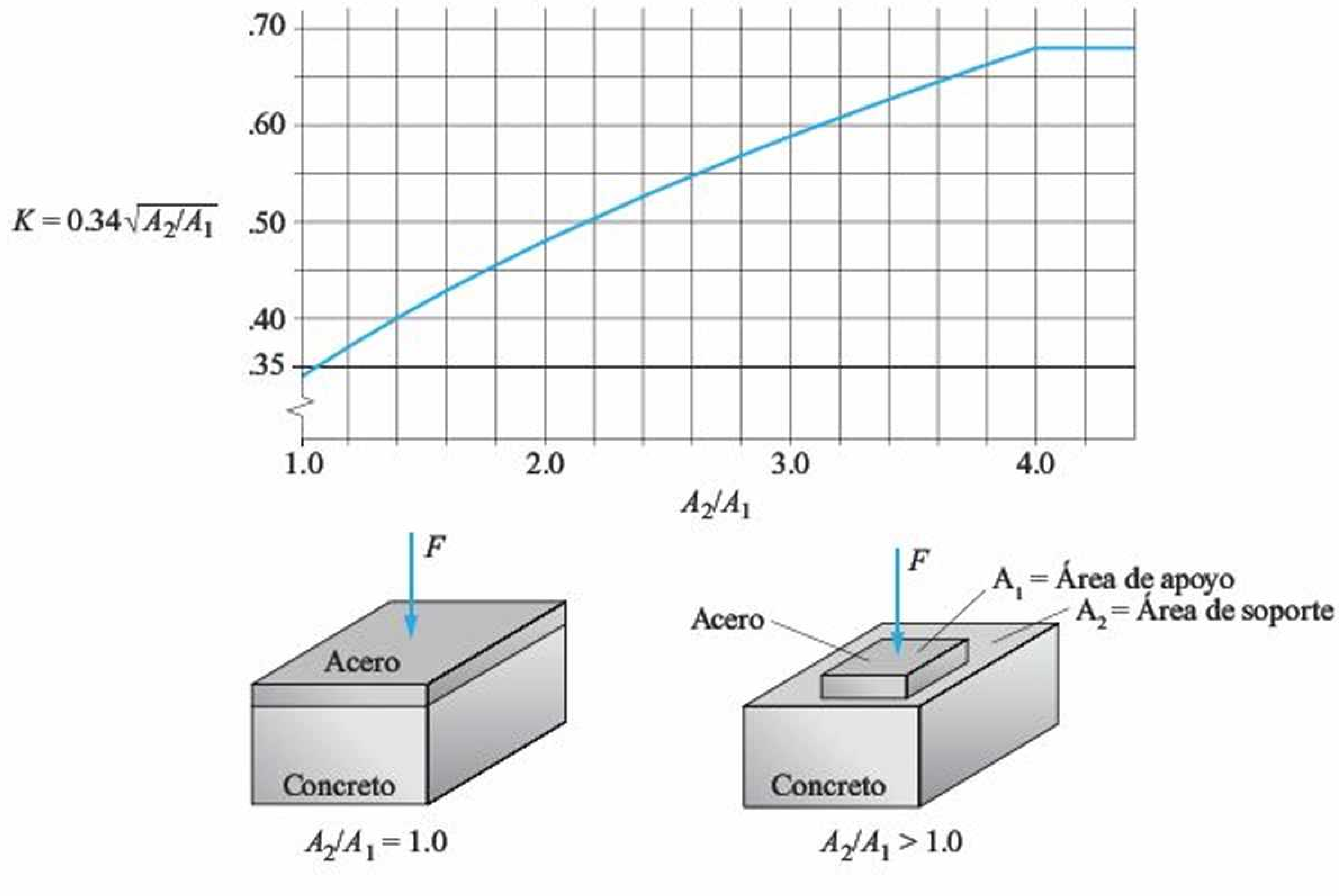
A–21 *(continuación)*

Esfuerzos de apoyo permisibles en mampostería y suelos utilizados en este libro.

Material	Esfuerzo de apoyo permisible, σ_{bd}	
	lb/in²	MPa
Piedra arenisca y piedra caliza	400	2.76
Ladrillo en mortero común	250	1.72
Roca sólida dura	350	2.41
Pizarra o roca semidura	140	0.96
Roca blanda	70	0.48
Arcilla dura o grava compacta	55	0.38
Arcilla blanda o arena suelta	15	0.10

Concreto: $\sigma_{bd} = Kf'_c = (0.34\sqrt{A_2/A_1})f'_c$ (Pero σ_{bd} máximo $= 0.68 f'_c$)

Donde: f'_c = Resistencia nominal del concreto
A_1 = Área de apoyo
A_2 = Área total del soporte



A–21 *(continuación)*

Esfuerzos flexionantes de diseño—Diseño estructural y de máquinas en general

Forma de carga	Materiales dúctiles (% de alargamiento > 5%)	Materiales frágiles (% de alargamiento < 5%)
Cargas estáticas	$\sigma_d = s_y/2$	$\sigma_d = s_u/6$
Cargas repetidas	$\sigma_d = s_y/8$	$\sigma_d = s_u/10$
Impacto o choque	$\sigma_d = s_y/12$	$\sigma_d = s_u/15$

Esfuerzos flexionantes de diseño—Especificaciones AISC para estructuras de acero de edificios sometidas a cargas estáticas

$$\sigma_d = s_y/1.5 = 0.66\, s_y$$

Esfuerzos flexionantes de diseño—Especificaciones de la Aluminum Association para estructuras de aluminio de edificios sometidas a cargas estáticas

$$\sigma_d = s_y/1.65 = 0.61\, s_y \quad \text{o} \quad \sigma_d = s_u/1.95 = 0.51\, s_u$$

Cualquiera que sea menor

Esfuerzos cortantes de diseño para vigas sometidas a flexión

Perfiles de viga de acero estructural laminado—esfuerzo cortante permisible en el alma (AISC)

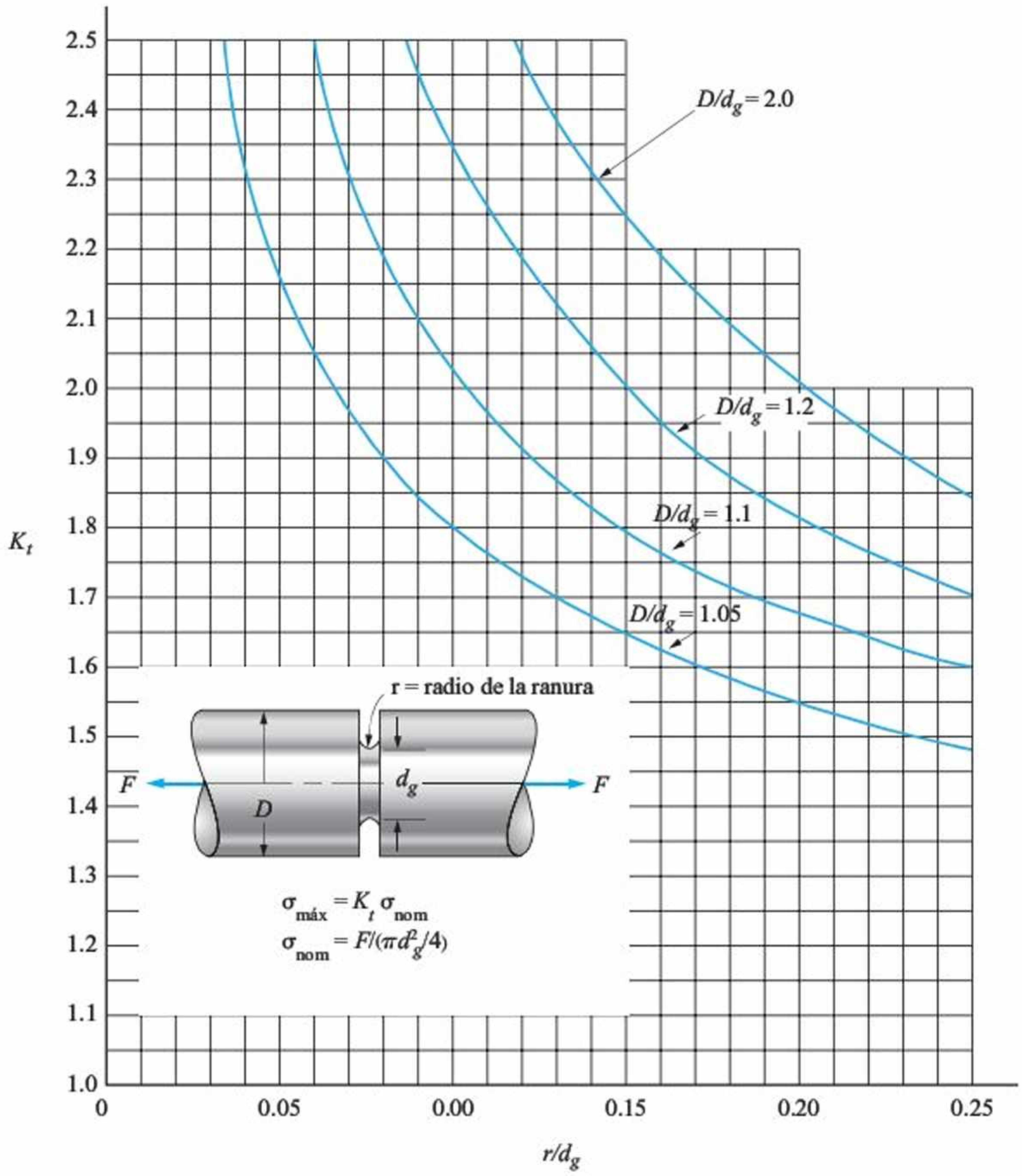
$$\tau_d = 0.40\, s_y$$

Materiales dúctiles generales sometidos a cargas estáticas: Basados en la resistencia a la cadencia del material a cortante con un factor de diseño $N = 2$:

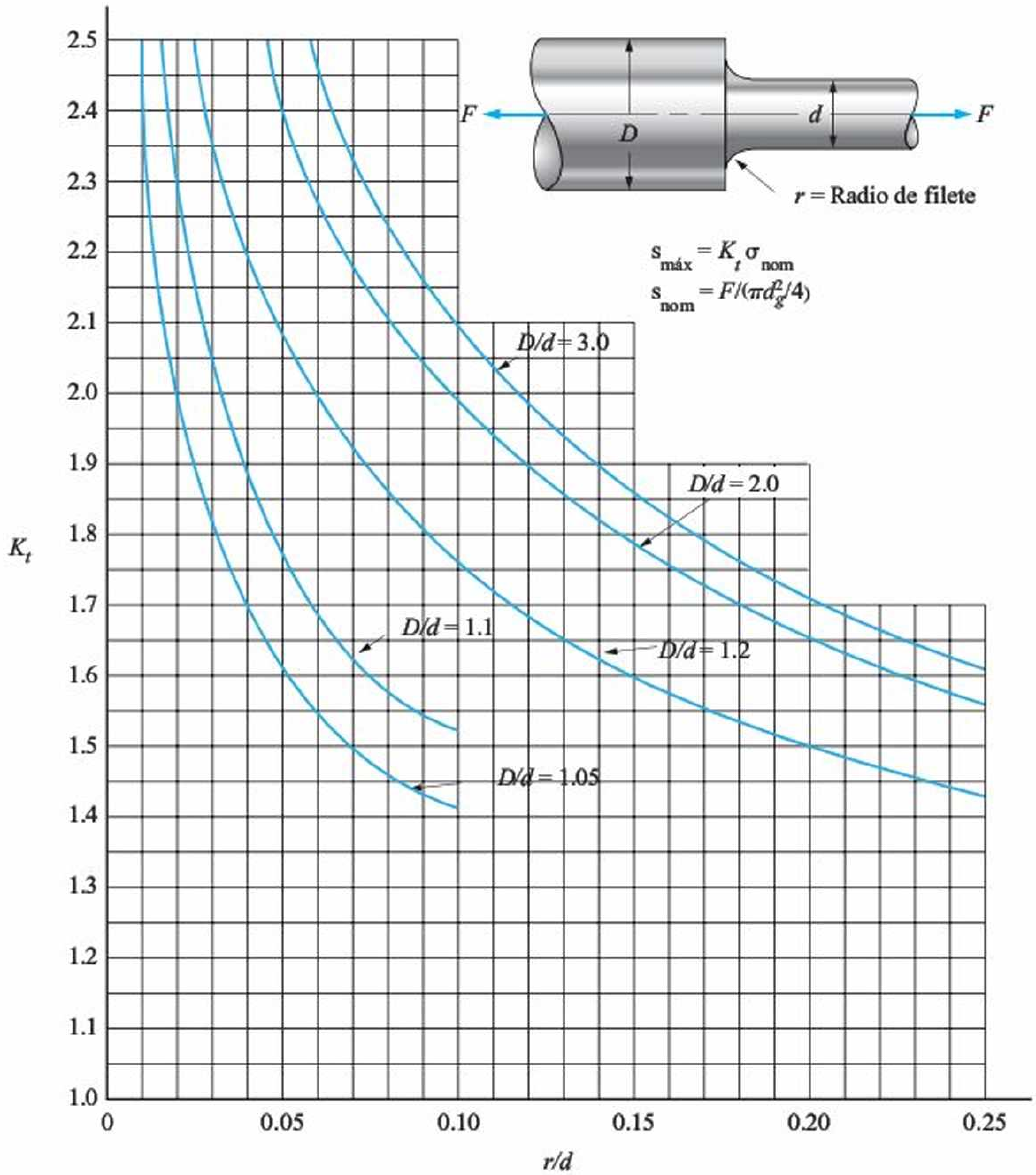
$$\tau_d = s_{ys}/N = 0.5\, s_y/N = s_y/2N = s_y/2(2) = s_y/4 = 0.25\, s_y$$

A–22 Factores de concentración de esfuerzo

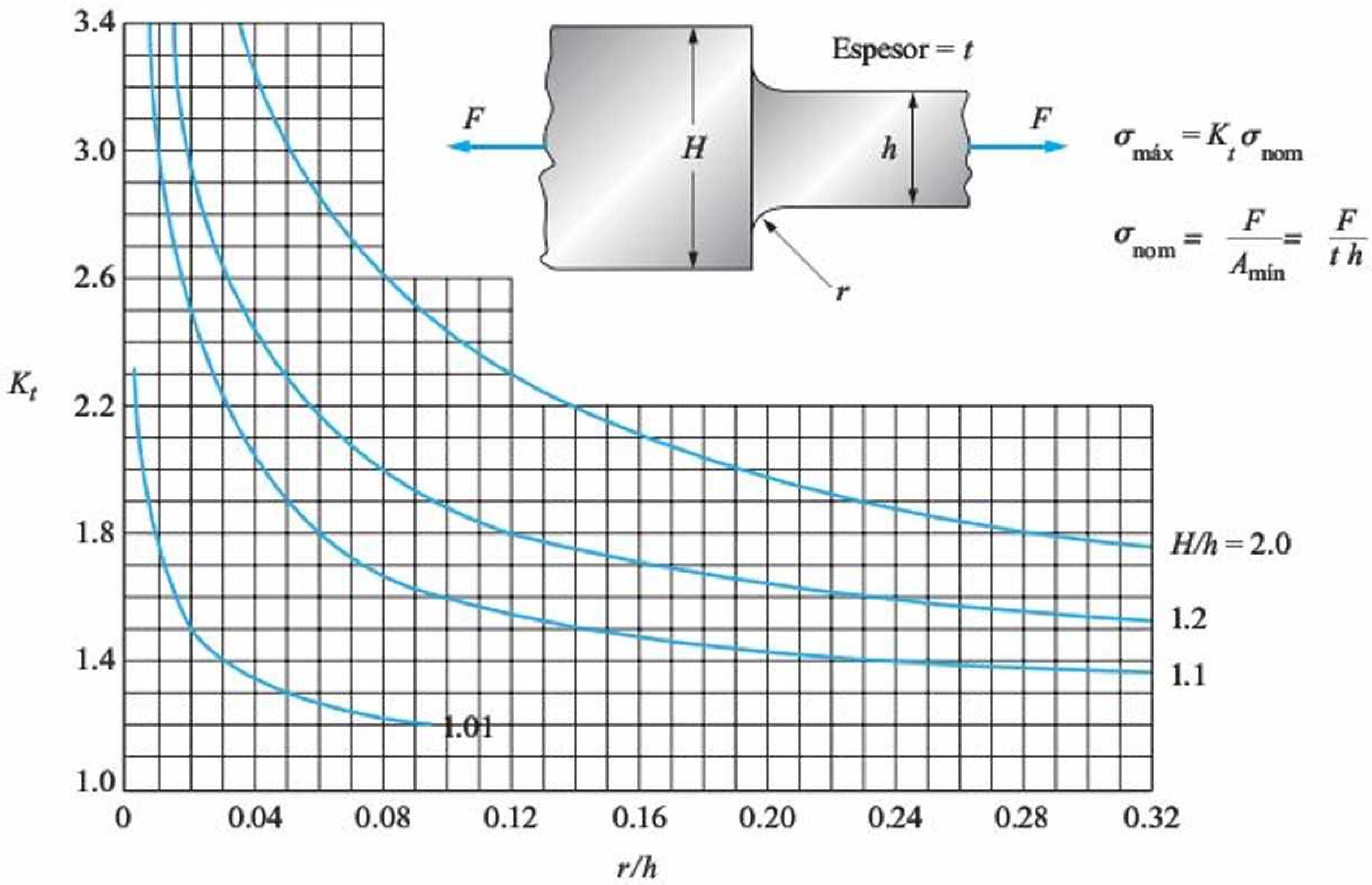
A–22–1 Barra redonda ranurada axialmente cargada a tensión.



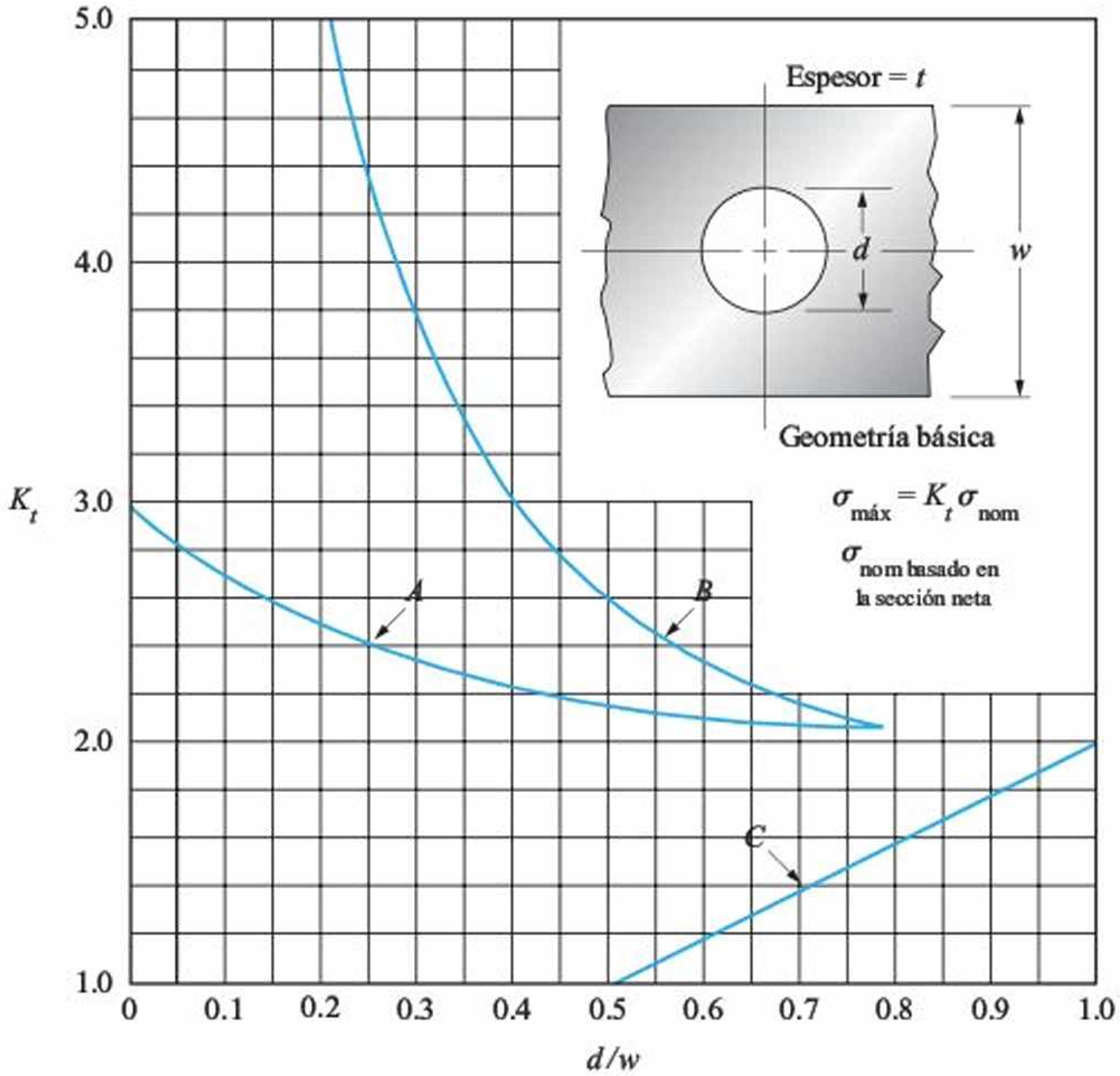
A–22–2 Barra redonda escalonada axialmente cargada a tensión.



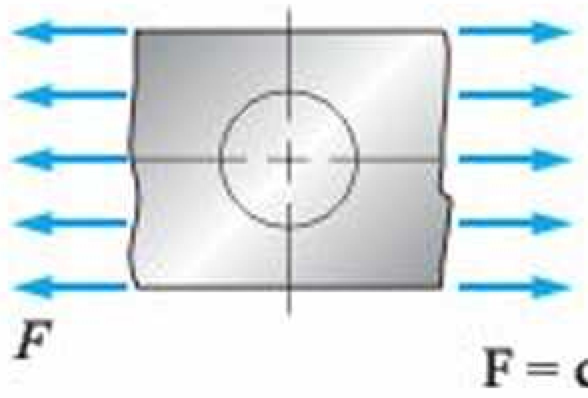
A–22–3 Placa plana escalonada axialmente cargada a tensión.



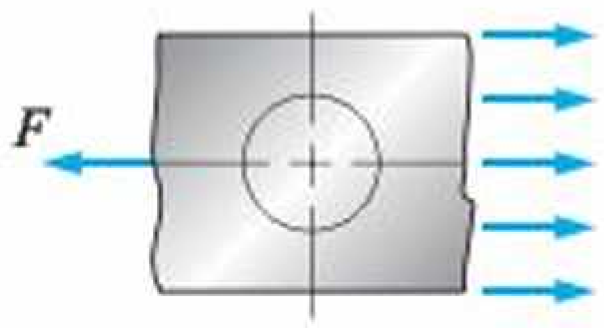
A–22–4 Placa plana con un agujero en el centro sometida a tensión y a flexión.

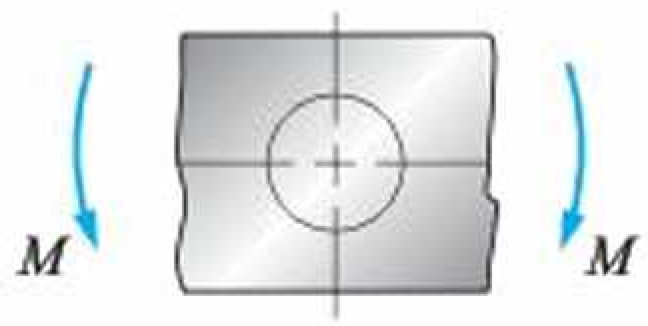


Curva A	Curva B	Curva C
Tensión directa en la placa	Carga de tensión aplicada por conducto de un pasador insertado en el agujero	Flexión en el plano de la placa
$\sigma_{nom} = \frac{F}{A_{neta}} = \frac{F}{(w-d)t}$	$\sigma_{nom} = \frac{F}{A_{neta}} = \frac{F}{(w-d)t}$	$\sigma_{nom} = \frac{Mc}{I_{neta}} = \frac{6Mw}{(w^3-d^3)t}$



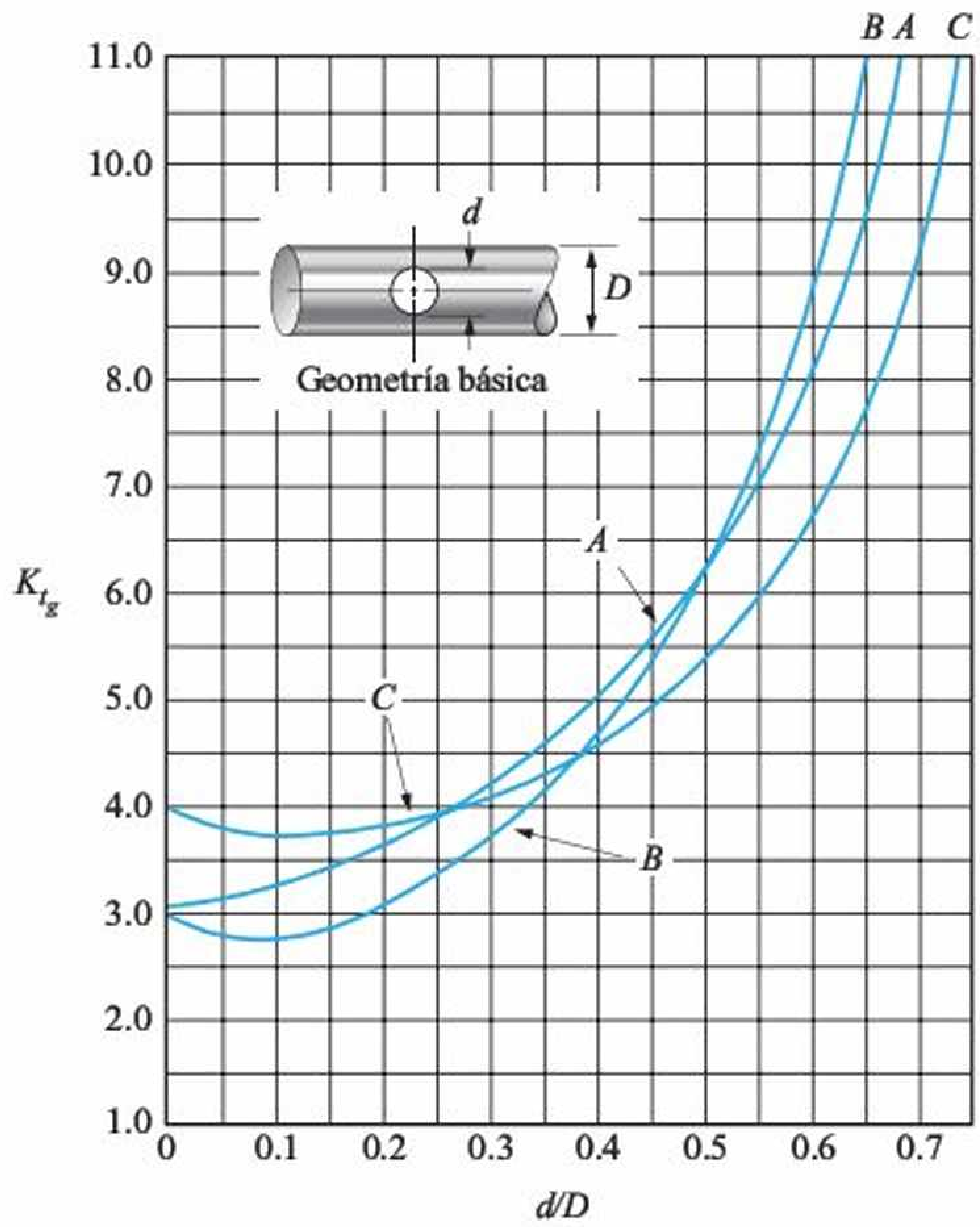
F = carga total



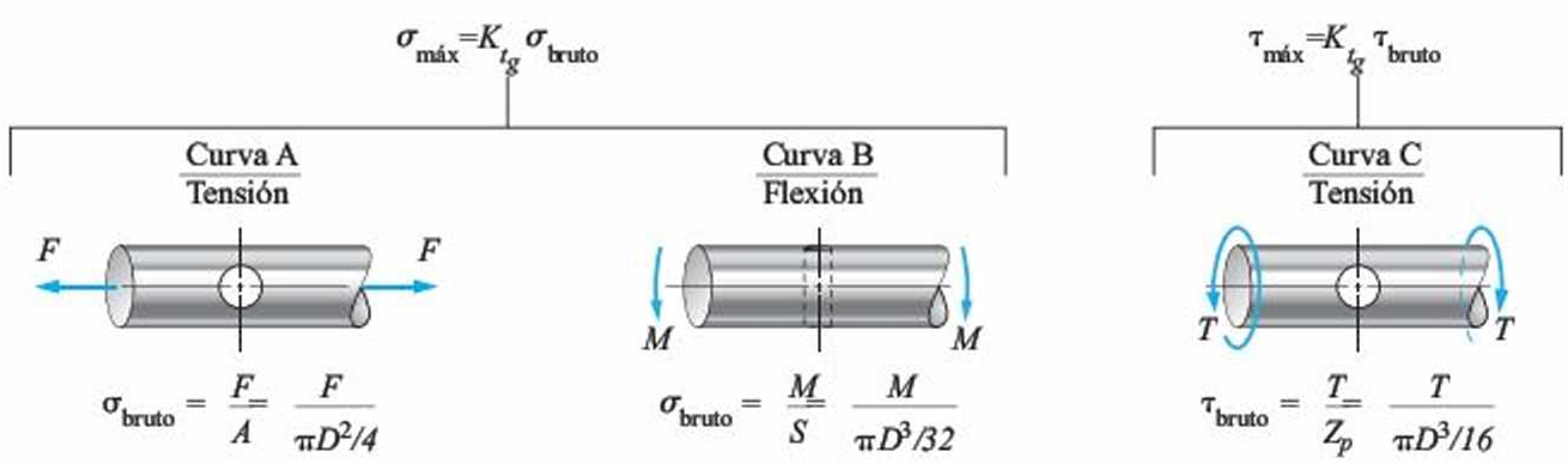


Nota: $K_t = 1.0$ con $d/w < 0.5$

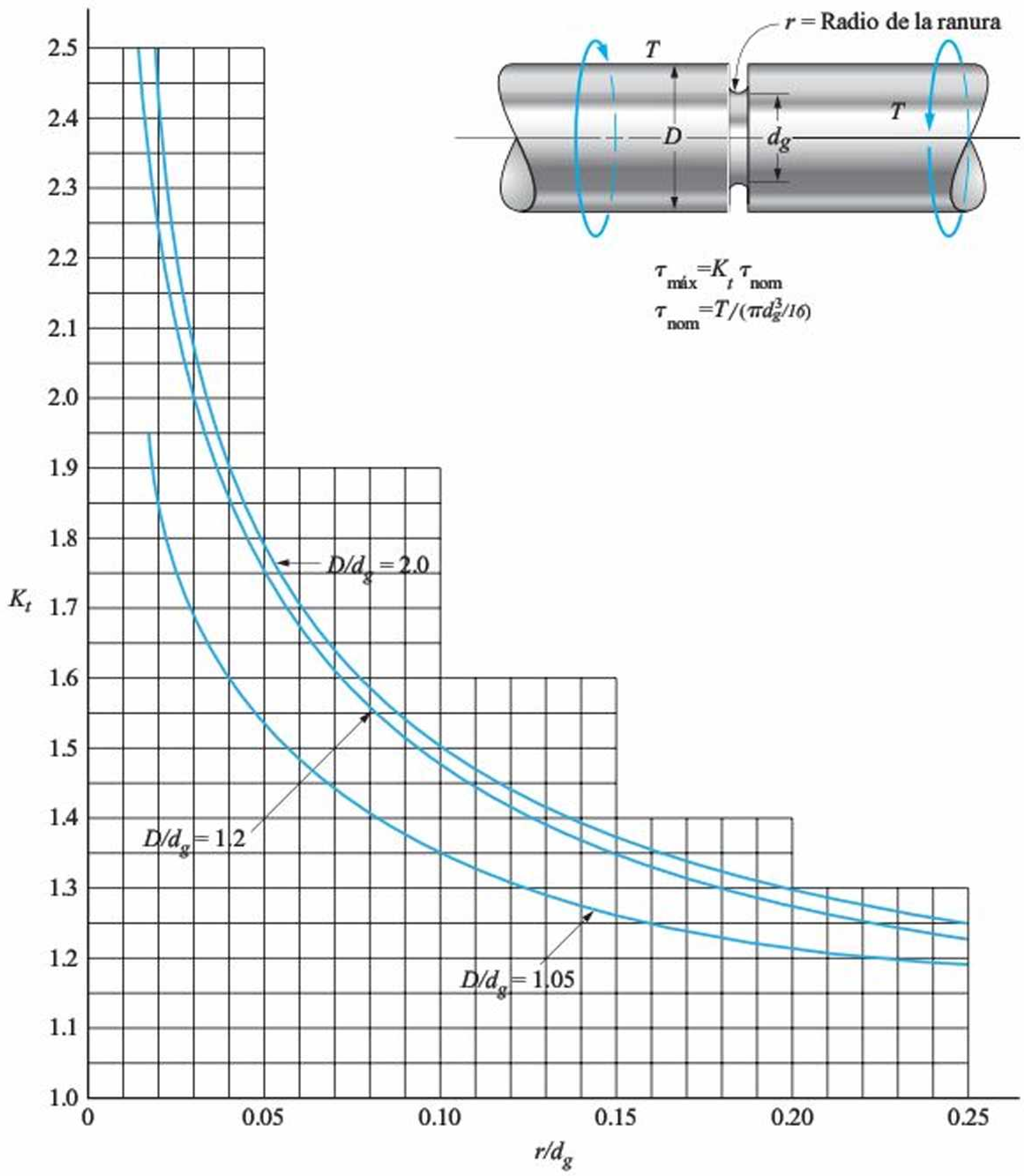
A–22–5 Barra redonda con un agujero transversal sometida a tensión, flexión y torsión.



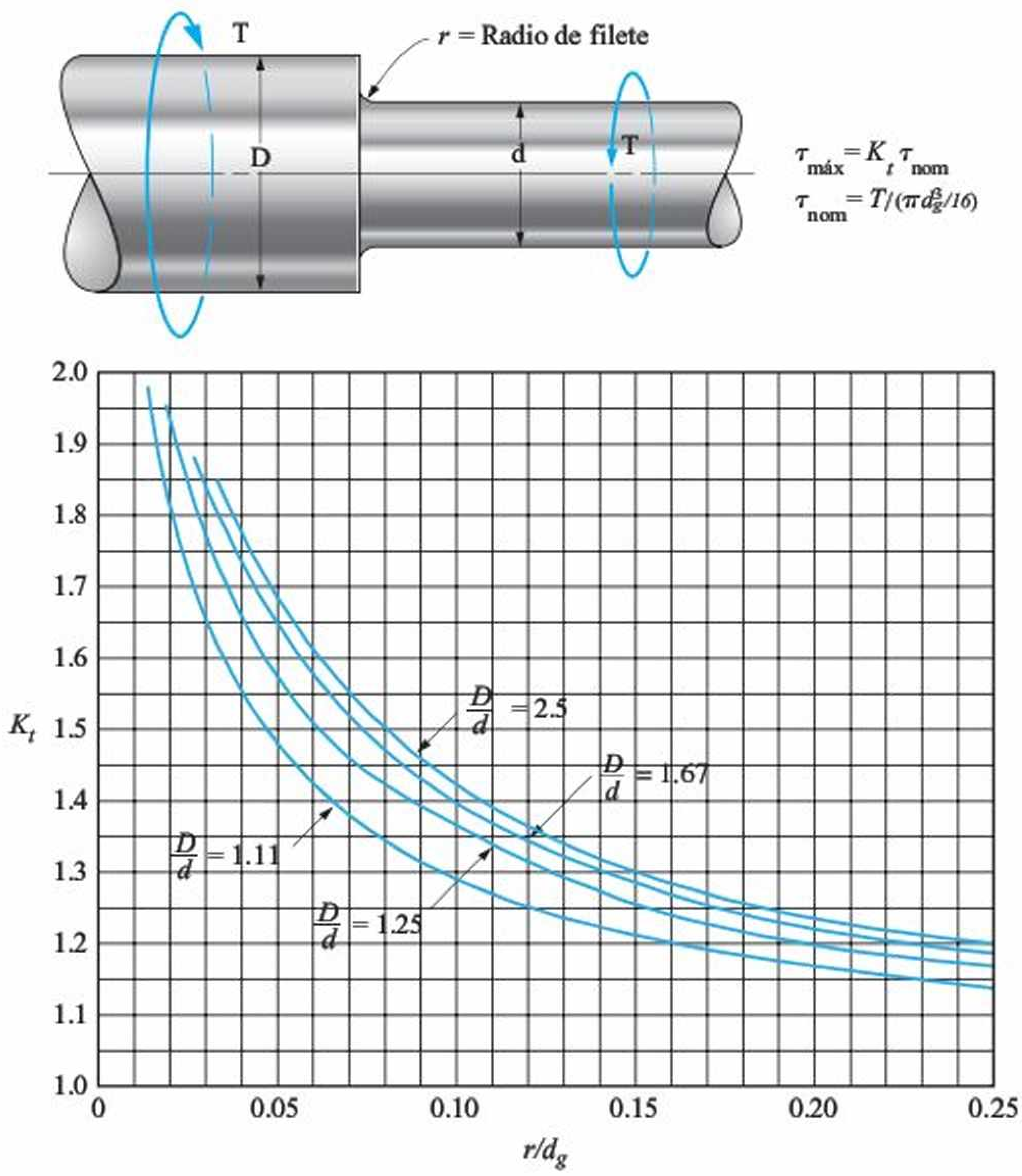
Nota: K_{t_g} basado en el esfuerzo nominal de una barra redonda sin agujero (sección bruta)



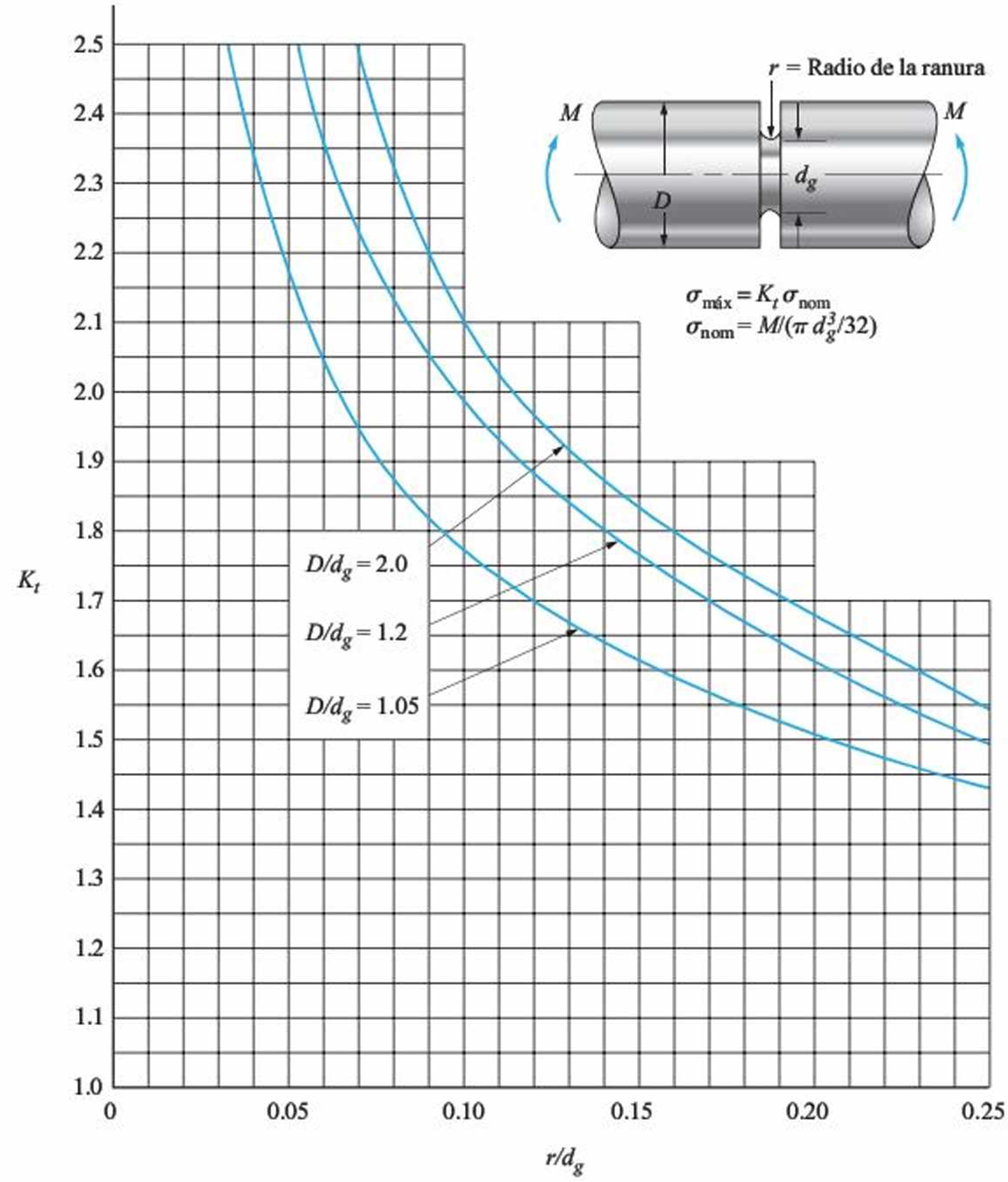
A–22–6 Barra redonda ranurada a tensión.



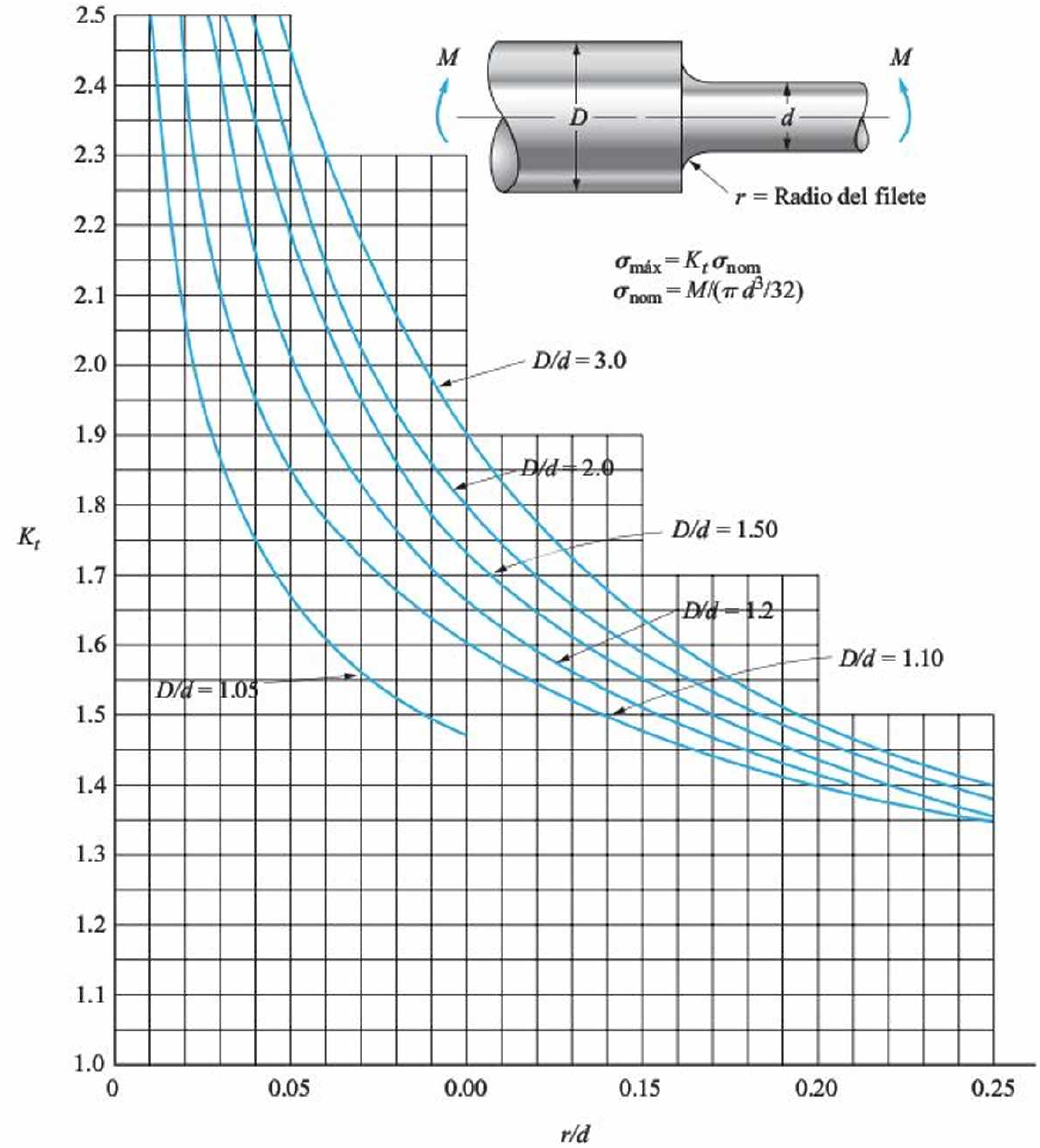
A–22–7 Barra redonda escalonada a tensión.



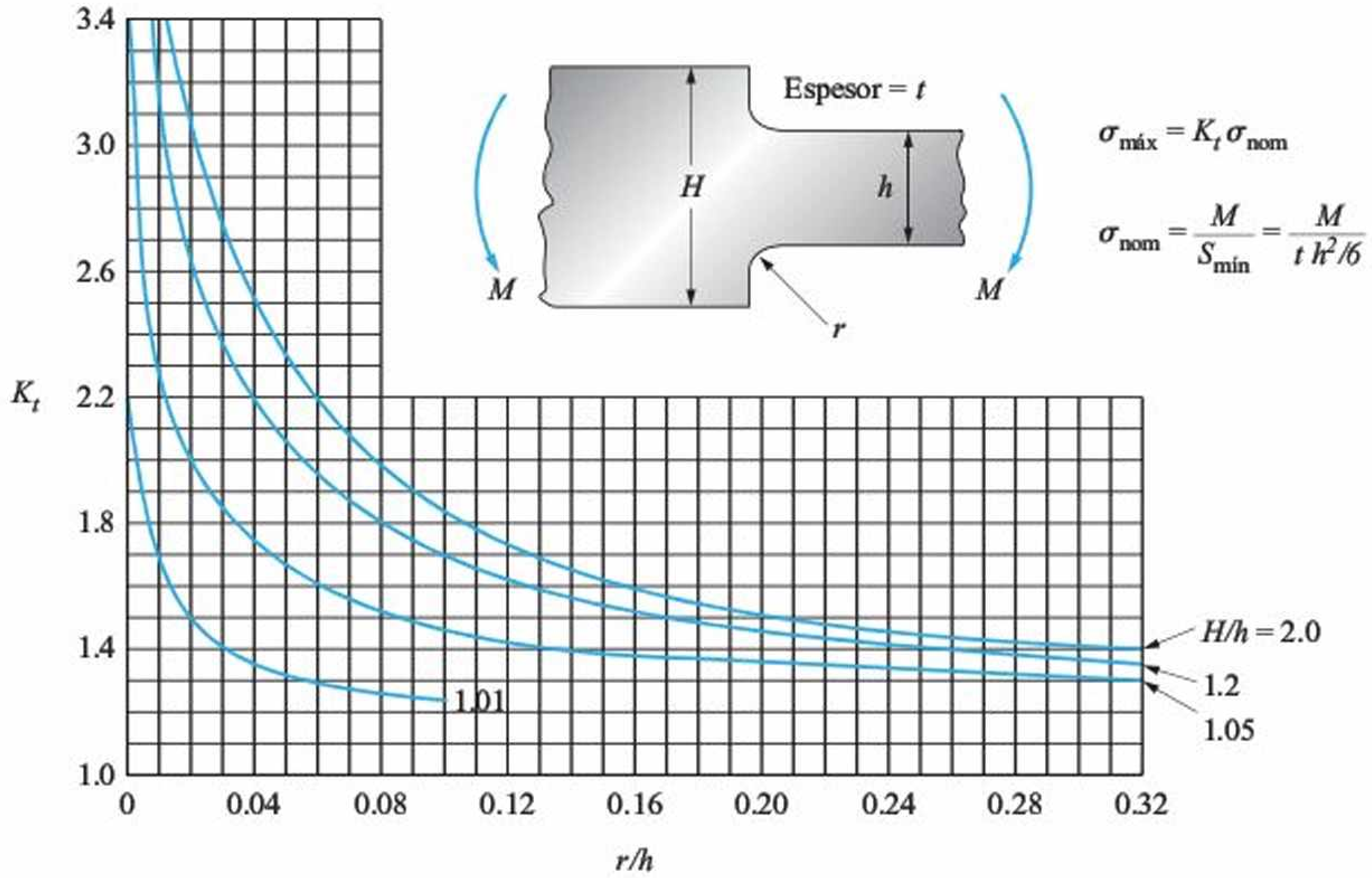
A–22–8 Barra redonda ranurada a flexión.



A–22–9 Barra redonda escalonada a flexión.



A–22–10 Placa plana escalonada sometida a flexión.

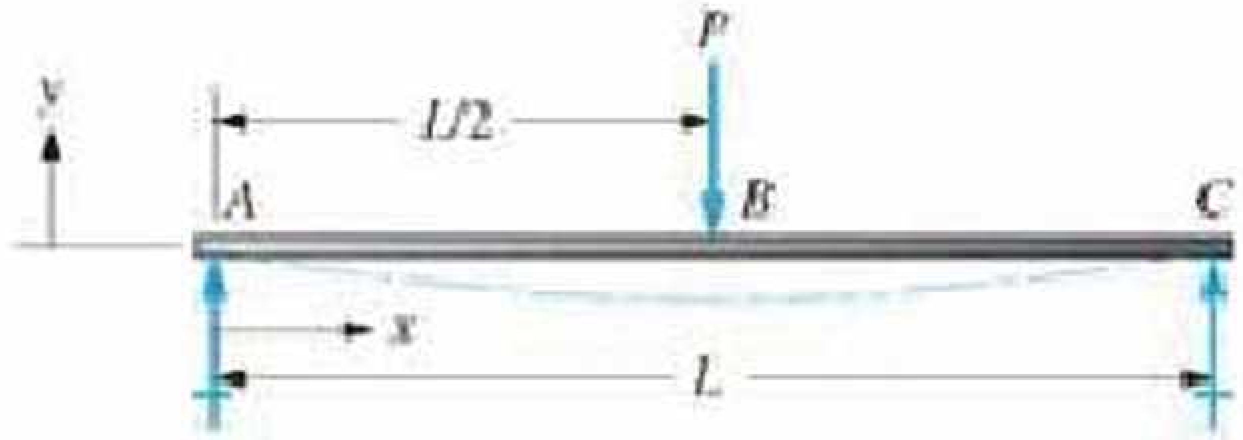


A–21–11 Flechas con cuñeros–a flexión y torsión

Tipo de cuñero	*K_t
De extremo	1.6
Perfil	2.0

*K_t se tiene que aplicar al esfuerzo calculado con el diámetro nominal completo de la flecha donde se localiza el cuñero.

A–23 Fórmulas para determinar la deflexión de vigas simplemente apoyadas.

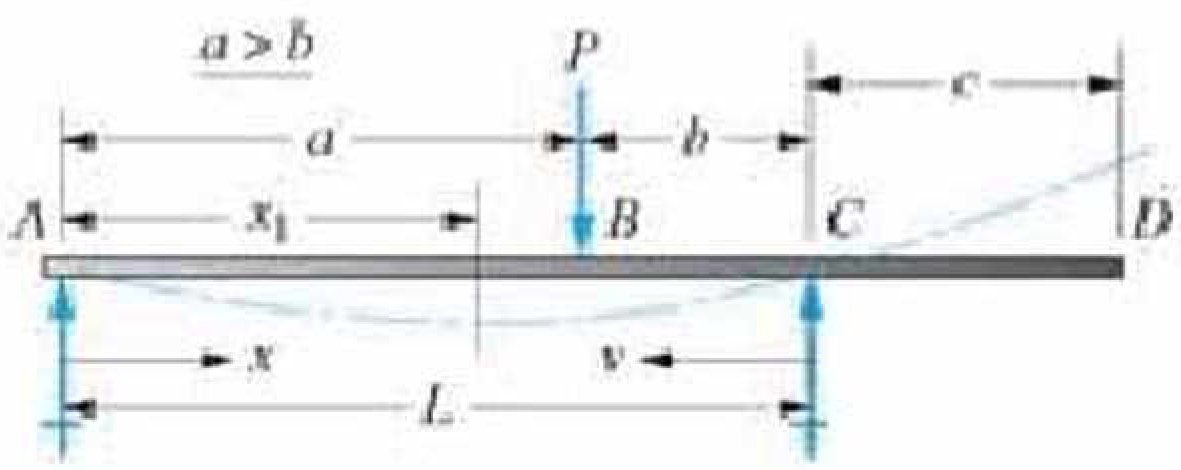


(a)

$$y_B = y_{\text{máx}} = \frac{-PL^3}{48EI} \quad \text{en el centro}$$

Entre A y B:

$$y = \frac{-Px}{48EI}(3L^2 - 4x^2)$$



(b)

$$y_{\text{máx}} = \frac{Pab(L+b)\sqrt{3a(L+b)}}{27EIL}$$

$$\text{donde } x_1 = \sqrt{a(L+b)/3}$$

$$y_B = \frac{-Pa^2b^2}{3EIL} \quad \text{en la carga}$$

Entre A y B (el segmento más largo)

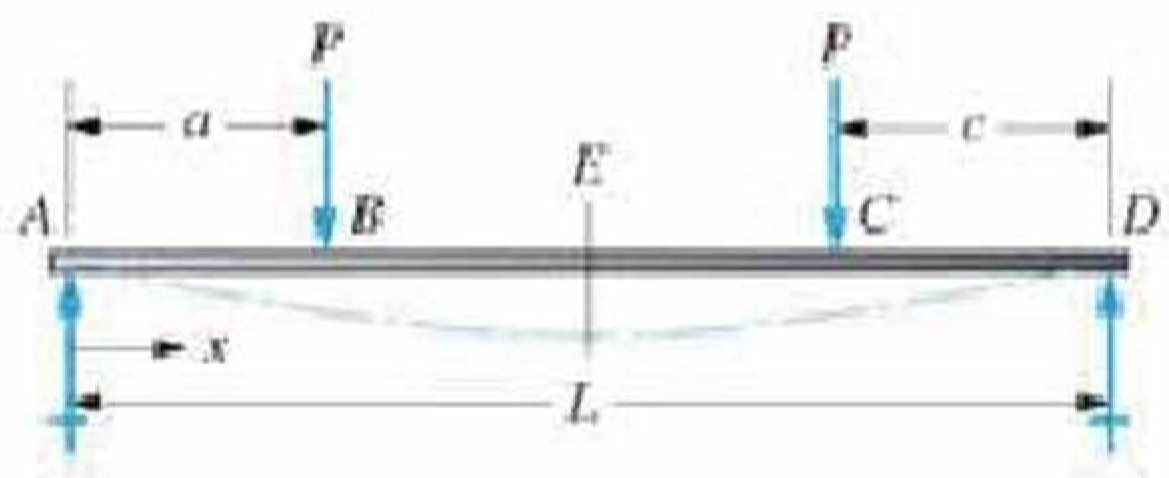
$$y = \frac{-Pbx}{6EIL}(L^2 - b^2 - x^2)$$

Entre B y C (el segmento más corto)

$$y = \frac{-Pav}{6EIL}(L^2 - v^2 - a^2)$$

En extremo saliente D:

$$y_D = \frac{Pabc}{6EIL}(L + a)$$



(c)

$$y_E = y_{\text{máx}} = \frac{-Pa}{24EI}(3L^2 - 4a^2) \quad \text{en el centro}$$

$$y_B = y_C = \frac{-Pa^2}{6EI}(3L - 4a) \quad \text{en las cargas}$$

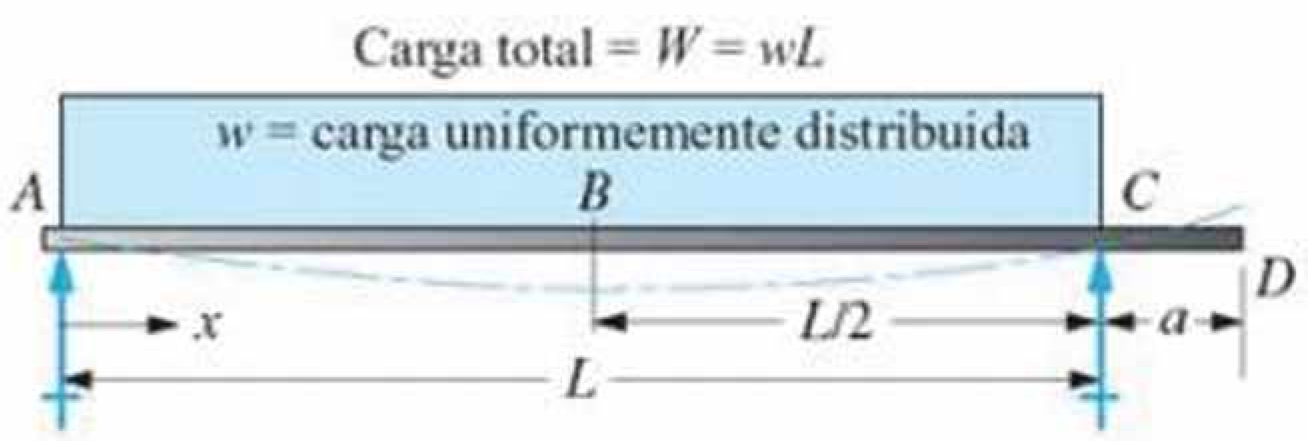
Entre A y B:

$$y = \frac{-Px}{6EI}(3aL - 3a^2 - x^2)$$

Entre B y C

$$y = \frac{-Pa}{6EI}(3Lx - 3x^2 - a^2)$$

A–23 *(continuación)*



(*d*)

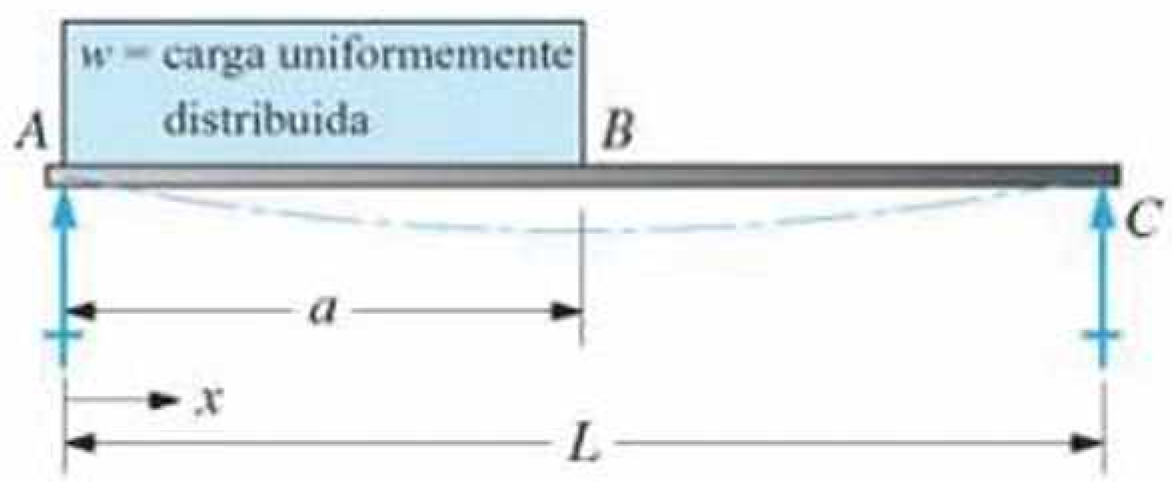
$$y_B = y_{\text{máx}} = \frac{-5wL^4}{384EI} = \frac{-5WL^3}{384EI} \quad \text{en el centro}$$

Entre A y B

$$y = \frac{-wx}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3)$$

En el extremo D

$$y_D = \frac{wL^3a}{24EI}$$



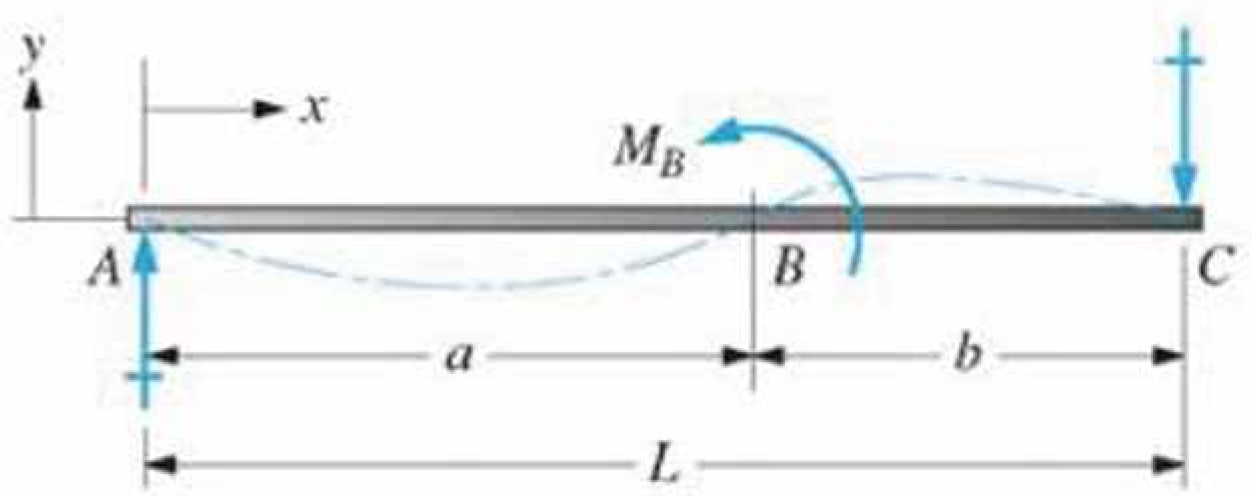
(*e*)

Entre A y B:

$$y = \frac{-wx}{24EIL}\left[a^2(2L - a)^2 - 2ax^2(2L - a) + Lx^3\right]$$

Entre B y C:

$$y = \frac{-wa^2(L - x)}{24EIL}(4Lx - 2x^2 - a^2)$$



(*f*)

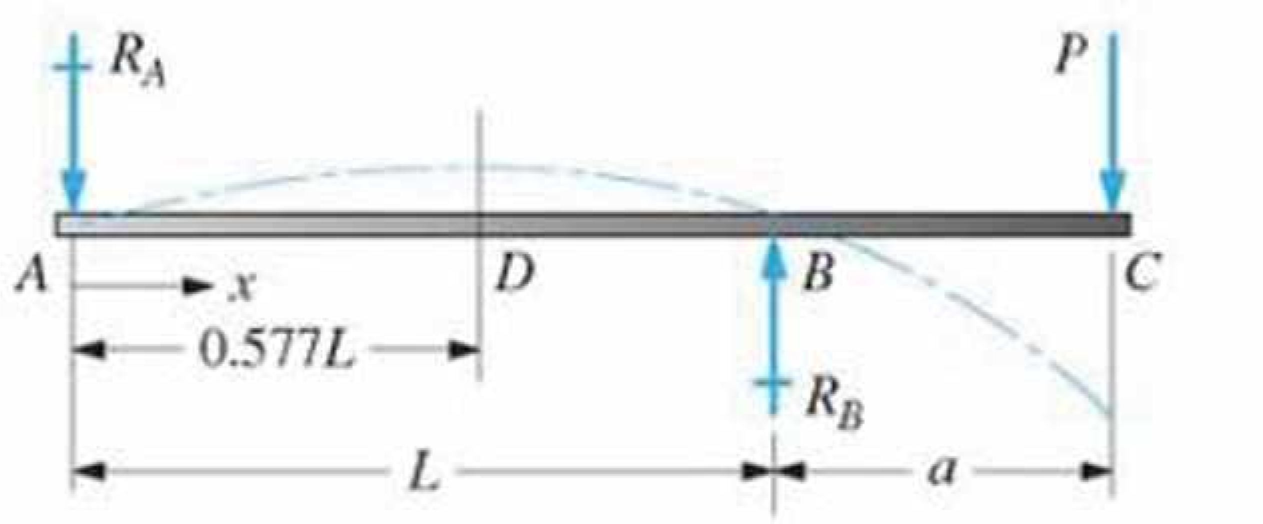
M_B = momento concentrado en B

Entre A y B:

$$y = \frac{-M_B}{6EI}\left[\left(6a - \frac{3a^2}{L} - 2L\right)x - \frac{x^3}{L}\right]$$

Entre B y C:

$$y = \frac{M_B}{6EI}\left[3a^2 + 3x^2 - \frac{x^3}{L} - \left(2L + \frac{3a^2}{L}\right)x\right]$$



(*g*)

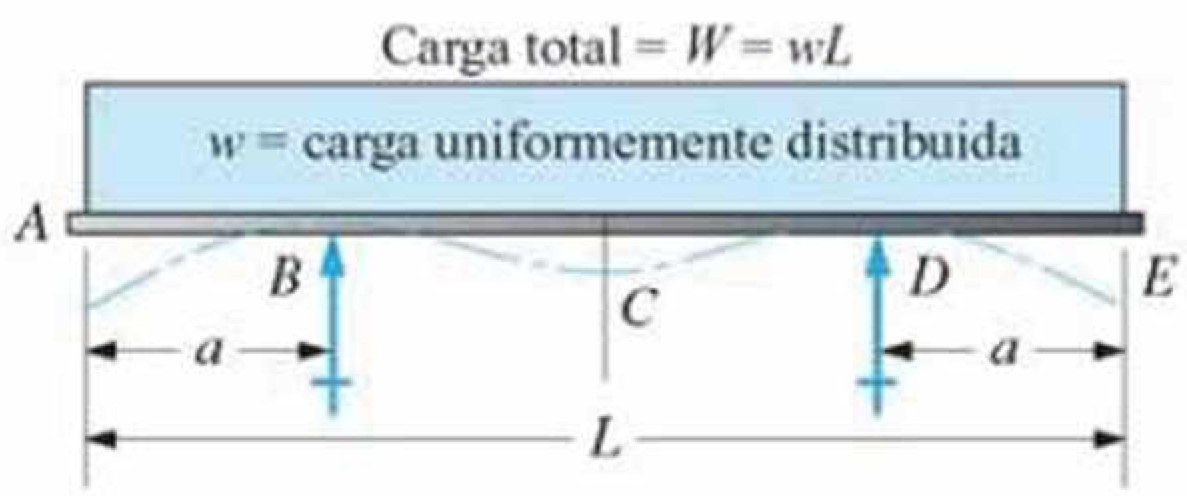
En extremo saliente C:

$$y_C = \frac{-Pa^2}{3EI}(L + a)$$

En D, deflexión máxima hacia arriba:

$$y_D = 0.06415\frac{PaL^2}{EI}$$

A–23 *(continuación)*



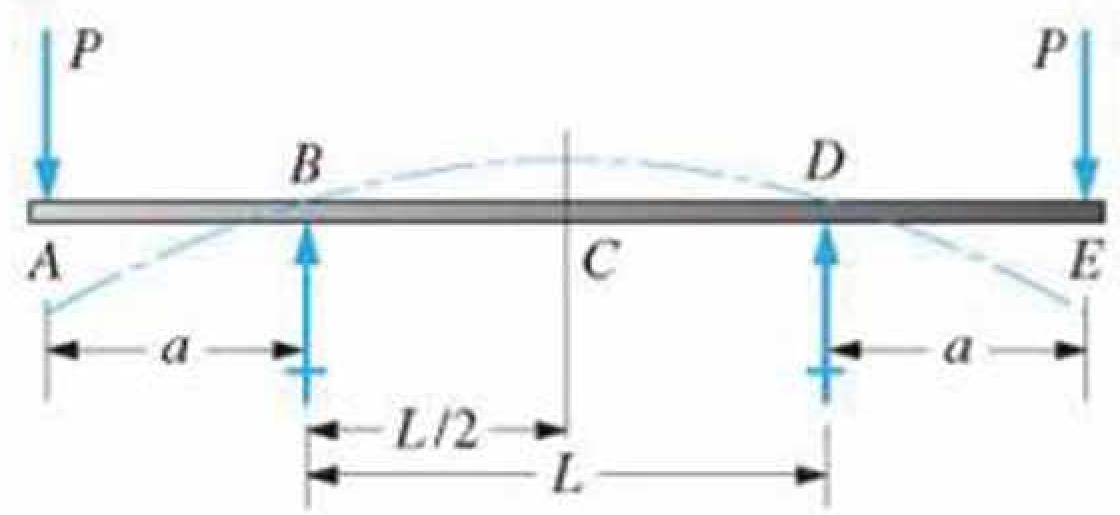
(*h*)

En el centro C:

$$y = \frac{-W(L - 2a)^3}{384EI}\left[\frac{5}{L}(L - 2a) - \frac{24}{L}\left(\frac{a^2}{L - 2a}\right)\right]$$

En los extremos A y E:

$$y = \frac{-W(L - 2a)^3 a}{24EIL}\left[-1 + 6\left(\frac{a}{L - 2a}\right)^2 + 3\left(\frac{a}{L - 2a}\right)^3\right]$$



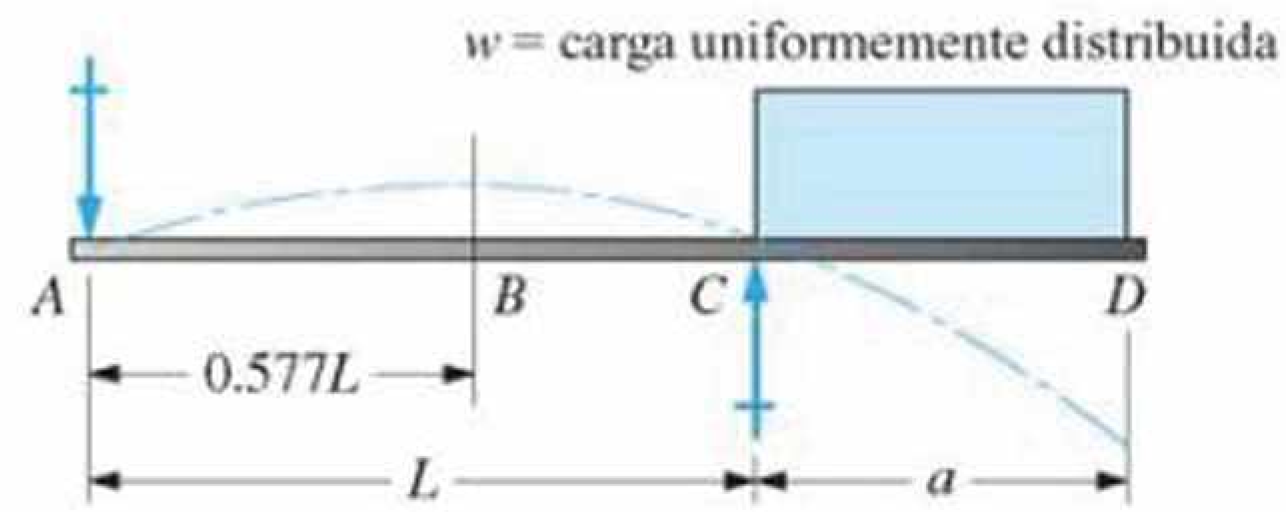
(*i*)

En el centro C:

$$y = \frac{PL^2 a}{8EI}$$

En los extremos A y E:

$$y = \frac{-Pa^2}{3EI}\left(a + \frac{3}{2}L\right)$$



(*j*)

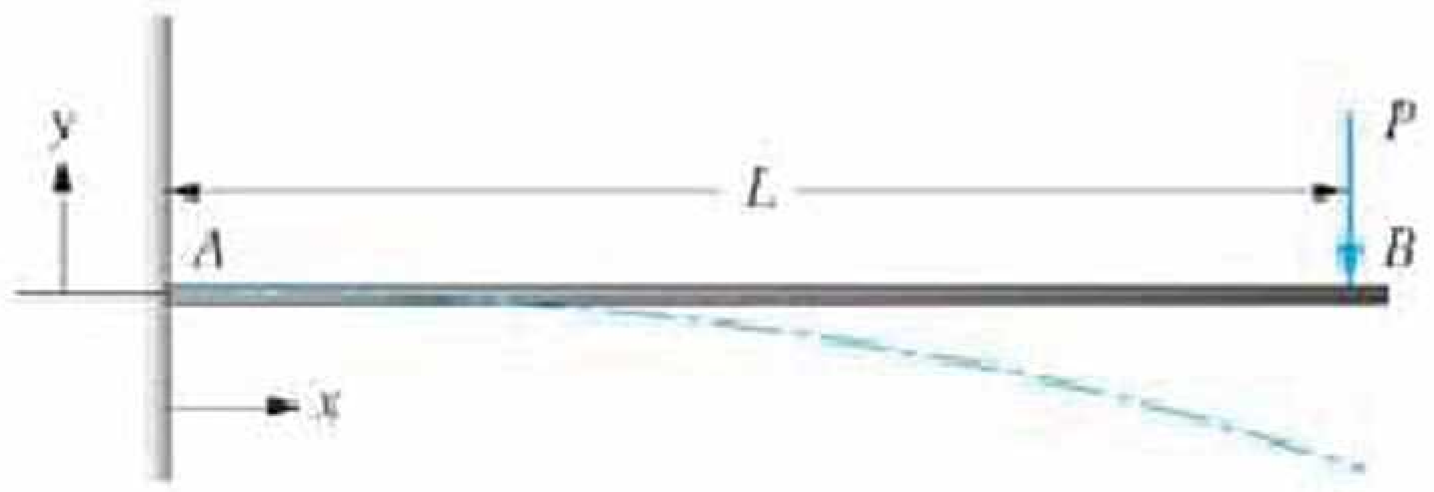
En B:

$$y = 0.03208\,\frac{wa^2L^2}{EI}$$

En el extremo D:

$$y = \frac{-wa^3}{24EI}(4L + 3a)$$

A–24 Fórmulas para determinar la deflexión de vigas en voladizo



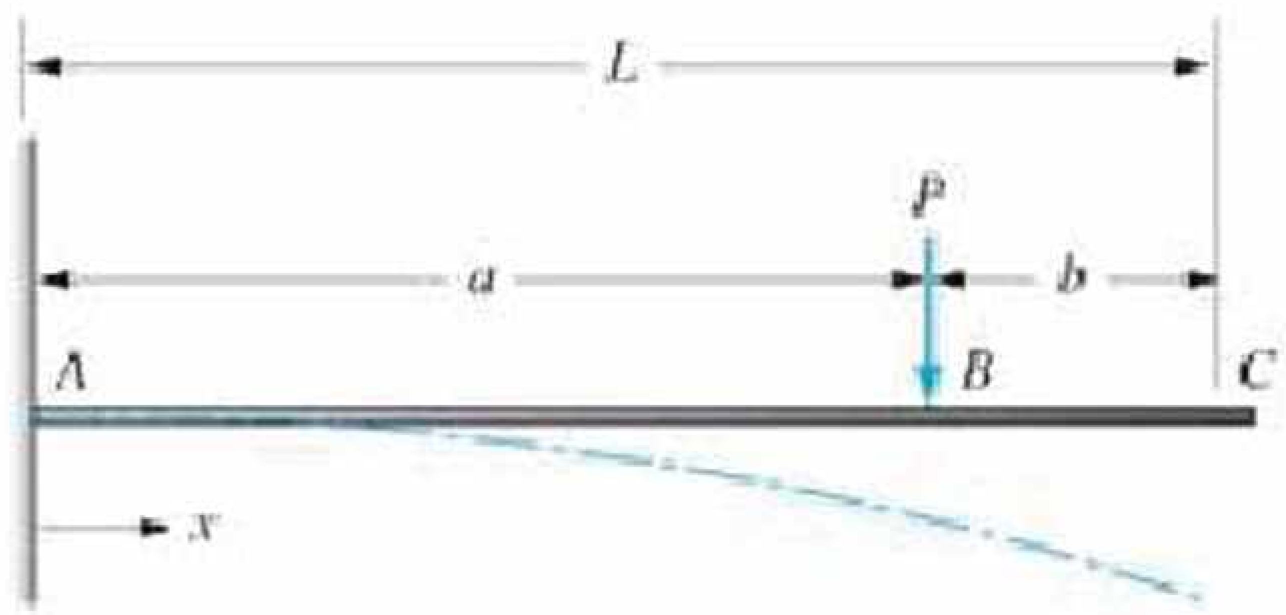
(a)

En el extremo B:

$$y_B = y_{\text{máx}} = \frac{-PL^3}{3EI}$$

Entre A y B:

$$y = \frac{-Px^2}{6EI}(3L - x)$$



(b)

En B donde actúa la carga:

$$y_B = \frac{-Pa^3}{3EI}$$

En el extremo C:

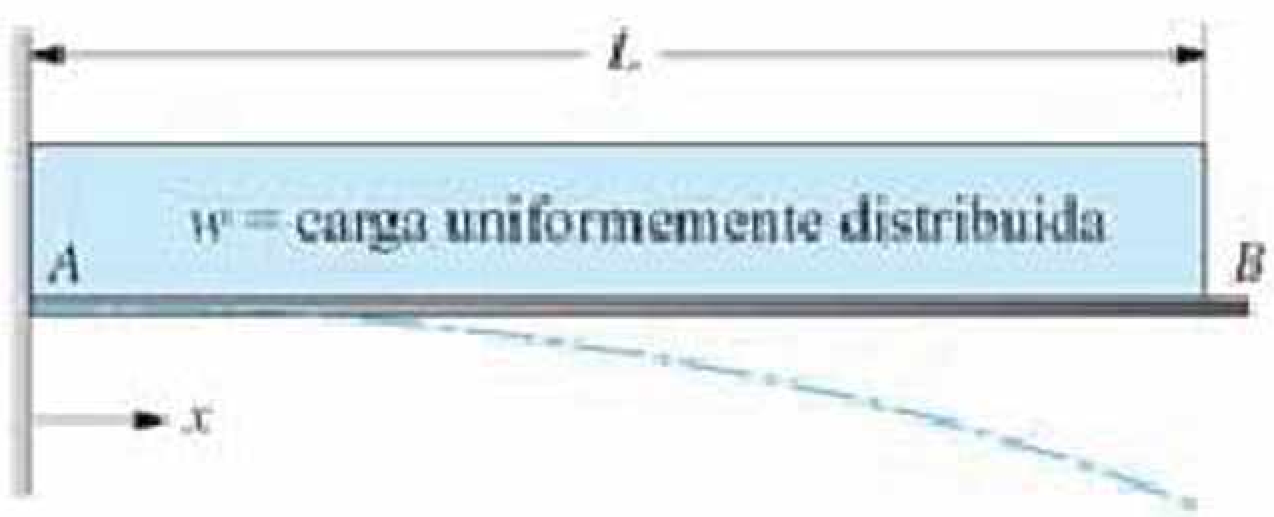
$$y_C = y_{\text{máx}} = \frac{-Pa^2}{6EI}(3L - a)$$

Entre A y B:

$$y = \frac{-Px^2}{6EI}(3a - x)$$

Entre B y C:

$$y = \frac{-Pa^2}{6EI}(3x - a)$$



(c)

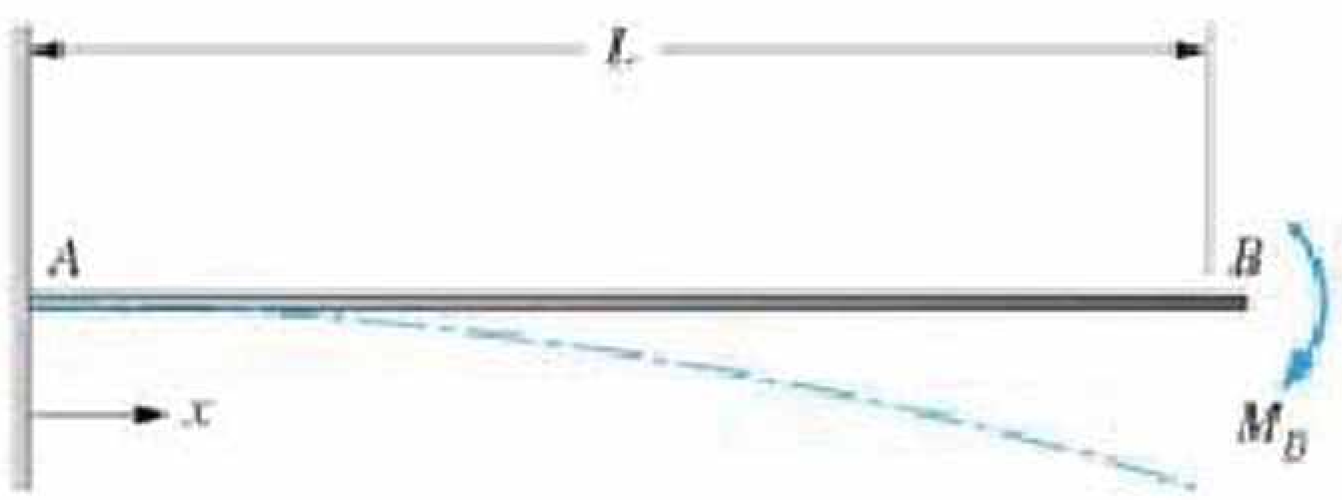
W = carga total = wL

En el extremo B:

$$y_B = y_{\text{máx}} = \frac{-WL^3}{8EI}$$

Entre A y B:

$$y = \frac{-Wx^2}{24EIL}[2L^2 + (2L - x)^2]$$



(d)

M_B = momento concentrado en el extremo

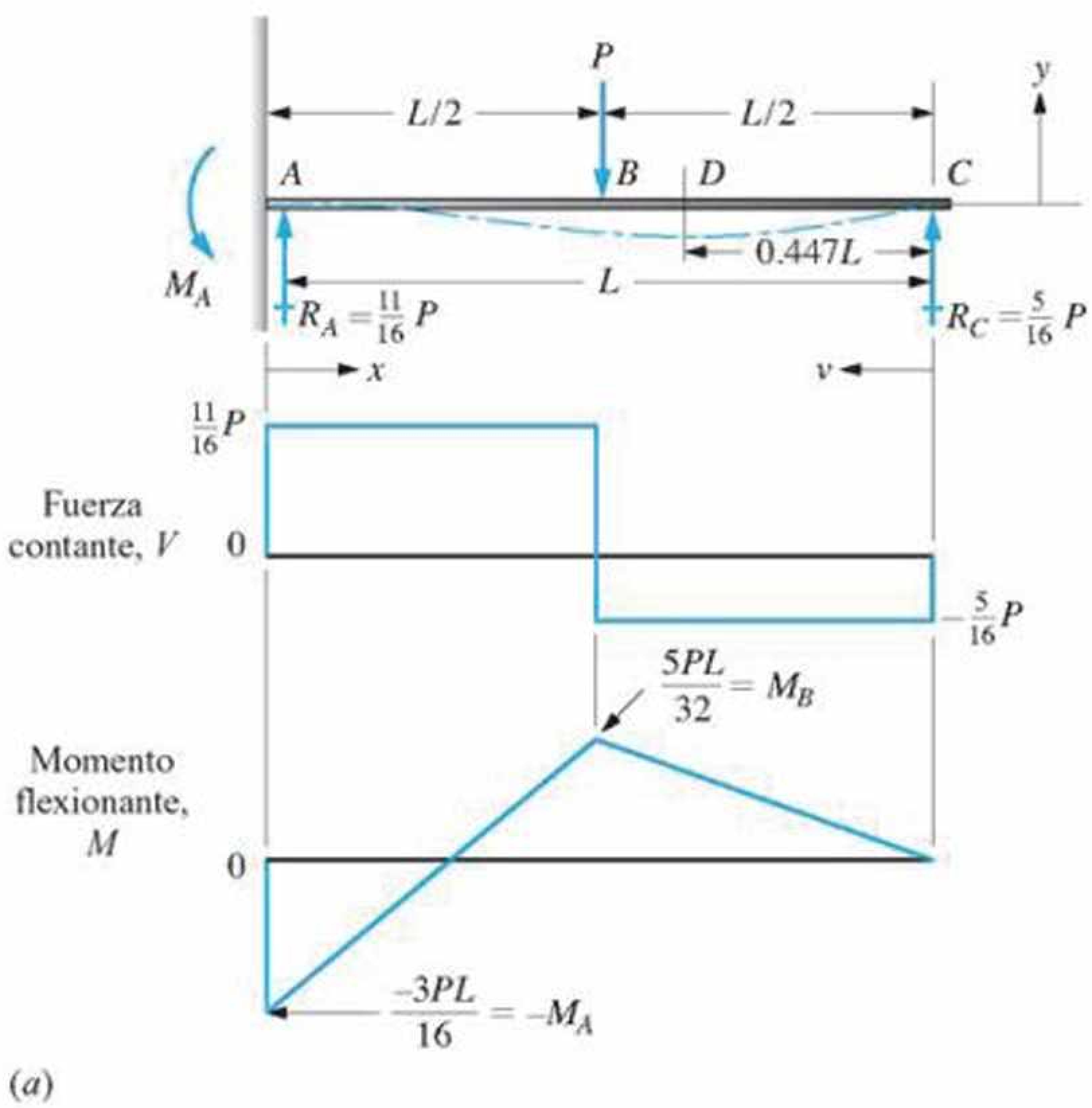
En el extremo B:

$$y_B = y_{\text{máx}} = \frac{-M_B L^2}{2EI}$$

Entre A y B:

$$y = \frac{-M_B x^2}{2EI}$$

A–25 Diagramas de vigas y fórmulas para determinar la deflexión de vigas estáticamente indeterminadas



(a)

Deflexiones

En B donde actúa la carga

$$y_B = \frac{-7}{768}\frac{PL^3}{EI}$$

$y_{máx}$ ocurre en $v = 0.447L$ en donde D:

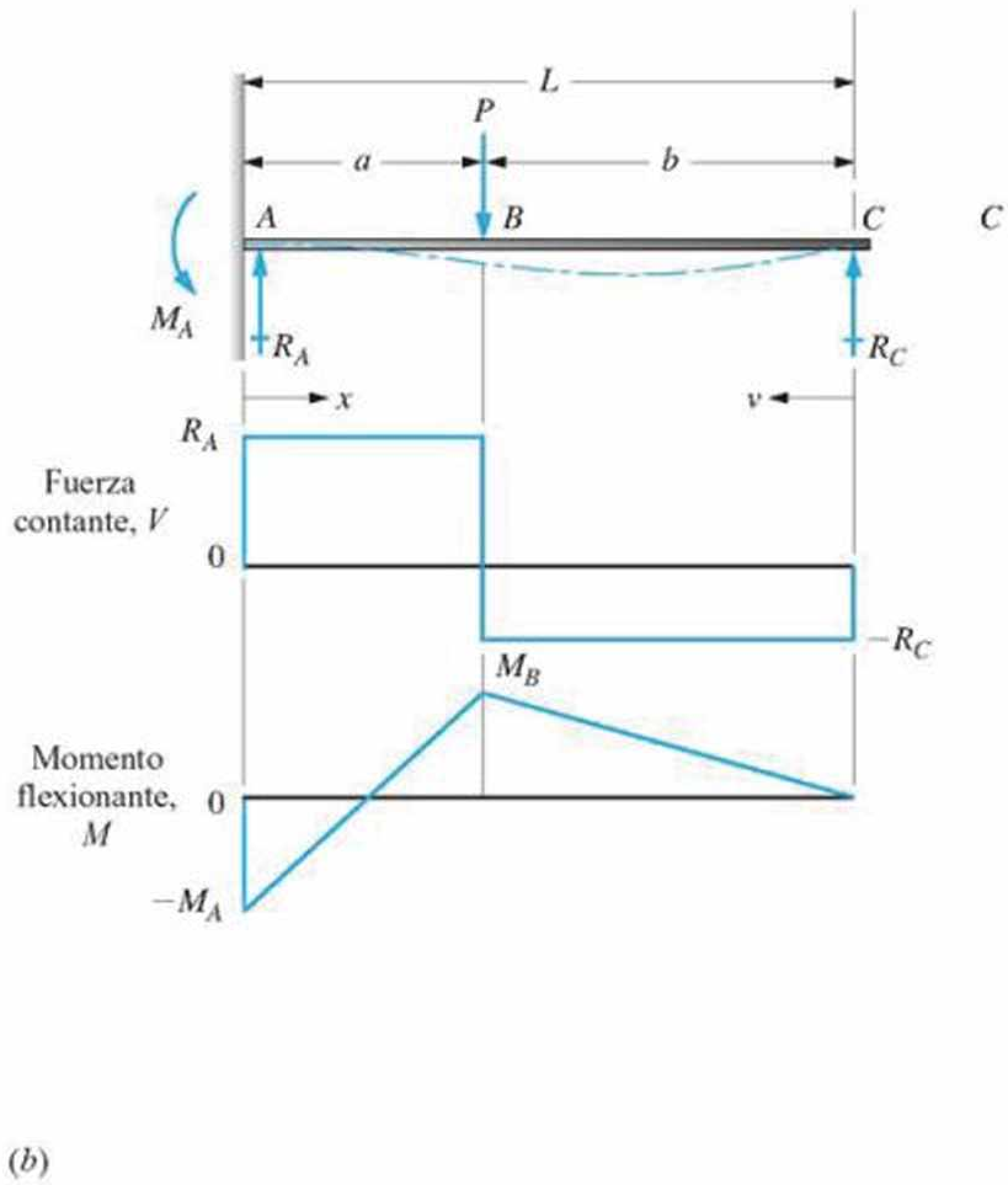
$$y_D = y_{máx} = \frac{-PL^3}{107EI}$$

Entre A y B:

$$y = \frac{-Px^2}{96EI}(9L - 11x)$$

Entre B y C:

$$y = \frac{-Pv}{96EI}(3L^2 - 5v^2)$$



(b)

Reacciones

$$R_A = \frac{Pb}{2L^3}(3L^2 - b^2)$$

$$R_C = \frac{Pa^2}{2L^3}(b + 2L)$$

Momentos

$$M_A = \frac{-Pab}{2L^2}(b + L)$$

$$M_B = \frac{Pa^2b}{2L^3}(b + 2L)$$

Deflexiones

En B donde actúa la carga

$$y_B = \frac{-Pa^3b^2}{12EIL^3}(3L + b)$$

Entre A y B:

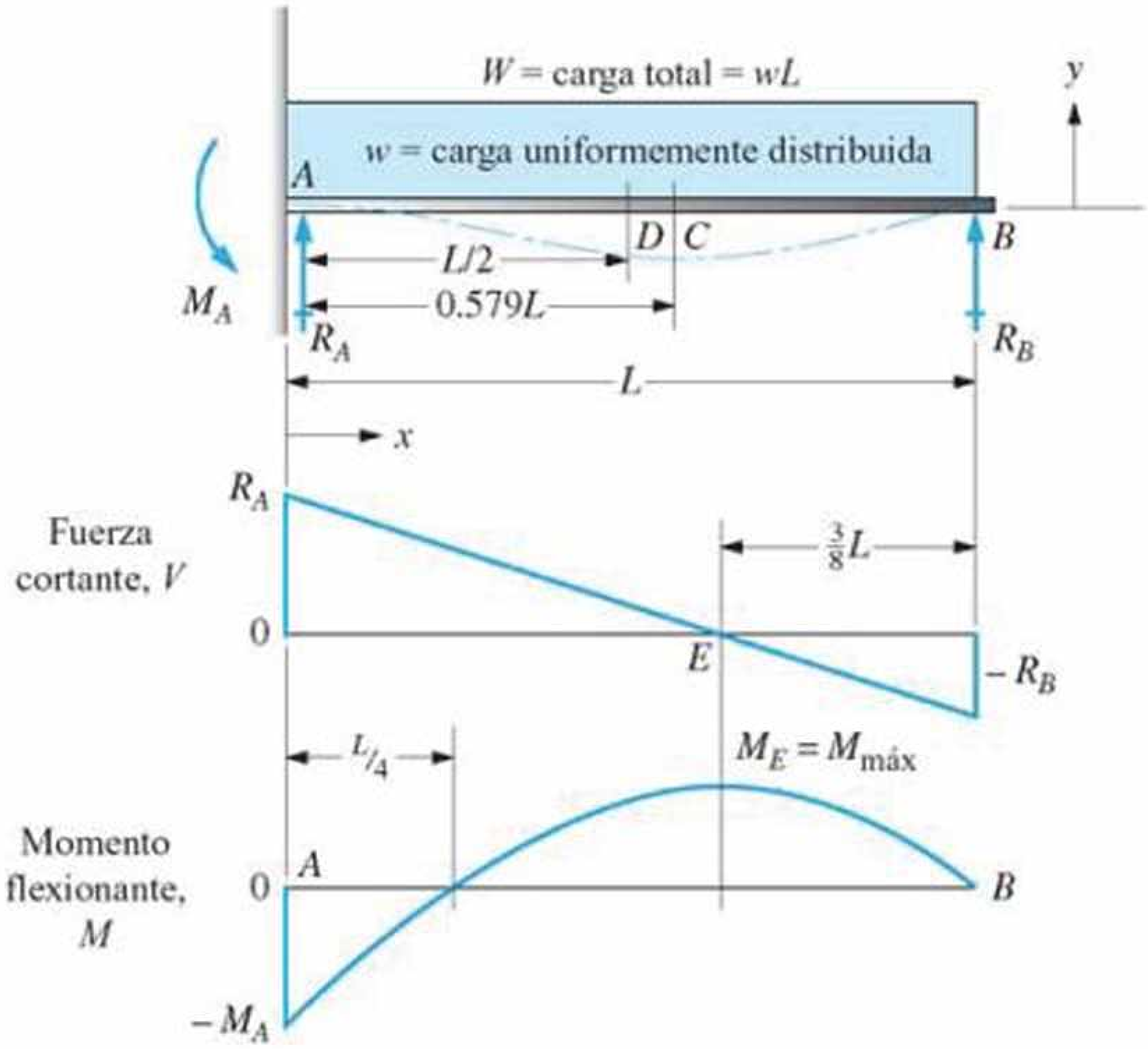
$$y = \frac{-Px^2b}{12EIL^3}(3C_1 - C_2x)$$

$$C_1 = aL(L + b);\ C_2 = (L + a)(L + b) + aL$$

Entre B y C:

$$y = \frac{-Pa^2v}{12EIL^3}[3L^2b - v^2(3L - a)]$$

A–25 *(continuación)*



(c)

Reacciones

$$R_A = \frac{5}{8}W$$

$$R_B = \frac{3}{8}W$$

Momentos

$$M_A = -0.125WL$$

$$M_E = 0.0703WL$$

Deflexiones

En C donde $x = 0.579$L

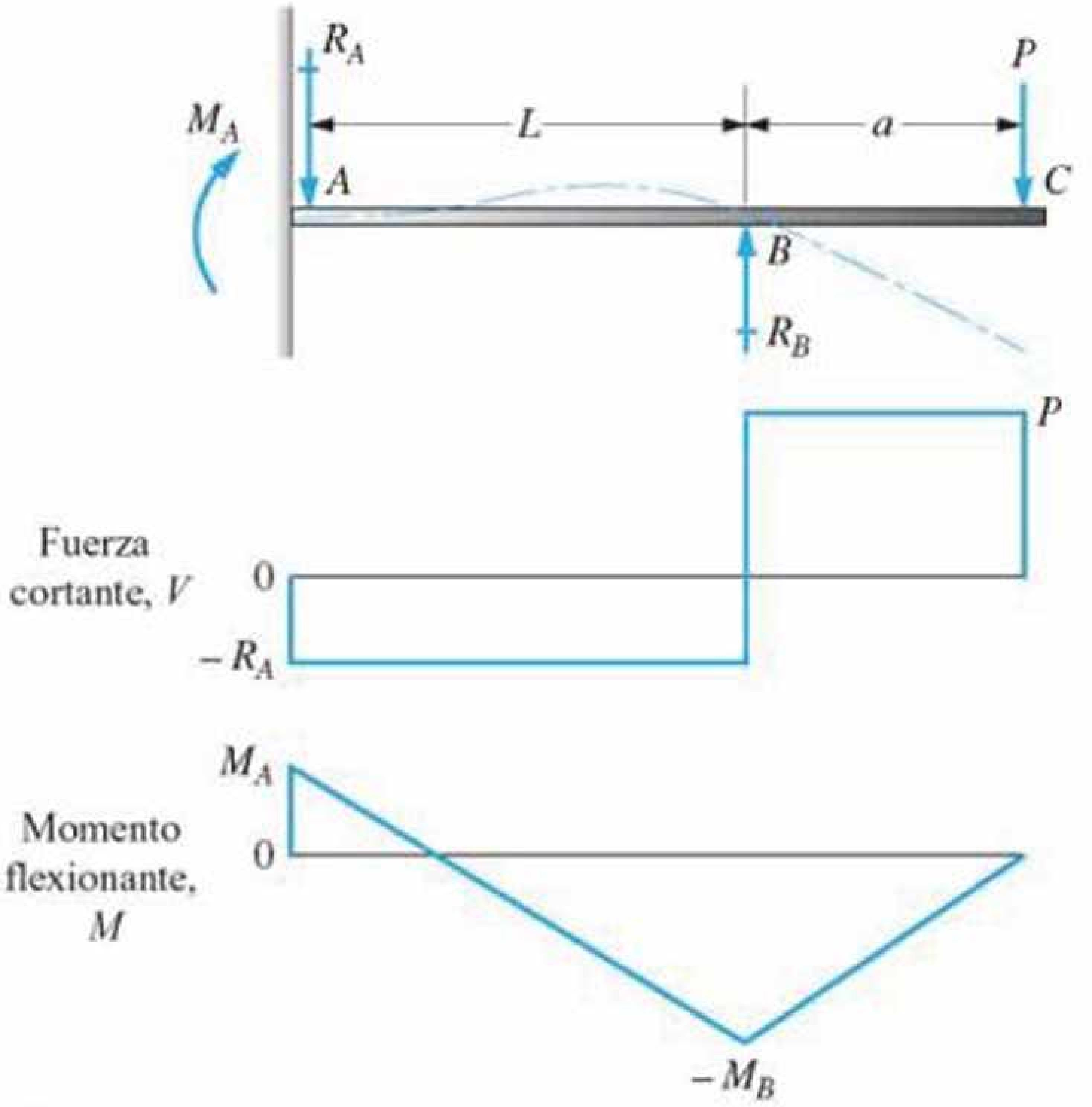
$$y_C = y_{máx} = \frac{-WL^3}{185EI}$$

En el centro D:

$$y_D = \frac{-WL^3}{192EI}$$

Entre A y B:

$$y = \frac{-Wx^2(L-x)}{48EIL}(3L-2x)$$



(d)

Reacciones

$$R_A = \frac{-3Pa}{2L}$$

$$R_B = P\left(1 + \frac{3a}{2L}\right)$$

Momentos

$$M_A = \frac{Pa}{2}$$

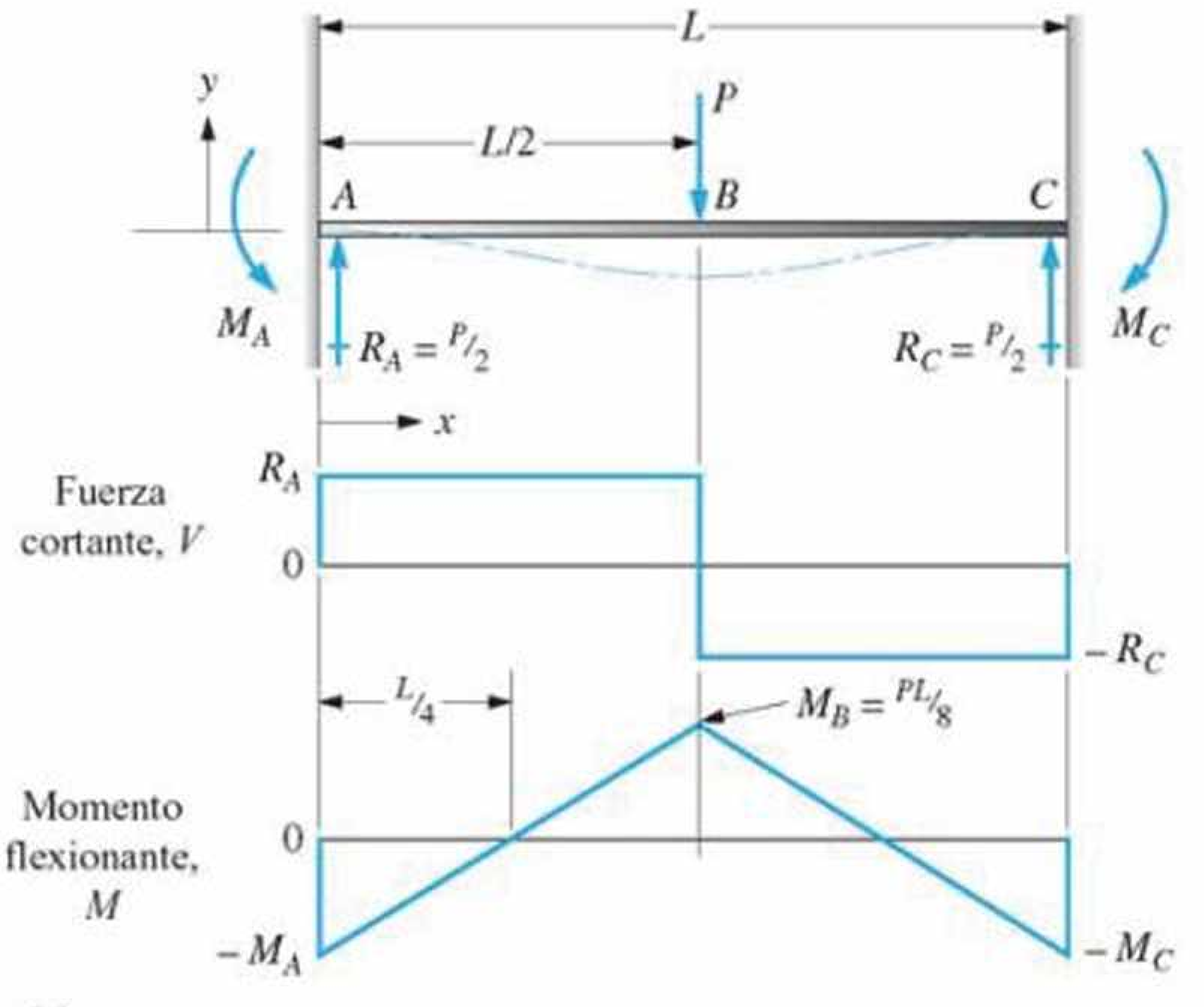
$$M_B = -Pa$$

Deflexión

En el extremo C:

$$y_C = \frac{-PL^3}{EI}\left(\frac{a^2}{4L^2} + \frac{a^3}{3L^3}\right)$$

A–25 *(continuación)*



(e)

Momentos

$$M_A = M_B = M_C = \frac{PL}{8}$$

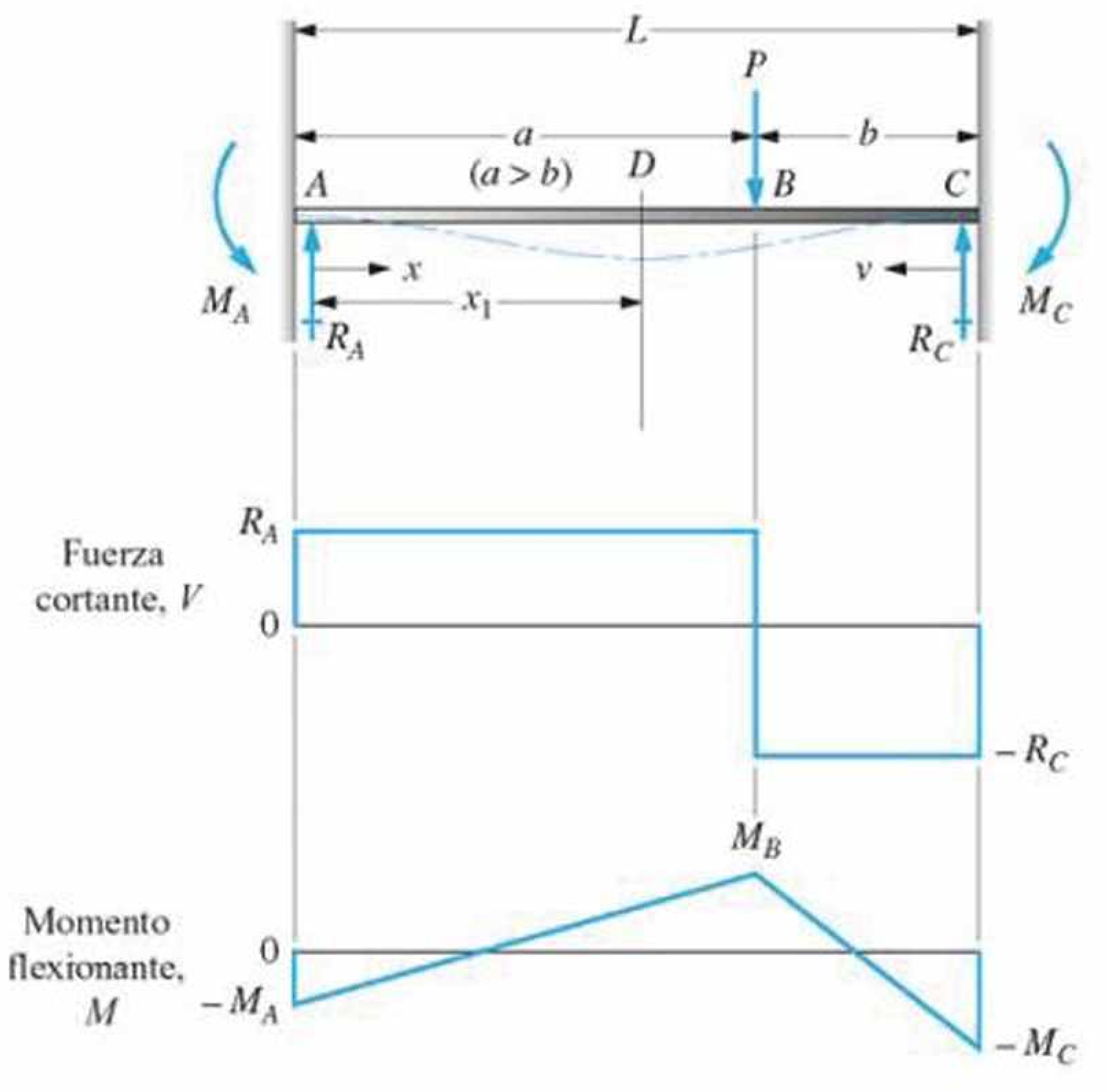
Deflexiones

En el centro B:

$$y_B = y_{máx} = \frac{-PL^3}{192EI}$$

Entre A y B:

$$y = \frac{-Px^2}{48EI}(3L - 4x)$$



(f)

Reacciones

$$R_A = \frac{Pb^2}{L^3}(3a + b)$$

$$R_C = \frac{Pa^2}{L^3}(3b + a)$$

Momentos

$$M_A = \frac{-Pab^2}{L^2}$$

$$M_B = \frac{2Pa^2b^2}{L^3}$$

$$M_C = \frac{-Pa^2b}{L^2}$$

Deflexiones

En B donde actúa la carga:

$$y_B = \frac{-Pa^3b^3}{3EIL^3}$$

En D donde $x_1 = \dfrac{2aL}{3a + b}$

$$y_D = y_{máx} = \frac{-2Pa^3b^2}{3EI(3a + b)^2}$$

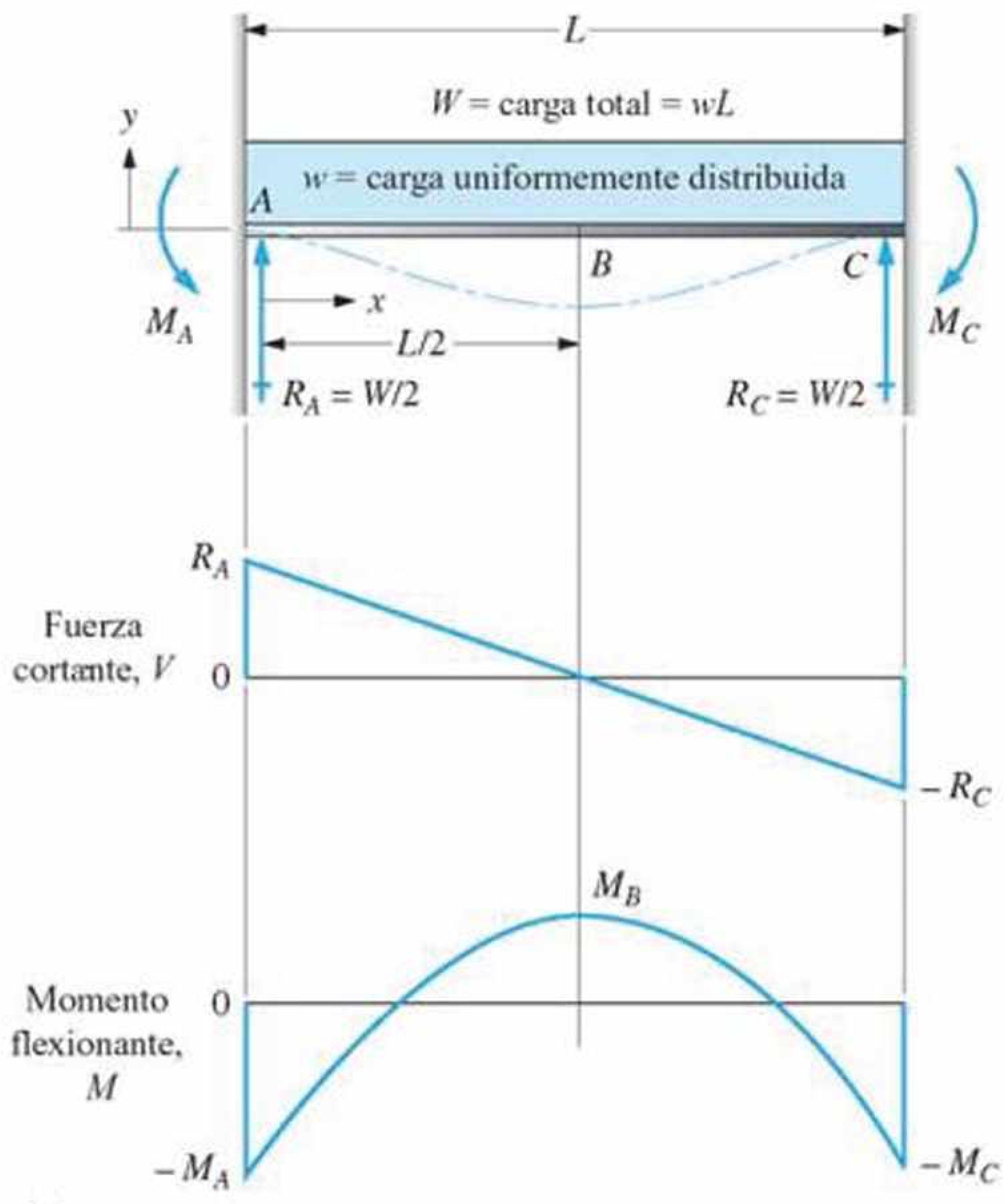
Entre A y B (el segmento más largo):

$$y = \frac{-Px^2b^2}{6EIL^3}[2a(L - x) + L(a - x)]$$

Entre B y C (el segmento más corto):

$$y = \frac{-Pv^2a^2}{6EIL^3}[2b(L - v) + L(b - v)]$$

A–25 *(continuación)*



(g)

Momentos

$$M_A = M_C = \frac{-WL}{12}$$

$$M_B = \frac{WL}{24}$$

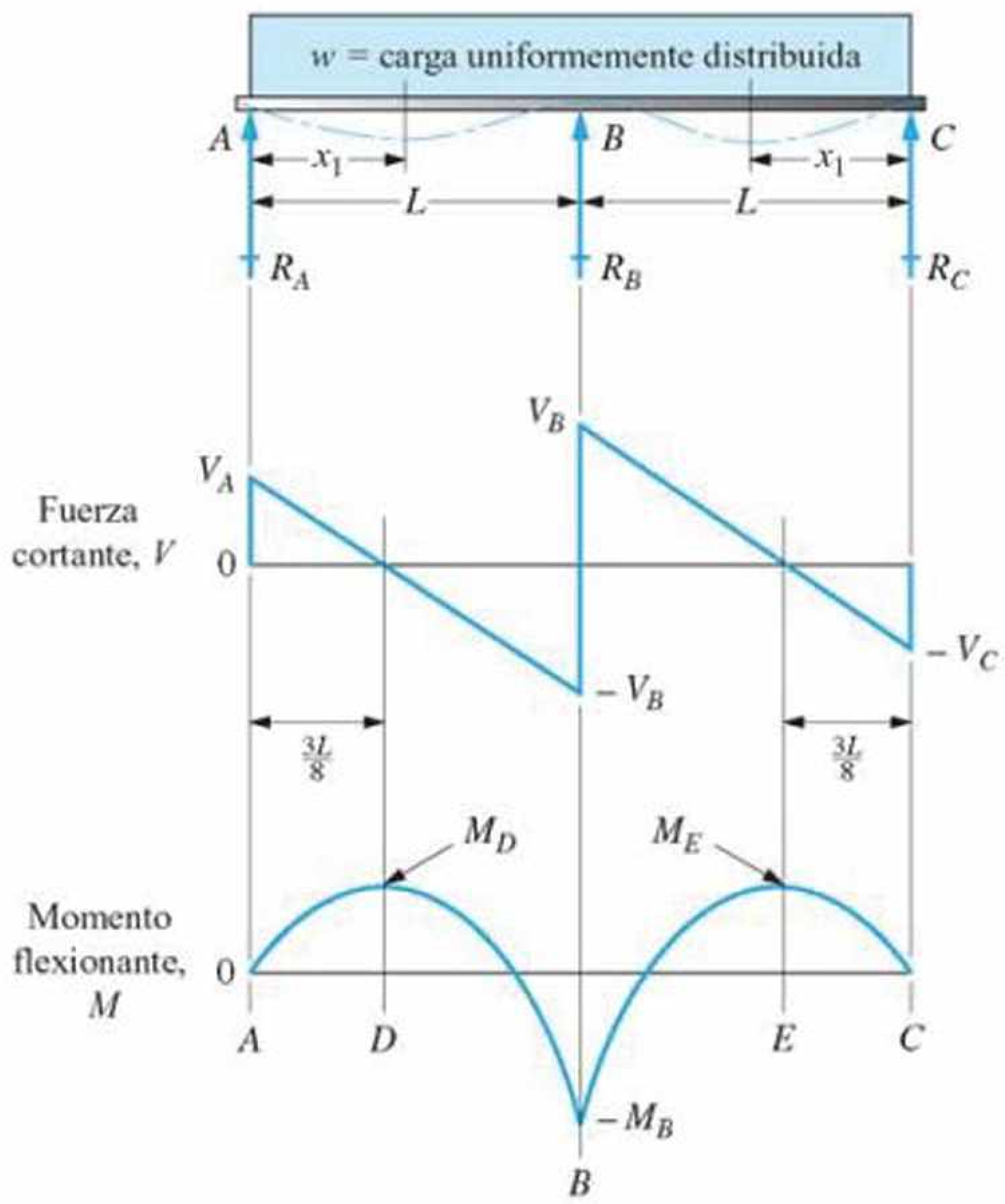
Deflexiones

En el centro B:

$$y_B = y_{\text{máx}} = \frac{-WL^3}{384EI}$$

Entre A y C:

$$y = \frac{-wx^2}{24EI}(L - x)^2$$



(h)

Reacciones

$$R_A = R_C = \frac{3wL}{8}$$

$$R_B = 1.25wL$$

Fuerzas cortantes

$$V_A = V_C = R_A = R_C = \frac{3wL}{8}$$

$$V_B = \frac{5wL}{8}$$

Momentos

$$M_D = M_E = 0.0703wL^2$$

$$M_B = -0.125wL^2$$

Deflexiones

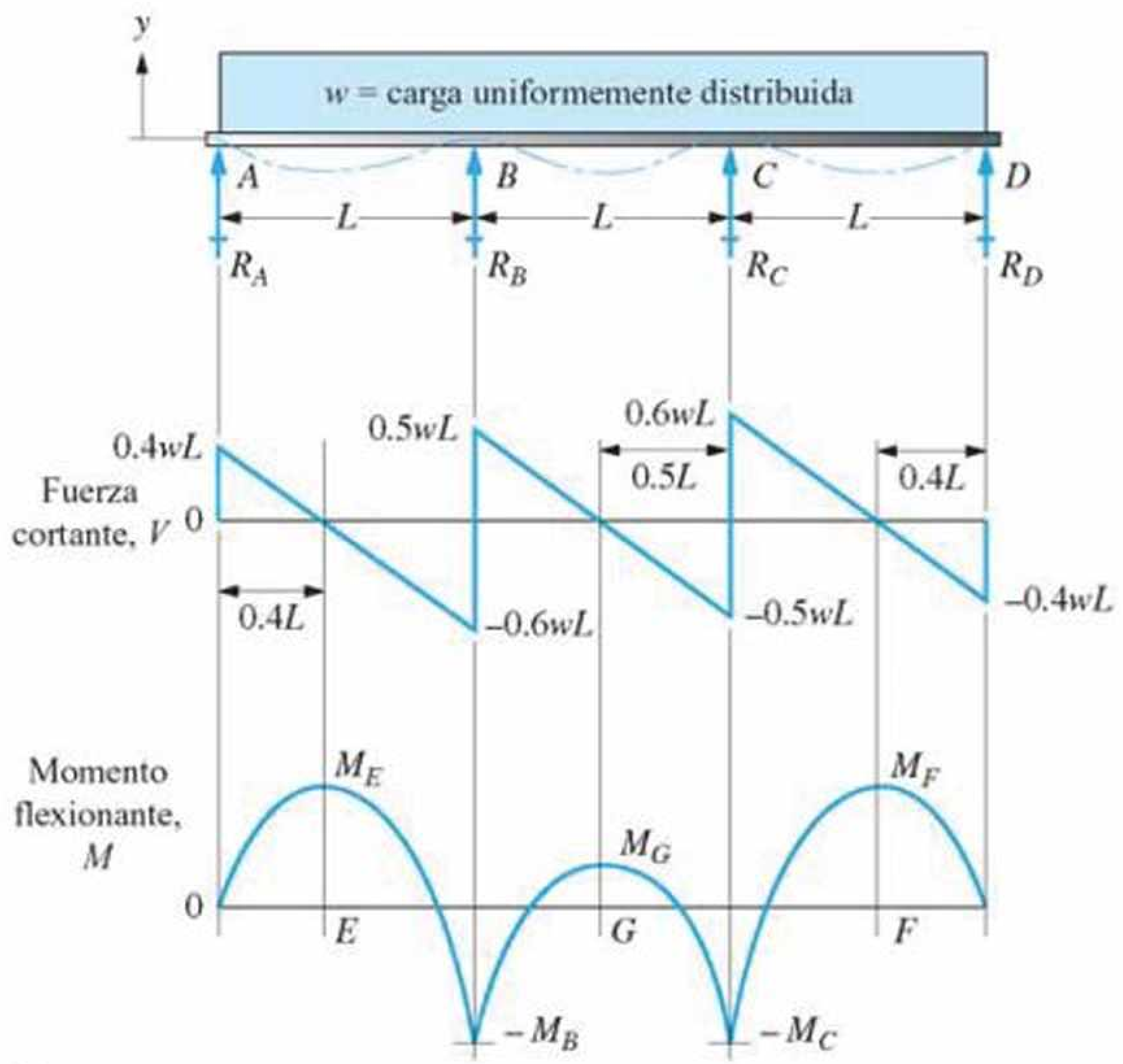
En $x_1 = 0.4215L$ desde A o C:

$$y_{\text{máx}} = \frac{-wL^4}{185EI}$$

Entre A y B:

$$y = \frac{-w}{48EI}(L^3x - 3Lx^3 + 2x^4)$$

A–25 *(continuación)*



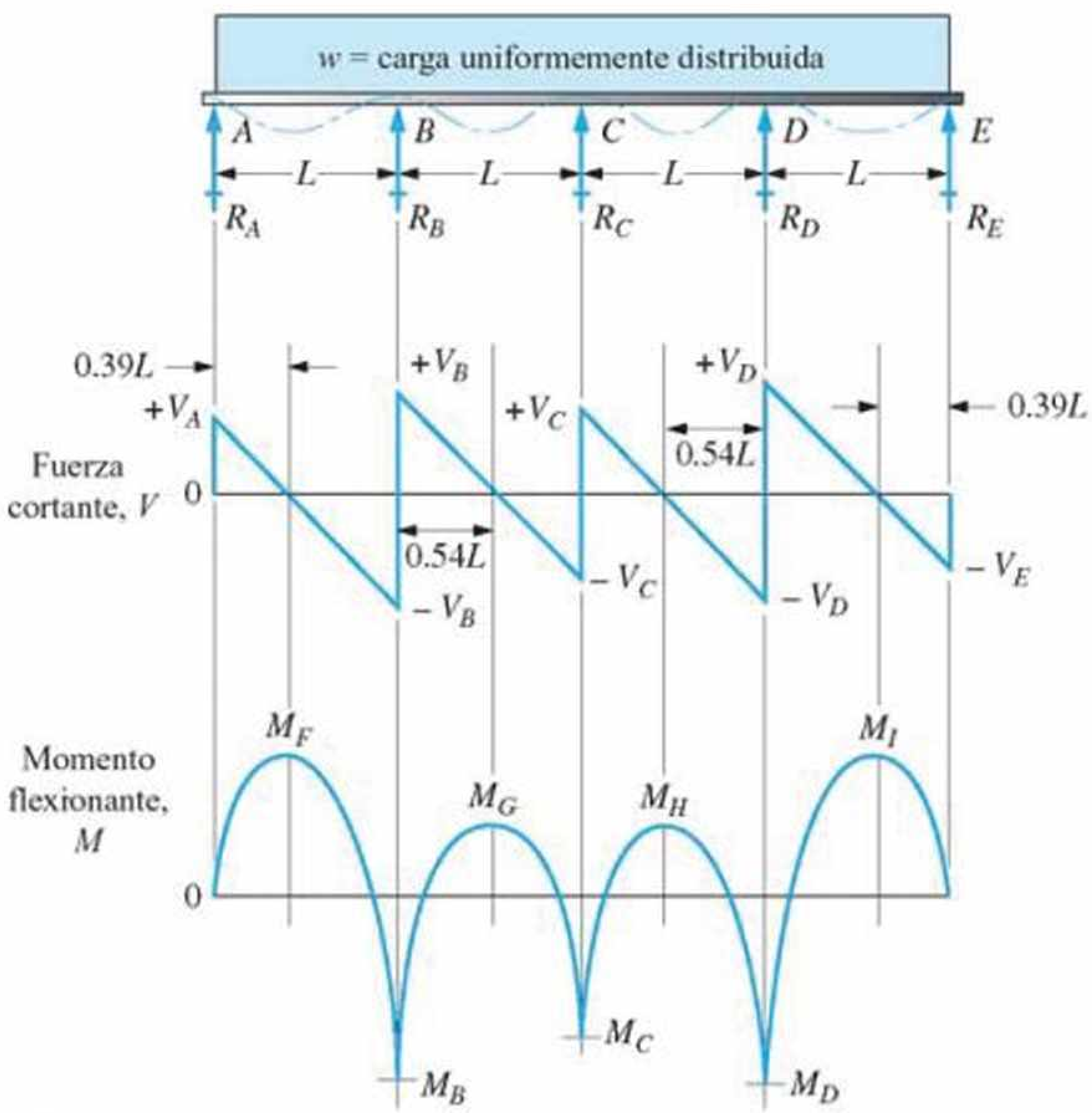
(*i*)

Reacciones

$$R_A = R_D = 0.4wL$$
$$R_B = R_C = 1.10wL$$

Momentos

$$M_E = M_F = 0.08wL^2$$
$$M_B = M_C = -0.10wL^2 = M_{\text{máx}}$$
$$M_G = 0.025wL^2$$



(*j*)

Reacciones

$$R_A = R_E = 0.393wL$$
$$R_B = R_D = 1.143wL$$
$$R_C = 0.928wL$$

Fuerzas cortantes

$$V_A = +0.393wL$$
$$-V_B = -0.607wL$$
$$+V_B = +0.536wL$$
$$-V_C = +0.464wL$$
$$+V_C = +0.464wL$$
$$-V_D = -0.536wL$$
$$+V_D = +0.607wL$$
$$-V_E = -0.393wL$$

Momentos

$$M_B = M_D = -0.1071wL^2 = M_{\text{máx}}$$
$$M_F = M_I = 0.0772wL^2$$
$$M_C = -0.0714wL^2$$
$$M_G = M_H = 0.0364wL^2$$

A–26 Factores de conversión

Masa Unidad SI estándar: Kilogramo (kg). Unidad equivalente $N \cdot s^2/m$.

$\frac{14.59\ kg}{slug}$ $\frac{32.174\ lb_m}{slug}$ $\frac{2.205\ lb_m}{kg}$ $\frac{453.6\ gramos}{lb_m}$ $\frac{2000\ lb_m}{ton_m}$ $\frac{1000\ kg}{ton_m\ métrica}$

Fuerza Unidad SI estándar: Newton (N). Unidad equivalente: $kg \cdot m/s^2$.

$\frac{4.448\ N}{lb_f}$ $\frac{10^5\ dinas}{N}$ $\frac{4.448 \times 10^5\ dinas}{lb_f}$ $\frac{224.8\ lb_f}{kN}$ $\frac{1000\ lb}{K}$

Longitud

$\frac{3.281\ ft}{m}$ $\frac{39.37\ in}{m}$ $\frac{12\ in}{ft}$ $\frac{25.4\ mm}{in}$ $\frac{1.609\ km}{mi}$ $\frac{5280\ ft}{mi}$

Área

$\frac{144\ in^2}{pie^2}$ $\frac{10.76\ pie^2}{m^2}$ $\frac{645.2\ mm^2}{in^2}$ $\frac{10^6\ mm^2}{m^2}$ $\frac{43{,}560\ pie^2}{acre}$ $\frac{10^4\ m^2}{hectárea}$

Volumen

$\frac{1728\ in^3}{pie^3}$ $\frac{231\ in^3}{gal}$ $\frac{7.48\ gal}{pie^3}$ $\frac{264\ gal}{m^3}$ $\frac{3.785\ L}{gal}$ $\frac{35.3\ pie^3}{m^3}$

Módulo de sección

$\frac{1.639 \times 10^4\ mm^3}{in^3}$ $\frac{10^9\ mm^3}{m^3}$

Momento de inercia o segundo momento de un área

$\frac{4.162 \times 10^5\ mm^4}{in^4}$ $\frac{10^{12}\ mm^4}{m^4}$

Densidad (masa/unidad de volumen)

$\frac{515.4\ kg/m^3}{slug/pie^3}$ $\frac{1000\ kg/m^3}{gramo/cm^3}$ $\frac{32.17\ lb_m/pie^3}{slug/pie^3}$ $\frac{16.018\ kg/m^3}{lb_m/pie^3}$

Peso específico (peso/unidad de volumen)

$\frac{157.1\ N/m^3}{lb_f/pie^3}$ $\frac{1728\ lb/ft^3}{lb/in^3}$

Momento flexionante o par de torsión

$\frac{8.851\ lb \cdot in}{N \cdot m}$ $\frac{1.356\ N \cdot m}{lb \cdot ft}$

Presión, esfuerzo o carga Unidad SI estándar: Pascal (Pa). Unidades equivalentes: N/m^2 o $kg/m \cdot s^2$.

$\frac{144\ lb/pie^2}{lb/in^2}$ $\frac{47.88\ Pa}{lb/pie^2}$ $\frac{6895\ Pa}{lb/in^2}$ $\frac{1\ Pa}{N/m^2}$ $\frac{6.895\ MPa}{ksi}$

Energía Unidad SI estándar: Joule (J). Unidades equivalentes: $N \cdot m$ o $kg \cdot m^2/s^2$.

$\frac{1.356\ J}{lb \cdot ft}$ $\frac{1.0\ J}{N \cdot m}$ $\frac{8.85\ lb \cdot in}{J}$ $\frac{1.055\ kJ}{Btu}$ $\frac{3.600\ kJ}{W \cdot hr}$ $\frac{778\ ft \cdot lb}{Btu}$

Potencia Unidad SI estándar: Watt (W). Unidad equivalente: J/s o $N \cdot m/s$.

$\frac{745.7\ W}{hp}$ $\frac{1.0\ W}{N \cdot m/s}$ $\frac{550\ lb \cdot ft/s}{hp}$ $\frac{1.356\ W}{lb \cdot ft/s}$ $\frac{3.412\ Btu/h}{W}$ $\frac{1.341\ hp}{kW}$

Procedimiento general de aplicación de los factores de conversión. Disponga el factor de conversión de la tabla de modo que, cuando se multiplique por la cantidad dada, las unidades originales se eliminen y queden las unidades deseadas. Consulte los ejemplos en la página siguiente.

Ejemplo 1. Convierta un esfuerzo de 36 ksi en MPa.

$$\sigma = 36\,\text{ksi} \times \frac{6.895\ \text{MPa}}{\text{ksi}} = 248\ \text{MPa}$$

Ejemplo 2. Convierta un esfuerzo de 1272 MPa en ksi.

$$\sigma = 1272\ \text{MPa} \times \frac{1.0\ \text{ksi}}{6.895\ \text{MPa}} = 184\ \text{ksi}$$

A–27 Repaso de los fundamentos de estática.

Introducción

El estudio de la resistencia de materiales depende del conocimiento preciso de las fuerzas que actúan en el miembro de carga que se va a analizar o a diseñar.

Se espera que los lectores de este libro hayan completado el estudio de un curso de *estática*, donde se utilizan los principios de mecánica física para determinar las fuerzas y momentos que actúan en los miembros de una estructura o máquina.

A continuación se presenta un repaso breve de los principios de estática para que los lectores recuerden los principios fundamentales y las técnicas de solución de problemas.

Fuerzas

Una fuerza es un empujón o tirón aplicado a una estructura o a uno de sus miembros. Si la fuerza tiende a desprender un miembro, entonces se trata de una *fuerza de tensión*; si la fuerza tiende a aplastar el miembro se trata de una *fuerza de compresión*. Consulte la figura A–27 para ejemplos de estas clases de fuerzas aplicadas alineadas con el eje de los miembros. Éstas se llaman *fuerzas axiales*.

Las fuerzas en miembros que se encuentran en equilibrio estático siempre se equilibran de modo que el miembro no se moverá. Por lo tanto, en los dos casos mostrados en la figura A–27–1, las dos fuerzas axiales, F, son iguales en magnitud pero actúan en direcciones opuestas, por lo que se equilibran. También deberá observar que cualquier parte de estos miembros experimenta una *fuerza interna* igual a la fuerza externamente aplicada, F. La figura A–27–2 demuestra este principio ilustrando una parte del miembro sometido a tensión cortado en una parte cualquiera entre sus extremos. La fuerza que actúa a la izquierda es la fuerza externamente aplicada, F. La fuerza que actúa a la derecha es la fuerza interna total que actúa en el material del miembro a través de su sección transversal.

Momentos

Un momento es la tendencia de una fuerza a hacer *girar* un miembro con respecto a algún punto o eje. La figura A–27–3 muestra dos ejemplos. Cada una de las fuerzas mostradas tendería a hacer girar al miembro en el cual actúan con respecto al punto identificado como A.

La magnitud del momento de una fuerza es el producto de la fuerza por la distancia perpendicular de su línea de acción al punto con respecto al cual se está calculando el momento. Es decir,

$$M = \text{Fuerza por distancia} = F \times d$$

En la figura se observa que la dirección es en el sentido de las manecillas del reloj o contrario a éstas.

FIGURA A–27–1
Tipos de fuerzas axiales.

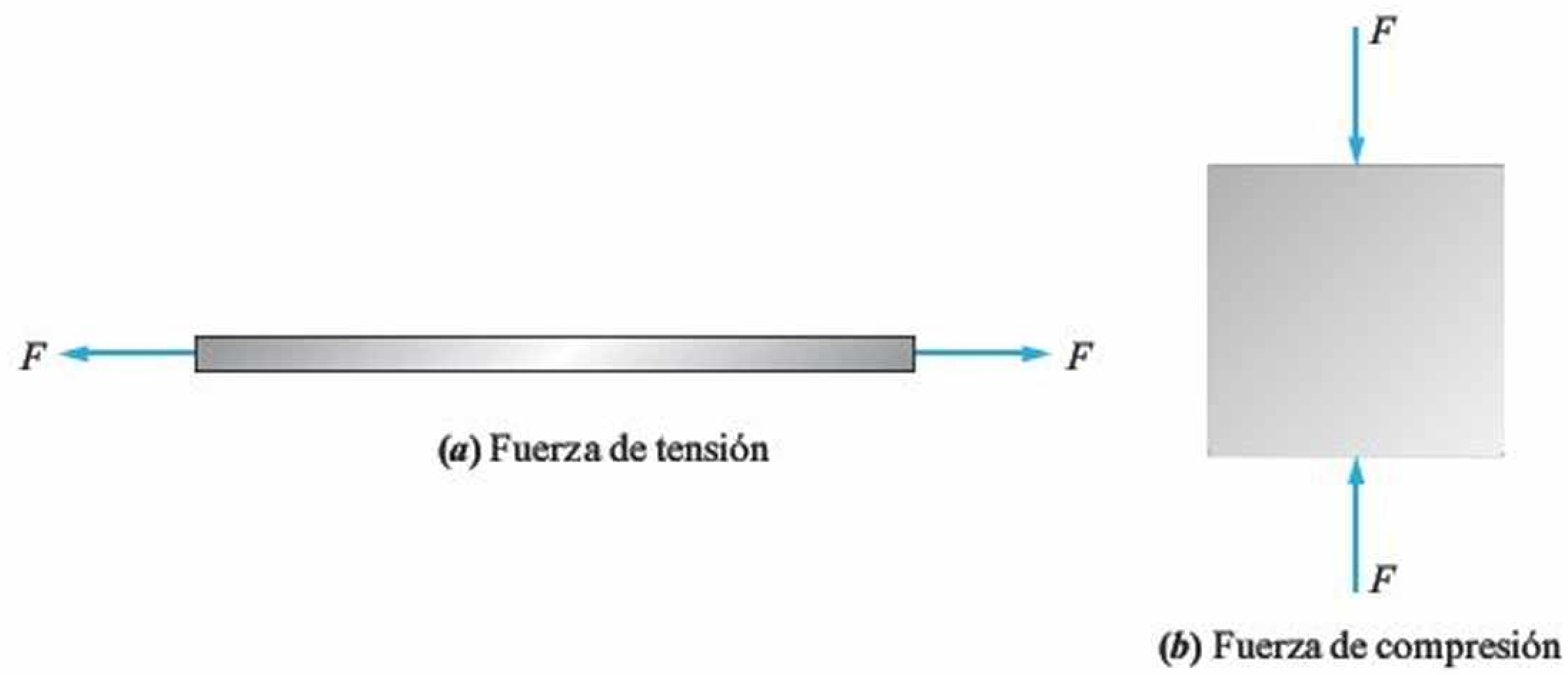
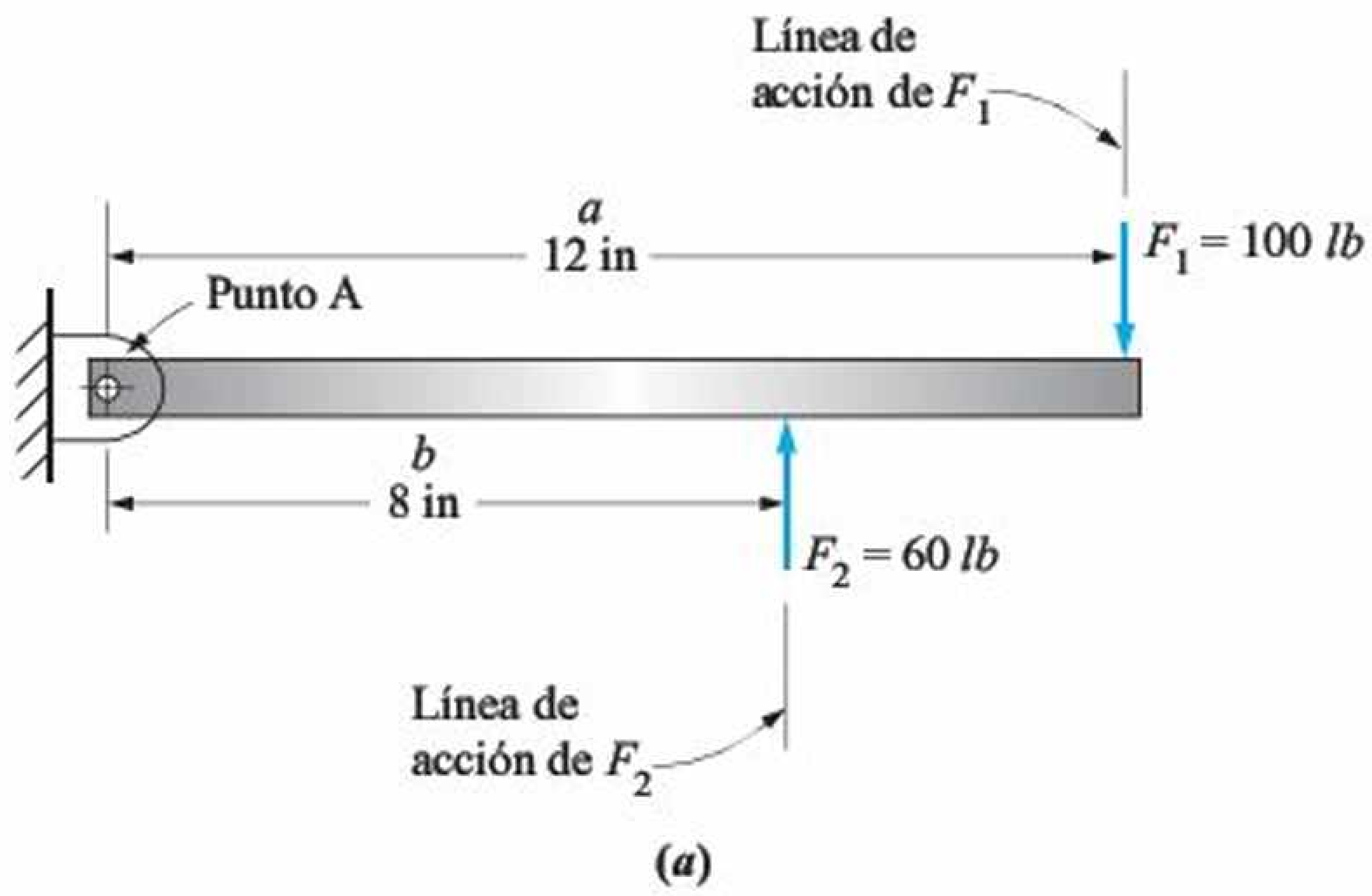
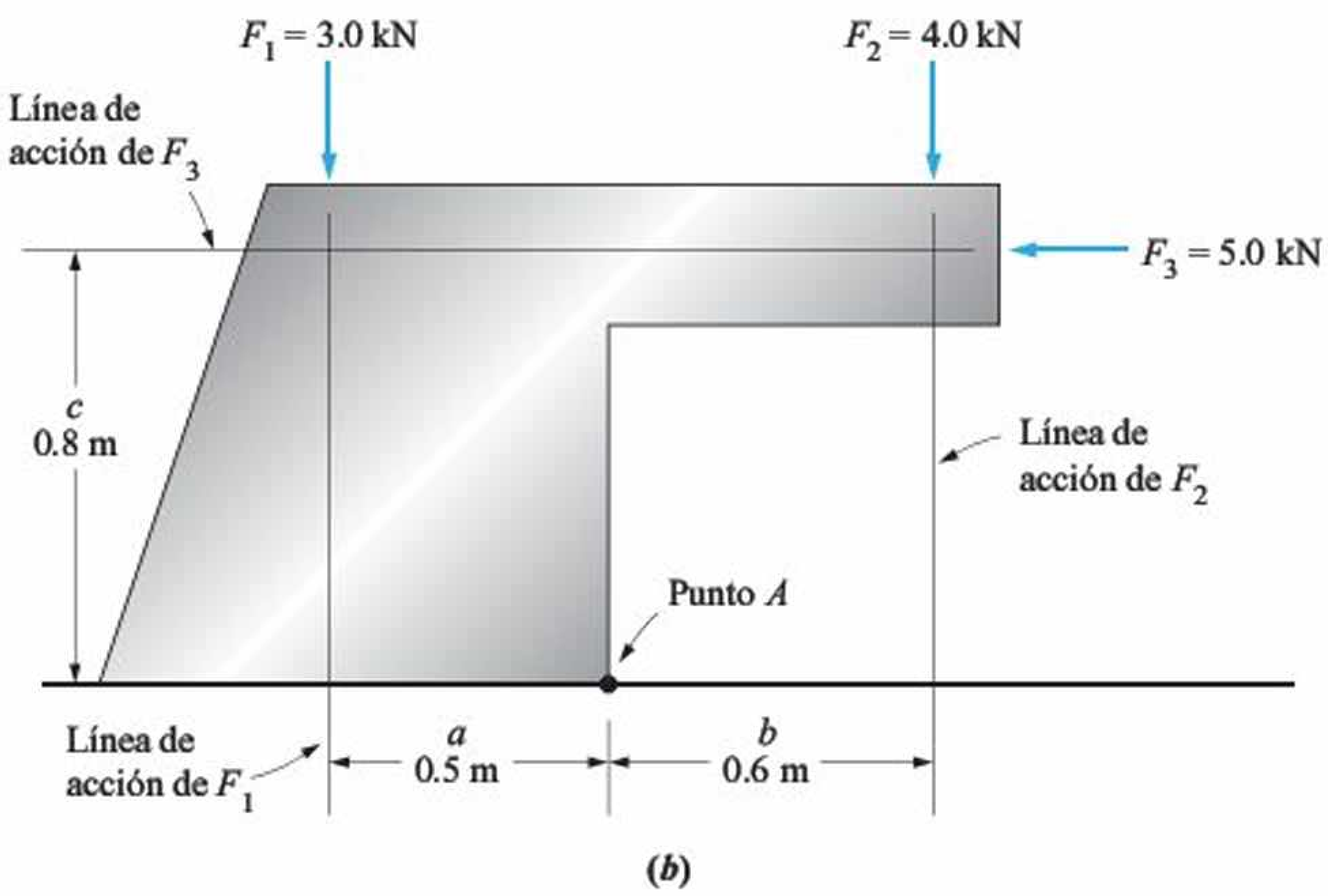


FIGURA A–27–2
Fuerza interna.



FIGURA A–27–3
Ilustraciones de momentos.





Ejemplo de la figura A–27–3(A)

Momento con respecto a A producido por F_1: $M_A = F_1 \times a = (100\ \text{lb})(12\ \text{in}) = 1200\ \text{lb·in}$ En el sentido de las manecillas del reloj
Momento con respecto a A producido por F_2: $M_A = F_2 \times b = (60\ \text{lb})(8\ \text{in}) = 480\ \text{lb·in}) = 480$ lb·in En sentido contrario al de las manecillas del reloj

Ejemplo de la figura A–27–3(B)

Momento con respecto a A producido por F_1: $M_A = F_1 \times a = (3.0\ \text{kN})(0.5\ \text{m}) = 1.5\ \text{kN·m}$ En sentido contrario al de las manecillas del reloj
Momento con respecto a A producido por F_2: $M_A = F_2 \times b = (4.0\ \text{kN})(0.6\ \text{m}) = 2.4\ \text{kN·m}$ En el sentido de las manecillas del reloj
Momento con respecto a A producido por F_3: $M_A = F_3 \times c = (5.0\ \text{kN})(0.8\ \text{m}) = 4.0\ \text{kN·m}$ En sentido contrario al de las manecillas del reloj

Diagramas de cuerpo libre

La habilidad de trazar un diagrama de cuerpo libre completo de una estructura y sus miembros es un elemento esencial del análisis estático. Debe mostrar todas las fuerzas y momentos externamente aplicados y determinar todas las fuerzas y momentos de reacción que harán que la estructura esté en equilibrio.

Ejemplo de la figura A–27–4

Muestre el diagrama de cuerpo libre de la estructura completa y de cada uno de sus dos miembros. La fuerza aplicada es F_1 y actúa perpendicular al miembro BC.

Vea la figura A–27–5 para el resultado. A continuación se resumen los puntos importantes.

a. La estructura se compone de los miembros AB y BC que están conectados por una junta de pasador en B. AB está conectado al apoyo en pasador en A. BC está conectado al apoyo de pasador en C. Las juntas de pasador producen una fuerza de reacción en cualquier dirección pero no impiden la rotación. Normalmente trabajamos con las componentes horizontal y vertical de las fuerzas de reacción producidas en una junta de pasador. Por consiguiente, en la figura A–27–5(a) mostramos las dos componentes, A_x y A_y en A. Asimismo, mostramos C_x y C_y en C.

b. La figura A–27–5(b) es el diagrama de cuerpo libre del miembro AB. Verá que el miembro se verá sometido a tensión por la acción de las fuerzas aplicadas. El pasador en B tira hacia abajo y hacia la derecha. Por consiguiente, el pasador en A debe tirar hacia arriba y hacia la izquierda para mantener AB en equilibrio.

c. Además recordará que el miembro AB es un ejemplo de un *miembro sometido a dos fuerzas* porque está cargado sólo por conductos de las juntas de pasador. Las fuerzas resultantes en el miembro sometido a dos fuerzas actúan a lo largo de la línea entre los

FIGURA A–27–4
Estructura de soporte.

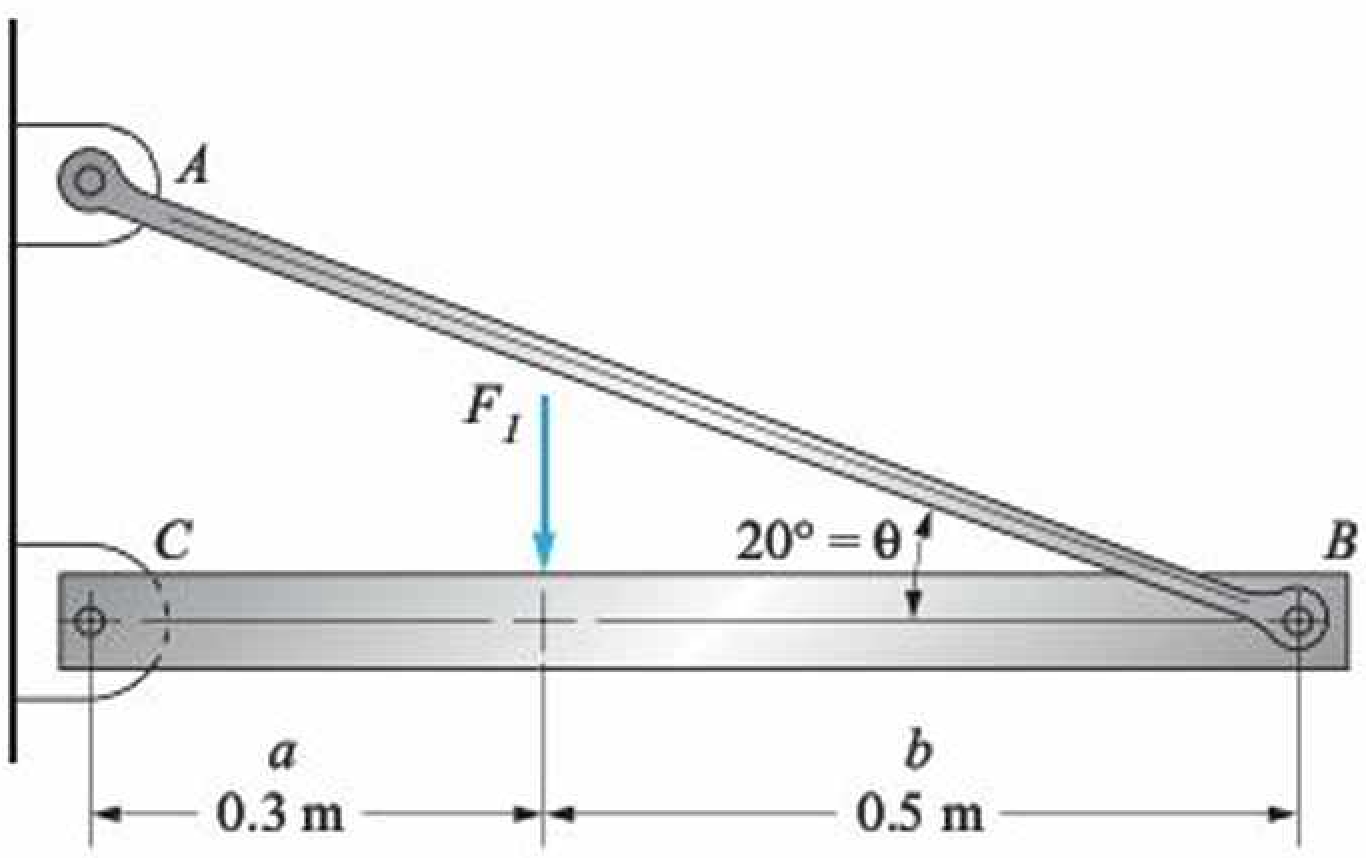
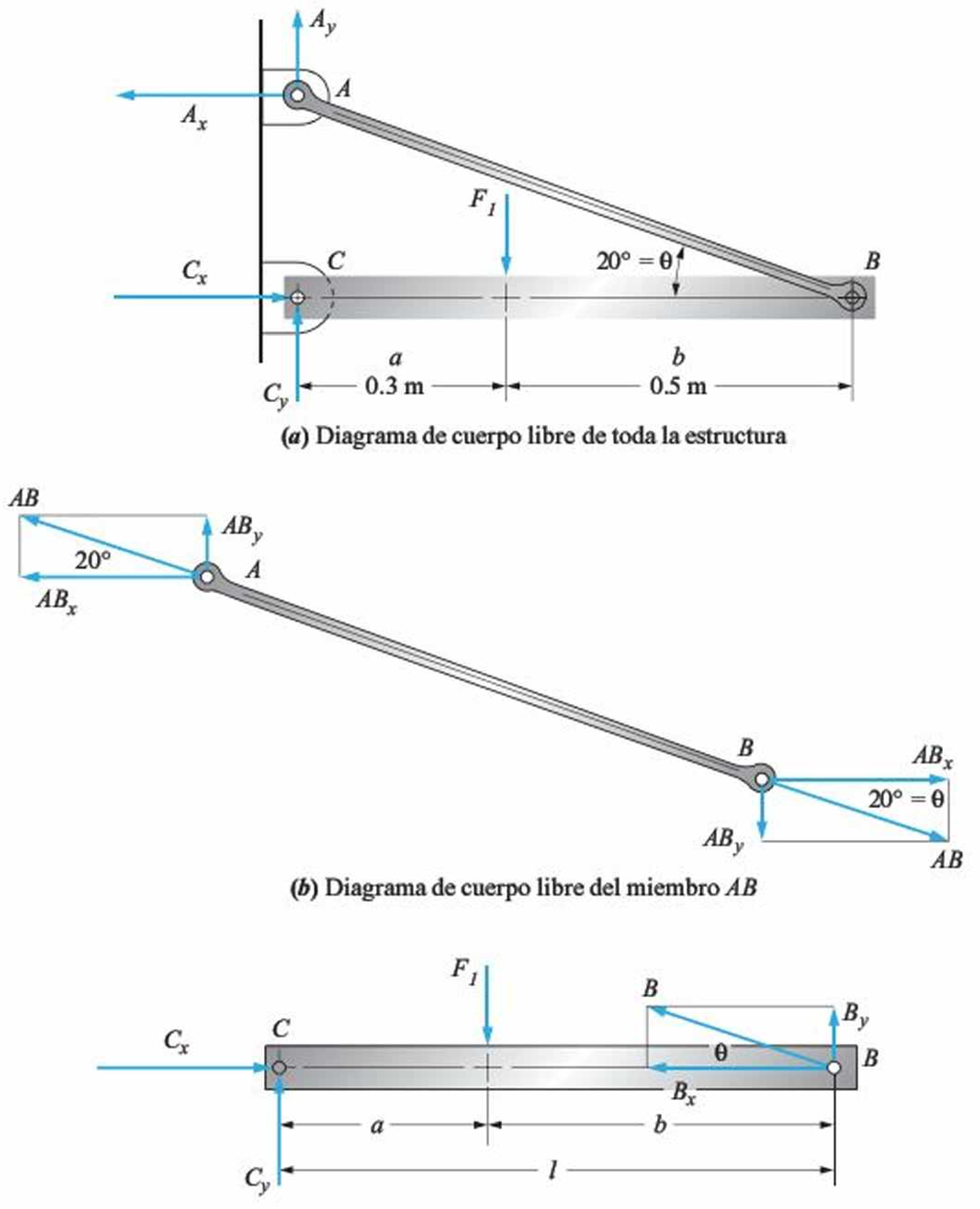


FIGURA A–27–5
Diagramas de cuerpo libre de la estructura y sus componentes.



(*a*) Diagrama de cuerpo libre de toda la estructura

(*b*) Diagrama de cuerpo libre del miembro *AB*

(*c*) Diagrama de cuerpo libre del miembro *BC*

dos pasadores. Designamos esa fuerza *AB*. También se muestran sus componentes en las direcciones *x* y *y*. Observe que el sistema de fuerzas en *A* es igual y opuesto a aquél en *B*.

d. La figura A–27–5(c) es el diagrama de cuerpo libre del miembro *BC*. Este miembro se conoce como *viga* porque soporta una carga, F_1, que actúa perpendicular a su eje mayor. Debe haber una fuerza de reacción hacia arriba tanto en *B* como en *C* para resistir la fuerza F_1 dirigida hacia abajo. Llamamos B_y y C_y a esas fuerzas. El miembro *AB* ejerce la fuerza de apoyo en el punto *B* del miembro *BC*. La fuerza que actúa hacia arriba y hacia la izquierda. Llamamos B_x a la componente horizontal de dicha fuerza. La fuerza total en *B* es igual a la fuerza *AB* descrita en (c). Por último, para equilibrar las fuerzas horizontales, debe haber una fuerza C_x que actúa hacia la derecha en *C*.

Equilibrio estático

Cuando una estructura o un miembro está en equilibrio estático, todas las fuerzas y momentos están equilibrados de modo que no hay movimiento. Las ecuaciones que describen el equilibrio estático son:

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum F_z = 0$$

$$\sum M = 0 \text{ Con respecto a cualquier punto}$$

Las primeras tres ecuaciones establecen que la suma de todas las fuerzas en cualquier dirección es cero. En general realizamos el análisis en tres direcciones perpendiculares, x, y y z. La cuarta ecuación establece que la suma de los momentos con respecto a un punto cualquiera debe ser cero.

Utilizamos las ecuaciones de equilibrio para determinar los valores de fuerzas y momentos desconocidos cuando ciertas fuerzas y momentos se conocen, y cuando se dispone de diagramas de cuerpo libre adecuados.

Ejemplo de las figuras A–27–4 y A–27–5

Determine las fuerzas que actúan en todos los miembros y en todas las juntas de la estructura mostrada en la figura A–27–4. Los datos dados son: $F_1 = 18.0$ kN, $a = 0.3$ m, $b = 0.5$ m, $\theta = 20°$.

Solución. Utilizamos el diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura A–27–5.

Paso 1. Utilizamos primero la parte (c). Sumamos los momentos con respecto al punto C para determinar la fuerza B_y.

$$\sum M_C = 0 = F_1 a - B_y l = (18.0\,\text{kN})(0.3\,\text{m}) - B_y(0.8\,\text{m})$$

Entonces,

$$B_y = (18.0\,\text{kN})(0.3\,\text{m})/(0.8\,\text{m}) = 6.75\,\text{kN}$$

Enseguida sumamos los momentos con respecto al punto B para determinar la fuerza C_y.

$$\sum M_B = 0 = F_1 b - C_y l = (18.0\,\text{kN})(0.5\,\text{m}) - C_y(0.8\,\text{m})$$

Por consiguiente,

$$C_y = (18.0\,\text{kN})(0.5\,\text{m})/(0.8\,\text{m}) = 11.25\,\text{kN}$$

Podemos comprobar para ver si todas las fuerzas verticales están equilibradas sumando las fuerzas en la dirección vertical.

$$\sum F_y = C_y + B_y - F_1 = 11.25\,\text{kN} + 6.75\,\text{kN} - 18.0\,\text{kN} = 0 \quad \text{(Comprobación)}$$

Paso 2. Consideramos las fuerzas que actúan en B. Sabemos que $B_y = 6.75$ kN. También conocemos la fuerza resultante total, B, que actúa a un ángulo de 20° sobre la horizontal hacia la izquierda. La razón de esto es que la fuerza AB la aplica por conducto del pasador. El diagrama de cuerpo libre en (b) indica que AB actúa a lo largo de la dirección el miembro AB porque es un miembro sometido a dos fuerzas. Podemos decir,

$$B_y = B \operatorname{sen} 20°$$
$$B_x = B \cos 20°$$

Entonces,

$$B = B_y/(\operatorname{sen} 20°) = (6.75\,\text{kN})/(\operatorname{sen} 20°) = 19.74\,\text{kN}$$
$$B_x = B \cos 20° = (19.74\,\text{kN})(\cos 20°) = 18.55\,\text{kN}$$

Paso 3. Las fuerzas que actúan en el pasador B tanto en el miembro AB como en el miembro BC deben ser iguales y opuestas a causa del *principio de acción–reacción*. Por consiguiente, la fuerza axial en el miembro AB es: $AB = 19.74$ kN. La fuerza AB actúa tanto

en A como en B a lo largo de la línea entre los dos pasadores de modo que somete a tensión al miembro AB. Las componentes de AB en el pasador A son iguales a las componentes en el pasador B, aunque actúan en direcciones opuestas.

Paso 4 La única incógnita ahora es C_x, la fuerza horizontal que actúa en el punto C del miembro BC.

$$\sum F_x = 0 = C_x - B_x$$

Entonces,

$$C_x = B_x = 18.55\,\text{kN}$$

Equilibrio de sistemas de fuerzas concurrentes

Cuando la línea de acción de todas las fuerzas que actúan sobre un miembro pasan a través del mismo punto, el sistema es conocido como *sistema de fuerzas concurrentes*. Para que el equilibrio estático exista en un sistema tal, la suma de los vectores de todas las fuerzas debe ser igual a cero. Es posible usar dos métodos para analizar un sistema de fuerzas concurrentes con el fin de determinar fuerzas desconocidas.

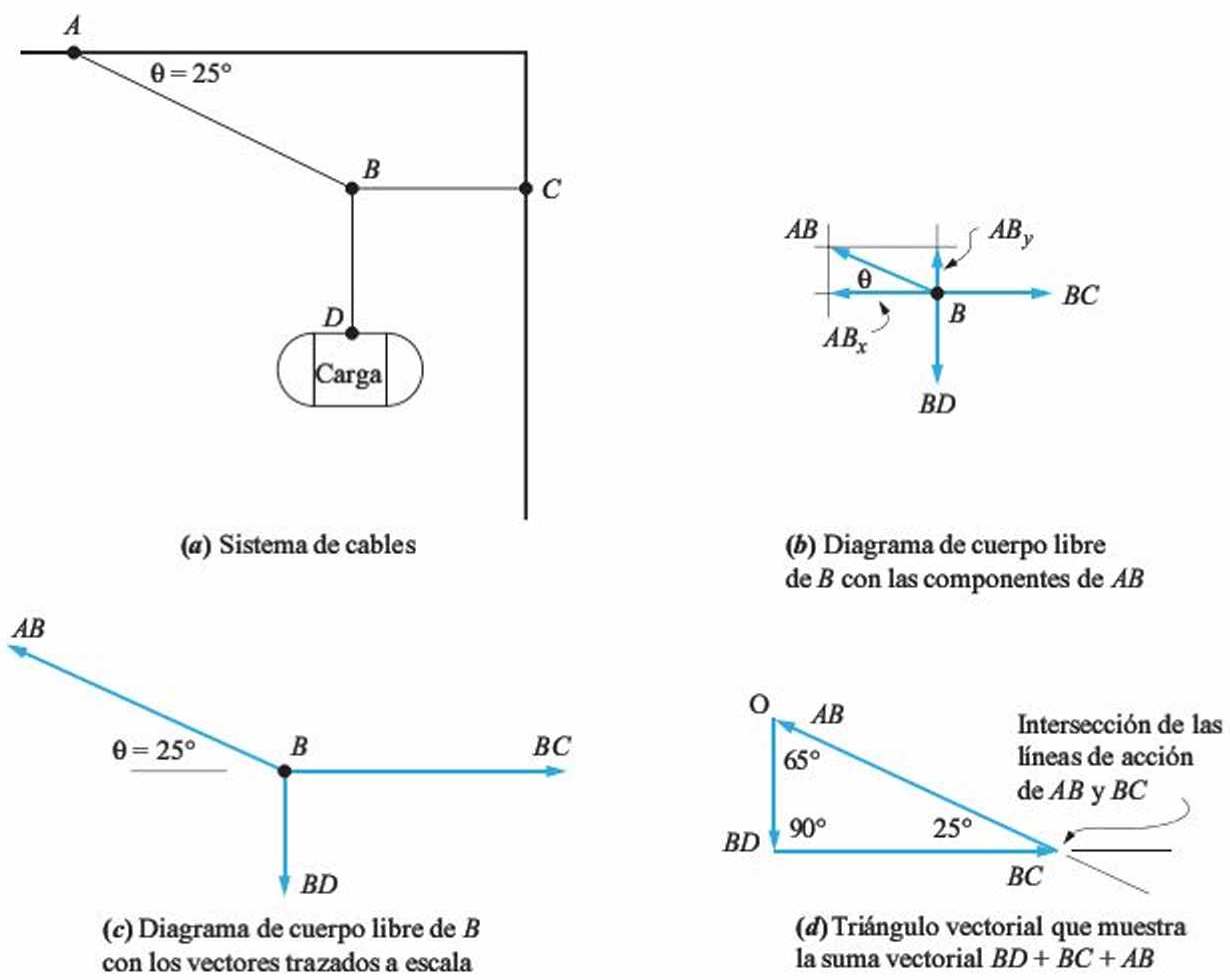
El método del componente

Este método requiere que cada fuerza se descomponga en componentes perpendiculares, por lo general horizontales y verticales. En seguida se aplican las ecuaciones de equilibrio.

Ejemplo de la figura A–27–6

Determine la fuerza en cada cable cuando la masa de la carga es de 1500 kg y el ángulo $\theta = 25°$.

FIGURA A–27–6
Carga soportada por tres cables que muestra el análisis de las fuerzas.



Solución. Hay tres cables que llamaremos AB, BC y BD. Los tres son miembros sometidos a dos fuerzas y pasan por el punto B como se muestra en la parte (b). Por consiguiente, son concurrentes.

Paso 1. Determine el peso de la carga (consulte la sección 1–5.)

$$w = mg = (1500\,\text{kg})(9.81\,\text{m/s}^2) = 14\,715\text{ N} = 14.7\text{ kN}$$

Ésta también es la fuerza en el cable BD.

Paso 2. Trace el diagrama de cuerpo libre del punto B y descomponga cada una de las fuerzas en sus componentes x y y. Esto se hace en la parte (b) de la figura.

Paso 3. Use $\sum F_y = 0$ para determinar la fuerza desconocida AB.

$$\sum F_y = 0 = AB_y - BD$$

Por consiguiente,

$$AB_y = BD = 14.7\,\text{kN}$$

Pero AB_y es la componente vertical de la fuerza que actúa en el cable AB. Entonces,

$$AB_y = AB \operatorname{sen}\theta = AB \operatorname{sen} 25°$$
$$AB = AB_y/(\operatorname{sen} 25°) = (14.7\,\text{kN})/(\operatorname{sen} 25°) = 34.8\text{ kN}$$

Paso 4. Use $\sum F_x = 0$ para determinar la fuerza desconocida BC.

$$\sum F_x = 0 = BC - AB_x$$

Entonces,

$$BC = AB_x = AB \cos 25° = (34.8\text{ kN})(\cos 25°) = 31.6\text{ kN}$$

Resumen: Las fuerzas en los tres cables son

$$AB = 34.8\text{ kN} \qquad BC = 31.6\,\text{kN} \qquad BD = 14.7\,\text{kN}$$

Método del polígono de vectores

Este método requiere la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan en un punto. Cuando las fuerzas están en equilibrio, el polígono creado por los vectores se cierra, lo que indica que la suma vectorial es igual a cero.

Ejemplo utilizando la figura A–27–6(c)

Determine la fuerza en cada cable cuando la masa de la carga es de 1500 kg y el ángulo $\theta = 25°$.

Solución. Tenemos que sumar los vectores $AB + BC + BD$, como se muestra en la parte (d) de la figura. La solución gráfica requeriría trazar cada vector en su dirección apropiada y con su longitud a escala. Los vectores conectan "punta a cola". Trazaremos un diagrama vectorial gráfico pero determinaremos las fuerzas requeridas analíticamente.

Paso 1. La suma se puede hacer en cualquier orden y podríamos comenzar en cualquier punto, por ejemplo el punto O. En realidad sumaremos las fuerzas en el orden $BD + BC + AB$. Primero tracemos a escala el vector conocido BD verticalmente dirigido hacia abajo. El valor es $BD = 14.7$ kN como se vio en el método de las componentes.

Paso 2. Agregue el vector BC a partir de la punta de BD dirigido horizontalmente hacia la derecha. En este momento no se conoce su longitud, pero sí su línea de acción. Trace la línea de extensión indefinida por ahora.

Paso 3. Luego, agregando el vector AB al extremo del vector BC el polígono vectorial se cierra con la punta de AB exactamente en el punto O. Podemos trazar una línea a través del punto O en la dirección de AB. Donde esta línea corta la línea de acción del vector BC es donde debe quedar la punta de BC. Asimismo, la cola de AB también queda en ese punto.

Paso 4. En el triángulo vectorial así formado, conocemos los tres ángulos y la longitud de un lado, BD. Podemos utilizar la ley de los senos para determinar las longitudes de los otros dos lados.

$$\frac{BD}{\text{sen } 25°} = \frac{AB}{\text{sen } 90°}$$

Entonces,

$$AB = (BD)(\text{sen}90°)/(\text{sen}25°) = (14.7 \text{ kN})(\text{sen}90°)/(\text{sen}25°) = 34.8 \text{ kN}$$

También,

$$\frac{BD}{\text{sen } 25°} = \frac{BC}{\text{sen } 65°}$$

Por consiguiente,

$$BC = (BD)(\text{sen}65°)/(\text{sen}25°) = (14.7 \text{ kN})(\text{sen}65°)/(\text{sen}25°) = 31.6 \text{ kN}$$

Resumen. Las fuerzas resultantes en los cables son idénticas a las que se determinaron con el método de las componentes.

$$AB = 34.8 \text{ kN} \qquad BC = 31.6 \text{ kN} \qquad BD = 14.7 \text{ kN}$$

Ley de los cosenos aplicada al análisis de fuerzas

En algunas soluciones realizadas con el triángulo vectorial, conocemos las magnitudes de dos fuerzas y el ángulo entre ellas. Podemos determinar la tercera con la *ley de los cosenos*.

Por ejemplo, en la figura A–27–6(d), conocemos las magnitudes de $AB = 34.8$ kN, $BC = 31.6$ kN y que el ángulo entre ellas es de 25°. Podríamos determinar la magnitud de la fuerza BD con:

$$\begin{aligned}(BD)^2 &= (AB)^2 + (BC)^2 - 2(AB)(BC)\cos 25° \\ &= (34.8)^2 + (31.6)^2 - 2(34.8)(31.6)\cos 25° = 216\end{aligned}$$

Entonces,

$$BD = \sqrt{216} = 14.7 \text{ kN}$$

Debe modelar con cuidado los lados y el ángulo de acuerdo con la forma de esta ecuación.

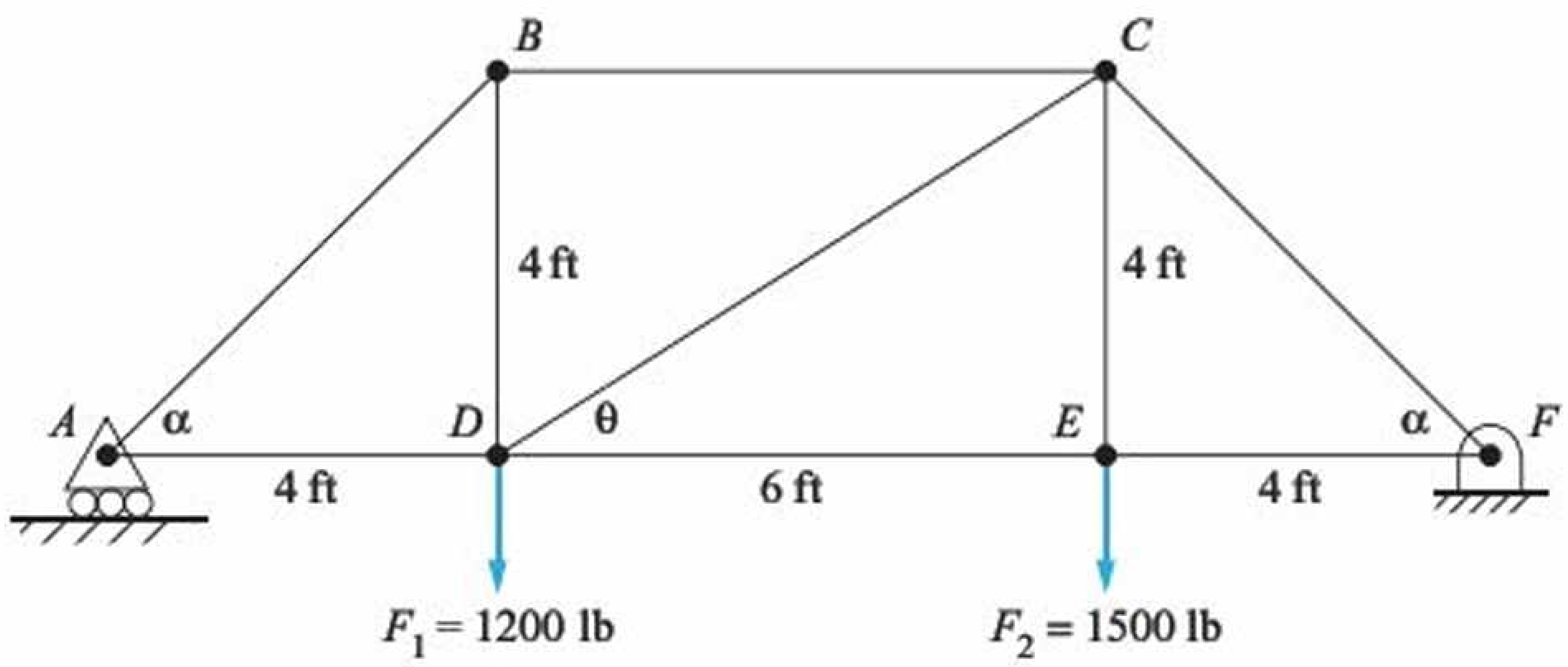
Armaduras

Una armadura es una estructura compuesta exclusivamente por miembros rectos conectados por juntas de pasador con cargas aplicadas sólo en las juntas. El resultado es que todos los miembros son miembros sometidos a dos fuerzas, ya sea de tensión o de compresión. La figura A–27–7 muestra un ejemplo. A continuación describimos el *método de las juntas* para analizar las fuerzas que actúan en todos los miembros de una armadura.

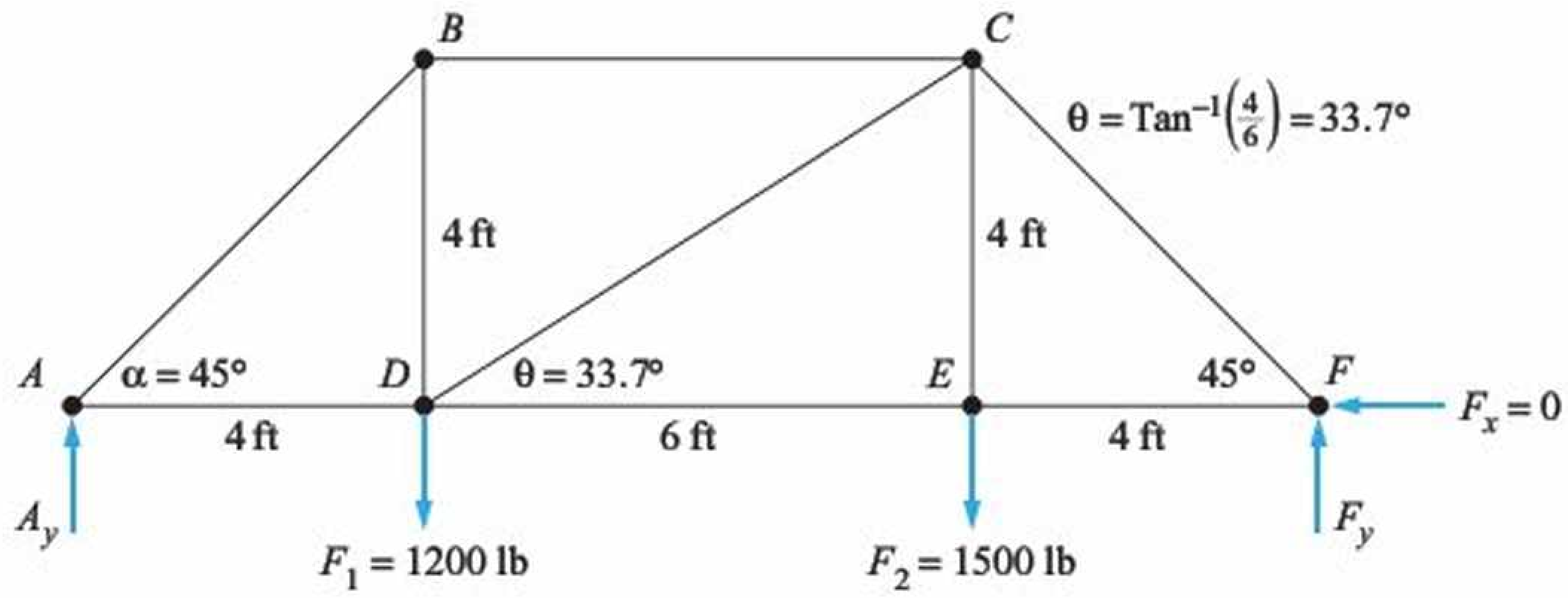
Ejemplo utilizando la figura A–27–7

Determine las fuerzas en todos los miembros de la armadura mostrada en la figura A–27–7. Determine tanto la magnitud como la dirección (tensión o compresión) de cada fuerza.

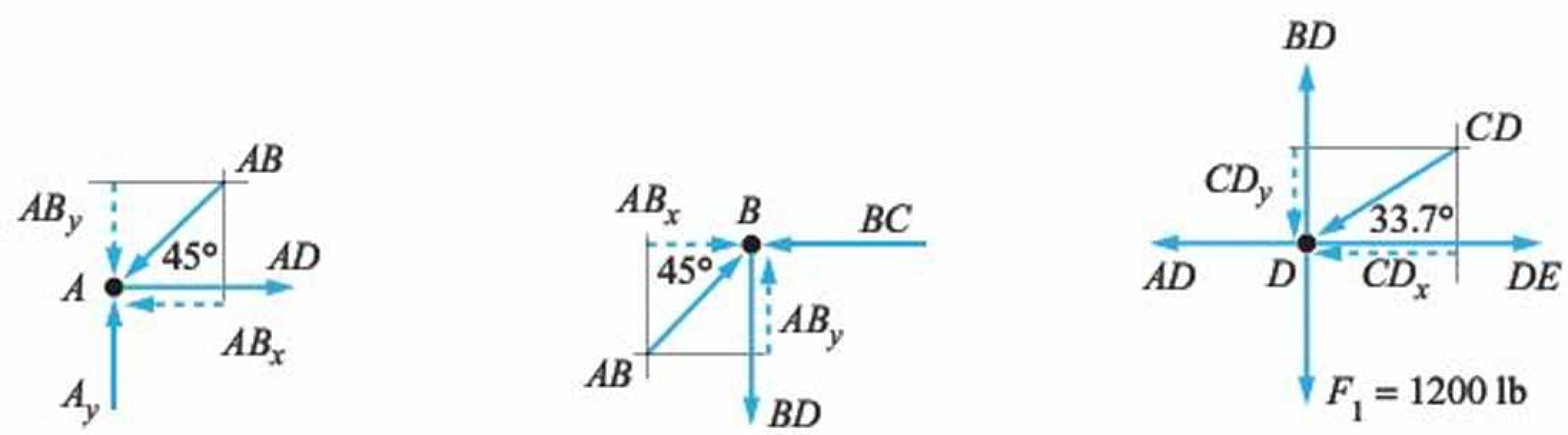
FIGURA A–27–6
Fuerzas en una armadura y en sus juntas.



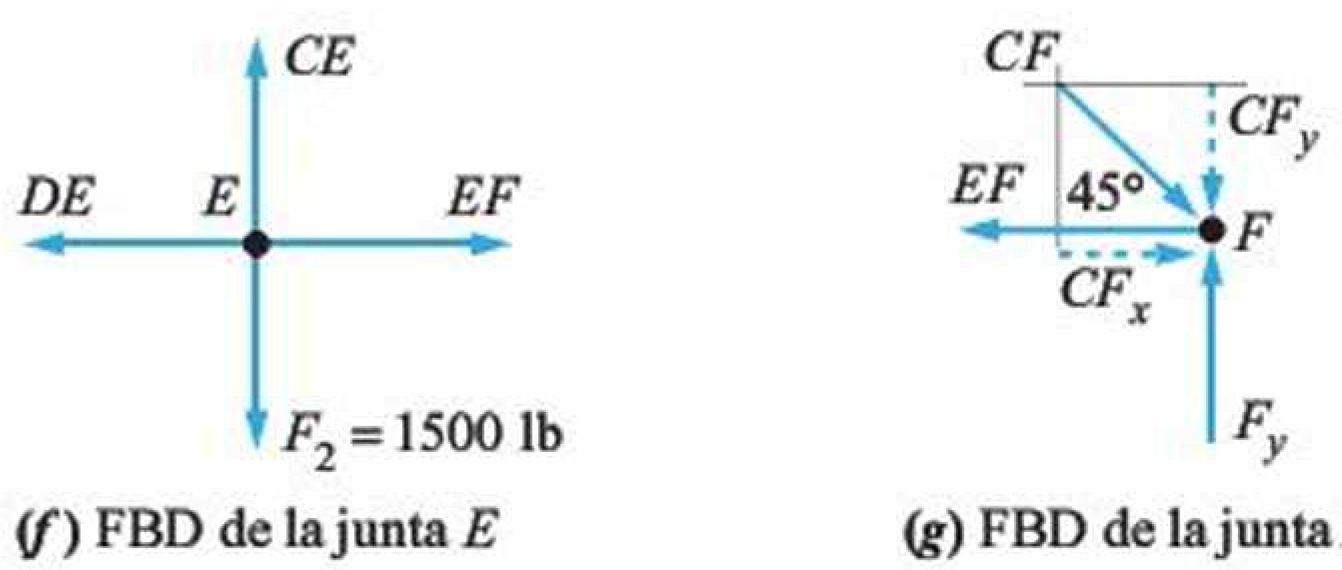
(*a*) Armadura completa con sus apoyos



(*b*) Diagrama de cuerpo libre de la armadura completa



(*c*) FBD de la junta A (*d*) FBD de la junta B (*e*) FBD de la junta *D*



(*f*) FBD de la junta *E* (*g*) FBD de la junta *F*

Análisis por medio del método de las juntas

La armadura se compone de nueve miembros. El método general para determinar las fuerzas en cada miembro se describe a continuación.

a. Resuelva para las reacciones en los apoyos de toda la armadura.

b. Aísle un junta como diagrama de cuerpo libre y muestre todas las fuerzas que actúan en ella. La junta seleccionada debe tener por lo menos una fuerza conocida actuando en ella. Se recomienda que no debe haber más de dos fuerzas desconocidas.

c. Cuando un miembro está a tensión, la fuerza jala hacia fuera de la junta en cualquiera de los extremos. A la inversa, un miembro a compresión empuja hacia dentro de una junta. Trate de trazar las fuerzas desconocidas en la dirección apropiada que garantice el equilibrio de la junta.

d. Use las ecuaciones de equilibrio estático de fuerzas en las direcciones horizontal y vertical para determinar las fuerzas desconocidas que actúan en la junta seleccionada.

e. Las fuerzas determinadas en la primera junta se transforman en fuerzas conocidas para analizar las demás juntas. Muévase a juntas cercanas y repita los pasos b, c y d hasta que las fuerzas en todas las juntas hayan sido determinadas.

Terminación del análisis de la armadura de la figura A–27–7

Paso 1. Utilizando toda la armadura como diagrama de cuerpo libre, resuelva para las reacciones en las juntas A y F. Vea la parte (b) de la figura. Sume los momentos con respecto al apoyo A para determinar la fuerza de apoyo F_y en el punto F.

$$\sum M_A = F_1(4\text{ ft}) + F_2(10\text{ ft}) - F_y(14\text{ ft}) = (1200\text{ lb})(4\text{ ft}) + (1500\text{ lb})(10\text{ ft}) - F_y(14\text{ ft})$$
$$F_y = [(4800 + 15\,000)\text{ lb ft}]/14\text{ ft} = 1414\text{ lb} \qquad \text{Hacia arriba}$$

Sume los momentos con respecto al apoyo F para determinar la fuerza de apoyo A_y en el punto A.

$$\sum M_F = F_1(10\text{ ft}) + F_2(4\text{ ft}) - A_y(14\text{ ft}) = (1200\text{ lb})(10\text{ ft}) + (1500\text{ lb})(4\text{ ft}) - A_y(14\text{ ft})$$
$$A_y = [(12\,000 + 6000)\text{ lb ft}]/14\text{ ft} = 1286\text{ lb} \qquad \text{Hacia arriba}$$

Paso 2. Aísle la junta A como un cuerpo libre. Consulte la parte (c) de la figura. Trabaje con los componentes de la fuerza AB. $AB_x = AB\cos 45°$. $AB_y = AB\text{ sen }45°$.

$$\sum F_y = 0 = A_y - AB_y$$
$$AB_y = A_y = 1286\text{ lb}$$

Entonces,

$$AB = AB_y/(\text{sen }45°) = (1286\text{ lb})/(\text{sen }45°) = 1818\text{ lb} \qquad \text{Compresión}$$
$$\sum F_x = 0 = AD - AB_x$$
$$AD = AB_x = AB\cos 45° = (1818\text{ lb})(\cos 45°) = 1286\text{ lb} \qquad \text{Tensión}$$

Paso 3. Aísle la junta B como diagrama de cuerpo libre. Vea la parte (d) de la figura.

$$BD = 1286\ \text{lb} \qquad \text{Tensión}$$
$$\sum F_x = 0 = AB_x - BC = 1286\ \text{lb} - BC$$
$$BC = 1286\ \text{lb} \qquad \text{Compresión}$$

Paso 4. Aísle la junta D como cuerpo libre. Vea la parte (e) de la figura.

$$\sum F_y = 0 = 1200\ \text{lb} - BD + CD_y = 1200\ \text{lb} - 1286\ \text{lb} + CD_y = CD_y - 86\ \text{lb}$$
$$CD_y = 86\ \text{lb}$$

Entonces,

$$CD = CD_y/(\text{sen}\,33.7°) = (86\ \text{lb})/(\text{sen}\,33.7°) = 155\ \text{lb} \qquad \text{Compresión}$$
$$\sum F_x = 0 = DE - AD - CD_x = DE - 1286\ \text{lb} - (155\ \text{lb})(\cos 33.7°)$$
$$DE = 1286\ \text{lb} + 130\ \text{lb} = 1416\ \text{lb} \qquad \text{Tensión}$$

Paso 5. Aísle la junta E como diagrama de cuerpo libre. Vea la parte (f) de la figura.

$$\sum F_y = 0 = 1500\ \text{lb} - CE$$
$$CE = 1500\ \text{lb} \qquad \text{Tensión}$$
$$\sum F_x = 0 = EF - DF = EF - 1416\ \text{lb}$$
$$EF = 1416\ \text{lb} \qquad \text{Tensión}$$

Paso 6. Aísle la junta F como diagrama de cuerpo libre. Vea la parte (g) de la figura.

$$\sum F_y = 0 = F_y - CF_y = 1414\ \text{lb} - CF_y = 1414\ \text{lb} - CF\,\text{sen}\,45°$$
$$CF = 1414\ \text{lb}/(\text{sen}\,45°) = 2000\ \text{lb} \qquad \text{Compresión}$$

Resumen de las fuerzas que actúan en los miembros de la armadura

$$AB = 1818\ \text{lb (C)} \quad AD = 1286\ \text{lb (T)} \quad BD = 1286\ \text{lb (T)}$$
$$BC = 1286\ \text{lb (C)} \quad CE = 1500\ \text{lb (T)} \quad CD = 155\ \text{lb (C)}$$
$$DE = 1416\ \text{lb (T)} \quad EF = 1416\ \text{lb (T)} \quad CF = 2000\ \text{lb (C)}$$

Respuestas a problemas seleccionados

Capítulo 1

1–17. 7.85 kN enfrente
11.77 kN detrás

1–19. 54.5 mm

1–23. 1765 lb enfrente
2646 lb detrás

1–25. 55.1 lb
25.7 lb/in
2.14 in

1–27. 398 slugs

1–29. 8274 kPa

1–31. 96.5 a 524 MPa

1–33. 9097 mm^2

1–35. Área = 324 in^2
Área = 2.09×10^5 mm^2
Vol. = 3888 in^3
Vol. = 6.37×10^7 mm^3
Vol. = 6.37×10^{-2} m^3

1–37. 40.7 MPa

1–39. 5375 lb/in^2

1–41. 79.8 MPa

1–43. 803 lb/in^2

1–45. σ_{AB} = 107.4 MPa
σ_{BC} = 75.2 MPa
σ_{BD} = 131.1 MPa

1–47. σ_{AB} = 167 MPa tensión
σ_{BC} = 77.8 MPa tensión
σ_{CD} = 122 MPa tensión

1–49. σ_{AB} = 20471 psi tensión
σ_{BC} = 3129 psi tensión

1–51. Fuerzas: AD = CD = 10.5 kN
AB = BC = 9.09 kN
Esfuerzos: $\sigma_{AB} = \sigma_{BC}$ = 25.3 MPa tensión
σ_{BD} = 17.5 MPa tensión
$\sigma_{AD} = \sigma_{CD}$ = 21.0 MPa compresión

1–53. 50.0 MPa

1–55. 11 791 lb/in^2

1–57. 146 MPa

1–59. 151 MPa

1–61. 81.1 MPa

1–63. 24.7 MPa

1–65. Pasador: τ = 50 930 lb/in^2
Collar: τ = 38 800 lb/in^2

1–67. 183 MPa

1–69. 73.9 MPa

1–71. 22.6 MPa

Capítulo 2

2–15. 1020 HR

2–19. 16.4 lb

2–21. Magnesio

2–29. s_{ut} = 40 ksi; s_{uc} = 140 Ksi

2–31. Flexión: σ_d = 1450 lb/in^2
Tensión: σ_d = 850 lb/in^2
Compresión: σ_d = 1000 lb/in^2 paralelo al grano
Compresión: σ_d = 385 lb/in^2 perpendicular al grano
Cortante: τ_d = 95 lb/in^2

Problemas 2–67 a 2–77: Datos aproximados de la Figura P2–66

2–67. **(a)** s_y = 173 ksi—Punto de cedencia
(b) s_u = 187 ksi
(c) s_p = 162 ksi
(d) s_{el} = 168 ksi
(e) E = 29.0×10^6 lb/in^2
(f) 15% Alargamiento
(g) Dúctil
(h) Acero
(i) AISI 4140 OQT 900

2–69. **(a)** s_y = 49 ksi—Punto de cedencia
(b) s_u = 65 ksi

(c) $s_p = 46$ ksi
(d) $s_{el} = 48$ ksi
(e) $E = 26.5 \times 10^6$ lb/in^2
(f) 36% Alargamiento
(g) Dúctil
(h) Acero
(i) AISI 1020 CD

2–71. (a) $s_y = 53$ ksi—Desviación
(b) $s_u = 59$ ksi
(c) $s_p = 31$ ksi
(d) $s_{el} = 42$ ksi
(e) $E = 12.0 \times 10^6$ lb/in^2
(f) 5.0% Alargamiento
(g) Frágil en el límite/dúctil
(h) Zinc
(i) ZA-12 colado

2–73. (a) $s_y = 19$ ksi—Desviación
(b) $s_u = 40$ ksi
(c) $s_p = 14$ ksi
(d) $s_{el} = 17$ ksi
(e) $E = 6 \times 10^6$ lb/in^2
(f) 5% alargamiento
(g) Frágil en el límite/dúctil
(h) Magnesio
(i) ASTM AZ 63A-T6

2–75. (a) $s_y = 40$ ksi—Desviación
(b) $s_u = 45$ ksi
(c) $s_p = 30$ ksi
(d) $s_{el} = 35$ ksi
(e) $E = 10.0 \times 10^6$ lb/in^2
(f) 17% alargamiento
(g) Dúctil
(h) Aluminio
(i) 6061-T6

2–77. (a) $s_y = 80$ ksi—Desviación
(b) $s_u = 95$ ksi
(c) $s_p = 55$ ksi
(d) $s_{el} = 68$ ksi
(e) $E = 26 \times 10^6$ lb/in^2
(f) 2.0% alargamiento
(g) Frágil, pero no cede
(h) Hierro maleable
(i) ASTM A220 Grado 80002

Capítulo 3

3–1. Se requiere $s_y = 216$ MPa

3–3. Se requiere $s_u = 86\,000$ psi

3–5. No, esfuerzo de tensión excesivo

3–7. $d_{mín} = 0.824$ in

3–9. $d_{mín} = 12.4$ mm

3–11. Se requiere $\sigma_d > 803$ psi

3–13. 16.7 kN

3–15. $d_{mín} = 0.412$ in

3–17. En los lados B y H: $B_{mín} = 22.2$ mm; $H_{mín} = 44.4$ mm

3–19. Se requiere $s_y = 360$ MPa

3–21. Se requiere $s_u = 400$ MPa

Deformación elástica

3–23. 0.041 in

3–25. Fuerza = 2357 lb
$\sigma = 3655$ lb/in^2

3–27. (a) y (b) $d_{mín} = 10.63$ mm; masa = 0.430 kg
(c) $d_{mín} = 18.4$ mm; masa = 0.465 kg

3–29. (a) 0.857 mm
(b) 0.488 mm

3–31. Alargamiento = 0.0040 in
Compresión = 0.00045 in

3–33. Fuerza = 3214 lb; insegura

3–35. $\delta = 0.016$ mm
$\sigma = 27.9$ MPa

3–37. 0.804 mm

3–39. 4.42 mm más corto

3–41. (a) $\delta = 0.276$ in; $\sigma = 37\,300$ lb/in^2 (cercano a s_y)
(b) $\sigma = 62\,200$ psi—mayor que s_u. El alambre se romperá.

3–43. Fuerza = 6737 lb
$\delta = 0.055$ in

3–45. Masa = 132 kg
$\sigma = 183$ MPa

3–47. 0.806 in

3–49. 180 MPa

3–51. (a) 0.459 mm (b) 213 MPa

3–53. 693 lb/in^2

3–55. 234.8°C

3–57. Latón: $\delta = 6.46$ mm
Acero inoxidable: $\delta = 3.51$ mm

3–59. 38.7 MPa

3–61. $\sigma = 37500$ psi compresión. La falla debe de fallar a compresión o pandearse.

3–63. 0.157 in

3–65. 154 MPa

3–67. $\sigma_c = 17.1$ MPa; $\sigma_s = 109$ MPa

3–69. 13.8 in

3–71. $d_{mín} = 6.20$ mm

3–73. $\sigma_s = 427$ MPa; $\sigma_a = 49.4$ MPa

PROBLEMAS DE PRÁCTICA ADICIONALES

3–75. $F_{máx} = 12.56$ kN; $\delta = 0.751$ mm

3–77. (a) $t = 110.6$°C
(b) $\sigma = 50.4$ MPa
(c) Seguro a compresión. Verifique el pandeo.

3–79. $\delta = 0.341$ mm. Pero el esfuerzo se aproxima a la resistencia a la cedencia.

3–81. Para AB: $\delta = 15.2$ mm
Para BC: $\delta = 15.2$ mm

Problemas 3–83 a 3–89:

	Longitud (in)	Deformación (in/in)	Fuerza (lb)
3–83.	2.0143	0.00714	42 840
3–85.	2.0137	0.00687	26 100
3–87.	2.0071	0.00353	8 460
3–89.	2.0116	0.00581	27 900

Problemas 3–91 a 3–99:

	Longitud (mm)	Deformación (mm/mm)	Fuerza (kN)
3–91.	50.716	0.01431	8.30
3–93.	50.486	0.00972	5.50
3–95.	50.148	0.00297	4.50
3–97.	50.455	0.00909	137.9
3–99.	50.083	0.00167	110.3

Concentraciones de esfuerzo – Esfuerzos axiales directos

3–101. 20 140 lb/in^2

3–103. 224 MPa

3–105. 239 MPa

3–107. 52 800 lb/in^2

3–109. 33 127 lb/in^2

3–111. 63.7 MPa

3–113. 833 MPa

3–115. 34 240 lb/in^2

3–117. 34 020 lb/in^2

3–119. 531 MPa

3–121. 62.1 MPa

3–123. $d_{mín} = 0.528$ in; $r_{mín} = 0.090$ in

3–125. 1967 N

Respuestas a problemas seleccionados

3–127. A. 5869 lb/in^2, B. 181 lb/in^2
C. 80.2 lb/in^2, D. 20.1 lb/in^2

3–129. (a) 1610 lb/in^2, (b) 311 lb/in^2

3–131. (a) cara de contacto pasador/tubo, $\sigma_b = 106\,700$ lb/in^2 –Excesivo
(b) cara de contacto collar/tubo, $\sigma_b = 31\,950$ psi

3–133. (a) en la parte media: $\sigma_b = 28.3$ MPa
(b) en las partes externas: $\sigma_b = 21.25$ MPa

3–135. (a) placa de acero: $\sigma_b = 2.25$ MPa—OK
(b) cara superior del concreto: $\sigma_b = 0.563$ MPa—OK
(c) suelo: $\sigma_b = 22.5$ kPa—OK

3–137. $R_a = 33.1$ kips

3–139. (a) $R_a = 27.6$ kips
(b) $R_a = 39.6$ kips

3–141. $R_a = 284$ kN

3–143. Se requiere $A_b = 3.49$ in^2

3–145. 8633 lb

Esfuerzo cortante directo

3–147. $a_{mín} = 0.438$ in

3–149. $\tau = 151$ MPa; Se requiere $s_y = 1208$ MPa

3–151. 185 kN

3–153. 256 kN

3–155. 18 300 lb

3–157. 62 650 lb

3–159. 119 500 lb

3–161. 119 700 lb

3–163. Pasador A: $D_{A_{mín}} = 13.8$ mm
Pasadores B y C: $D_{mín} = 17.7$ mm

3–165. Fuerza de elevación = 2184 lb; $\tau_{eje} = 6275$ lb/in^2 (cortante doble)

3–167. $D_{mín} = 0.206$ in

3–169. 35 020 lb

3–171. 58.06 kN

3–173. 110.9 kN

3–175. 137.4 kN

Problemas con más de una clase de esfuerzo directo y problemas de diseño

3–177. $D_{mín} = 0.808$ basado en el cortante

3–179. (a) $F_{perm} = 6200$ lb Cortante
(b) $F_{perm} = 35\,340$ lb Apoyo
(c) $F_{perm} = 2832$ lb Tensión – Rige el diseño

3–181. **(a)** $F_{perm} = 3148$ lb Cortante – Rige el diseño
(b) $F_{perm} = 9375$ lb Tensión
(c) $F_{perm} = 10\,969$ lb Apoyo

3–183. **(a)** $F_{perm} = 6626$ lb Tensión – Rige el diseño
(b) $F_{perm} = 10\,713$ lb Cortante
(c) $F_{perm} = 81\,843$ lb Apoyo

Capítulo 4

4–1. 178 MPa

4–3. 4042 lb/in^2

4–5. 83.8 MPa

4–7. $\tau = 6716$ lb/in^2; seguro

4–9. $\tau = 5190$ lb/in^2, se requiere $s_y = 62\,300$ lb/in^2

4–11. $\tau = 65.5$ MPa; $\theta = 0.0378$ rad;
se requiere $s_y = 262$ MPa

4–13. $D_i = 49.0$ mm; $D_o = 61.3$ mm

4–15. $d_{mín} = 0.512$ in

4–17. Potencia $= 0.0686$ hp; $\tau = 8488$ lb/in^2;
se requiere $s_y = 67\,900$ lb/in^2

4–19. $D_i = 12.09$ in; $D_o = 15.11$ in

4–21. 1.96 N·m

4–23. 0.1509 rad

4–25. 0.267 rad

4–27. 0.0756 rad

4–29. 0.278 rad

4–31. $\theta_{AB} = 0.0636$ rad; $\theta_{AC} = 0.0976$ rad

4–33. $\tau = 9.06$ MPa; $\theta = 0.0046$ rad

4–35. 49.0 MPa

4–37. 1370 lb·in

4–39. 2902 lb·in

4–41. 0.083 rad

4–43. 0.112 rad

4–45. 0.0667 rad

4–47. 1.82 MPa

4–49. 0.00363 rad

4–51. 0.0042 rad

4–53. 78 150 lb·in

4–55. 144 800 lb·in

4–57. $\tau_{tubo\ cuadrado} / \tau_{tubo\ redondo} = 1.100$
$\theta_{tubo\ cuadrado} / \theta_{tubo\ redondo} = 1.266$

PROBLEMAS DE PRÁCTICA ADICIONALES

4–58. $\tau_{máx} = 123$ MPa

4–59. Se requiere $s_y = 493$ MPa

4–61. Se requiere $s_y = 1480$ MPa

4–63. $D_{mín} = 0.419$ in; Especifique $D = 0.50$ in

4–65. $\theta = 1.85$ grados

4–67. $\tau = 211$ MPa en A en el cuñero $= \tau_{máx}$
$\tau = 171$ MPa a la derecha de A en el hombro
$\tau = 55.7$ MPa a la derecha del asiento de apoyo
$\tau = 39.6$ MPa en la ranura para el anillo de retención a la izquierda de B
$\tau = 26.4$ MPa en B en el cuñero
$\tau = 14.7$ MPa a la derecha de B en el hombro
$\tau = 10.7$ MPa en el escalón desde 50 mm hasta 30 mm
$\tau = 10.3$ MPa a la izquierda del asiento de apoyo
$\tau = 22.5$ MPa a la izquierda de C en el hombro
$\tau = 30.1$ MPa en C en el cuñero

4–69. $L_{mín} = 1.088$ m

4–70. $D_o = 21.79$ mm; $D_i = 14.53$ mm

4–71. $\tau = 408.8$ MPa

Capítulo 5

NOTA: Las respuestas se refieren a las figuras P5–1 a P5–84 y de P5–93 a P5–110. Por lo que se refiere a las reacciones, R_1 es la de la izquierda, R_2 es la de la derecha, V y M se refieren a los valores máximo absolutos de fuerza cortante y momento flexionante, respectivamente. Las soluciones completas requieren la construcción de los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante completos.

P5–1. $R_1 = R_2 = 325$ lb
$V = 325$ lb
$M = 4550$ lb·in

P5–3. $R_1 = 11.43$ K; $R_2 = 4.57$ K
$V = 11.43$ K
$M = 45.7$ K·ft

P5–5. $R_1 = 575$ N; $R_2 = 325$ N
$V = 575$ N
$M = 195$ N·m

P5–7. $R_1 = 46.36$ kN; $R_2 = 23.64$ kN
$V = 46.36$ kN
$M = 71.54$ kN·m

P5–9. $R_1 = 1557$ lb; $R_2 = 1743$ lb
$V = 1557$ lb
$M = 6228$ lb·in

P5–11. $R_1 = 7.5$ K; $R_2 = 37.5$ K
$V = 20$ K
$M = 60$ K·ft

P5–13. $R_1 = R_2 = 250$ N
$V = 850$ N
$M = 362.5$ N·m

P5–15. $R_1 = 37.4$ kN (hacia abajo); $R_2 = 38.3$ kN (hacia arriba)
$V = 24.9$ kN
$M = 50$ kN·m

P5–17. $R = 120$ lb
$V = 120$ lb
$M = 960$ lb·in

P5–19. $R = 24$ K
$V = 24$ K
$M = 168$ K·ft

P5–21. $R = 1800$ N
$V = 1800$ N
$M = 1020$ N·m

P5–23. $R = 120$ kN
$V = 120$ kN
$M = 240$ kN·m

P5–25. $R_1 = R_2 = 180$ lb
$V = 180$ lb
$M = 810$ lb·in

P5–27. $R_1 = 240$ lb; $R_2 = 120$ lb
$V = 240$ lb
$M = 640$ lb·in

P5–29. $R_1 = 99.2$ N; $R_2 = 65.8$ N
$V = 99.2$ N
$M = 9.9$ N·m

P5–31. $R_1 = 42$ kN; $R_2 = 50$ kN
$V = 50$ kN
$M = 152.2$ kN·m

P5–33. $R_1 = R_2 = 440$ lb
$V = 240$ lb
$M = 360$ lb·in

P5–35. $R_1 = 1456$ N; $R_2 = 644$ N
$V = 956$ N
$M = 125$ N·m

P5–37. $R_1 = 35.3$ N; $R_2 = 92.3$ N
$V = 52.2$ N
$M = 4.0$ N·m

P5–39. $R = 360$ lb
$V = 360$ lb
$M = 1620$ lb·in

P5–41. $R = 600$ N
$V = 600$ N
$M = 200$ N·m

P5–43. $R_1 = R_2 = 330$ lb
$V = 330$ lb
$M = 4200$ lb·in

P5–45. $R_1 = 36.6$ K; $R_2 = 30.4$ K
$V = 36.6$ K
$M = 183.2$ K·ft

P5–47. $R_1 = R_2 = 450$ N
$V = 450$ N
$M = 172.5$ N·m

P5–49. $R_1 = 180$ kN; $R_2 = 190$ kN
$V = 190$ kN
$M = 630$ kN·m

P5–51. $R_1 = 636$ lb; $R_2 = 1344$ lb
$V = 804$ lb
$M = 2528$ lb·in

P5–53. $R_1 = 4950$ N; $R_2 = 3100$ N
$V = 2950$ N
$M = 3350$ N·m

P5–55. $R = 236$ lb
$V = 236$ lb
$M = 1504$ lb·in

P5–57. $R = 1130$ N
$V = 1130$ N
$M = 709$ N·m

P5–59. $R = 230$ kN
$V = 230$ kN
$M = 430$ kN·m

P5–61. $R = 1400$ lb
$V = 1500$ lb
$M = 99\,000$ lb·in

P5–63. $R = 1250$ N
$V = 1250$ N
$M = 1450$ N·m

P5–65. $R_1 = 1333$ lb; $R_2 = 2667$ lb
$V = 2667$ lb
$M = 5132$ lb·ft

P5–67. $R_1 = R_2 = 75$ N
$V = 75$ N
$M = 15$ N·m

P5–69. $R_1 = 8.60$ kN; $R_2 = 12.2$ kN
$V = 12.2$ kN
$M = 9.30$ kN·m

P5–71. $R_1 = R_2 = 5400$ lb
$V = 5400$ lb
$M = 19\,800$ lb·ft

P5–73. $R = 10.08$ kN
$V = 10.08$ kN
$M = 8.064$ kN·m

P5–75. $R = 7875$ lb
$V = 7875$ lb
$M = 21\,063$ lb·ft

Para los problemas P5–77 a P5–83, los resultados se muestran sólo para la sección horizontal principal.

P5–77. $R_1 = R_2 = 282$ N
$V = 282$ N
$M = 120$ N·m

P5–79. $R_1 = R_2 = 162$ N
$V = 162$ N
$M = 42.2$ N·m

P5–81. $R_1 = 165.4$ N; $R_2 = 18.4$ N
$V = 165.4$ N
$M = 16.54$ N·m

P5–83. $R_1 = 4.35$ N; $R_2 = 131.35$ N
$V = 127$ N
$M = 6.35$ N·m

PROBLEMAS ADICIONALES DE PRÁCTICA

Fuerza cortante y momento flexionante mediante el método del diagrama de cuerpo libre

5–85. $V = -7.36$ kN; $M = 29.96$ kN·m

5–87. $V = 1000$ N; $M = -170$ N·m

5–89. $V = -1250$ N; $M = 2400$ N·m

5–91. $V = -4.20$ kN; $M = 8.20$ kN·m

Por lo que se refiere al formato de las respuestas de los problemas 5–93 a 5–109, consulte la nota antes del problema P5–1.

5–93. $R_1 = 1200$ lb; $R_2 = 1200$ lb
$V = 1200$ lb
$M = 54\,000$ lb·in

5–95. $R_1 = 11\,300$ lb; $R_2 = 1250$ lb
$V = 6750$ lb
$M = 202\,500$ lb·in

5–97. $R_1 = 66.25$ kN; $R_2 = 128.75$ kN
$V = 78.75$ kN
$M = 132.5$ kN·m

5–99. $R_1 = 3100$ lb; $R_2 = 3100$ lb
$V = 3100$ lb
$M = 141\,000$ lb·in

5–101. $R_1 = 495$ lb; $R_2 = 1405$ lb
$V = 805$ lb
$M = 2450.25$ lb·in

5–103. $R_1 = 27.0$ kN; $R_2 = 9.0$ kN
V = 15.0 kN
$M = 18.0$ kN·m

5–105. $R_1 = 6200$ N; $R_2 = 36\,800$ N
$V = 18\,800$ N
$M = 3150$ N·m

5–107. $R_1 = 920$ lb; $R_2 = 520$ lb
$V = 920$ lb
$M = 6720$ lb·in

5–109. $R = 350$ N
$V = 350$ N
$M = 122.5$ N·m

Problemas con los diagramas de fuerza cortante dados

Será necesario determinar los diagramas de carga y flexión.

5–111. Viga simple con tres cargas concentradas en B, C y D; Reacciones en A y E:
$R_A = 35$ kN, $R_E = 45$ kN; $F_B = 26$ kN,
$F_C = 30$ kN, $F_D = 24$ kN
$M_A = 0$ kN·m, $M_B = 52.5$ kN·m,
$M_C = 66.0$ kN·m (máx), $M_D = 45.0$ kN·m,
$M_E = 0$ kN·m

5–113. Viga en voladizo apoyada en A, con dos cargas concentradas en B y C:
$R_A = 80$ lb, $M_A = 500$ lb·ft SCMR;
$F_B = 60$ lb, $F_C = 20$ lb
$M_A = -500$ lb·ft, $M_B = -100$ lb·ft

5–115. Viga simple con una carga parcial uniformemente distribuida entre B a C; Reacciones en A y C:
$R_A = 4050$ lb, $R_C = 6750$ lb; Carga distribuida de B a C; $w = 1200$ lb/ft
$M_A = 0$ lb·ft, $M_B = 12\,150$ lb·ft,
$M_C = 0$ lb·ft,
$M_D = 18\,984.4$ lb·ft (máx en $x = 6.375$ ft de A)

Problemas con diagramas de momento flexionante dados

Será necesario determinar los diagramas de carga y fuerza cortante.

5–117. Viga simple con dos cargas concentradas en B y C; Reacciones en A y D:
$R_A = 100$ lb, $R_D = 150$ lb; $F_B = 75$ lb,
$F_C = 175$ lb
$V_{A\text{-}B} = 100$ lb, $V_{B\text{-}C} = 25$ lb,
$V_{C\text{-}D} = -150$ lb

5–119. Viga simple con dos cargas concentradas en A y C; Reacciones en B y D:
$R_B = 19.17$ kN, $R_D = 10.0$ kN,
$F_A = 6.67$ kN, $F_C = 22.5$ kN
$V_{A\text{-}B} = -6.67$ kN, $V_{B\text{-}C} = 19.17$ kN,
$V_{C\text{-}D} = -10.0$ kN

5–121. Viga simple con una carga uniformemente distribuida a todo lo largo; reacciones en A y B:
Carga uniformemente distribuida $= w = 900$ lb/ft;
$R_A = 5400$ lb, $R_B = 5400$ lb
$V_A = 5400$ lb, $V_B = -5400$ lb,
$V_C = 0$ lb a 6.0 ft de A es el punto ocurre el momento flexionante máximo.

Vigas continuas – teorema de los tres momentos

5–124. $R_A = R_E = 371$ lb en los extremos de la viga
$R_C = 858$ lb en el apoyo intermedio
$V_{máx} = 429$ lb de B a D entre las dos cargas de 800 lb
$M_{máx} = 1113$ lb·ft bajo cada carga

5–126. $R_A = 56.5$ kN, $R_C = 135$ kN en el apoyo intermedio
$R_D = 16.5$ kN en el extremo derecho
$V_{máx} = -87.5$ kN en C
$M_{máx} = 32.4$ kN·m con una carga de 80 kN

5–128. $R_A = 8.90$ kN, $R_C = 34.1$ kN en el apoyo intermedio
$R_D = 6.00$ kN en el extremo derecho
$V_{máx} = 18.0$ kN en C
$M_{máx} = 8.9$ kN·m en B con una carga de 25 kN

5–130. $R_A = 21.1$ kN, $R_C = 101.8$ kN en el apoyo intermedio
$R_E = 37.1$ kN
$V_{máx} = 62.9$ kN en C
$M_{máx} = 31.7$ kN·m en B bajo la carga de 60 kN

Capítulo 6

NOTA: Las respuestas siguientes se refieren a las figuras P6–1 a P6–39. El primer número es la distancia de la cara inferior de la sección al centroide a menos que se diga lo contrario. El segundo número es el momento de inercia con respecto al eje centroidal horizontal.

P6–1. 0.663 in; 0.3156 in^4
P6–3. 4.00 in; 184 in^4
P6–5. 35.0 mm; 2.66×10^5 mm^4
P6–7. 20.0 mm; 7.29×10^4 mm^4
P6–9. 20.0 mm; 1.35×10^5 mm^4
P6–11. 21.81 mm; 1.86×10^5 mm^4
P6–13. 23.33 mm; 1.41×10^5 mm^4
P6–15. 1.068 in; 0.3572 in^4
P6–17. 125 mm; 6.73×10^7 mm^4
P6–19. 0.9305 in; 1.2506 in^4
P6–21. 4.25 in; 151.4 in^4
P6–23. 2.25 in; 107.2 in^4
P6–25. 7.35 in; 831.5 in^4
P6–27. 7.40 in; 423.5 in^4
P6–29. 3.50 in; 89.26 in^4
P6–31. 3.00 en el centro de cualquiera de los tubos; 17.87 in^4
P6–33. 2.717 in; 46.76 in^4
P6–35. 2.609 in; 58.25 in^4
P6–37. 3.50 in; 16.95 in^4
P6–39. 3.361 in; 44.34 in^4
P6–41. 8.172 in; 357.5 in^4
P6–43. 8.20 in; 376.1 in^4
P6–45. 5.023 in; 100.2 in^4
P6–47. 14.641 mm; 41 647 mm^4

Radio de giro – eje horizontal

6–49. 3.04 in
6–51. 70.35 mm
6–53. 8.78 mm
6–55. 15.67 mm
6–57. 6.11 mm
6–59. 0.72 in
6–61. 68.78 mm
6–63. 2.33 in
6–65. 4.02 in

Radio de giro – eje vertical

6–67. 1.424 in
6–69. 34.91 mm
6–71. 0.212 in
6–73. 0.809 in
6–75. 8.483 in
6–77. 2.065 in
6–79. 1.783 in
6–81. 0.732 in

Versiones métricas de problemas previos

*Los números de figura se dan con un sufijo **M**.*
El primer número es la distancia de la cara inferior de la sección al centroide; el segundo número es el momento de inercia con respecto al eje centroidal.

P6–21M. 108 mm; 6.31×10^7 mm^4
P6–23M. 57.20 mm; 4.47×10^7 mm^4
P6–25M. 186 mm; 3.44×10^8 mm^4
P6–27M. 186.7 mm; 1.75×10^8 mm^4
P6–29M. 87 mm; 3.38×10^7 mm^4
P6–31M. a 75 mm del centro del cualquiera de los tubos; 7.11×10^6 mm^4
P6–33M. 68.07 mm; 1.84×10^7 mm^4

P6–35M. 85.39 mm; 2.36×10^7 mm^4

P6–37M. 889.25 mm; 7.08×10^6 mm^4

P6–39M. 85.16 mm; 1.83×10^7 mm^4

P6–41M. 207.3 mm; 1.49×10^8 mm^4

P6–43M. 207.9 mm; 1.56×10^8 mm^4

P6–45M. 127.5 mm; 4.18×10^7 mm^4

Capítulo 7

7–1. 94.4 MPa

7–3. **(a)** 20 620 lb/in^2
(b) 41 240 lb/in^2

7–5. 21 050 lb/in^2

7–7. $\sigma_t = 6882$ lb/in^2
$\sigma_c = 12\,970$ lb/in^2

7–9. 5794 lb/in^2 (39.9 MPa)

7–11. 13 963 lb/in^2

7–13. Se requiere $S = 2636$ mm^3; con $h/b = 3.0$;
$b = 12.1$ mm; $h = 36.3$ mm
Dimensiones convenientes tomadas del apéndice A–2:
$b = 12$ mm; $h = 40$ mm; $S = 3200$ mm^3;
$A = 480$ mm^2; $h/b = 3.33$
$b = 14$ mm; $h = 35$ mm; $S = 2858$ mm^3;
$A = 490$ mm^2; $h/b = 2.5$

7–15. Se requiere $s_u = 290$ MPa; material posible–6061–T6

7–17. Se requiere $S = 88.2$ in^3; W20 × 66 viga de acero

7–19. Se requiere $s_u = 10.6$ ksi; OK para 6061–T4

7–21. Se requiere $s_y = 284$ MPa; OK para 2014–T4

7–23. Se requiere $S = 1.35$ in^3; 3–tubo de acero cédula 40 de 3 in

7–24. Se requiere $S = 5.84$ in^3; 6 × 4 × ¼ o tubo de acero de 8 × 2 × ¼

7–25. Se requiere $S = 6.72$ in^3; viga de aluminio 6I × 4.030

7–26. Se requiere $S = 5.38$ in^3; viga de acero W8 × 10

7–27. Se requiere $S = 7.47$ in^3; ningún canal adecuado

7–28. Se requiere $S = 7.47$ in^3; tubo de acero cédula 40 de 6 in

7–31. Se requiere $S = 9.76$ in^3;
Se requiere $S = 1.60 \times 10^5$ mm^3; W250 × 17.9
Viga de acero W10 × 12

7–33. Se requiere $S = 16.6$ in^3; viga de acero W12 × 16

7–35. Se requiere $S = 1.89 \times 10^5$ mm^3; viga de acero W310 × 223.8

7–37. Se requiere $S = 7.47 \times 10^5$ mm^3; viga de acero W460 × 60

7–39. Se requiere $S = 14.5$ in^3; viga de acero W12 × 16

7–41. Se requiere $S = 6.37 \times 10^3$ mm^3; viga de acero W200 × 15

7–43. Se requiere $S = 16.6$ in^3; viga de acero S10 × 25.4

7–45. Se requiere $S = 1.89 \times 10^5$ mm^3; viga de acero S200 × 27.4

7–47. Se requiere $S = 7.47 \times 10^5$ mm^3; viga de acero S380 × 64

7–49. Se requiere $S = 14.5$ in^3; viga de acero S8 × 23

7–51. Se requiere $S = 6.37 \times 10^3$ mm^3; viga de acero S80 × 8.5

7–53. Se requiere $S = 13.85$ in^3; viga de acero W12 × 16

7–55. Se requiere $S = 1.58 \times 10^5$ mm^3; W250 × 17.9 Viga de acero

7–57. Se requiere $S = 6.23 \times 10^5$ mm^3; viga de acero W310 × 44.5

7–59. Se requiere $S = 12.12$ in^3; viga de acero W12 × 16

7–61. Se requiere $S = 5.31 \times 10^3$ mm^3; viga de acero W200 × 15

7–63. Se requiere $S = 18.8$ in^3; viga de madera 2 × 10

7–65. Viga de madera 2 × 8

7–68. Se requiere $S = 11.1$ in^3; 2 × 8 viga de madera

7–69. Se requiere $S = 25.0$ in^3; 2 × 12 viga de madera

7–70. Se requiere $S = 2.79$ in^3; 2 × 4 viga de madera

7–71. Se requiere $S = 12.5$ in^3; 2 × 8 viga de madera

7–75. Viga de madera 10 × 12; pino del sur núm. 2
Viga de madera W8 × 10 ; Acero ASTM A992

7–77. $\sigma_d = 4.3$ MPa
En A: $\sigma = 3.81$ MPa; OK
En B: $\sigma = 5.16$ MPa; inseguro
En C: $\sigma = 4.62$ MPa; inseguro

7–79. 4.86 N/mm

7–81. 1094 N

7–83. 676 lb

7–85. 102 lb

7–87. 6.77 lb/in

7–89. 3.80 ft del muro a la junta
el tubo de 4 in es seguro en el muro

7–91. 3398 MPa en C

7–93. En el fulcro, $\sigma = 8000$ lb/in^2
En el agujero inferior, $\sigma = 5067$ lb/in^2

En el siguiente agujero, $\sigma = 3800$ lb/in^2
En el siguiente agujero, $\sigma = 2534$ lb/in^2
En el siguiente agujero, $\sigma = 1267$ lb/in^2

7–94. En el fulcro, $\sigma = 8000$ lb/in^2
En el siguiente agujero, $\sigma = 10\,000$ lb/in^2
En el siguiente agujero, $\sigma = 7506$ lb/in^2
En el siguiente agujero, $\sigma = 5004$ lb/in^2
En el siguiente agujero, $\sigma = 2500$ lb/in^2

7–95. **(a)** Con el pivote en agujero del extremo, como se muestra.
En el fulcro, $\sigma = 8000$ lb/in^2
En el agujero inferior, $\sigma = 8064$ lb/in^2
Con el pivote en cualquier otro agujero, el esfuerzo máximo ocurre en el fulcro. Con el pivote en:
Agujero 2: $\sigma = 6800$ lb/in^2
Agujero 3: $\sigma = 5600$ lb/in^2
Agujero 4: $\sigma = 4400$ lb/in^2
Agujero 5: $\sigma = 3200$ lb/in^2

7–97. 109 MPa

7–98. 149 MPa

7–99. Se requiere $s_u = 1195$ MPa
AISI 4140 OQT 900 (otros posibles)

7–100. 2513 N

7–101. 1622 N

7–103. Imposible

7–105. Si. $d_{máx} = 37.2$ mm

7–106. 118 MPa en el primer escalón (L_3)

7–107. Se requiere $s_u = 946$ MPa
AISI 1141 OQT 900 (otros posibles)

7–109. $L_{1máx} = 206$ mm
$L_{2máx} = 83.4$ mm
$L_{3máx} = 24.7$ mm

7–111.

x (mm)	σ (MPa)
0	0
40	52.1
80	76.5
120	87.9
160	92.6
200	93.8
240	112.5

7–113. $h_1 = 22$ mm; $h_2 = 22$ mm

7–115. Se requiere $S = 16.36$ in^3
W12×16

7–117. Para viga compuesta, $w = 4.18$ K/ft
Para viga S sola; $w = 3.58$ K/ft

7–118. 11.5 mm

7–120. 0.805 in

7–122. 25.5 mm

7–124. A 46 mm del centro

7–126. $e = 12.9$ mm

7–127. 4.94 lb/in

7–129. 822 N

7–131. 625 N

7–133. 21.0 kN

7–134. 6.94 kN/m

7–135. 9.69 kN/m

7–136. 48.0 kN

7–137. 126 kN

7–139. $\sigma_d = 46.0$ MPa; $\sigma_{máx} = 68.4$ MPa; Inseguro

7–141. $\sigma_{máx} = 47.0$ MPa en el escalón a 50 mm a R_1

7–143. Se requiere $S = 66.7$ in^3; W18×40

7–145. Se requiere $S = 3.25$ in^3; $4 \times 4 \times \frac{1}{4}$ o $6 \times 2 \times \frac{1}{4}$
O: Se requiere $S = 5.33 \times 10^4$ mm^3;
HSS102×102×6.4 o HSS152×51×6.4

7–147. Se requiere $S = 7.45$ in^3; $8 \times 2 \times \frac{1}{4}$

7–148. Carga permisible = 3963 lb (Tensión)

7–150. Se requiere $S = 6.14$ in^3; W8×10;
Peso total = 83 lb

Capítulo 8

8–1. 1.125 MPa

8–3. 1724 lb/in^2

8–5. 3.05 MPa

8–7. 3180 lb/in^2

8–9. 1661 lb/in^2

8–11. 69.3 lb/in^2

8–13. 7.46 MPa

8–15. 2.79 MPa

8–17. 10.3 MPa

8–19. 2342 lb/in^2

8–21. 245 lb

8–23. 788 lb

8–25. 5098 lb

8–27. 661 lb

8–29. 787 lb

8–31. Sea y = distancia la cara inferior del perfil I

y (in)	τ (lb/in^2)
0.0	0.0
0.5	5.65
1.0(−)	10.54
1.0(+)	63.25
1.5	67.39
2.0	70.78
2.5	73.42
3.0	75.30
3.5	76.43
4.0	76.81

8–33. 8733 lb/in^2

8–35. Con la fórmula del cortante en el alma:
$\tau = 8017$ lb/in^2
Aproximadamente 8% menor comparado con $\tau_{máx}$ del problema 8-33

8–37. Sea y = distancia a la cara inferior del perfil I

y (in)	τ (lb/in^2)
0.0	0
0.175	155
0.35(−)	303
0.35(+)	6582
1.0	7073
2.0	7638
3.0	7976
4.0	8089

8–39. $\tau = 3788$ lb/in^2;
$\tau_d = 20000$ lb/in^2; OK
$\sigma = 21053$ lb/in^2;
$\sigma_d = 33000$ lb/in^2; Seguro

8–41. W18×40; $\tau = 7892$ lb/in^2;
$\tau_d = 20000$ lb/in^2; OK

8–43. Tubo cédula 40 de 1 ¼ in;
$\tau = 2404$ lb/in^2;
$\tau_d = 8000$ lb/in^2; OK

8–45. Viga 4 × 10

8–47. 1256 lb

8–49. 116.3 MPa

8–51. **(a)** $\tau = 1125$ psi
(b) $\sigma = 6750$ psi
(c) $s_y = 20\,250$ psi; cualquier acero

8–53. 35.4 mm; $\tau = 1.59$ MPa;
$N = 86.7$ para cortante

8–55. 24.5 mm; $\tau = 1.28$ MPa;
$\sigma_d = 120$ MPa

8–57. Se requiere $S = 0.45$ in^3; tubo cédula 40 de 2 in

8–59. $q = 736$ lb/in; $\tau = 526$ lb/in^2

8–61. 433 lb/ft basada en la resistencia de los remaches

8–63. 1722 lb basada en la flexión

8–65. Separación máxima = 4.36 in

8–67. Separación máxima = 3.94 in

Cortante en el alma

8–69. $\tau = 5185$ lb/in^2; $\tau_d = 20000$ lb/in^2; Seguro

8–71. $\tau = 2821$ lb/in^2; $\tau_d = 20000$ lb/in^2; Seguro

8–73. $\tau = 3599$ lb/in^2; $\tau_d = 20000$ lb/in^2; Seguro

Fórmulas para cortante especial y cortante general

8–75. $\tau = 66.2$ lb/in^2; $\tau_d = 70$ lb/in^2; Seguro

8–77. $\tau = 4623$ lb/in^2; $\tau_d = 11500$ lb/in^2; Seguro

8–79. $\tau = 209$ lb/in^2; $\tau_d = 10000$ lb/in^2; Seguro

Flujo de cortante

8–81. $q = 112$ lb/in; Separación = 2.41 in máximo

Capítulo 9

Método de la fórmula – vigas estáticamente determinadas

9–1. −2.01 mm

9–3. −0.503 mm

9–5. −5.40 mm

9–7. En las cargas: −0.251 in
En el centro: −0.385 in

9–9. −0.424 in

9–11. −0.271 in

9–13. +0.093 deflexión en $x = 69.2$ in

9–15. $D = 64.8$ mm

9–17. $t = 0.020$ in

Método de la fórmula – vigas estáticamente indeterminadas

Para los problemas 9–19 a 9–45 se reportan los siguientes valores:

Reacciones en todos los apoyos
Fuerzas cortantes en puntos críticos
Momentos flexionantes en puntos críticos
Deflexión máxima o deflexión en puntos seleccionados en la forma, $y = C_d/EI$

Cuando especifique el material, el perfil y las dimensiones de la viga puede calcular su rigidez, EI, y utilizarla para calcular la

deflexión. Las deflexiones estarán en la unidad de longitud dada cuando E e I están en las mismas unidades de fuerza y longitud dadas en las respuestas. Por ejemplo, en el problema 9–19, la longitud está en m la fuerza en N. Entonces la deflexión está en m cuando E está en N/m^2 e I está en m^4.

9–19. $R_A = V_A = 24063$ N, $R_C = -V_C = 10938$ N
$M_A = -26250$ N·m, $M_B = 21875$ N·m,
$M_C = 0$ N·m
$y_{máx} = (-20934)/EI$ a 1.79 m de C

9–21. $R_A = V_A = 18760$ N, $R_C = -V_C = 16235$ N
$M_A = -22560$ N·m, $M_B = 24353$ N·m,
$M_C = 0$ N·m
$Y_B = (-21629)/EI$ en la carga

9–23. $R_A = V_A = 500$ lb, $R_B = -V_B = 300$ lb
$M_A = -1600$ lb·in, M_E(máx) $= x = 10.0$ in,
900 lb·in en $M_B = 0$ lb·in
$y_{máx} = (-17712)/EI$ en $x = 9.264$ in

9–25. $R_A = V_A = 17500$ N, $R_C = -V_C = 17500$ N
$M_A = -17500$ N·m, $M_B = 17500$ N·m,
$M_C = -17500$ N·m
$y_{máx} = (-11667)/EI$ en$B$ en el centro

9–27. $R_A = V_A = 11074$ N, $R_C = -V_C = 23926$ N
$M_A = -12305$ N·m, $M_B = 15381$ N·m,
$M_C = -20508$ N·m
$y_{máx} = (-10127)E/EI$ en B en el centro

9–29. $R_A = V_A = 400$ lb, $R_B = -V_B = 400$ lb
$M_A = -1067$ lb·in, $M_B = 533$ lb·in,
$M_C = -1067$ lb·in
$y_{máx} = (-8533)/EI$ en el centro

9–31. $R_A = V_A = 150$ lb, $R_B = 500$ lb,
$R_C = -V_C = 150$ lb
$M_A = 0$ lb·in, $M_B = -400$ lb·in, $M_C = 0$ lb·in
$M_D = M_E = 225$ lb·in en $x = 3.00$ in de A y C
$y_{máx} = (-1107)/EI$ at $x = 3.372$ in de A o C

9–33. $R_A = R_D = 106.7$ lb, $R_B = R_C = 293.3$ lb
$V_A = -V_D = 106.7$ lb, $-V_B = V_C = 160$ lb
$M_A = M_D = 0$ lb·in, $M_B = M_C = -142.2$ lb·in,
$M_G = 35.6$ lb·in
$M_E = M_F = 113.8$ lb·in en $x = 2.13$ in de A y D

9–35. $R_A = R_E = 78.6$ lb, $R_B = R_D = 228.6$ lb,
$R_C = 185.6$ lb
$V_A = -V_E = 78.6$ lb, $-V_B = V_D = 121.4$ lb,
$V_C = 92.8$ lb
$M_A = M_E = 0$ lb·in, $M_B = M_D = -85.7$ lb·in,
$M_C = -57.1$ lb·in
$M_F = M_I = 61.8$ lb·in en $x = 1.56$ in de A y E
$M_G = M_H = 29.1$ lb·in a $x = 2.16$ in de B y D

9–37. $R_A = V_A = 22500$ N, $R_B = V_B = 13500$ N
$M_A = -8100$ N·m, $M_E = 4556$ N·m a 0.675 in de B
$y_{máx} = -1135/EI$ a 1.042 in de A

9–39. $R_A = V_A = -13750$ N, $R_B = 31750$ N
$V_B = -18000$ N
$M_A = 12600$ N·m, $M_B = -25200$ N·m, $M_C = 0$
$Y_C = -40719/EI$ en el extremo saliente del lado derecho

9–41. $R_A = R_C = V_A = -V_C = 25200$ lb,
$R_B = 8400$ lb
$V_B = 42000$ lb
$M_A = M_C = 0$, $M_B = -134400$ lb·ft
$M_D = M_E = 75587$ lb·ft en $x = 6.0$ ft de A o C
$y_{máx} = (-1.488 \times 10^6$ lb·ft$^3)/EI$ a 6.74 ft de A o C

9–43. $R_A = R_E = V_E = -V_E = 212$ lb,
$R_B = R_D = 617$ lb, $R_C = 501$ lb
$V_B = V_D = 328$ lb, $V_C = 251$ lb
$M_A = M_E = 0$, $M_C = -1388$ lb·in
$M_B = M_D = -2082$ lb·in
$M_F = M_I = 1501$ lb·in a 14.04 in de A o E
$M_G = M_H = 708$ lb·in a 19.44 in de B o D

9–45. $R_A = V_A = 224.6$ N, $R_C = -V_C = 25.4$ N
$M_A = -2.355$ N·m, $M_B = 1.014$ N·m, $M_C = 0$
$y_B = (-1.386 \times 10^{-4})/EI$ en la carga

Comparación de comportamiento de vigas

9–46. Comparación de cuatro diseños de viga para que soporten una carga uniformemente distribuida:

	$V_{máx}$	V/V_1	$M_{máx}$	M/M_1	$y_{máx}$	y/y_1
(a)	3600 N	1.0	3600 N·m	1.0	$-6000/EI$	1.0
(b)	7200 N	2.0	−14 400 N·m	4.0	$-57600/EI$	9.6
(c)	4500 N	1.25	−3600 N·m	1.0	$-2490/EI$	0.415
(d)	3600 N	1.0	−2400 N·m	0.67	$-1200/EI$	0.20

9–48. Comparación de los resultados de cinco problemas:

	$V_{máx}$	V/V_1	$M_{máx}$	M/M_1	$y_{máx}$	y/y_1
1. 9–23	500 lb	1.0	−1600 lb·in	1.0	$-17\,712/EI$	1.0
2. 9–29	400 lb	0.80	−1067 lb·in	0.667	$-8533/EI$	0.482
3. 9–31	250 lb	0.50	−400 lb·in	0.250	$-1107/EI$	0.0625
4. 9–33	160 lb	0.320	−142 lb·in	0.089	—	—
5. 9–35	121 lb	0.243	−85.7 lb·in	0.054	—	—

9–52. Comparación de los resultados de tres problemas:

	$V_{máx}$	V/V_1	$M_{máx}$	M/M_1	$y_{máx}$	y/y_1	A	A/A_1
1. 9–49	1440 lb	1.0	103 680 lb·in	1.0	$-896 \times 10^6/EI$	1.0	63.3 in^2	1.0
2. 9–50	900 lb	0.625	25 920 lb·in	0.25	$-372 \times 10^6/EI$	0.415	25.4 in^2	0.401
3. 9–51	576 lb	0.40	9 216 lb·in	0.089	—	—	13.87 in^2	0.172

Superposición – vigas estáticamente determinadas

9–53. $y_B = -1.291$ mm en la carga de 840 N
$y_C = -3.055$ mm en la carga de 600 N
$y_D = -1.353$ mm en la carga de 1200 N

9–56. $y_B = -0.0140$ in en la carga de 85 lb
$y_C = -0.0262$ in en la carga de 75 lb que actúa en el extremo

9–57. −0.869 mm

9–59. −3.997 mm

9–60. −0.0498 in

9–62. Canal de aluminio C5 × 2.212

Superposición – vigas estáticamente indeterminadas

9–64. $R_A = V_A = 22\,500$ N, $R_B = V_B = 13\,500$ N
$M_A = -8100$ N·m, $M_E = 4556$ N·m a 0.675 in de B
$y_{máx} = -1135/EI$ a 1.042 in de A

9–66. $R_A = R_E = 371$ lb en los extremos de la viga
$R_C = 858$ lb en el apoyo intermedio
$V_{máx} = 429$ lb de B a D entre las cargas de 800 lb
$M_{máx} = 1113$ lb·ft bajo carga

9–68. $R_A = 56.5$ kN, $R_C = 135$ kN en el apoyo intermedio
$R_D = 16.5$ kN en el extremo derecho
$V_{máx} = -87.5$ kN en C
$M_{máx} = 32.4$ kN·m en la carga de 80 kN

9–70. $R_A = 4009$ lb en el extremo fijo
$R_D = 1991$ lb en el apoyo derecho
$V_{máx} = 4009$ lb en A
$M_{máx} = -8490$ lb·ft en A

Problemas de diseño – límites de esfuerzo y deflexión

9–72. Comparación de los dos diseños que aparecen en la figura P9-72:
(a) $V = 2250$ N, $M = -4500$ N·m,
$y = -22\,500/EI$
(b) $V = 3375$ N, $M = -4500$ N·m,
$y = -20\,250/EI = 0.90\,y_a$

Escasa diferencia en el desempeño de los dos diseños.

9–74. $R_A = V_A = 32.75$ kN, $R_B = -V_B = 19.65$ kN
$M_A = -42.9$ kN·m, $M_E = 24.1$ kN·m

Método de integración sucesiva

9–76. $y = -0.0078$ in en $x = 8.56$ in

9–78. $y = -3.79$ mm

9–80. $D = 69.2$ mm

9–82. I178×8.630 viga de aluminio (I7×5.800)
$y = -5.37$ mm en $x = 1.01$ m

9–84. $D = 109$ mm

Método de área de momento

9–86. −0.0078 in

9–88. −3.79 mm

9–90. −3.445 mm

9–92. −5.13 mm

9–94. −0.01138 in

9–96. −0.257 in

9–98. −71.7 mm

Capítulo 10

10–1. $-10\ 510$ lb/in^2

10–3. $\sigma_N = 9480$ lb/in^2; $\sigma_M = -7530$ lb/in^2

10–5. $\sigma_N = 13\ 980$ lb/in^2; $\sigma_M = -15\ 931$ lb/in^2

10–7. -64.3 MPa

10–9. 415 N

10–11. $\sigma = 724$ MPa; se requiere $s_y = 1448$ MPa; AISI 4140 OQT 700

10–13. En B: $\sigma = 24\ 328$ lb/in^2 tensión en la cara superior de la viga
$\sigma = -18\ 785$ lb/in^2 compresión en la cara inferior de la viga

10–15. Carga = 9081 N; Masa = 926 kg

10–17. 26 mm

10–19. 18.7 mm

10–21. 71.6 MPa

10–23. 2548 lb/in^2

10–25. 7189 lb/in^2

10–27. 51.6 MPa

10–29. 982 MPa

10–31. $\tau = 9923$ lb/in^2, $s_y = 119$ ksi

10–33. 67.1 MPa

10–35. 7548 lb/in^2

10–37. 7149 lb/in^2

10–39. 61.5 MPa

10–41. (a) 3438 lb/in^2
(b) 3438 lb/in^2
(c) 344 lb/in^2
(d) 2300 lb/in^2
(e) 1186 lb/in^2

10–43.

	A la mitad de la viga	Cerca de los apoyos	a 1.5 in de A
(a)	1875 lb/in^{2}i	0 lb/in^{2}i	1406 lb/in^2
(b)	1875 lb/in^{2}i	0 lb/in^{2}i	1406 lb/in^2
(c)	0 lb/in^{2}i	375 lb/in^{2}i	188 lb/in^2
(d)	1250 lb/in^{2}i	208 lb/in^{2}i	943 lb/in^2
(e)	625 lb/in^{2}i	333 lb/in^{2}i	498 lb/in^2

10–45. 75.3 MPa

10–47. (a) $P = 40\ 667$ lb; $\tau_{máx} = 8333$ lb/in^2
(b) $\tau_{máx} = 8925$ lb/in^2; $N = 2.80$

PROBLEMAS ADICIONALES DE PRÁCTICA

10–49. $\sigma_{máx} = 397$ MPa tensión; $\sigma_{máx} = 709$ MPa compresión

10–51. $\sigma_{máx} = 821$ MPa tensión; $\sigma_{máx} = 458$ MPa compresión

10–55. En M: $\sigma_{máx} = 2.18$ MPa tensión
En N: $\sigma_{máx} = 3.54$ MPa compresión

NOTA: Las soluciones completas de los problemas 10–56 a 10–82 requieren que se construya el círculo de Mohr completo y trace el elemento sometido al esfuerzo principal y el elemento sometido al esfuerzo cortante máximo. A continuación se dan los resultados numéricos significativos.

Prob. núm.	σ_1	σ_2	ϕ (grados)	$\tau_{máx}$	σ_{prom}	ϕ' (grados)
10–56	315.4 MPa	−115.4 MPa	10.9 SMR*	215.4 MPa	100.0 MPa	34.1 SCMR**
10–58	110.0 MPa	−40.0 MPa	26.6 SMR*	75.0 MPa	35.0 MPa	18.4 SCMR**
10–60	23.5 ksi	−8.5 ksi	19.3 SCMR**	16.0 ksi	7.5 ksi	64.3 SCMR**
10–62	79.7 ksi	−9.7 ksi	31.7 SCMR**	44.7 ksi	35.0 ksi	76.7 SCMR**
10–64	677.6 kPa	−977.6 kPa	77.5 SCMR**	827.6 kPa	−150.0 kPa	57.5 SMR*
10–66	327.0 kPa	−1202.0 kPa	60.9 SCMR**	764.5 kPa	−437.5 kPa	74.1 SMR*
10–68	570.0 lb/in^2	−2070.0 lb/in^2	71.3 SMR*	1320.0 lb/in^2	−750.0 lb/in^2	26.3 SMR*
10–70	4180.0 lb/in^2	−5180.0 lb/in^2	71.6 SMR*	4680.0 lb/in^2	−500.0 lb/in^2	26.6 SMR*
10–72	360.2 MPa	−100.2 MPa	27.8 SCMR**	230.2 MPa	130.0 MPa	72.8 SCMR**
10–74	23.9 ksi	−1.9 ksi	15.9 SMR*	12.9 ksi	11.0 ksi	29.1 SCMR**
10–76	4.4 ksi	−32.4 ksi	20.3 SMR*	18.4 ksi	−14.0 ksi	24.7 SCMR**
10–78	321.0 MPa	−61.0 MPa	64.4 SCMR**	191.0 MPa	130.0 MPa	68.6 SMR*
10–80	225.0 MPa	−85.0 MPa	0.0	155.0 MPa	70.0 MPa	45.0 SCMR**
10–82	775.0 kPa	−145.0 kPa	0.0	460.0 kPa	315.0 kPa	45.0 SCMR**

En los problemas 10-84 a 10-94, el círculo de Mohr trazado con los datos dados da por resultado que los esfuerzos principales tengan el mismo signo. En esta clase de problemas, se traza al círculo suplementario siguiendo los procedimientos descritos en la sección 10-11 del texto. Los resultados incluyen tres esfuerzos principales donde $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Además, el esfuerzo cortante máximo se determina con el radio del círculo que contiene σ_1 y σ_3 y que es igual a $\frac{1}{2}\sigma_1$ o $\frac{1}{2}\sigma_3$ cualquiera que sea mayor. No se requieren los ángulos de rotación de los elementos resultantes.

Prob. Núm.	σ_1	σ_2	σ_3	$\tau_{máx}$
10–84	328.1 MPa	71.9 MPa	0.0 MPa	164.0 MPa
10–86	214.5 MPa	75.5 MPa	0.0 MPa	107.2 MPa
10–88	35.0 ksi	10.0 ksi	0.0 ksi	17.5 ksi
10–90	55.6 ksi	14.4 ksi	0.0 ksi	27.8 ksi
10–92	0.0 kPa	−307.9 kPa	−867.1 kPa	433.5 kPa
10–94	0.0 lb/in^2	−295.7 lb/in^2	−1804.3 lb/in^2	902.1 lb/in^2

En los problemas 10-96 a 10-104 se utilizan los círculos de Mohr de problemas previos para determinar la condición de esfuerzo en el elemento a un cierto ángulo de rotación especificado. Los resultados dados incluyen los dos esfuerzos normales y el esfuerzo cortante que actúan en el elemento especificado.

Prob. Núm.	σ_A	$\sigma_{A'}$	τ_A
10–96	130.7 MPa	69.3 MPa	213.2 MPa SMR*
10–98	−37.9 MPa	197.9 MPa	31.6 MPa SCMR**
10–100	3.6 ksi	−21.6 ksi	43.9 ksi SMR*
10–102	−2010.3 lb/in^2	510.3 lb/in^2	392.6 lb/in^2 SMR*
10–104	8363.5 lb/in^2	86.5 lb/in^2	1421.2 lb/in^2 SMR*

10–106. $\tau_{máx} = 230.2$ MPa

10–108. $\tau_{máx} = 12.9$ ksi

Rosetas de medición de deformación

La tabla siguiente da las respuestas de la partes (a) a (g) de los problemas 10–110 a 10–124

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
10–110.	1902×10^{-6}	6.0×10^{-6}	−28.2°	147 MPa	49.1 MPa	1897 rad	49.2 MPa
10–112.	816×10^{-6}	-717×10^{-6}	31.9°	138 MPa	−109 MPa	1534 rad	123 MPa
10–114.	1006×10^{-6}	-294×10^{-6}	36.6°	17.3 ksi	0.731 ksi	1299 rad	8.30 ksi
10–116.	816×10^{-6}	-717×10^{-6}	31.9°	16.1 ksi	−12.9 ksi	1534 rad	14.5 ksi
10–118.	1494×10^{-6}	-112×10^{-6}	−5.4°	113 MPa	29.5 MPa	1607 rad	41.7 MPa
10–120.	882×10^{-6}	-324×10^{-6}	39.7°	178 MPa	−15.5 MPa	1206 rad	96.8 MPa
10–122.	616×10^{-6}	-319×10^{-6}	−43.8°	9.75 ksi	2.20 ksi	935 rad	5.98 ksi
10–124.	882×10^{-6}	-324×10^{-6}	39.7°	20.6 ksi	−2.24 ksi	1206 rad	11.4 ksi

Capítulo 11

11–1. 25.1 kN

11–3. 8.35 kN

11–5. 26.2 kN

11–7. 111 kN

11–9. P_a = 7318 lb/columna; use 9 columnas

11–11. 499 kN

11–13. 65 300 lb

11–15. Fuerza axial = 31.1 kN; carga crítica = 256.7 kN; N = 8.25 OK

11–17. 15.1 kN

11–19. Carga crítica = 10 914 lb; carga real = 5000 lb; N = 2.18; bajo

11–21. Carga crítica = 2849 lb; carga real = 1500 lb; N = 1.90; bajo

11–23. 2.68 in

11–25. Se requiere I = 5.02 in^4; I7×5.800

11–27. 5649 lb

11–29. 245 kN

11–31. Ninguna mejora

PROBLEMAS ADICIONALES DE PRÁCTICA

11–33. 9420 lb

11–35. 6219 lb

11–37. N = 2.27

11–39. Problema de diseño. Ejemplo de solución
Miembros a compresión: Acero estructural ASTM A36
Barra redonda; 1/16 in más cercano
AC = 1925 lb; 40 de longitud; barra redonda de 15/16 in; P_{todas} = 2253 lb
CD = 750 lb: 25 in de longitud; barra redonda de 9/16 in; P_{todas} = 750 lb
DE = 650 lb; 40 in de longitud; barra redonda de 7/16 in; P_{todas} = 654 lb

11–41. Problema de diseño. Ejemplo de solución.
Miembros a compresión: Aluminio 6061-T6
Barra cuadrada: se prefiere el tamaño en mm más cercano (apéndice 2)
DE = 2300 N; 250 mm de longitud; 9.0 mm por lado; P_{todas} = 2383 N
BD = 2597 N; 297 mm de longitud; 11.0 mm por lado; P_{todas} = 3767 N
EF = 2300 N; 200 mm de longitud; 8.0 mm por lado; P_{todas} = 2324 N
CF = 800 N; 160 mm de longitud; 6.0 mm por lado; P_{todas} = 1149 N
FG = 550 N; 150 mm de longitud; 5.0 mm por lado; P_{todas} = 630 N

11–43. Problema de diseño. Ejemplo de solución.
Tubo de acero más ligero.
Fuerza de compresión = 33 588 lb
Tubo de acero HSS 4×4×$\frac{1}{4}$; ASTM A501
Acero estructural ASTM A501;
P_{todas} = 42 441 lb.

11–45. P_a = 20.64 kN con N = 3

11–47. P_a = 8143 lb con N = 3

11–49. N = 1.068—Bajo

11–51. $\sigma_{máx}$ = 211 MPa (Inseguro), $y_{máx}$ = 25.8 mm (Alto)

11–53. No seguro. Se requiere s_y = 103 ksi con N = 3.

11–55. No seguro. Se requiere s_y = 104 ksi con N = 3.

11–57. F_a = 675 lb con carga excéntrica en el plano del dibujo
F_a = 164 lb con pandeo con respecto al espesor angosto

11–59. **(a)** P_a = 2610 lb para tubo recto
(b) P_a = 1676 lb para tubo combado

Capítulo 12

12–1. 115 MPa

12–3. 4.70 mm mínimo

12–5. 2134 lb/in^2

12–7. 1.80 mm

12–9. N = 3.80

12–11. σ_2 = 212 MPa; σ_3 = −70.0 MPa

12–13.

Radio (mm)	σ_2 (MPa)
110	166 superficie interna
120	149
130	136
140	125
150	116 superficie externa

12–15. 14.88 MPa

12–17.

Radio (mm)	σ_3 (MPa)
15	−7.00 superficie interna
17	−4.58
19	−2.88
21	−1.64
23	−0.71
25	0.00 superficie externa

12–19. 86.8 MPa

12–21.

Radio (mm)	σ_3 (MPa)
210	−100.0 superficie interna
215	−83.3
220	−68.0
225	−54.1
230	−41.4
235	−29.7
240	−19.0
245	−9.1
250	0.00 superficie externa

12–23.

Radio (mm)	σ_2 (MPa)
162.5	22.35 superficie interna
170	20.99
177.5	19.84
185	18.88
192.5	18.06
200	17.35 superficie externa

12–25. Los tamaños de ¼ a 4 son de pared gruesa. Los tamaños de 5 a 18 son de pared delgada.

Capítulo 13

13–1. (a) F_s = 1400 lb (Límite); F_b = 13 050 lb; F_t = 20 250 lb
(c) F_s = 2160 lb (Límite); F_b = 9788 lb; F_t = 21 263 lb

13–2. (a) F_s = 3800 lb (Límite); F_b = 40 500 lb; F_t = 87 000 lb
(c) F_s = 7600 lb (Límite); F_b = 40 500 lb; F_t = 87 000 lb

13–3. (a) F_s = 1178 lb (Límite); F_b = 15 750 lb; F_t = 26 708 lb
(c) F_s = 1325 lb (Límite); F_b = 11 813 lb; F_t = 28 114 lb

13–4. (a) F_s = 3313 lb (Límite); F_b = 49 500 lb; F_t = 112 485 lb
(c) F_s = 6627 lb (Límite); F_b = 49 500 lb; F_t = 104 970 lb

13–5. Tornillos de ¾ in

13–7. 23 860 lb en las soldaduras

NOTA: Los problemas 13–9 a 13–11 son problemas de diseño para los cuales no hay respuestas únicas.

Índice

A

Aceleración de la gravedad, 17
Acero, 71, 714, 715, 717
  a prueba de desgaste por agentes atmosféricos, 76
  al carbón y de aleación, propiedades, 714
  coeficiente de expansión térmica, 134
  condiciones para, 72
  de aleación, 71, 714
  endurecimiento por precipitación, 75
  estirado en frío, 73
  estructural, 75, 717
  inoxidable, 75, 715
  coeficiente de expansión térmica, 134
  laminado
    en caliente, 73
    en frío, 73
  normalización, 74
  recocido, 74
    por distensión, 75
  secciones de columna comercialmente disponibles, 620–621
  sistema de designación, 71
  temple por inmersión, 73
Alargamiento, 61
Aleaciones basadas en níquel, 81, 716
Aleaciones de aluminio, 78, 718
  colado, 79, 718
  coeficiente de expansión térmica, 69, 134
  esfuerzo de apoyo de diseño, 151, 155
  series, 78
  sistema de designación, 78
  temples, 79
Aluminum Association, 38, 70, 116, 123, 706–709, 721, 723
American Institute of Steel Construction (Instituto Americano de la Construcción de Acero), 116, 123, 368, 721, 725
American Iron and Steel Institute (Instituto Americano del Hierro y el Acero), 70
American National Standards Institute (Instituto Nacional Americano de Normas), 117
American Society for Testing and Materials (Sociedad Americana de Pruebas y Materiales, 72
American Society of Mechanical Engineers (Sociedad Americana de Ingenieros Mecánicos), 116, 660
Análisis
  de elemento finito, 42
  de esfuerzo experimental, 38, 144, 376, 579
  de esfuerzo fotoelástico, 39, 144, 360, 376
Ángulos
  de acero estructural, 34, 696, 697
  de torsión, 216
Anillos de retención, 209
Áreas, propiedades de, 690, 691
Armaduras, análisis de, 752–754
Austemplado, 77

B

Bronce, 80, 715
  coeficiente de expansión térmica, 134

C

Canales y vigas I estándar de la Aluminum Association, 38, 706–709
Canales,
  acero estructural, 34, 698, 699
  aluminio, 38, 706, 707
Cargas
  concentradas, 247
  distribuidas, 247, 248, 270, 279
    variables, 249, 270, 279
Centro
  de cortante, 382
  de flexión, 382
  de gravedad, 317
  de masa, 317
Centroide de un área, 317

Chavetas, 28
Cilindros
de pared delgada, 642
de pared gruesa, 647
Círculo de Mohr para esfuerzo, 557–579
ejemplos, 561–571
procedimiento para trazarlo, 559
Cobre, 80, 715
al berilio, 80
coeficiente de expansión térmica, 134
Códigos y estándares, 116
Coeficiente de expansión térmica, 69, 133, 134, 135
Columnas, 600-630
carga de pandeo crítica, 611
carga permisible, 614
coeficiente de expansión térmica, 135
combadas, 624
especificaciones de la Aluminum Association, 623
especificaciones del AISC, 621
excéntricas, 627
fórmula de Euler, 611
fórmula de J. B. Johnson, 611
hoja de cálculo para análisis, 618, 626, 629
lateralmente arriostradas, 613
método de análisis, 614
no centralmente cargadas, 624
perfiles eficientes para, 620
Compuestos, 88–102
construcción laminada, 97
fracción de volumen, 100
limitaciones, 94
materiales de matriz, 91
materiales de relleno, 92
módulo de elasticidad, 93, 102
módulo específico, 93
predicción de las propiedades, 99
preimpregnados, 98
procesamiento, 98
recipientes de presión, 662
regla de las mezclas, 101
resistencia específica, 93
rigidez específica, 93
ventajas de los, 93
Concreto, 83
coeficiente de expansión térmica, 134
Condición de esfuerzo en planos seleccionados, 551, 572
Conexiones, 668–683
atornilladas, 672
excéntricamente cargadas, 677
esfuerzos permisibles, 672, 676, 682
modos de falla, 671
remachadas, 675
soldada, 680
tipos, 669
Constante de columna, 609
Construcción compuesta laminada, 97
Copper Development Association (Asociación para el Desarrollo del Cobre), 70
fluencia, 68
Cortante
doble, 26
simple, 26
Cuñeros, 211
Curva de esfuerzo-deformación, 57

D

Deflexión de vigas, 452–514
definición de términos, 460
fórmulas de, 734–742
método de integración sucesiva, 484–495
método de la fórmula, 463
método del área de momento, 495–514
asimétricamente cargadas, 508
cargas distribuidas, 512
teoremas, 498, 499
viga en voladizo, 499, 512
vigas de sección transversal variable, 505
vigas simplemente apoyadas, 502
necesidad de, 458
radio de curvatura, 461
superposición, 475
Deformación, 6, 127
axial, 127
definición, 24
normal, 128
por cortante, 63, 216
térmica, 133
torsional, 215, 216, 226
unitaria, 24
Densidad, 18, 69
Departamento de Defensa, 117
Desviación, 58
Diagramas
de cuerpo libre, partes de vigas, 259, 270, 281
de fuerza cortante, 258, 263, 273
con cargas distribuidas, 270
instrucciones para trazarlo, 263, 273, 278
de momento de flexión, regla del área, 261, 263
reglas para trazarlos, 263
de vigas, análisis matemático, 285–295
Diámetro medio de recipientes de presión, 640
Diseño
para esfuerzos directos, 115
por esfuerzo permisible (ASD, *Allowable Stress Design*), 124
por factor de carga y resistencia, 124, 368
Ductibilidad, 60
Dureza, 64

E

Eje centroidal, 318, 325
Electrodos de soldar, 682
Elemento
  sometido a esfuerzo cortante, 30
  sometido a esfuerzo normal, 23
    esfuerzo cortante, 30
    general, 530
Energía de impacto, 66
English Gravitational Unit System (*Sistema Gravitacional Inglés de Unidades*), 15
Esferas
  de pared gruesa, 647
  de pared delgada, 642
Esfuerzo(s)
  aparente, 56
    anular, recipientes de presión, 645
    cortante, directo, 24
    de apoyo, 147
    de compresión, 20
    de contacto, 150
    de tensión, 20
    definición, 19
    diseño para flexión, 367, 368
    longitudinal, recipiente de presión, 644
    normal, 20
    térmico, 137
    unidades, 20
  combinados, normales, 525–586, 538–545
    normal y cortante, 546–551
  cortante directo, 24, 157
  cortante en vigas, 413–442
    de alma delgada, 436
    desarrollo de, 431
    diseño, 437
    distribución de, 424
    estructuras de revestimiento sometidas a esfuerzo, 418
    fórmula general de cortante, 418
    fórmulas especiales de cortante, 433–437
    importancia, 417
    madera, 417
    momento estático, 419
    perfiles circulares, 435
    perfiles rectangulares, 420, 425, 434
    perfiles tubulares huecos de pared delgada, 436
    primer momento del área, 419
    visualización, 414, 417
  cortante máximo, 556
  cortante torsional, 194–215
    concentraciones de esfuerzo, 208
    diseño, 201
    fórmula, 195
    fórmula, derivación, 197
    secciones circulares, 194
    secciones no circulares, 226
  de apoyo, 147
  de compresión, 20
  de contacto, 150
  de diseño, 115, 119, 122, 157, 201, 367, 437, 721
    cortante torsional, 201
    cortante, 157, 201, 437, 721
    flexión, 367, 368, 721
    métodos de cálculo, 122
    normal, 116
    recipientes de presión, 649
  de tensión, 20, 137
  de trabajo, 115
  normal, 20
    directo, 20–23
  permisible, 116
  permisibles en conexiones, 672, 676, 682
    combinados, normal y cortante, 546–551
    combinados, normales, 538–545
    principales, 555
    térmico, 137
Estabilidad, 6, 360, 600, 611
Estándares militares, 117
Estática, repaso de, 744–754
Expansión térmica, 133

F

Factores
  de concentración de esfuerzo, gráficas, 724–733
    a esfuerzo combinado, 548
    en vigas, 376
    esfuerzos normales, 143, 145
    torsión, 208
  de conversión, 743
  de diseño, 115–118, 202
    cargas en columnas, 614
    esfuerzos de tensión directa, 115
    cortante torsional, 202
    instrucciones, 118, 119
  de fijación de los extremos, 605
  de resistencia, 124
  de seguridad, 116, 202, 721
Falla de remaches por cortante, 440, 676
Flechas
  con rebajos, 227
  sólidas y huecas, comparación de, 205
Flujo de cortante, 439
Fórmula
  de deflexión, vigas, 734–742
  de Euler para columnas, 611
  de J. B. Johnson para columnas, 611
  de la flexión, 356
    condiciones de uso, 359
    derivación, 362
  especiales de cortante, 433–437

general de cortante, 418
desarrollo de la, 431
instrucciones de uso de la, 423
Fracción de volumen, 100
Fractura, 5
Fuerza, 16
cortante, definición, 258
en vigas, 240, 258, 263, 270
en vigas en voladizo, 277

H

Hierro
austemplado, 77, 718
blanco, 78
dúctil, 77, 718
fundido o colado, 77, 718
coeficiente de expansión térmica, 134
gris, 77, 718
maleable, 78, 718
propiedades, 718
maleable, 78, 718

I

Instrucciones, esfuerzo de diseño, 118, 119, 721

J

J, Momento polar de inercia, 195, 198, 200, 227
Juntas
de pasador, esfuerzo de apoyo en, 148
soldadas, 680–683

L

Latón, 80, 715
Ley
de Hooke, 59
de Newton de la gravitación, 16
Límites
de deflexión, 459
elástico, 57
proporcional, 57
Longitud
efectiva, 605
de columnas, 605
de calibración, 61

M

Madera, 82
propiedades, 719
Magnesio, 81, 715
Mampostería, esfuerzo de apoyo de diseño, 155
Margen de seguridad, 116
Masa, 16
Materiales
anisotrópicos, 82, 95, 97, 388
compuestos, 88–102
compuestos, para vigas, 389
concreto, 83
madera, 82
plástico, 86
de relleno para compuestos, 92
dúctil, 61
frágil, 61
para matriz de compuestos, 91
Medición de deformación, 39
Metales, 70–82
curva de esfuerzo-deformación, 57
dúctiles, 61
frágiles, 61
límite proporcional, 57
punto de cedencia, 57
resistencia, 57
rigidez, 58
Metrificación de perfiles estructurales, 33
Miembros
estáticamente indeterminados, axiales, 140
hechos de más de un material, 140
Modos de falla, 5
Módulo
de elasticidad, 59, 85
de elasticidad a cortante, 63, 218
de flexión, 63
de sección, 340, 369
polar, 202
torsional, 202
específico, 93
Momento
de inercia
de perfiles compuestos, 325, 327, 335
de perfiles con partes rectangulares, 335
de perfiles estructurales, 331
de un área, 322
definición, 323, 330
procedimiento general para calcular, 327
teorema del eje paralelo, 328
Momentos
concentrados, 250, 281–285
estático, 419
flexionante en vigas, 259, 270
polar de inercia, 195, 198, 200, 227

N

Newton, la unidad de fuerza, 17

No metales en el diseño, 82–102
Normalización, 74

O

Operación de punzonado, 25

P

Pandeo, columnas, 6, 600–630
Par de torsión, 190
  equivalente, 548
Patrones de carga en vigas, 247
Perfiles
  de patín ancho (perfiles W), 31, 700, 701
  estructurales 32, 34, 695–709
    designaciones, 32
    estándar, 32, 696–709
    huecos (HSS), 36, 704, 705
    metrificación, 33
  para vigas de madera, 31, 695
  S, acero estructural, 31, 702, 703
Perno de seguridad, 158
Peso, 16
  específico, 18
Plástico
Plásticos, 86, 720
  coeficiente de expansión térmica, 134
  selección, 87
  termofijos, 87
  termoplástico, 86
Porcentaje de alargamiento, 61
Potencia, 190, 192
Principales de St. Venant, 360, 361
Probador de caída de libre de una pesa, 68
Prueba
  de Charpy, 66
  IZOD, 66
Punto de cedencia o límite elástico, 57

R

Radio de giro, 336, 607
Ranura para anillo a tensión, 145
Reacciones en apoyos de vigas, 254
Recipientes de presión, 637–662
  cilindros, de pared delgada, 644
  compuestos, 662
  consideraciones de diseño, 659
  diámetro medio, 640
  esferas, de pared delgada, 642
  esfuerzo anular, 645
  esfuerzo longitudinal, 644
  esfuerzos cortantes en, 656
  espesor de pared, delgado/grueso, 640
  hoja de cálculo para análisis, 655
  pared delgada, 642
  pared gruesa, 647
  procedimiento de diseño, 649
Recocido, 74
  de distensión, 74
Regla de las mezclas, 100
Relación
  de esbeltez, 604
    transición, 609
  de masa, fuerza y peso, 16
  de Poisson, 61
Remaches, 675
Resistencia
  a la fatiga, 68
  a la flexión, 63
  específica, 93
  máxima
    a cortante, 158, 159
    a la cedencia, 55
    a la tensión, 56
    a tensión, 56
Rigidez, 58
  específica, 93
  torsional, 215, 226
    recomendada, 216
  viga, 462
Rodillos, cojinetes de, 151
Roscas de tornillos, 30, 693, 694
Roseta de medición de deformación, 579

S

Secciones no circulares, torsión, 226
  mesa, 227
Selección de materiales, 103
Separación de sujetadores, flujo de cortante, 440
Sistema
  de numeración unificado, 70
  de unidades inglés, 15
  de unidades métricas SI, 15
  de unidades, 15
Slug, la unidad de masa, 17
Sociedad de Ingenieros Automotrices, 70
Soldaduras, tipos de, 681
Suelos, esfuerzo de apoyo de diseño, 156
Superposición para vigas estáticamente indeterminadas, 479

T

Tamaños básicos preferidos, 30, 692
Temple, 73, 79
  por inmersión, 73
Tenacidad, 66
Teorema de los tres momentos, 296–300

Teoría de falla por esfuerzo cortante máximo, 571
Tipos
de apoyos de vigas, 246, 251, 469
de vigas, 252, 296, 454, 467
Titanio, 81, 716
coeficiente de expansión térmica, 134
Torcimiento, 215
Tratamiento térmico, 73
Tubería
estructural, 37, 704, 705
mecánica, 37, 712, 713
Tubo, acero, 36, 710, 711

U

Unidades, esfuerzo, 20
Velocidad de rotación, 192
Vidrio, coeficiente de expansión térmica, 69, 134
Vigas
American Standard (perfiles S), 31, 702, 703
análisis de, 364
comparación de tipos de apoyo, 246
compuesta, 252
concentraciones de esfuerzo, 376, 724–733
continuas, 253, 296
continuas, 253, 296, 454, 467
de extremo fijo o empotrado, 252
definición, 240, 246
deflexión (*consulte* Deflexión de vigas)
distribución del esfuerzo, 361
ejemplos de diseño, 371–376
en voladizo, 252, 464, 666
estáticamente indeterminadas, 253, 296, 301, 467, 479
estáticamente indeterminadas, continuas, 253, 296, 483, 738–742
estáticamente indeterminadas, superposición, 483
fórmula de flexión, 356, 362
hechas de materiales anisotrópicos, 388
hechas de materiales compuestos, 389
hechas de materiales delgados, 387
I, 35, 700, 701, 708, 709
aluminio, 38, 644, 708, 709
modos de falla, 354
perfiles preferidos, 385
procedimientos de diseño, 367, 370
reacciones, 254
simple, 252
simplemente apoyadas, fórmulas para, 734–736

Z

Zinc, 80, 715

Quinta edición

Resistencia de Materiales

Robert L. Mott

Esta quinta edición de *Resistencia de Materiales* ofrece un texto versátil que proporciona a los lectores una base sólida de los principios de mecánica de materiales. Asimismo, presenta formas actuales y flexibles de aplicar los principios de ingeniería con el apoyo de un software especialmente preparado.

Entre las novedades de esta edición se encuentran las siguientes:

- Ilustraciones más realistas, que constituyen un mejor auxiliar visual para el aprendizaje.
- Un apéndice ampliado y actualizado, con más datos métricos de secciones de viga comercialmente disponibles, así como datos adicionales de tubería mecánica y plásticos, aleaciones de níquel, titanio y aceros estructurales. La facilidad de lectura de las tablas de deflexión de vigas también se mejoró de forma notable.
- Actividades al principio de cada capítulo, que permiten a instructores y estudiantes adquirir experiencia práctica en relación con los fenómenos analizados. Esta nueva característica complementa la sección "La imagen completa".
- Un CD-ROM con dos programas diseñados por expertos, que ayuda a los estudiantes a repasar conceptos importantes y fundamentales:
    - *Strength of Materials Lessons.* Módulos animados con atractivos gráficos de colores e imágenes dinámicas que guían a los estudiantes en el repaso de temas complejos y su aplicación a problemas típicos. Incluye los resultados de modelos de análisis de elemento finito.
    - *Beam Calculator.* Un programa que permite analizar aplicaciones de carga de vigas en problemas típicos, sin necesidad de equipo de laboratorio extenso, y hace que los estudiantes exploren condiciones de carga y apoyo más complejas para diseños alternativos.

Para mayor información visite el sitio Web de este libro en:
www.pearsoneducacion.net/mott

ISBN: 978-607-442-047-0

PEARSON Educación ®

Visítenos en:
www.pearsoneducacion.net